

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XVIII

Выпуск 2 (62)

Тула

2017

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»:
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125,
каб. 310

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.

Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант 15-01-01540а.

Журнал выходит под эгидой Министерства образования и науки Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственный секретарь

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),
А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)
В. Н. Безверхний (Россия, г. Тула)
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
М. М. Глухов (Россия, г. Москва)
Е. С. Голод (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
А. Р. Есаян (Россия, г. Тула)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Латышев (Россия, г. Москва)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 18 Выпуск 2

Поздравление З. Х. Рахмонову	5
Д. Ю. Артемов О кольцевых структурах на множестве целых чисел	6
И. М. Буркин Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконечным числом состояний равновесия	18
Д. В. Горбачев, В. И. Иванов Некоторые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля	34
Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский, Е. А. Матвеева О дробно-линейных преобразованиях форм А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина	54
Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей	98
А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский Преобразования объектов в GeoGebra	129
Л. А. Игнаточкина Индуцированные преобразования почти эрмитовой структуры линейного расширения	144
А. Н. Лата О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором	154
А. В. Никифорова Инварианты обобщенных f -преобразований почти контактных метрических структур	173
И. А. Петров Строение почти эрмитовых структур тотального пространства главного T^1 -расслоения с плоской связностью над некоторыми классами почти контактных метрических многообразий	183
С. А. Пихтильков , О. А. Пихтилькова, А. А. Горелик, Л. Б. Усова О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли и локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли	195
А. Ю. Попов Двусторонние оценки гамма-функции на действительной полуоси	205
Е. В. Ларкин, Д. В. Горбачев, А. Н. Привалов О приближении потока событий к пуассоновскому	222
А. В. Царев E -кольца малых рангов	235
А. В. Чередникова О кольцах квазиэндоморфизмов некоторых сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4	245
Д. С. Чистяков Однородные отображения смешанных модулей	256
Ю. Н. Штейников Суммы характеров на сдвинутых степенях	267

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. Г. Чирский Периодические и непериодические конечные последовательности 275

ЮБИЛЕИ

В. Н. Безверхний, А. Е. Устьян, И. В. Добрынина 70-летие профессора Валерия Георгиевича Дурнева 279

В. А. Артамонов, И. Б. Кожухов, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский 80-летие профессора Владимира Константиновича Карташова 298

В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский О математических исследованиях В. Н. Кузнецова (к 70-летию со дня рождения) 305

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

А. В. Шутов, В. Г. Журавлев, А. С. Балджы, М. Б. Хрипунова Борис Вениаминович Левин. К 90-летию со дня рождения 315

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 331

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS 334

РЕДКОЛЛЕГИЯ 337

THE EDITORIAL BOARD 340

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ 343

TABLE OF CONTENTS 351

Редакция Чебышевского сборника поздравляет своего коллегу — доктора физико-математических наук Зарулло Хусеновича Рахмонова с избранием действительным членом Академии наук Таджикистана.



Рис. 1: З. Х. Рахмонов

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 512.536.2

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-6-17

О КОЛЬЦЕВЫХ СТРУКТУРАХ
НА МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Д. Ю. Артемов (г. Москва)

Аннотация

Хорошо известно, что кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является E -кольцом, следовательно, на аддитивной группе $\mathbb{Z}$ можно задать единственную (с точностью до изоморфизма) структуру кольца с единицей. Возникает естественный вопрос о единственности структуры кольца с единицей на мультипликативном моноиде $\mathbb{Z}$. В работе показано, что данный вопрос решается отрицательно. Более того, построен и описан метод, позволяющий получать различные кольцевые структуры на мультипликативном моноиде $\mathbb{Z}$ с помощью мультипликативных автоморфизмов. Для мультипликативного моноида $\mathbb{Z}$ введено понятие базиса и доказано, что с точностью до знака не существует базисов, отличных от базиса, состоящего из всех простых чисел, и базисов, получающихся из него путём перестановки элементов. В конце работы приводится пример задания нового кольца на множестве $\mathbb{Z}$ при фиксированном стандартном умножении. Новое сложение на мультипликативном моноиде $\mathbb{Z}$ получается с помощью перестановки простых чисел (в подробно разобранный примере — это перестановка $2 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 2$). Из полученных в статье результатов, в частности, следует, что кольцо $\mathbb{Z}$ не является кольцом с однозначным сложением (UA-кольцом).

Ключевые слова: кольцо целых чисел, E -кольцо, аддитивная группа, кольцо с однозначным сложением, мультипликативная полугруппа кольца, моноид.

Библиография: 15 названий.

ABOUT RING STRUCTURES
ON THE SET OF INTEGERS

D. Yu. Artemov (Moscow)

Abstract

It is well known that the ring of integers $\mathbb{Z}$ is an E -ring, therefore it is possible to define unique (up to isomorphism) structure of a ring with identity on the additive group $\mathbb{Z}$. A natural question arises about the uniqueness of the ring structure with identity constructed on a multiplicative monoid $\mathbb{Z}$. It is shown in this paper that this question is solved negatively. Moreover, a method of construction new various ring structures on the multiplicative monoid $\mathbb{Z}$ by dint of multiplicative automorphisms was developed and described. The concept of basis was introduced for the multiplicative monoid $\mathbb{Z}$, and it was shown that there are no bases (up to sign) that are differ to a basis consists of all prime numbers, and bases that are obtain of that basis by a permutations of its elements. The example of construction a new ring structure on the set $\mathbb{Z}$ for fixed standart multiplication is given in the end of this paper. The new addition on the multiplicative monoid $\mathbb{Z}$ is obtained by a permutation of prime numbers (it is $2 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 2$ permutation in the detailed example). From the results obtained in the paper it follows in particular, that the ring $\mathbb{Z}$ is not an unique addition ring (UA-ring).

Keywords: ring of integers, E -ring, additive group, unique addition ring, multiplicative semigroup of a ring, monoid.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Цель данной работы заключается в построении различных кольцевых структур на множестве $\mathbb{Z}$. Все основные понятия и обозначения стандартны и соответствуют [1], [2] и [3]. Под *кольцом* здесь понимается абелева группа, на которой задана вторая бинарная операция, дистрибутивная слева и справа относительно первой.

Напомним, что ассоциативное кольцо R называется E -кольцом, если R коммутативно и $\text{End } R^+ \cong R$. E -кольца были определены Ф. Шульцем в 70-х годах XX века [4], [5], [6]. Этим кольцам посвящено большое количество работ. Во всех книгах по теории абелевых групп, вышедших после 1973 года, имеются разделы, посвященные E -кольцам (см., например [7, глава 4]). Эти кольца интересны нам тем, что на их аддитивных группах возможно задать единственное (с точностью до изоморфизма) ассоциативное кольцо с единицей. В примере 1 без использования теории E -колец показано, что на аддитивной группе кольца $\mathbb{Z}$ возможна единственная структура кольца с единицей.

Рассмотрим произвольную абелеву группу A , записанную аддитивно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([2]). *Умножением на группе A мы назовём отображение $\mu: A \times A \rightarrow A$, удовлетворяющее условию: для всех элементов $a, b, c \in A$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned}\mu(a, b + c) &= \mu(a, b) + \mu(a, c), \\ \mu(b + c, a) &= \mu(b, a) + \mu(c, a).\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1 ([2]). *Имеет место изоморфизм:*

$$\text{Mult } A \cong \text{Hom}(A, \text{End } A).$$

ПРИМЕР 1. Выявим структуру группы $\text{Mult } \mathbb{Z}$. Так как $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, то

$$\text{End } \mathbb{Z} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

и, окончательно, $\text{Mult } \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Следовательно, $\text{Mult } \mathbb{Z}$ является бесконечной циклической группой. Конкретный изоморфизм $f: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mult } \mathbb{Z}$ можно задать следующим образом. Пусть $1 \xrightarrow{f} \mu$, где μ — обычное умножение целых чисел, тогда для всякого $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ положим $m \xrightarrow{f} m\mu$. Таким образом, любое умножение $\mu \in \text{Mult } \mathbb{Z}$ действует по закону:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \mu(a, b) = nab$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Наряду с соответствующей главой в [2] об аддитивных группах колец можно прочесть в более специализированных монографиях Ш. Фейгельстока [8] и Д. Арнольда [9].

Рассмотрим теперь произвольную полугруппу A , записанную мультипликативно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Сложением на полугруппе A мы назовём новую бинарную операцию $*$ на A , удовлетворяющую условиям:*

1. $\langle A, * \rangle$ — абелева группа;
2. Операция $\cdot$ дистрибутивна относительно $*$, то есть для любых элементов $a, b, c \in A$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}a \cdot (b * c) &= (a \cdot b) * (a \cdot c), \\ (b * c) \cdot a &= (b \cdot a) * (c \cdot a).\end{aligned}$$

Будем говорить, что на мультипликативной полугруппе кольца $\langle R, +, \cdot \rangle$ можно задать новое сложение $*$, если относительно операций $*$ и $\cdot$ множество R образует кольцо, отличное от кольца $\langle R, +, \cdot \rangle$.

Для описания сложений на полугруппе можно использовать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ([10]). Пусть R и S — кольца. Если существует мультипликативный, но не аддитивный изоморфизм колец $\varphi: R \rightarrow S$, то новое сложение $*$ на мультипликативной полугруппе R можно задать следующим образом:

$$\forall a, b \in R \quad a * b = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, удовлетворяет ли такое сложение определению 2. Так как аддитивная группа кольца S является абелевой группой, из этого очевидно, что $*$ ассоциативно и коммутативно. Также несложно проверить, что нулём кольца $\langle R, *, \cdot \rangle$ является элемент $e = \varphi^{-1}(0)$.

Теперь выясним, для всякого ли $a \in R$ существует $a' \in R$ такой, что $a * a' = e$.

$$\begin{aligned} a * a' = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(a')) \quad \& \quad a * a' = e \quad \& \quad e = \varphi^{-1}(0) \quad \implies \\ \implies \quad \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(a')) = \varphi^{-1}(0) \quad \implies \quad \varphi(a) + \varphi(a') = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $a' = \varphi^{-1}(-\varphi(a))$, где $-\varphi(a)$ — элемент, противоположный элементу $\varphi(a)$ в кольце S .

Проверим теперь дистрибутивность $\cdot$ относительно $*$. Пусть $a, b, c \in R$. Тогда

$$\begin{aligned} a \cdot (b * c) &= a \cdot \varphi^{-1}(\varphi(b) + \varphi(c)) = \varphi^{-1}(\varphi(a)) \cdot \varphi^{-1}(\varphi(b) + \varphi(c)) = \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(a) \cdot (\varphi(b) + \varphi(c))) = \varphi^{-1}(\varphi(a) \cdot \varphi(b) + \varphi(a) \cdot \varphi(c)) = \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(a \cdot b) + \varphi(a \cdot c)) = (a \cdot b) * (a \cdot c), \\ (b * c) \cdot a &= \varphi^{-1}(\varphi(b) + \varphi(c)) \cdot a = \varphi^{-1}(\varphi(b) + \varphi(c)) \cdot \varphi^{-1}(\varphi(a)) = \\ &= \varphi^{-1}((\varphi(b) + \varphi(c)) \cdot \varphi(a)) = \varphi^{-1}(\varphi(b) \cdot \varphi(a) + \varphi(c) \cdot \varphi(a)) = \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(b \cdot a) + \varphi(c \cdot a)) = (b \cdot a) * (c \cdot a). \end{aligned}$$

□

СЛЕДСТВИЕ 1. На мультипликативной полугруппе кольца $\langle R, +, \cdot \rangle$ можно задать новое сложение $*$ тогда и только тогда, когда существует мультипликативный, но не аддитивный автоморфизм кольца R .

Кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (УА-кольцом), если на его мультипликативной полугруппе $\langle R, \cdot \rangle$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую её в кольцо $\langle R, +, \cdot \rangle$.

Из теоремы Стефенсона следует, что кольцо R является УА-кольцом тогда и только тогда, когда любой мультипликативный изоморфизм колец $\varphi: R \rightarrow S$ (то есть изоморфизм их мультипликативных полугрупп) является изоморфизмом колец.

УА-кольцам посвящено множество работ. Они были введены ещё в 1969 г. в [10]. Наиболее подробно УА-кольца разобраны в [12]. В настоящее время теория УА-колец активно используется в теории абелевых групп и модулей (см., например, [13], [14], [15] и др.).

Кольцо $\mathbb{Z}$ не является УА-кольцом. Это вытекает, например, из того, что у колец $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[x]$ изоморфны их мультипликативные полугруппы.

2. Кольцевые структуры на мультипликативном моноиде $\mathbb{Z}$

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}$. Пусть ξ — мультипликативный, но не аддитивный автоморфизм кольца $\mathbb{Z}$. Тогда новое сложение $*$ на мультипликативной полугруппе кольца $\mathbb{Z}$, согласно следствию 1, можно задать следующим образом:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a * b = \xi^{-1}(\xi(a) + \xi(b)).$$

Оно задано корректно, но неконструктивно, поскольку неясно, как устроены мультипликативные автоморфизмы кольца $\mathbb{Z}$. Для их описания докажем серию вспомогательных утверждений.

Обозначим через $\mathcal{N}$ прямую сумму моноидов

$$\bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{N}_0,$$

где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество целых неотрицательных чисел. $\mathcal{N}$ есть коммутативная полугруппа с нулём $\theta_{\mathcal{N}} = (0, 0, \dots)$. Обозначим через $\mathcal{Z}'$ полугруппу $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathcal{N}$. Дополним множество $\mathcal{Z}'$ до множества $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}' \cup \{e\}$, где e — внешний аннулятор, то есть такой элемент, что выполняется условие:

$$\forall a \in \mathcal{Z} \quad a + e = e + a = e.$$

Ясно, что $\mathcal{Z}$ — коммутативная полугруппа с нулём $\theta_{\mathcal{Z}} = (\bar{0}, 0, 0, \dots)$ и что все элементы $\mathcal{Z}'$ содержат лишь конечное число ненулевых координат.

ЛЕММА 1. *Рассмотренный выше моноид $\mathcal{Z}$ и мультипликативный моноид $\mathbb{Z}$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ — каноническое разложение некоторого числа $m \in \mathbb{Z}$, отличного от нуля, где $\lambda = \text{sign}(m)$ и $p_i < p_{i+1}$ ($i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$). Поставим в соответствие числу m элемент $(\varepsilon, k_1, k_2, \dots, k_s, 0, \dots) \in \mathcal{Z}'$, причём $\varepsilon = \bar{0}$, если $\lambda = 1$, и $\varepsilon = \bar{1}$, если $\lambda = -1$. Числу 0 поставим в соответствие внешний аннулятор $e \in \mathcal{Z}$. Несложно проверить, что отображение $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$, заданное таким образом, — искомый изоморфизм. $\square$

В силу доказанного изоморфизма мы получили возможность описания мультипликативных автоморфизмов кольца $\mathbb{Z}$ с помощью моноида $\mathcal{Z}$. Будем в дальнейшем отождествлять элемент b прямого слагаемого $\mathbb{Z}_2$ с элементом моноида $\mathcal{Z}'$ вида $(b, 0, \dots)$, а элемент $c = (c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots)$ прямого слагаемого $\mathcal{N}$ — с элементом моноида $\mathcal{Z}'$ вида

$$(\bar{0}, c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассмотрим произвольный автоморфизм η моноида $\mathcal{Z}$. Покажем, что $\eta(e) = e$. Действительно, предположив противное и зафиксировав произвольный ненулевой элемент $d \in \mathcal{Z}'$, получим:

$$\eta(e) = \eta(e + d) = \eta(e) + \eta(d) \implies \eta(d) = \theta_{\mathcal{Z}},$$

то есть автоморфизм η ненулевой элемент $d \in \mathcal{Z}'$ перевёл в нуль, чего быть не может.

Далее, так как структура $\mathcal{Z}'$ есть прямая сумма моноидов, то

$$\forall a \in \mathcal{Z}' \quad \exists! b \in \mathbb{Z}_2 \quad \exists! c \in \mathcal{N} \quad a = b + c.$$

Тогда

$$\eta(a) = \eta(b + c) = \eta(b) + \eta(c).$$

Так как единственным автоморфизмом прямого слагаемого $\mathbb{Z}_2$ является тождественное отображение $\text{id}_{\mathbb{Z}_2}$ и $\eta(\mathbb{Z}_2) \subseteq \mathbb{Z}_2$, то

$$\eta(a) = b + \eta(c),$$

и задача описания автоморфизмов моноида $\mathcal{Z}$ сводится к задаче описания автоморфизмов моноида $\mathcal{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что совокупность элементов $B = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}$ линейно независима, если для любых $b_{i_1}, \dots, b_{i_k} \in B$ из равенства

$$\lambda_1 b_{i_1} + \dots + \lambda_k b_{i_k} = \theta_{\mathcal{N}},$$

где $\lambda_j \in \mathbb{N}_0$, следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем называть совокупность элементов $B = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}$ базисом моноида $\mathcal{N}$, если она линейно независима и любой элемент $\mathcal{N}$ линейно выражается через элементы этой совокупности с коэффициентами из множества $\mathbb{N}_0$ с точностью до порядка следования и слагаемых с нулевыми коэффициентами.

ПРИМЕР 2. Совокупность элементов $E = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, где

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \quad \dots,$$

является базисом моноида $\mathcal{N}$.

Совокупность $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, где

$$f_1 = e_2, \quad f_2 = e_1, \quad f_j = e_j \quad (j = 3, 4, \dots),$$

также образует базис моноида $\mathcal{N}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Отображение $\xi: F \rightarrow G$, где $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — базис моноида $\mathcal{N}$, а $G = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — произвольные элементы моноида $\mathcal{N}$, единственным образом продолжается до эндоморфизма моноида $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный элемент $c \in \mathcal{N}$, тогда

$$c = \sum_{i=1}^k \gamma_i f_i,$$

где $\gamma_i \in \mathbb{N}_0$. Положим по определению

$$\xi(c) = \sum_{i=1}^k \gamma_i \xi(f_i) = \sum_{i=1}^k \gamma_i g_i.$$

Проверим, что ξ — эндоморфизм. Корректность вытекает из того, что разложение элементов моноида $\mathcal{N}$ по базису F единственно, что следует из определения 4. Проверим сохранение операции, пусть

$$a = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i \in \mathcal{N}, \quad b = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i \in \mathcal{N},$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$. Без потери общности можно считать, что $k = m$. Тогда

$$\xi(a + b) = \xi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) g_i = \xi(a) + \xi(b).$$

Докажем теперь, что такой эндоморфизм единственен. Пусть η — эндоморфизм моноида $\mathcal{N}$ такой, что

$$\forall f_i \in F \quad \eta(f_i) = \xi(f_i).$$

Покажем, что $\eta = \xi$. Действительно, если

$$c = \sum_{i=1}^k \gamma_i f_i \in \mathcal{N},$$

где $\gamma_i \in \mathbb{N}_0$, то

$$\eta(c) = \eta\left(\sum_{i=1}^k \gamma_i f_i\right) = \sum_{i=1}^k \gamma_i \eta(f_i) = \sum_{i=1}^k \gamma_i \xi(f_i) = \sum_{i=1}^k \gamma_i g_i = \xi(c).$$

Получили, что η и ξ действуют одинаково. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Эндоморфизм ξ из утверждения 2 является автоморфизмом в том и только в том случае, когда совокупность элементов G является базисом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если ξ — автоморфизм моноида $\mathcal{N}$, то существует автоморфизм ξ^{-1} моноида $\mathcal{N}$ такой, что

$$\xi^{-1} \circ \xi = \xi \circ \xi^{-1} = \text{id}_{\mathcal{N}}.$$

Несложно проверить, что совокупность элементов G линейно независима. Пусть $c \in \mathcal{N}$, для него существует элемент $\tilde{c} = \xi^{-1}(c)$ такой, что

$$\tilde{c} = \sum_{i=1}^k \gamma_i f_i \implies \xi(\tilde{c}) = \sum_{i=1}^k \gamma_i g_i,$$

где $\gamma_i \in \mathbb{N}_0$. Последнее равенство равносильно тому, что элемент $\xi(\tilde{c}) = c$ линейно выражается через элементы совокупности G с коэффициентами из $\mathbb{N}_0$.

Обратно, если совокупность элементов G образует базис, то по предыдущему утверждению существует отображение $\eta: G \rightarrow F$, которое единственным образом продолжается до эндоморфизма. Несложно видеть, что

$$\eta \circ \xi = \xi \circ \eta = \text{id}_{\mathcal{N}}.$$

Следовательно, ξ — автоморфизм моноида $\mathcal{N}$. $\square$

Тогда новое сложение $*$ на мультипликативном моноиде $\mathbb{Z}$, согласно следствию 1, утверждению 2 и лемме 1, можно задать следующим образом:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a * b = (\varphi^{-1} \circ \xi^{-1} \circ \varphi)((\varphi^{-1} \circ \xi \circ \varphi)(a) + (\varphi^{-1} \circ \xi \circ \varphi)(b)),$$

где φ — изоморфизм моноидов $\mathbb{Z}$ и $\mathcal{Z}$ из леммы 1, а ξ — автоморфизм моноида $\mathcal{N}$ из утверждения 2, который мы можем отождествлять с автоморфизмом моноида $\mathcal{Z}$ в силу замечания 1. Обозначив композицию $\varphi^{-1} \circ \xi \circ \varphi$ через ψ , получим:

$$a * b = \psi^{-1}(\psi(a) + \psi(b)).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. В $\mathcal{N}$ не существует базисов, отличных от базиса E , и базисов, получающихся из E путём перестановки элементов, где E — базис из примера 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Там, где это будет необходимо, под соответствующими координатами элементов $\mathcal{N}$ будут подписаны их порядковые номера.

Пусть $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — произвольный базис моноида $\mathcal{N}$ такой, что

$$f_i = (a_i^1, a_i^2, \dots).$$

Рассмотрим элемент $e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in E$. Для него

$$\exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{N}_0 \quad e_j = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n,$$

то есть

$$e_j = \beta_1 (a_1^1, a_1^2, \dots) + \beta_2 (a_2^1, a_2^2, \dots) + \dots + \beta_n (a_n^1, a_n^2, \dots).$$

Хотя бы один коэффициент β_i ($1 \leq i \leq n$) отличен от нуля, иначе $e_j = \theta_{\mathcal{N}}$, чего быть не может. Пусть $\beta_k \neq 0$ ($1 \leq k \leq n$).

Перейдём к системе уравнений, соответствующей данному разложению. В этой системе есть ровно одно уравнение вида

$$1 = \beta_1 a_1^j + \beta_2 a_2^j + \dots + \beta_n a_n^j, \quad (1)$$

где j фиксировано и является порядковым номером элемента e_j в базисе E , и бесконечно много уравнений вида

$$0 = \beta_1 a_1^i + \beta_2 a_2^i + \dots + \beta_n a_n^i, \quad (2)$$

где i пробегает всё множество $\mathbb{N} \setminus \{j\}$.

Известно, что все $f_i \in \mathcal{N}$, поэтому $a_i^j \in \mathbb{N}_0$. Далее, так как $\beta_i \in \mathbb{N}_0$ и множество $\mathbb{N}_0$ замкнуто относительно умножения, то $\beta_i a_i^j \in \mathbb{N}_0$.

Рассмотрим произвольное уравнение системы, имеющее вид (2). Имеется сумма целых неотрицательных чисел, равная нулю. Тогда

$$\beta_1 a_1^i = \beta_2 a_2^i = \dots = \beta_n a_n^i = 0.$$

Следовательно, так как $\beta_k a_k^i = 0$ и $\beta_k \neq 0$, то $a_k^i = 0$. Уравнение вида (2) выбиралось произвольное, поэтому при условии $\beta_k \neq 0$ получаем, что все a_k^i ($i \in \mathbb{N} \setminus \{j\}$) равны нулю и $f_k = (0, 0, \dots, 0, a_k^j, 0, \dots)$.

Рассмотрим теперь уравнение системы, имеющее вид (1). Это сумма целых неотрицательных чисел, равная единице. Тогда

$$\beta_k a_k^j = 1 - \left(\beta_1 a_1^j + \beta_2 a_2^j + \dots + \beta_{k-1} a_{k-1}^j + \beta_{k+1} a_{k+1}^j + \dots + \beta_n a_n^j \right).$$

Обозначим сумму, стоящую в скобках, через δ . В силу того, что множество $\mathbb{N}_0$ замкнуто относительно сложения, получаем, что δ неотрицательно. Так как $\beta_k a_k^j \in \mathbb{N}_0$, то $\beta_k a_k^j = 0$ или

$$\exists m \in \mathbb{N}_0 \quad \beta_k a_k^j = m + 1.$$

Если $\beta_k a_k^j = 0$, то, так как $\beta_k \neq 0$, получаем $a_k^j = 0$ и $f_k = \theta_{\mathcal{N}} \in F$, что противоречит линейной независимости системы F . Значит, имеет место второй случай, и существует $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что

$$\beta_k a_k^j = m + 1 \iff 1 - \delta = m + 1 \iff \delta = -m.$$

Так как $m \in \mathbb{N}_0$, то $m \geq 0$, и $-m \leq 0$. Следовательно, δ неположительно, однако выше было установлено, что δ неотрицательно. Таким образом, $\delta = 0$.

Вернувшись к исходному уравнению, получим:

$$1 = \beta_k a_k^j + \delta \iff 1 = \beta_k a_k^j + 0 \iff 1 = \beta_k a_k^j.$$

Коэффициент β_k отличен от нуля, поэтому $a_k^j = \frac{1}{\beta_k}$, и так как $a_k^j \in \mathbb{N}_0$, то $\beta_k = a_k^j = 1$ и, таким образом, $f_k = (0, 0, \dots, \underset{j-1}{0}, \underset{j}{1}, \underset{j+1}{0}, \dots) = e_j$.

Элемент $e_j \in E$ выбирался произвольно, следовательно, доказано утверждение:

$$\forall e_i \in E \quad \exists f_j \in F \quad f_j = e_i,$$

из чего следует требуемое. $\square$

Заметим, что из утверждения 3 и следствия 2 немедленно следует факт, состоящий в том, что не существует автоморфизмов моноида $\mathcal{N}$, отличных от тождественного автоморфизма $\text{id}_{\mathcal{N}}$ и автоморфизмов, порождённых перестановкой элементов базиса E .

Таким образом, в силу изоморфизма $\mathcal{Z} \cong \mathbb{Z}$ можно строить новые сложения непосредственно на мультипликативном моноиде $\mathbb{Z}$, взяв в качестве базиса множество P всех простых чисел. Из замечания 1 следует, что любой автоморфизм мультипликативного моноида $\mathbb{Z}$ сохраняет знак числа и ноль переводит в ноль. Поэтому автоморфизмы мультипликативного моноида $\mathbb{Z}$ и, как следствие, новые сложения на нём можно строить путём перестановки элементов базиса P .

3. Описание автоморфизмов моноида $\mathcal{N}$ с помощью матриц

Пусть $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — базис моноида $\mathcal{N}$, а $G = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — произвольные элементы моноида $\mathcal{N}$. Выясним, как можно конструктивно описать автоморфизмы $\mathcal{N}$. Поставим в соответствие каждому эндоморфизму моноида $\mathcal{N}$ матрицу размера $\aleph_0 \times \aleph_0$ с элементами из множества $\mathbb{N}_0$. Пусть эндоморфизм ξ из утверждения 2 порождается отображением $\xi: F \rightarrow G$ и

$$g_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_i^j f_j,$$

тогда матрица M_ξ , поставленная в соответствие данному эндоморфизму ξ , примет вид:

$$M_\xi = \begin{pmatrix} a_i^1 & a_i^2 & \dots & a_i^{k_i} & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

где $i \in \mathbb{N}$, то есть в i -той строке матрицы записаны коэффициенты разложения элемента g_i по базису F . Такая матрица *конечнострочна*, то есть в каждой её строке содержится лишь конечное число ненулевых элементов.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество конечнострочных матриц размера $\aleph_0 \times \aleph_0$ над $\mathbb{N}_0$. Зададим на $\mathcal{M}$ сложение и умножение, аналогичное обычному сложению и умножению матриц. Произведение двух матриц $M, N \in \mathcal{M}$ определено корректно, так как M и N конечнострочны. Нетрудно также убедиться в том, что $\langle \mathcal{M}, + \rangle$ — коммутативная полугруппа с нулём (нулевой матрицей Θ), а $\langle \mathcal{M}, \cdot \rangle$ — полугруппа с единицей (единичной матрицей E). Умножение дистрибутивно слева и справа относительно сложения, и выполняется мультипликативное свойство нуля: для всякой матрицы $M \in \mathcal{M}$ верно $\Theta \cdot M = M \cdot \Theta = \Theta$.

Таким образом, построенное множество $\mathcal{M}$ относительно операций обычного сложения и обычного умножения матриц образует полукольцо.

Обозначим через $M(a)$ координатный столбец элемента $a \in \mathcal{N}$, а через $M(\xi(a))$ — координатный столбец элемента $\xi(a)$ в базисе E из примера 2. Тогда по построению ясно, что

$$M(\xi(a)) = M_\xi^T \cdot M(a).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Эндоморфизм ξ моноида $\mathcal{N}$ является автоморфизмом в том и только в том случае, когда матрица, соответствующая ему, обратима в $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть эндоморфизм ξ является автоморфизмом. Зафиксируем произвольный элемент $a \in \mathcal{N}$, тогда

$$M(\xi(a)) = M_\xi^T \cdot M(a).$$

Так как ξ — автоморфизм, то у отображения ξ есть обратное отображение ξ^{-1} , также являющееся автоморфизмом, и $(\xi^{-1} \circ \xi)(a) = a$. Поставим в соответствие автоморфизму ξ^{-1} некоторую матрицу B по тому же правилу. На матричном языке последнее соотношение означает следующее:

$$M(a) = B^T \cdot M(\xi(a)).$$

Тогда $M(a) = B^T \cdot M_\xi^T \cdot M(a)$, то есть

$$B^T \cdot M_\xi^T = E \iff (M_\xi \cdot B)^T = E \iff M_\xi \cdot B = E.$$

Получили, что B является правой обратной к M_ξ . Аналогично проверяется, что B является левой обратной к M_ξ . Таким образом, M_ξ обратима в $\mathcal{M}$.

Обратно, пусть матрица, соответствующая эндоморфизму ξ , обратима в $\mathcal{M}$. Тогда существует матрица $M_\xi^{-1} \in \mathcal{M}$ такая, что $M_\xi^{-1} \cdot M_\xi = M_\xi \cdot M_\xi^{-1} = E$. Зафиксируем произвольный элемент $a \in \mathcal{N}$, тогда

$$M(\xi(a)) = M_\xi^T \cdot M(a).$$

Домножим левую и правую части последнего равенства на $(M_\xi^{-1})^T$ слева, получим:

$$\begin{aligned} (M_\xi^{-1})^T \cdot M(\xi(a)) &= (M_\xi^{-1})^T \cdot M_\xi^T \cdot M(a) \iff \\ \iff (M_\xi^{-1})^T \cdot M(\xi(a)) &= (M_\xi \cdot M_\xi^{-1})^T \cdot M(a) \iff \\ &\iff (M_\xi^{-1})^T \cdot M(\xi(a)) = M(a), \end{aligned}$$

то есть мы выразили координатный столбец элемента a через координатный столбец его образа $\xi(a)$ и обратную матрицу M_ξ^{-1} . Это в точности означает, что для эндоморфизма ξ существует обратное отображение, из чего, в свою очередь, следует, что эндоморфизм биективен, а значит, является автоморфизмом. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу утверждения 3, матрица всякого автоморфизма моноида $\mathcal{N}$ есть бинарная матрица, в каждой строке и каждом столбце которой содержится ровно одна единица, из чего следует, что она ортогональна. Данный факт позволяет довольно легко вычислять обратные матрицы: для всякого автоморфизма ξ моноида $\mathcal{N}$ справедливо равенство

$$M_\xi^{-1} = M_\xi^T.$$

4. Пример нового сложения на мультипликативном моноиде $\mathbb{Z}$

ПРИМЕР 3. Пусть автоморфизм ξ моноида $\mathcal{N}$ порождается перестановкой элементов базиса E такой, что

$$e_1 \xrightarrow{\xi} e_2, \quad e_2 \xrightarrow{\xi} e_3, \quad e_3 \xrightarrow{\xi} e_1, \quad e_j \xrightarrow{\xi} e_j \quad (j = 4, 5, \dots),$$

и пусть $a = 18 \in \mathbb{Z}$, $b = -21 \in \mathbb{Z}$. Выясним, чему равно $a * b$. Как было сказано выше, в силу замечания 1 можно отождествлять автоморфизм моноида $\mathcal{N}$ с автоморфизмом моноида $\mathcal{Z}$. Имеем:

$$\begin{aligned} a &= 2^1 \cdot 3^2 \xrightarrow{\varphi} (\bar{0}, 1, 2, 0, \dots) \xrightarrow{\xi} (\bar{0}, 0, 1, 2, 0, \dots) \xrightarrow{\varphi^{-1}} 3^1 \cdot 5^2 = 75, \\ b &= -3^1 \cdot 7^1 \xrightarrow{\varphi} (\bar{1}, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \xrightarrow{\xi} (\bar{1}, 0, 0, 1, 1, 0, \dots) \xrightarrow{\varphi^{-1}} -5^1 \cdot 7^1 = -35, \\ \psi(a) + \psi(b) &= 75 + (-35) = 40, \\ 40 &= 2^3 \cdot 5^1 \xrightarrow{\varphi} (\bar{0}, 3, 0, 1, 0, \dots) \xrightarrow{\xi^{-1}} (\bar{0}, 0, 1, 3, 0, \dots) \xrightarrow{\varphi^{-1}} 3^1 \cdot 5^3 = 375, \end{aligned}$$

то есть при новом сложении сумма $18 * (-21)$ равна 375. На языке целых чисел работа нового сложения $*$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= 2^1 \cdot 3^2 \xrightarrow{\psi} 3^1 \cdot 5^2 = 75, \\ b &= -3^1 \cdot 7^1 \xrightarrow{\psi} -5^1 \cdot 7^1 = -35, \\ \psi(a) + \psi(b) &= 75 + (-35) = 40, \\ 40 &= 2^3 \cdot 5^1 \xrightarrow{\psi^{-1}} 3^1 \cdot 5^3 = 375. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся разработанным матричным описанием автоморфизмов. Вычислим, к примеру, $M((\xi \circ \varphi)(a))$ через матрицу автоморфизма M_ξ , которая имеет вид

$$M_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$M((\xi \circ \varphi)(a)) = M_\xi^T \cdot M(\varphi(a)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

и, в самом деле,

$$(\xi \circ \varphi)(a) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + \dots = (\bar{0}, 0, 1, 2, 0, \dots).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vol. 1. New York–London: Academic Press, 1970.
2. Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vol. 2. New York–London: Academic Press, 1973.
3. Курош А.Г. Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
4. Schultz P. Periodic homomorphism sequences of abelian groups // Arch. Math. 1970. Vol. 21. P. 132-135.

5. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. 1973. Vol. 15. P. 60-69.
6. Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. Vol. 228, №3. P. 197-214.
7. Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.
8. Feigelstock S. Additive groups of rings. Pitman advanced publishing program, London, 1983.
9. Arnold D. M. Finite rank torsion free abelian groups and rings. Lecture Notes in Math. Vol. 931. Springer, New York, 1982.
10. Stephenson W. Unique addition rings // Canad. J. Math. 1969. Vol. 21, №6. P. 1455-1461.
11. Nelius Chr.-F. Ring emit eindentiger Addition. Padeborn, 1974.
12. Михалев А. В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Мат. сб. 1988. Том 135(177), №2. С. 210–224.
13. van der Merwe B. Unique addition modules // Communications in algebra. 1999. Vol. 27(9). P. 4103–4115.
14. Чистяков Д. С., Любимцев О. В. Об абелевых группах без кручения с UA-кольцом эндоморфизмов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2011. № 2(14). P. 55–58.
15. Любимцев О. В., Чистяков Д. С. Абелевы группы как UA-модули над кольцом $\mathbb{Z}$ // Матем. заметки. 2010. Том 87, №3. С. 412–416.

REFERENCES

1. Fuchs, L. 1970, "Infinite Abelian Groups vol. 1, New York–London: Academic Press.
2. Fuchs, L. 1973, "Infinite Abelian Groups vol. 2, New York–London: Academic Press.
3. Kurosh, A. G. 1974, "General Algebra Moscow, Nauka (russian).
4. Schultz, P. 1970, "Periodic homomorphism sequences of abelian groups *Arch. Math.*, vol. 21, pp. 132-135.
5. Schultz, P. 1973, "The endomorphism ring of the additive group of a ring" *J. Austral. Math. Soc.*, vol. 15. pp. 60-69.
6. Bowshell, R. A. & Schultz, P. 1977, "Unital rings whose additive endomorphisms commute *Math. Ann.*, vol. 228, no. 3, pp. 197-214
7. Krylov, P. A., Mikhalev, A. V. & Tuganbaev, A. A. 2013, "Endomorphism rings of Abelian groups vol. 2, Springer Science & Business Media.
8. Feigelstock, S. 1983, "Additive groups of rings Pitman advanced publishing program, London.
9. Arnold, D. M. 1982, "Finite rank torsion free abelian groups and rings Lecture Notes in Math, vol. 931, Springer, New York.
10. Stephenson, W. 1969, "Unique addition rings *Canad. J. Math.*, vol. 21, no. 6, pp. 1455-1461.

11. Nelius, Chr.-F. 1974, "Ring emit eindentiger Addition Padeborn, 1974.
12. Mikhalev, A. V. 1989, "Multiplicative classification of associative rings *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 63, no. 1, pp. 205-218.
13. van der Merwe, B. 1999. "Unique addition modules *Communications in algebra*, vol. 27, no. 9, pp. 4103–4115.
14. Chistyakov D. S. & Lyubimtsev O. V. 2011, "On abelian torsion free with UA-endomorphism rings *Vestnik TGU*, no. 2(14), pp. 55–58.
15. Chistyakov D. S. & Lyubimtsev O. V. 2010, "Abelian groups as UA-modules over the ring $\mathbb{Z}$ *Mathematical Notes*, vol. 87, no. 3, pp. 380–383.

Получено 4.02.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-18-33

**СКРЫТЫЕ АТТРАКТОРЫ НЕКОТОРЫХ
МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ
ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ**

Буркин И. М. (г. Тула)

Аннотация

Хорошо известно, что математически простые нелинейные системы дифференциальных уравнений могут демонстрировать хаотическое поведение. Обнаружение аттракторов хаотических систем – важная проблема нелинейной динамики. Результаты недавних исследований позволили ввести следующую классификацию периодических и хаотических аттракторов в зависимости от наличия окрестностей состояний равновесия в их области притяжения – самовозбуждающиеся и скрытые аттракторы. Присутствие скрытых аттракторов в динамических системах привлекло пристальное внимание, как к теоретическим, так и к прикладным исследованиям этого феномена. Выявление скрытых аттракторов в реальных инженерных системах чрезвычайно важно, поскольку оно позволяет предсказывать неожиданные и потенциально опасные ответы системы на возмущения ее структуры. В последние три года, после обнаружения S. Jafari и J. C. Sprott хаотических систем с линией и плоскостью состояний равновесия, имеющих скрытые аттракторы, возрос интерес к системам, обладающим несчетным или бесконечным числом состояний равновесия. В настоящей работе предложены новые модели систем управления с бесконечным числом состояний равновесия, обладающие скрытыми аттракторами: кусочно-линейная система с локально устойчивым отрезком покоя и система с периодической нелинейностью и бесконечным числом состояний равновесия. Для поиска скрытых аттракторов исследуемых систем применен предложенный автором оригинальный аналитико-численный метод.

Ключевые слова: Кусочно-линейная система, отрезок покоя, бесконечное число состояний равновесия, цикл, скрытый аттрактор, аналитико-численный метод.

Библиография: 31 название.

**HIDDEN ATTRACTORS OF SOME MULTISTABLE SYSTEMS
WITH INFINITE NUMBER OF EQUILIBRIA**

Burkin I. M. (Tula)

Abstract

It is well known that mathematically simple systems of nonlinear differential equations can exhibit chaotic behavior. Detection of attractors of chaotic systems is an important problem of nonlinear dynamics. Results of recent researches have made it possible to introduce the following classification of periodic and chaotic attractors depending on the presence of neighborhood of equilibrium into their basin of attraction – self-excited and hidden attractors. The presence of hidden attractors in dynamical systems has received considerable attention to both theoretical and applied research of this phenomenon. Revealing of hidden attractors in real engineering systems is extremely important, because it allows predicting the unexpected and potentially dangerous system response to perturbations in its structure. In the past three years after discovering by S. Jafari and J. C. Sprott chaotic system with a line and a plane of equilibrium with hidden attractors there has been much attention to systems with uncountable or infinite

equilibria. In this paper it is offered new models of control systems with an infinite number of equilibrium possessing hidden chaotic attractors: a piecewise-linear system with a locally stable segment of equilibrium and a system with periodic nonlinearity and infinite number of equilibrium points. The original analytical-numerical method developed by the author is applied to search hidden attractors in investigated systems.

Keywords: Piecewise-linear system, segment of equilibria, infinite number of equilibria, cycle, hidden attractor, analytical-numerical method.

Bibliography: 31 titles.

1. Введение

Теория нелинейных колебаний динамических систем, созданная в тридцатых годах XX века, первоначально была настолько прозрачна и понятна, что поколения исследователей могли успешно применять ее для решения задач из различных областей науки. В семидесятых годах ситуация кардинально изменилась. Стало понятно, что кроме орбитально устойчивых циклов и торов, имеющих единую природу, динамические системы могут обладать хаотическими аттракторами, имеющими сложную топологическую структуру. В последующие десятилетия усилия многих математиков были сосредоточены на исследовании структуры таких аттракторов, их размерности, условий их возникновения в результате каскада бифуркаций. При этом считался само собой разумеющимся тот факт, что аттрактор динамической системы может существовать только при наличии у нее неустойчивых состояний равновесия. Согласно критерию Шильникова [1], наличие хаотического аттрактора требует присутствия в рассматриваемой системе, по крайней мере, одного неустойчивого состояния равновесия, и аттрактор может рождаться только в результате некоторых бифуркаций такого состояния равновесия. В самом деле, аттракторы классических систем Лоренца [2], Рёслера [3], Чуа [4], также как аттракторы моделей классических систем автоматического управления, содержат в своей области притяжения сколь угодно малые окрестности неустойчивых состояний равновесия. Именно это обстоятельство позволило в свое время обнаружить аттракторы упомянутых систем путем их численного интегрирования. Позднее такие аттракторы были названы *самовозбуждающимися* в том смысле, что вычислительная процедура, "стартующая" из любой точки неустойчивого многообразия в окрестности состояния равновесия, "выходит" на аттрактор и рассчитывает его.

В отличие от самовозбуждающихся, *скрытые* аттракторы не содержат в своей области притяжения окрестностей состояния равновесия. Хорошо известными примерами существования скрытых аттракторов у многомерных моделей систем автоматического управления являются контрпримеры к предположениям Айзермана и Калмана [5, 6], где единственное устойчивое в малом состояние равновесия сосуществует с орбитально устойчивым циклом [7, 8]. Эффективно проверяемые условия существования скрытых орбитально устойчивых циклов у некоторого класса многомерных систем получены в работах [10, 11]. В то же время для поиска и обнаружения скрытых аттракторов требуется разработка специальных вычислительных процедур.

С прикладной точки зрения наличие информации о существовании скрытого аттрактора и знание его области притяжения позволяет, в зависимости от решаемой задачи, либо избежать попадания начальных условий системы в эту область, что может привести к катастрофическим последствиям [14], либо "удерживать" систему на скрытом аттракторе. Последнее необходимо, например, в системах шифрования аудио и видеосигналов в устройствах скрытой коммуникации. [15, 16]

В 2010 году Г.А.Леоновым [9] был предложен новый метод поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах $\dot{x} = f(x), x \in R^n$, использующий идею гомотопии.

Рассматривается однопараметрическое семейство систем

$$\dot{x} = \psi(x, \varepsilon), \varepsilon \in [0, 1] \quad (1)$$

такое, что $\psi(x, 1) = f(x)$, и при малых $\varepsilon > 0$ система (1) имеет легко обнаруживаемый самовозбуждающийся орбитально асимптотически устойчивый цикл. Численно отслеживается эволюция этого цикла при возрастании ε до 1. Возможна следующая альтернатива: либо при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ происходит бифуркация исчезновения аттрактора, либо при $\varepsilon = 1$ обнаруживается скрытый аттрактор исследуемой динамической системы. Ясно, что ключевым моментом в приведенном алгоритме является построение функции $\psi(x, \varepsilon)$, обладающей перечисленными выше свойствами. В работе [9] был использован подход, основанный на использовании метода гармонической линеаризации, метода малого параметра и метода описывающих функций в сочетании с прикладной теорией бифуркаций. Дальнейшее развитие этого подхода [14, 17, 18] позволило впервые обнаружить хаотический скрытый аттрактор в контуре Чуа, в системе управления ракетой-носителем, построить контрпример к известной в теории управления гипотезе Калмана. Упомянутые работы вызвали волну интереса к исследованию многомерных динамических систем, которые либо не имеют состояний равновесия, либо имеют устойчивые в малом состояния равновесия и одновременно обладают орбитально устойчивыми циклами, или странными аттракторами [19–24]. Однако в работах [19–24], также как и во многих последующих исследованиях, для обнаружения скрытых аттракторов применяется "систематический компьютерный поиск то есть, по сути дела, систематическое "сканирование" фазового пространства исследуемой системы.

Принципиально иной подход к построению семейства систем (1), который во многих случаях оказывается существенно "менее затратным" на этапе подготовки к реализации численного алгоритма поиска скрытого аттрактора и не требует прибегать к систематическому сканированию фазового пространства, был предложен в работах [12, 13]. Достоинством этого метода является к тому же предоставляемая им возможность исследовать системы, обладающие одновременно несколькими скрытыми аттракторами.

В последние годы была опубликована серия работ, в которых изучались системы с бесконечным числом состояний равновесия [25–29]. Авторы работы [29] акцентируют внимание на целесообразности дальнейшего изучения систем, обладающих бесконечным числом состояний равновесия: "This study suggests that there exist other chaotic systems with uncountable equilibria in need of further investigation".

В настоящей работе исследуются две системы, обладающие скрытыми аттракторами и имеющие бесконечное число состояний равновесия: кусочно-линейная система с устойчивым отрезком покоя, а также система с периодической нелинейностью, бесконечным числом состояний равновесия и бесконечным числом скрытых аттракторов.

2. Система управления с устойчивым отрезком покоя

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma), \\ \sigma &= c^T x, \end{aligned} \quad (2)$$

где A — $n \times n$ -матрица, b и c — n -векторы, $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция. Уравнениями вида (2) описывается широкий класс систем автоматического управления. Дробно-рациональную функцию комплексного аргумента p , определенную равенством $\chi(p) = c^*(A - pI_n)^{-1}b$, будем считать невырожденной. Последнее означает, что степень многочлена в знаменателе дроби $\chi(p)$ равна n и эта дробь несократима. Здесь I_n — единичная матрица.

Следующие теоремы являются частным случаем утверждений, доказанных в работе [12].

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\varphi(\sigma)$ в системе (2) непрерывна, кусочно дифференцируема и выполнены следующие условия:

1. График функции $\varphi(\sigma)$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = 0$ с прямой $\sigma + \chi(0)\varphi = 0$ (или с прямой $\varphi = 0$, если матрица A особая);
2. Существуют такие числа μ_1 и μ_2 , что во всех точках дифференцируемости функции $\varphi(\sigma)$ выполнены условия $\mu_1 \leq \varphi'(\sigma) \leq \mu_2$;
3. Существует число $\lambda > 0$ такое, что при всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство

$$1 + (\mu_1 + \mu_2)Re\chi(i\omega - \lambda) + \mu_1\mu_2|\chi(i\omega - \lambda)|^2 > 0; \quad (3)$$

4. Существует $\varphi'(0)$ и матрица $A + \varphi'(0)bc^T$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \leq Re p \leq 0$;
5. Для некоторого $h \in (\mu_1, \mu_2)$ матрица $A + hbc^T$ является гурвицевой и $|\varphi(\sigma) - h\sigma| < \gamma < \infty$.

Тогда система (2) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$ системы.

Как показано в [12] выполнение предположений 2) – 4) теоремы 1 гарантируют существование неособой матрицы $H = H^*$, имеющей ровно 2 отрицательных и $n - 2$ положительных собственных значения и являющейся решением неравенства

$$2z^*H[(A + \lambda I)z + b\xi] + (\mu_2 c^*z - \xi)(\xi - \mu_1 c^*z) \leq -\varepsilon(|z|^2 + \xi^2), z \in R^n, \xi \in R^1.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть справедливо неравенство (3). Пусть для некоторого $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ матрица $A + \mu bc^*$ не имеет собственных значений в полосе $-\lambda \leq Re p \leq 0$ и имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями. Тогда для всех решений $x(t)$ системы (2) с $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, для которых $x(0) \in \Omega = \{x : x^*Hx \leq 0\}$ выполнено $|x(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим систему (2) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -19 \\ -3.5 \\ -3.2 \end{pmatrix}, x = col(x_1, x_2, x_3) \quad (4)$$

$$\varphi(\sigma) = 0.775(|\sigma + 1.2| - |\sigma - 1.2|) - 0.65(|\sigma + 0.1923076| - |\sigma - 0.1923076|) - 0.25\sigma.$$

Тогда, как легко видеть, система имеет "отрезок покоя" $\Sigma = \{x : x_2 = x_3 = 0; 19|x_1| \leq 0.2\}$.

Пользуясь методами исследования устойчивости стационарных множеств систем вида (2), развитыми в книге [30], можно показать, что отрезок покоя Σ точно устойчив в малом. Этот факт подтверждается и численным интегрированием рассматриваемой системы с начальными условиями в малой окрестности отрезка покоя (рис. 1)

Кроме отрезка покоя, рассматриваемая система имеет еще два седловых состояния равновесия $(\pm 0.338947368, 0, 0)$. Численное интегрирование показывает, что среди траекторий, начинающихся в малой окрестности седловых состояний равновесия, есть "уходящие на бесконечность". Такой, например, является траектория решения с начальным условием $(0.339, 0, 0.09)$. Таким образом, если исследуемая система имеет аттракторы, то эти аттракторы не являются самовозбуждающимися.

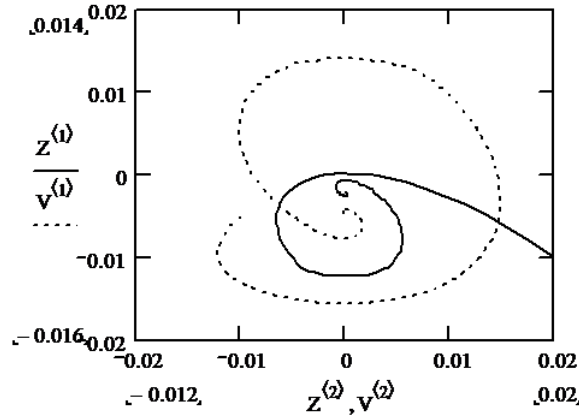


Рис. 2: Поведение траекторий системы в окрестности отрезка покоя (проекция на плоскость (x_1, x_2))

Для поиска возможных скрытых аттракторов рассматриваемой системы воспользуемся аналитическо-численным методом, предложенным в работе [12]. Полагая в системе (2) с матрицей A векторами b, c , заданными соотношениями (4), $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, проведем линейный анализ системы, то есть выделим секторы устойчивости и неустойчивости линейной системы $\dot{x} = (A + \mu bc^T)x$ при различных значениях $\mu \in (-\infty, \infty)$.

При $\mu \in (-\infty, 0)$ матрица $A_\mu = A + \mu bc^T$ имеет одно положительное собственное значение и два комплексно-сопряженных собственных значения в левой открытой полуплоскости. При $\mu = 0$ матрица A_μ имеет одно нулевое собственное значение и два комплексно-сопряженных собственных значения с отрицательными вещественными частями. При $\mu \in (0, 0.088)$ матрица A_μ является гурвицевой (гурвицев сектор). При некотором $\mu \in (0.088, 0.0885)$ матрица A_μ имеет пару чисто мнимых собственных значений и одно отрицательное. При $\mu \in (0.0885, 1)$ матрица A_μ имеет два комплексно-сопряженных собственных значения с положительными вещественными частями и одно отрицательное (сектор неустойчивости степени 2). Наконец, при $\mu \in (1.01, \infty)$ матрица A_μ является гурвицевой.

График нелинейности $\varphi(\sigma)$, определенной формулой (4), поочередно пребывает в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2. Последнее обстоятельство дает основание предположить [11], что рассматриваемая система может обладать скрытыми аттракторами.

Для рассматриваемой нами системы

$$\chi(p) = (3.2p^2 + 3.5p + 19)(p^3 + p^2 + p)^{-1}$$

положим $\mu_1 = 0.02$, $\mu_2 = 3$, $\lambda = 0.4$. На рис. 2 представлен график функции

$$l(\omega) = 1 + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{Re} \chi(i\omega - \lambda) + \mu_1 \mu_2 |\chi(i\omega - \lambda)|^2.$$

Как видно из этого графика, для рассматриваемой системы выполнено условие (3). Заменим функцию $\varphi(\sigma)$ в рассматриваемой системе на функцию $\psi(\sigma)$, определенную следующим образом:

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 1.5\sigma + 0.5, & \sigma \leq -0.5, \\ 0.5\sigma, & |\sigma| \leq 0.5, \\ 1.5\sigma - 0.5, & \sigma \geq 0.5. \end{cases}$$

Матрица $A + 0.5bc^T$ имеет 2 собственных значения в правой полуплоскости и не имеет собственных значений в полосе $-0.4 \leq \operatorname{Re} p \leq 0$. Из предыдущих рассуждений следует, что для системы

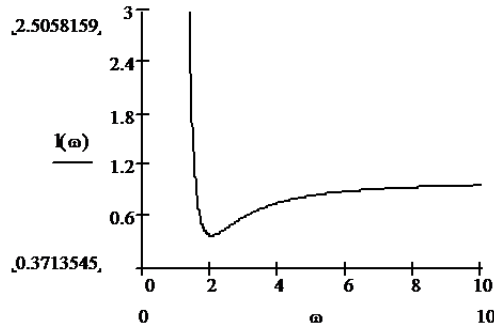


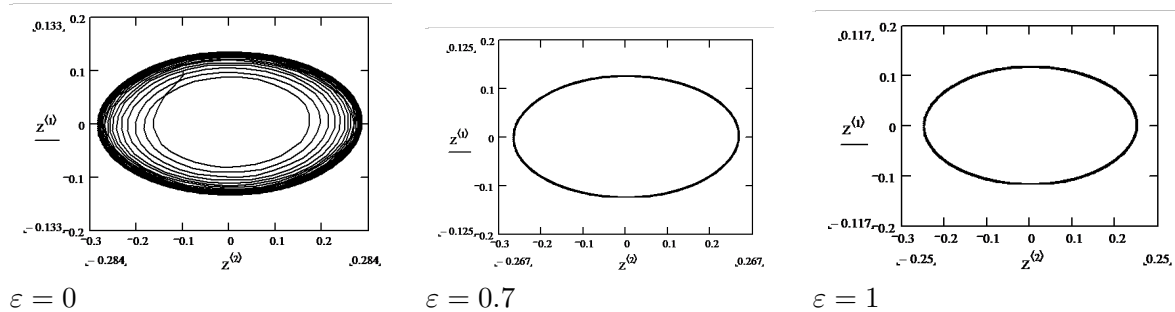
Рис. 3: Проверка выполнения частотного неравенства

с нелинейностью $\psi(\sigma)$ выполнены все условия сформулированной выше теоремы¹. Поэтому такая система имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности ее состояния равновесия $x = 0$.

Для поиска скрытого аттрактора исследуемой системы применим метод гомотопии. Пусть $x_0 \neq 0$ — какая-либо (произвольная) точка из окрестности состояния равновесия. Найдем численно решение $x_0(t)$ системы (4) с нелинейностью $\psi(\sigma)$ на промежутке $[0, T]$, где T достаточно велико, и начальным условием $x_0(0) = x_0$. Значение $x_0(T)$ будет достаточно близко к циклу. Рассмотрим теперь семейство систем (4) с нелинейностями $\varepsilon_j \varphi(\sigma) + (1 - \varepsilon_j) \psi(\sigma)$, где $\varepsilon_j = j m^{-1}, j = 1, \dots, m$. Решения этих систем будем обозначать $x_j(t)$. При численном интегрировании каждой из систем семейства в качестве начального условия $x_j(0)$ будем брать $x_{j-1}(T)$. Если при интегрировании всех систем семейства получаем аттрактор, то при $j = m$ будет найден аттрактор системы (4) с нелинейностью $\varphi(\sigma)$. Если же при некотором значении ε_j аттрактор численным интегрированием не обнаруживается, то это означает, что произошла бифуркация и исчезновение аттрактора.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в процессе реализации описанного алгоритма на некотором шаге аттрактор не обнаруживается, то это может означать, что очередной аттрактор имеет очень малую область притяжения. В этом случае целесообразно попытаться уменьшить шаг дискретизации по ε и повторить процедуру поиска с меньшим шагом.

Результат работы описанного алгоритма поиска скрытого аттрактора представлен на рис. 3.


 Рис. 4: Поиск первого скрытого аттрактора (проекция на плоскость (x_1, x_2))

Для найденного аттрактора (цикла) оценим численно амплитуду "выхода" (рис. 4).

$$\sigma(t) = -19x_1(t) - 3.5x_2(t) - 3.2x_3(t)$$

Как видно из рисунка, справедлива оценка $|\sigma(t)| < 1.1$. Пользуясь этой оценкой и теоремой 2, построим еще одну вспомогательную нелинейность $\xi(\sigma)$ так, чтобы система (4) с этой

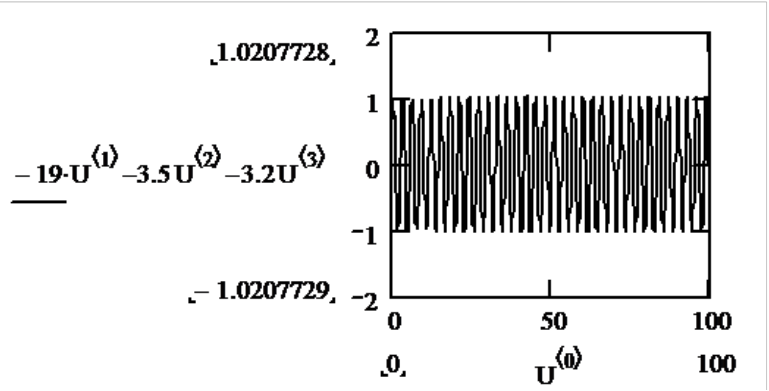
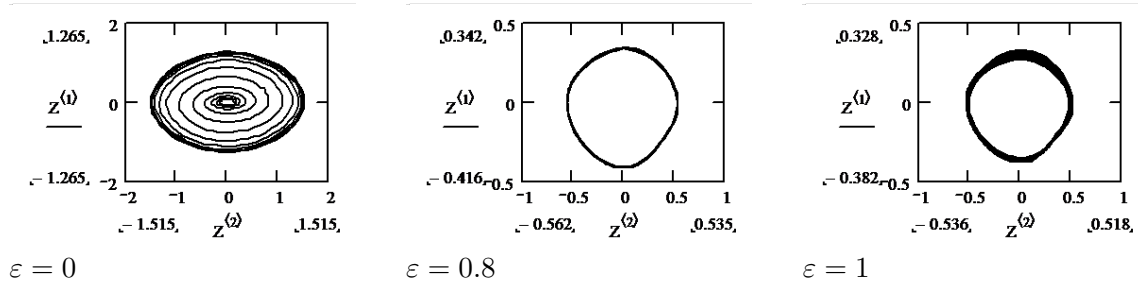


Рис. 5: График "выхода"

нелинейностью имела самовозбуждающийся из состояния равновесия $x = 0$ цикл, заведомо отличный от цикла, найденного выше. В качестве такой нелинейности, как нетрудно убедиться, опираясь на сформулированную выше теорему и результаты линейного анализа, можно взять функцию

$$\xi(\sigma) = \begin{cases} 0.03\sigma - 0.94, & \sigma \leq -2, \\ 0.5\sigma, & |\sigma| \leq 2, \\ 0.03\sigma + 0.94, & \sigma \geq 2. \end{cases} \quad (5)$$

Теперь повторим процедуру поиска скрытого аттрактора, используя построенную вспомогательную нелинейность. Согласно теореме 2, этот аттрактор, если он существует, не может совпасть с аттрактором, найденным ранее. Результат работы алгоритма поиска скрытого аттрактора представлен на рис. 5.

Рис. 6: Поиск второго скрытого аттрактора (проекция на плоскость (x_1, x_2))

В результате работы алгоритма найден скрытый аттрактор исследуемой системы, который может быть получен численным интегрированием системы с начальным условием $(-0.36519764, 0.10202236, 0.38718147)$. Найденный аттрактор является хаотическим, о чем можно судить по наблюдаемой в процессе изменения параметра ε серии бифуркаций Фегенбаума удвоения периода.

Обратим внимание, что этот аттрактор не является симметричным относительно начала координат, тогда как исходная система не меняется при замене (x_1, x_2, x_3) на $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Последнее обстоятельство дает основания предположить, что система обладает еще одним скрытым аттрактором, который получается численным интегрированием с начальными условиями $(0.36519764, -0.10202236, -0.38718147)$. Это предположение оказывается справедливым. Два скрытых аттрактора-близнеца представлены на рис. 6.

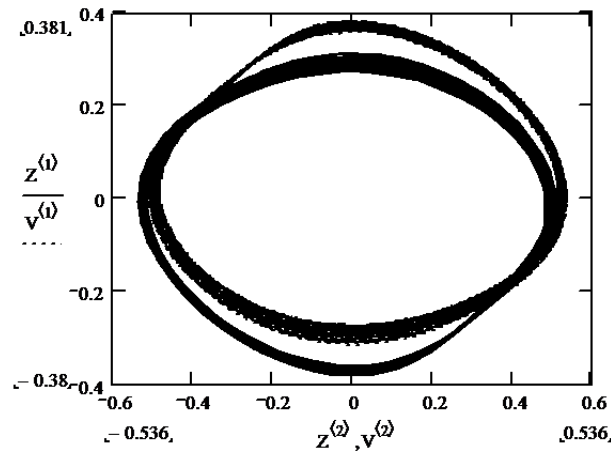
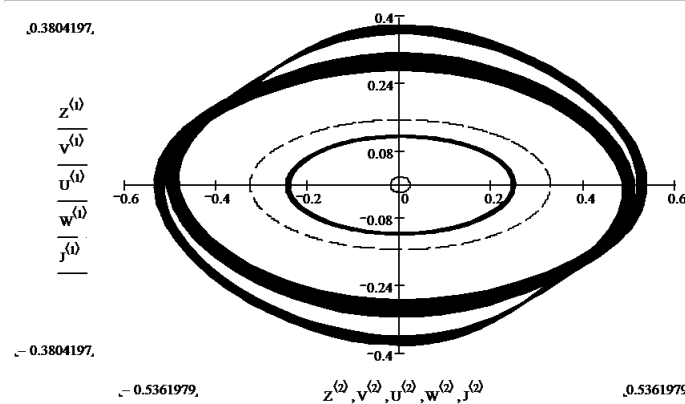


Рис. 7: Аттракторы-близнецы

Каждый из найденных скрытых аттракторов (цикл и аттракторы-близнецы) имеет открытую область притяжения в R^3 . На "сепарирующих" поверхностях, разделяющих эти области, могут располагаться неустойчивые многообразия, например, неустойчивые циклы исследуемой системы. Для поиска неустойчивых циклов может быть применен "метод стрельбы" [31]. Применяя этот метод, удастся найти два неустойчивых цикла системы, которые вместе с найденными ранее аттракторами образуют минимальный глобальный аттрактор рассматриваемой системы, приведенный на рис. 7.


 Рис. 8: Минимальный глобальный аттрактор (проекция на плоскость (x_1, x_2))

3. Скрытые аттракторы системы с бесконечным числом точек покоя.

Вновь рассмотрим систему (2), с матрицей A и векторами b, c , определенными соотношениями (4). Поскольку матрица A имеет одно нулевое собственное значение и два собственных значения с отрицательными вещественными частями, рассматриваемая система неособым линейным преобразованием может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Pz + q\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= r^T z + \beta\varphi(\sigma), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -15.8 \\ -0.3 \end{pmatrix}, \beta = -3.2 \quad (7)$$

Положим $q^T(P - pI_2)^{-1}r = m(p)[n(p)]^{-1}$, где $m(p)$ и $n(p)$ – многочлены. Системы (6) и (2) эквивалентны и имеет место равенство $\chi(p) = [m(p) - \beta n(p)][pn(p)]^{-1}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\varphi(\sigma)$ в системе (6) непрерывна, кусочно дифференцируема и выполнены следующие условия:

1. График функции $\varphi(\sigma)$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = \tilde{\sigma}$ с прямой $\varphi = 0$.
2. Существуют такие числа μ_1 и μ_2 , что во всех точках дифференцируемости функции $\varphi(\sigma)$ выполнены условия $\mu_1 \leq \varphi'(\sigma) \leq \mu_2$;
3. Существует число $\lambda > 0$ такое, что при всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство

$$1 + (\mu_1 + \mu_2)Re\chi(i\omega - \lambda) + \mu_1\mu_2|\chi(i\omega - \lambda)|^2 > 0;$$

4. Многочлен $[m(p) - \beta n(p)]\varphi'(\tilde{\sigma}) + pn(p)$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями;
5. Для некоторого $h \in (\mu_1, \mu_2)$ все корни многочлена $[m(p) - \beta n(p)]h + pn(p)$ имеют отрицательные вещественные части и $|\varphi(\sigma + \tilde{\sigma}) - h\sigma| < \gamma < \infty$.

Тогда система (6)-(7) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности ее состояния равновесия $z = 0, \sigma = \tilde{\sigma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем систему (6) в виде (2). Тогда матрица A и векторы b, c будут иметь вид

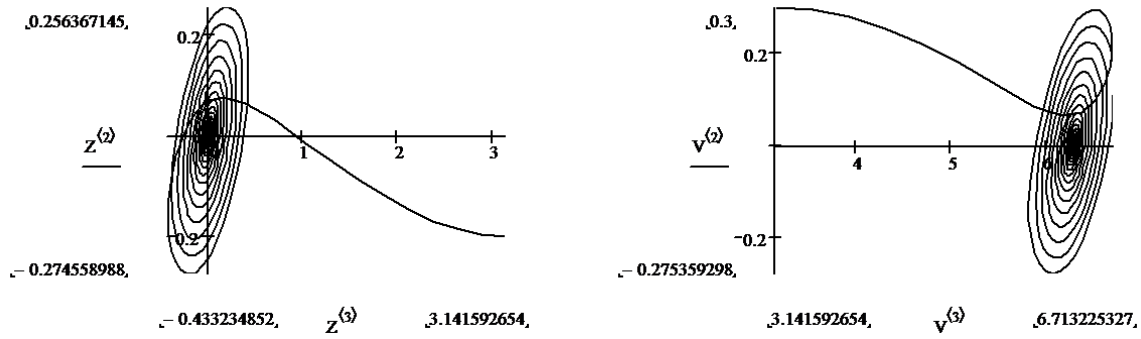
$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ r^T & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = col(z, \sigma). \text{ Обозначим } \tilde{x} = col(0, \tilde{\sigma}). \text{ Легко}$$

убедиться в справедливости равенств $A\tilde{x} = 0, \varphi(c^T\tilde{x}) = 0$. Поэтому, после замены переменной $y = x - \tilde{x}$, получим систему $\dot{y} = Ay + b\varphi(c^Ty + c^T\tilde{x})$. Положив $\sigma = c^Ty, \varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma + c^T\tilde{x})$, приходим к системе $\dot{y} = Ay + b\varphi_1(c^Ty)$, имеющей единственное состояние равновесия $y = 0$. При выполнении предположений теоремы 3 для этой системы, очевидно, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому такая система имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $y = 0$. Отсюда вытекает справедливость утверждения доказываемой теоремы.

Рассмотрим систему (5)-(6) с 2π - периодической нелинейностью

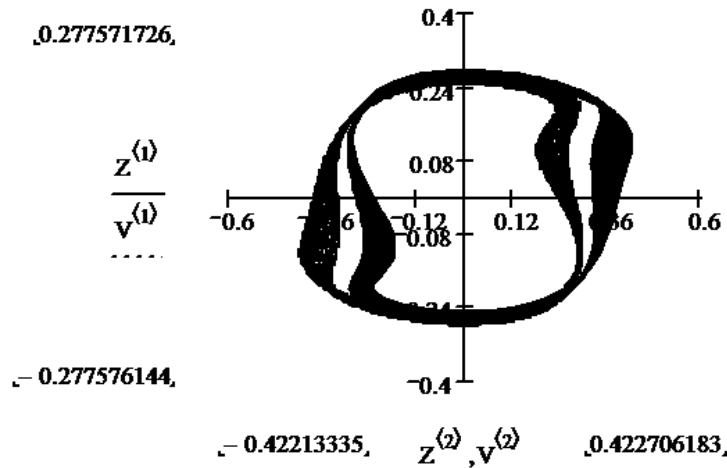
$$\varphi(\sigma) = \frac{\pi}{6}(1.00052411 \sin \sigma + 0.404720835 \sin 2\sigma + 0.1798759 \sin 3\sigma + 0.062532677 \sin 4\sigma). \quad (8)$$

Нелинейность (8) выбрана таким образом, что ее график поочередно пребывает в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2. Такое поведение нелинейности дает основание предположить [10,11], что рассматриваемая система может содержать скрытые аттракторы. Данная система имеет бесконечное число состояний равновесия вида $(0, 0, \pi k), k \in \mathbb{Z}$. При этом, как легко проверить, при четном k матрица системы, линеаризованной в соответствующем состоянии равновесия, является гурвицевой, а при нечетном k матрица линеаризации имеет одно положительное собственное значение и 2 собственных значения с отрицательными вещественными частями. Очевидно, что из окрестностей устойчивых состояний равновесия


 Рис. 9: Решения с начальными условиями $(0.2, -0.2, \pi)$ (слева) и $(-0.3, 0.3, \pi)$ (справа)

аттракторы рассматриваемой системы возбуждаться не могут. Численное интегрирование показывает, что из произвольной точки окрестностей неустойчивых состояний равновесия также не возбуждаются аттракторы. Так, например, решения системы с начальными условиями $(0.2, -0.2, \pi)$ и $(-0.3, 0.3, \pi)$ ведут себя так, как показано на рис. 8

Поскольку рассуждения и построения, проведенные ранее для системы (4), остаются справедливыми и для системы (6)-(7), в качестве "стартовой" нелинейности для реализации процедуры поиска скрытого аттрактора можно использовать, например, функцию (5). Результат работы описанного выше алгоритма поиска скрытого аттрактора представлен на рисунке 9-10. на этом же рисунке представлен и "аттрактор-близнец который удалось найти исходя из соображений симметрии системы.


 Рис. 10: Аттракторы-близнецы системы с нелинейностью (8). (проекция на плоскость (z_1, z_2))

Заметим (рис. 10), что для найденных аттракторов выполнено соотношение $|\sigma(t)| < \pi$. Поэтому, пользуясь теоремой 3, попытаемся найти скрытые аттракторы, отличные от аттракторов, найденных выше. Для этого повторим процедуру поиска аттракторов, взяв в качестве "стартовых" нелинейностей функции $\xi(\sigma + 2\pi k)$, $k = \pm 1$. В результате находим еще 4 скрытых аттрактора исследуемой системы, изображенные на рисунке 11.

Теперь очевидно, что исследуемая система имеет бесконечное число скрытых аттракторов, каждая пара которых расположена в своей полосе $\pi(2k - 1) < \sigma < \pi(2k + 1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В заключение отметим, что гурвицевость матрицы P в системе (6) и ограниченность функции $\varphi(\sigma)$ влечет ограниченность компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$ всех решений рассматриваемой системы. Поэтому система устойчива по Лагранжу и фазовая траектория любого ее решения при

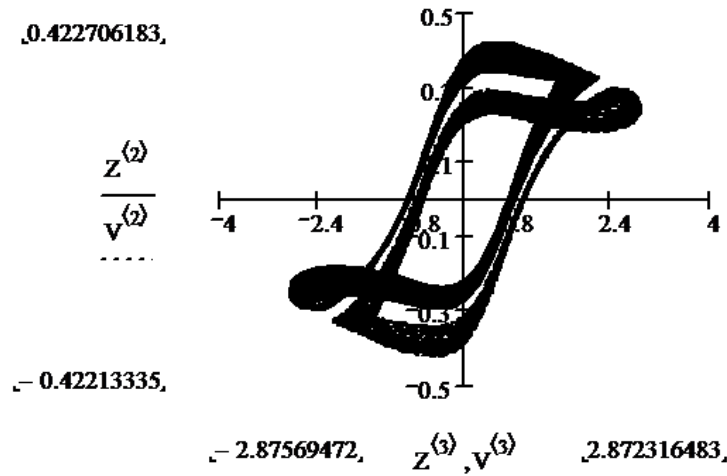


Рис. 11: Аттракторы-близнецы системы с нелинейностью (8). (проекция на плоскость (z_2, σ))

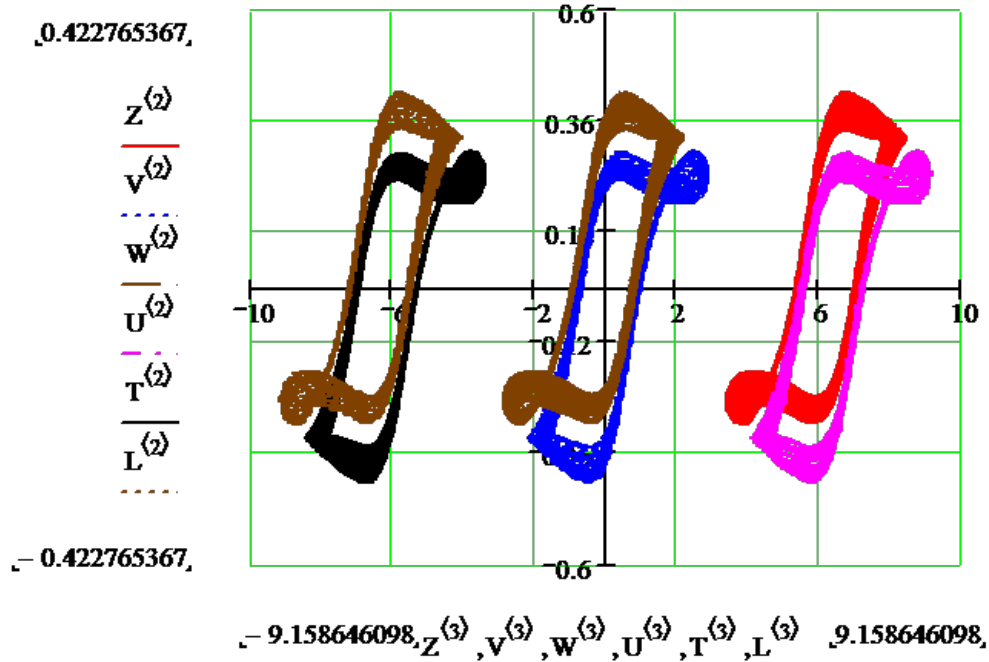
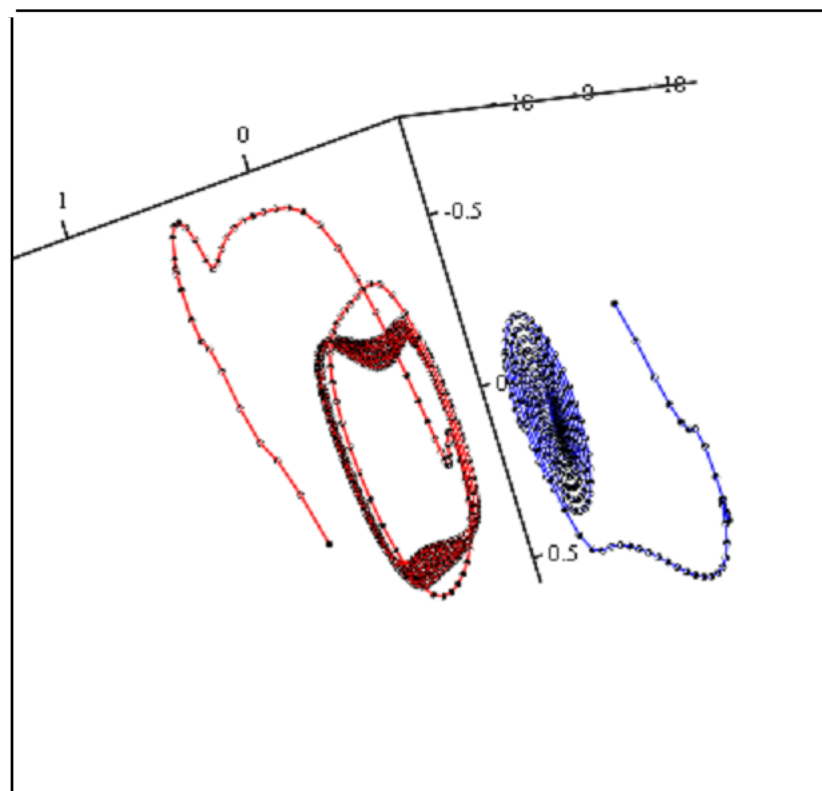


Рис. 12: Семейство скрытых аттракторов (проекция на плоскость (z_2, σ))

$t \rightarrow +\infty$ асимптотически приближается либо к некоторому состоянию равновесия, либо к одному из аттракторов найденного семейства (рис. 12)

4. Заключение

В результате проведенного исследования найдены новые классы динамических систем, имеющих бесконечное число состояний равновесия и обладающих скрытыми хаотическими аттракторами. Для поиска скрытых аттракторов применен разработанный автором оригинальный метод, позволяющий избежать "глобального сканирования" фазового пространства исследуемой системы. Автор выражает надежду, что вновь найденные системы найдут применение в приложениях, опирающихся на использование хаоса.



$$(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}), (\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \mathbf{z}^{(3)})$$

Рис. 13: Поведение траекторий в фазовом пространстве.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений. // ДАН СССР, 1965, т. 169, №3. С.558-561.
2. Lorenz, E. N. 1963, "Deterministic nonperiodic flow" *J.Atmos.Sci.*, vol. 20, pp. 65 -75.
3. Rössler, O. E. 1976, "An Equation for Continuous Chaos. Physics Letters A, vol. 57, no. 5, pp. 397 -398.
4. Chua, L. O. 1992, "A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits". *Proc. Of the IEEE 35th placeMidwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No. 92CH3099-9). Stateplace Washington*, ,vol. 2, pp. 916 – 926.
5. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости “в большом” динамических систем. // УМН, 1949, 4:4(32). С. 187–188.
6. Kalman, R. E. 1957, "Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems" *.Transactions of ASME*,vol. 79, no. 3, pp. 553-566.
7. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. 1964 .М. Наука, 367 с.
8. Леонов Г. А. Об устойчивости в целом нелинейных систем в критическом случае двух нулевых корней. // ПММ,1981, т.45, №4.С 752-755.

9. Леонов Г. А. Эффективные методы поиска периодических колебаний в динамических системах. // ПММ, 2010, т.74, №1. С 24–50.
10. Буркин И. М. О явлении буферности в многомерных динамических системах // Диф. уравнения, 2002, т.38, №5. С 615–625.
11. Буркин И. М., Соболева Д.В. О структуре глобального аттрактора многосвязных систем автоматического регулирования. // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2012, Вып. 1. С. 5–16.
12. Буркин И. М., Нгуен Нгок Хиен. Аналитико-численные методы поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах // Диф. уравнения, 2014, т. 50, № 13. С 1695–1717.
13. Буркин И. М. Метод перехода в пространство производных: 40 лет эволюции. // Диф. уравнения, 2015, т. 51, № 13. С. 1717–1751.
14. Andrievsky, B. R., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., Seledzhi, S. M. 2013, "Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators". *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 19, no. 1, pp. 37–41. (doi: 10.3182/20130902-5-DE-2040.00040).
15. Wang, B , Zhou, S., Zheng, X., Zhou, C., Dong, J., Zhao, J. 2015, "Image watermarking using chaotic map and DNA coding." *Optik*, vol. 126, pp. 4846–4851.
16. Liu, H., Kadir, A, Li, Y. 2016, "Audio encryption scheme by confusion and diffusion based on multi-scroll chaotic system and one-time keys." *Optik*, vol. 127 , pp. 7431–7438.
17. Брагин В. О, Вагайцев В. И., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблема Айзермана, Калмана и цепи Чуа. // Известия РАН, Теория и системы управления. 2011, т. 50, №4. С. 511–543.
18. Leonov, G. A., Kuznetsov, N. V. 2013, "Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits." *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 23, no. 1. 1330002.
19. Jafari, S., Sprott J. C., Golpayegani, S. M. R. H. 2013, "Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria." *Phys. Lett. A*, vol. 377, pp. 699–702.
20. Molaie, M., Jafari, S., Sprott, J. C., Golpayegani, S. M. R. H. 2013, "Simple chaotic flows with one stable equilibrium." *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 23, no. 11. 1350188.
21. Wang X., Chen G. 2012, "A chaotic system with only one stable equilibrium." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 3, pp. 1264–1272.
22. Wei Z. 2011, "Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria." *Phys. Lett. A*, vol. 376, pp. 102–108.
23. Wei, Z. 2011, "Delayed feedback on the 3-D chaotic system only with two stable node-foci." *Comput. Math. Appl.*, vol. 63, pp. 728–738..
24. Wang, X., Chen, G. 2013, "Constructing a chaotic system with any number of equilibria." *Nonlinear Dyn.*, vol. 71, pp. 429–436.
25. Jafari, S., Sprott, J. C. 2013, "Simple chaotic flows with a line equilibrium." *Chaos Solitons Fractals*, vol. 57, pp. 79–84

26. Pham, V.-T., Jafari, S., Volos, C. Vaidyanathan, S. , Kapitaniak, T., 2016, "A chaotic system with infinite equilibria located on a piecewise linear curve." *Optik*, vol. 127, pp. 9111–9117.
27. Jafari, S, Sprott, J. C., Malihe Molaie 2016, "A Simple Chaotic Flow with a Plane of Equilibria" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no. 6 1650098 , DOI: 10.1142/S021812741650098X
28. Viet-Thanh Phama, Jafari, S, CityplaceVolos, C. 2017, "A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuital implementation". *Optik*, vol. 131, pp. 343–349
29. Wang, X., Viet-Thanh Pham, CityplaceVolos,C. 2017, "Dynamics, Circuit Design, and Synchronization of a New Chaotic System with Closed Curve Equilibrium" *Complexity:1-9*. DOI: 10.1155/2017/7138971
30. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. 1978. М. Наука.400 с.
31. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. 1991. М., Мир,364 с.

REFERENCES

1. Shilnikov, L. P. 1965, "A case of the existence of a countable number of periodic motions *Sov. Math. Doklady*, vol 169, no. 3, pp. 558-561.
2. Lorenz, E. N. 1963, "Deterministic nonperiodic flow" *J.Atmos.Sci.*, vol. 20, pp. 65 -75.
3. Rössler, O.E. 1976, "An Equation for Continuous Chaos. *Physics Letters A*, vol. 57, no. 5, pp. 397 -398.
4. Chua, L. O. 1992, "A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits". *Proc. Of the IEEE 35th placeMidwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No. 92CH3099-9)*. *Stateplace Washington*, ,vol. 2, pp. 916 – 926.
5. Aizerman, M. A. 1949 "On a problem concerning the stability in the large of dynamical systems" *Uspekhi Mat. Nauk*, , vol. 4, pp. 187–188
6. Kalman, R. E. 1957, "Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems" *.Transactions of ASME*.,vol. 79, no. 3, pp. 553-566.
7. Pliss, V. A. 1964 , "Nelokal'nye problemy teorii kolebaniy"/[Nonlocal problems of the theory of oscillations]. Moscow, Nauka Publ.,. 367 pp
8. Leonov, G. A 1981 "On stability in the large of nonlinear systems in the critical case of two zero roots" *Pricl. Mat. Mekh*, , vol. 45, no. 4, pp. 752-755.
9. Leonov, G. A. 2010, "Effective methods for periodic oscillations search in dynamical systems." *Appl. Math. Mech.*, vol. 74, no. 1, pp. 24–50.
10. Burkin, I. M. 2002, "The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems." *Diff. Equations*, vol. 38, no. 5, pp. 615–625.
11. Burkin, I. M., Soboleva, D.V. 2012, "On structure of global attractor of MIMO automatic control systems". *Izvestiya TulGU. Estestvenniye nauki*, , vol. 1, pp. 5–16.

12. Burkin, I. M., Nguen, N. K. 2014, "Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems *Diff. Equations*, , vol. 50, No. 13, pp. 1695–1717.
13. Burkin, I. M., 2015, "Method of "Transition into Space of Derivatives": 40 Years of Evolution" *Diff. Equations*, vol. 51, no. 13, pp. 1717–1751
14. Andrievsky, B. R., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., Seledzhi, S.M. 2013, "Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators". *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 19, no. 1, pp. 37-41. (doi: 10.3182/20130902-5-DE-2040.00040).
15. Wang, B., Zhou, S., Zheng, X., Zhou, C., Dong, J., Zhao, J. 2015, "Image watermarking using chaotic map and DNA coding." *Optik*, vol. 126, pp. 4846–4851.
16. Liu, H., Kadir, A., Li, Y. 2016, "Audio encryption scheme by confusion and diffusion based on multi-scroll chaotic system and one-time keys." *Optik*, vol. 127, pp. 7431–7438.
17. Bragin, V. O., Vagitsev, V. I., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A. 2011, "Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua's circuits." *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, vol. 50, no. 4, pp. 511–543.
18. Leonov, G. A., Kuznetsov, N. V. 2013, "Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits." *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 23, no. 1.1330002.
19. Jafari, S., Sprott J. C., Golpayegani, S. M. R. H. 2013, "Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria." *Phys. Lett. A*, vol. 377, pp. 699-702.
20. Molaie, M., Jafari, S., Sprott, J. C., Golpayegani, S. M. R. H. 2013, "Simple chaotic flows with one stable equilibrium." *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 23, no. 11. 1350188.
21. Wang, X., Chen, G. 2012, "A chaotic system with only one stable equilibrium." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 3, pp. 1264–1272.
22. Wei, Z. 2011, "Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria." *Phys. Lett. A*, vol. 376, pp. 102–108.
23. Wei, Z. 2011, "Delayed feedback on the 3-D chaotic system only with two stable node-foci." *Comput. Math. Appl.*, vol. 63, pp. 728–738.
24. Wang, X., Chen, G. 2013, "Constructing a chaotic system with any number of equilibria." *Nonlinear Dyn.*, vol. 71, pp. 429-436.
25. Jafari, S., Sprott, J. C. 2013, "Simple chaotic flows with a line equilibrium. *Chaos Solitons Fractals*, vol. 57, pp. 79–84
26. Pham, V.-T., Jafari, S., Volos, C., Vaidyanathan, S., Kapitaniak, T., 2016, "A chaotic system with infinite equilibria located on a piecewise linear curve." *Optik*, vol. 127, pp. 9111–9117.
27. Jafari, S., Sprott, J. C., Malihe Molaie 2016, "A Simple Chaotic Flow with a Plane of Equilibria" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no. 6 1650098, DOI: 10.1142/S021812741650098X
28. Viet-Thanh Pham, Jafari, S., Cityplace Volos, C. 2017, "A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuital implementation". *Optik*, vol. 131, pp. 343–349

29. Wang, X., Viet-Thanh Pham, CityplaceVolos, C. 2017, "Dynamics, Circuit Design, and Synchronization of a New Chaotic System with Closed Curve Equilibrium" *Complexity:1-9*. DOI: 10.1155/2017/7138971
30. Gelig, A. Kh., Leonov, G. A., Yakubovich, V. A. 1978, "*The stability of nonlinear systems with nonunique equilibrium*" CityplaceMoscow, Nauka Publ., 400 p.
31. Holodniok, M., Klíč, A., Kubíček, M., Marek, M. 1991, "*Metody analízy nelineárných dynamických modeľů*" [*Methods of the analysis of nonlinear dynamic models*] placeCityMoscow, Mir, 364 p.

Получено 06.12.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-34-53

**НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ
ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ¹**

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов (г. Тула)

Аннотация

Экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана для положительно определенных функций в евклидовом пространстве или для функций с неотрицательным преобразованием Фурье имеют многообразные приложения в теории функций, теории приближений, теории вероятностей и метрической геометрии. Так как экстремальные функции в них являются радиальными, то с помощью усреднения по евклидовой сфере они допускают редукцию к аналогичным задачам для преобразования Ганкеля на полупрямой, для решения которых можно использовать квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям функции Бесселя, построенные Фраппье и Оливером.

Нормированная функция Бесселя, как ядро преобразования Ганкеля, является решением задачи Штурма–Лиувилля со степенным весом. Другим важным примером служит преобразование Якоби, ядро которого является решением задачи Штурма–Лиувилля с гиперболическим весом. Авторам работы недавно удалось построить квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля при естественных условиях на весовую функцию, которые, в частности, выполняются для степенного и гиперболического весов.

При этих условиях на весовую функцию в работе решены экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана, Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля. Построены экстремальные функции. Для задач Турана, Фейера, Бомана и Логана доказана их единственность.

Ключевые слова: Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой, преобразование Фурье, экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана, Логана, квадратурные формулы Гаусса и Маркова.

Библиография: 44 названий.

**SOME EXTREMAL PROBLEMS FOR THE FOURIER
TRANSFORM OVER THE EIGENFUNCTIONS OF THE
STURM–LIOUVILLE OPERATOR**

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov (Tula)

Abstract

The Turán, Fejér, Delsarte, Bohman, and Logan extremal problems for positive definite functions in Euclidean space or for functions with nonnegative Fourier transform have many applications in the theory of functions, approximation theory, probability theory, and metric geometry. Since the extremal functions in them are radial, by means of averaging over the Euclidean sphere they admit a reduction to analogous problems for the Hankel transform on the half-line. For the solution of these problems we can use the Gauss and Markov quadrature formulae on the half-line at zeros of the Bessel function, constructed by Frappier and Olivier.

¹Работа выполнена по грантам РФФИ № 16-01-00308

The normalized Bessel function, as the kernel of the Hankel transform, is the solution of the Sturm–Liouville problem with power weight. Another important example is the Jacobi transform, the kernel of which is the solution of the Sturm–Liouville problem with hyperbolic weight. The authors of the paper recently constructed the Gauss and Markov quadrature formulae on the half-line at zeros of the eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem under natural conditions on the weight function, which, in particular, are satisfied for power and hyperbolic weights.

Under these conditions on the weight function, the Turán, Fejér, Delsarte, Bohman, and Logan extremal problems for the Fourier transform over eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem are solved. Extremal functions are constructed. For the Turán, Fejér, Bohman, and Logan problems their uniqueness is proved.

Keywords: Sturm–Liouville problem on the half-line, Fourier transform, Turán, Fejér, Delsarte, Bohman and Logan extremal problems, Gauss and Markov quadrature formulae.

Bibliography: 44 titles.

1. Введение

Работа посвящена решению экстремальных задач Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля на полупрямой.

Эти задачи исследовались, прежде всего, на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ и других локально-компактных группах (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]). Задачи Турана, Фейера и Дельсарта также изучались и в периодическом случае (см. [17, 10, 18, 19, 20, 21, 22, 23]). Они имеют многообразные приложения в теории функций, теории приближений, теории чисел, метрической геометрии.

В этих задачах условия, в частности условие неотрицательности, накладываются на значения как функции, так и ее преобразования Фурье. Условие неотрицательности преобразования Фурье эквивалентно положительной определенности функции. Задачи Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана — это задачи для целых функций экспоненциального типа, являющихся преобразованиями Фурье неотрицательных функций с компактным носителем. Задача Турана ставится для непрерывных функций с компактным носителем и неотрицательным преобразованием Фурье. Если в ней от функции перейти к ее преобразованию Фурье, то мы получим задачу Фейера. Так, что задачи Турана и Фейера — эквивалентные.

Экстремальные функции в этих задачах являются радиальными и с помощью усреднения допустимых функций по евклидовой сфере они сводятся к аналогичным задачам для преобразования Ганкеля на полупрямой (см. [8, 9, 10, 24, 25]). Общие оценки в этих задачах получаются с помощью квадратурных формул Гаусса и Маркова для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Бесселя. Экстремальные функции выписываются с помощью анализа условий равенства в неравенствах, получаемых при применении квадратурных формул.

Экстремальные задачи для преобразования Данкля на $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля также сводятся к аналогичным экстремальным задачам для преобразования Ганкеля на полупрямой (см. [26, 27]).

Многие хорошо известные преобразования на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ определяются ядрами, являющимися собственными функциями оператора (задачи) Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(w(t) \frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(t) \right) + (\lambda^2 + \lambda_0^2) w(t) u_\lambda(t) &= 0, \\ u_\lambda(0) &= 1, \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(0) = 0, \quad \lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{1}$$

Для преобразования Ганкеля,

$$w(t) = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha \geq -1/2, \quad \lambda_0 = 0.$$

Квадратурные формулы Гаусса и Маркова для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Бесселя были доказаны в [28, 29]. Мы доказали подобные квадратурные формулы по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (1) [30]. Это позволило решить экстремальные задачи для преобразования Якоби (см. [31, 32, 33, 34]), чье ядро является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля с весовой функцией

$$w(t) = (\sinh t)^{2\alpha+1} (\cosh t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \geq \beta \geq -1/2, \quad \alpha > -1/2, \quad \lambda_0 = \alpha + \beta + 1.$$

В настоящей работе мы решаем экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой при естественных ограничениях на весовую функцию.

2. Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой

Необходимые факты об общей задаче Штурма–Лиувилля на полупрямой можно найти в [24, 35, 36, 37, 38].

Пусть $w(t)$ — непрерывная весовая функция на полупрямой $\mathbb{R}_+$, которая положительна и непрерывно дифференцируема при $t > 0$, параметр $\lambda_0 \geq 0$.

Предположим, что задача (1) при $\lambda \geq 0$ имеет решение $\varphi(t, \lambda)$, которое будем называть собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля. Также в дальнейшем будем предполагать, что для задачи Штурма–Лиувилля выполнены следующие свойства.

1. Собственная функция $\varphi(t, \lambda)$ — действительная функция, четная аналитическая в окрестности $\mathbb{R}$ по t и четная целая функция экспоненциального типа $|t|$ при $t \neq 0$ по λ ,

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad |\varphi(t, \lambda)| \leq 1, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}.$$

2. Для $t > 0, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(t, \lambda) = \varphi_0(t) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2(t)}\right),$$

где $\varphi_0(t) = \varphi(t, 0) > 0$, $0 < \lambda_1(t) < \dots < \lambda_k(t) < \dots$ — положительные нули $\varphi(t, \lambda)$ по λ . Нули $\lambda_k(t)$ непрерывны и монотонно убывают при $t > 0$. При этом $\lambda_k(t) = t_k^{-1}(t)$, где $t_k(\lambda)$ — положительные нули функции $\varphi(t, \lambda)$ по $t > 0$. Нули $t_k(\lambda)$ также непрерывны и монотонно убывают при $\lambda > 0$.

3. Спектральная мера $\sigma(\lambda)$ задачи (1) непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+$, $\sigma(0) = 0$ и

$$\sigma'(\lambda) = s(\lambda) \asymp \lambda^{2\alpha+1}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad \alpha \geq -1/2. \quad (2)$$

Пусть $d\mu(t) = w(t) dt$, $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|f\|_{p, d\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} < \infty,$$

$L^p(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|g\|_{p, d\sigma} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |g(\lambda)|^p d\sigma(\lambda) \right)^{1/p} < \infty,$$

$C_b(\mathbb{R}_+)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций. Нормы в $C_b(\mathbb{R}_+)$ и $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ обозначаем $\|\cdot\|_\infty$.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\varphi(t, \lambda) d\mu(t), \quad \mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda).$$

Для преобразований Фурье справедлива L^2 -теория, то есть они осуществляют метрический изоморфизм между пространствами $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ и $L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Равенства Планшереля имеют вид

$$\|\mathcal{F}f\|_{2,d\sigma} = \|f\|_{2,d\mu}, \quad \|\mathcal{F}^{-1}g\|_{2,d\mu} = \|g\|_{2,d\sigma}.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то $\mathcal{F}f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и применяя неравенство $|\varphi(t, \lambda)| \leq 1$, получим

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_{1,d\mu}. \quad (3)$$

Пусть для $p \geq 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — показатель Гельдера. Интерполируя неравенство (4) и равенство Планшереля, получим неравенство Хаусдорфа–Юнга

$$\|\mathcal{F}f\|_{p',d\sigma} \leq \|f\|_{p,d\mu}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Тогда для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо поточечное равенство

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{F}f(\lambda)\varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda). \quad (4)$$

После изменения на множестве меры нуль будет $f \in C(\mathbb{R}_+)$.

Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C(\mathbb{R}_+)$, то равенство (4) будет справедливо всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Применяя L^2 -теорию для преобразования Фурье, получим равенство (4) почти всюду. Так как правая часть (4) непрерывная функция, то после изменения на множестве меры нуль будет $f \in C(\mathbb{R}_+)$. $\square$

4. Для $t > 0$ равномерно на каждом компакте из $(0, \infty)$ справедлива асимптотика

$$\lambda^{\alpha+1/2}\varphi(t, \lambda) = C_t(\cos(t\lambda - c_t) + e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}O(|\lambda|^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad (5)$$

где $C_t > 0$, α из (2).

Из (5) вытекает [39, гл. 1], что при тех же условиях

$$\lambda^{\alpha+1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \lambda) = \lambda C_t(\cos(t\lambda - c_t + \pi/2) + e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}O(|\lambda|^{-1})). \quad (6)$$

Условия 1–4 являются достаточными для построения квадратурной формулы Гаусса на полуоси по нулям $\lambda_k(t)$ [30].

Пусть B_1^τ — класс четных целых функций экспоненциального типа не выше $\tau > 0$, чьи сужения на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$.

ТЕОРЕМА 2. [30] Для произвольной функции $g \in B_1^\tau$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами:

$$\int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2)). \quad (7)$$

Ряд в (7) сходится абсолютно.

Явные выражения для весов в квадратурной формуле (7) выписаны в [30, § 3]. Приведем формулу для первого коэффициента:

$$\gamma_1 = \int_0^\infty \left(\frac{2\lambda_1 \varphi(\tau/2, \lambda)}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\tau/2, \lambda_1)(\lambda^2 - \lambda_1^2)} \right)^2 d\sigma(\lambda) = \frac{2\lambda_1}{\Delta(\tau/2) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1) \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\tau/2, \lambda_1)}, \quad (8)$$

где $\gamma_1 = \gamma_1(\tau/2)$, $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$.

Для построения квадратурной формулы Маркова необходимы функции

$$u(t, \lambda) = \frac{\varphi(t, \lambda)}{\varphi_0(t)}.$$

Они являются решением задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta(t) \frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(t) \right) + \lambda^2 \Delta(t) u_\lambda(t) = 0, \quad (9)$$

$$u_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(0) = 0,$$

в которой весовая функция

$$\Delta(t) = \varphi_0^2(t) w(t).$$

Положительные нули $0 < \lambda'_1(t) < \dots < \lambda'_k(t) < \dots$ функции $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \lambda)$ по λ перемежаются с нулями функции $\varphi(t, \lambda)$ [30]:

$$0 < \lambda_1(t) < \lambda'_1(t) < \lambda_2(t) < \dots < \lambda_k(t) < \lambda'_k(t) < \lambda_{k+1}(t) < \dots$$

Функции $\lambda'_k(t)$ непрерывны и монотонно убывают по t .

ТЕОРЕМА 3. [30] *Для произвольной функции $g \in B_1^\tau$ справедлива квадратурная формула Маркова с положительными весами:*

$$\int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \gamma'_k(\tau/2) g(\lambda'_k(\tau/2)), \quad (10)$$

где $\lambda'_0(\tau/2) = 0$, $\gamma'_0(\tau/2) = \left(\int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt \right)^{-1}$. Ряд в (10) сходится абсолютно.

3. Дополнительное предположение и некоторые вспомогательные утверждения

Для построения экстремальных функций нам понадобится еще одно предположение о задаче Штурма–Лиувилля (1).

5. Для оператора обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{F} f(\lambda) \varphi(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad t, x \in \mathbb{R}_+,$$

действующего в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, справедливо интегральное представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z) d\tau_{x,t}(z), \quad (11)$$

где для всех $x, t \in \mathbb{R}_+$ $\tau_{x,t}$ — борелевская вероятностная мера, для которой $\tau_{x,t} = \tau_{t,x}$ и носитель $\text{supp } \tau_{x,t} \subset [|x - t|, x + t]$.

Свойства **1–5** выполняются для широкого класса весов w , частности, для степенного и гиперболического весов

$$w(t) = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha \geq -1/2,$$

$$w(t) = (\sinh t)^{2\alpha+1} (\cosh t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \geq \beta \geq -1/2, \quad \alpha > -1/2$$

(см. [30, 35, 36, 40, 41]).

Оператор обобщенного сдвига является положительным самосопряженным оператором и $T^t f(x) \in C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+)$, если $f \in C(\mathbb{R}_+)$ [42].

Представление (11) позволяет распространить оператор обобщенного сдвига T^t на пространства $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$, и пространство $C(\mathbb{R}_+)$ с нормой 1 для всех $t \in \mathbb{R}_+$ (см. [38]).

Отметим также следующие свойства оператора обобщенного сдвига:

$$\begin{aligned} T^0 f(x) &= f(x), \quad T^t 1 = 1, \\ T^t \varphi(x, \lambda) &= \varphi(t, \lambda) \varphi(x, \lambda), \quad \mathcal{F}(T^t f)(\lambda) = \varphi(t, \lambda) \mathcal{F}f(\lambda), \\ \int_{\mathbb{R}_+} T^t f d\mu &= \int_{\mathbb{R}_+} f d\mu, \quad f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu), \\ T^t f(x) &= 0, \quad \text{если } \operatorname{supp} f \subset [0, l], \quad |x - t| \geq l. \end{aligned} \tag{12}$$

Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку двух функций

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty T^t f(x) g(t) d\mu(t).$$

В силу самосопряженности T^t свертка коммутативная

$$(f * g)(x) = (g * f)(x).$$

Свойства свертки описываются в следующей теореме, являющейся вариантом теоремы Юнга.

ТЕОРЕМА 3. (1) Если $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $g \in L^q(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то $f * g \in L^r(\mathbb{R}_+, d\mu)$ и

$$\|f * g\|_{r, d\mu} \leq \|f\|_{p, d\mu} \|g\|_{q, d\mu}.$$

(2) Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leq p \leq 2$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то для почти всех λ при $1 < p \leq 2$ и всех λ при $p = 1$

$$\mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda) \mathcal{F}g(\lambda).$$

(3) Если $\operatorname{supp} f \subset [0, \delta]$, $\operatorname{supp} g \subset [0, \tau]$, то $\operatorname{supp} f * g \subset [0, \delta + \tau]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ и $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$, тогда $\frac{1}{s} \geq 0$, $\frac{1}{\nu} \geq 0$ и $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{\nu} = 1$. Так как $\|T^t f\|_{p, d\mu} \leq \|f\|_{p, d\mu}$, то, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty T^t f(x) g(t) d\mu(t) \right| &\leq \left(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p |g(t)|^q d\mu(t) \right)^{1/r} \\ &\times \left(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p d\mu(t) \right)^{1/s} \left(\int_0^\infty |g(t)|^q d\mu(t) \right)^{1/\nu} \\ &\leq \left(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p |g(t)|^q d\mu(t) \right)^{1/r} \|f\|_{p, d\mu}^{p/s} \|g\|_{q, d\mu}^{q/\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{r,d\mu} &\leq \left(\int_0^\infty \int_0^\infty |T^t f(x)|^p |g(t)|^q d\mu(t) d\mu(x) \right)^{1/r} \\ &\times \|f\|_{p,d\mu}^{p/\mu} \|g\|_{q,d\mu}^{q/\nu} \leq \|f\|_{p,d\mu_k} \|g\|_{q,d\mu}. \end{aligned}$$

Утверждение (1) доказано.

Если $f \in C(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_0^\infty T^t f(x) g(t) d\mu(t) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{F}f(\lambda) \varphi(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\sigma(\lambda) g(t) d\mu(t) \\ &= \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) \mathcal{F}f(\lambda) \mathcal{F}g(\lambda) d\mu(\lambda). \end{aligned}$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то для некоторой последовательности $f_n \in C(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, для которой $\mathcal{F}f_n \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, $\|f - f_n\|_{p,d\mu} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), в силу неравенства Хаусдорфа–Юнга и неравенства (1) для $1 \leq p \leq 2$ будет

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F}(f * g)(\lambda) - \mathcal{F}f(\lambda) \mathcal{F}g(\lambda)\|_{p',d\sigma} \\ &\leq \|\mathcal{F}((f - f_n) * g)(\lambda)\|_{p',d\sigma} + \|\mathcal{F}(f - f_n)(\lambda) \mathcal{F}g(\lambda)\|_{p',d\sigma} \\ &\leq \|((f - f_n) * g)\|_{p,d\mu} + \|f - f_n\|_{p,d\mu} \|\mathcal{F}g\|_\infty \\ &\leq \|f - f_n\|_{p,d\mu} (\|g\|_{1,d\mu} + \|\mathcal{F}g\|_\infty) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Переходя, если нужно к подпоследовательности, получим равенство (2) почти всюду при $1 < p \leq 2$. При $p = 1$ (2) верно для всех λ , так как обе части (2) непрерывные функции.

Утверждение (3) вытекает из свойства (12) оператора сдвига T^t . $\square$

Нам понадобятся также следующие утверждения.

ЛЕММА 1. [43] Пусть $\alpha > -1/2$. Существует четная целая функция $\omega_\alpha(z)$ экспоненциального типа 2, для которой

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(x) &> 0, \quad x > 0, \\ \omega_\alpha(x) &\asymp x^{2\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad |\omega_\alpha(iy)| \asymp y^{2\alpha+1} e^{2y}, \quad y \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. [44, прил. VII, лемма Ахиезера] Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, F — четная целая функция экспоненциального типа $\tau > 0$, ограниченная на $\mathbb{R}$, Ω — четная целая функция конечного экспоненциального типа, все корни которой входят в множество корней F , и

$$\liminf_{y \rightarrow +\infty} e^{-\tau y} y^{2m} |\Omega(iy)| > 0.$$

Тогда функция $\psi(z) = F(z)/\Omega(z)$ есть многочлен степени не больше $2m$.

4. Задачи Турана и Фейера

ЗАДАЧА ТУРАНА. Вычислить величину

$$T(\tau, \mathbb{R}_+) = \sup \mathcal{F}f(0) = \sup \int_0^\infty f(t) \varphi_0(t) dt,$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad f(0) = 1, \quad \text{supp } f \subset [0, \tau], \quad \mathcal{F}f(y) \geq 0. \quad (13)$$

ЗАДАЧА ФЕЙЕРА. Вычислить величину

$$F(\tau, \mathbb{R}_+) = \sup g(0),$$

если

$$g = \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad g(\lambda) \geq 0, \quad f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad f(0) = 1, \quad \text{supp } f \subset [0, \tau]. \quad (14)$$

В силу (4), (13), (14) задачи Турана и Фейера эквивалентные, так как

$$f(t) = \int_0^\infty g(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad g(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \varphi(t, \lambda) d\mu(t).$$

Следовательно, достаточно решить одну из них, например, задачу Фейера.

Так как $\varphi(t, \lambda)$ — целая функция λ экспоненциального типа не выше $|t|$, то из представления $g(\lambda) = \int_0^\tau f(t) \varphi(t, \lambda) d\mu(t)$ и (14) вытекает, что $g \in B_1^\tau$. В дальнейшем $\chi_\tau(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0, \tau]$.

ТЕОРЕМА 4. Если $\tau > 0$, то в задаче Фейера

$$F(\tau, \mathbb{R}_+) = \int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt, \quad (15)$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = a(\tau) \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda)}{\lambda^2} \right)^2, \quad (16)$$

где $\Delta(t) = \varphi^2(t, 0)w(t)$ и

$$a(\tau) = \frac{\Delta^2(\tau/2)}{\int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим оценку сверху. Так как допустимая функция $g \in B_1^\tau$, то применяя квадратурную формулу Маркова (10), получим

$$1 = \int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \gamma'_k(\tau/2) g(\lambda'_k(\tau/2)) \geq \gamma'_0(\tau/2) g(0) = \frac{g(0)}{\int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt}. \quad (17)$$

Поэтому,

$$F(\tau, \mathbb{R}_+) \leq \int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt.$$

Построим экстремальную функцию. Положим

$$c_\tau = \int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt, \quad f_\tau(t) = c_\tau^{-1} (\varphi_0 \chi_{\tau/2} * \varphi_0 \chi_{\tau/2})(t), \quad g_\tau(\lambda) = \mathcal{F}f_\tau(\lambda).$$

Из положительности оператора обобщенного сдвига и теоремы 3

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &\geq 0, \quad f_\tau(0) = 1, \quad \text{supp } f_\tau \subset [0, \tau], \\ g_\tau(\lambda) &= c_\tau^{-1} (\mathcal{F}(\varphi_0 \chi_{\tau/2})(\lambda))^2 \geq 0, \quad g_\tau \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (18)$$

По теореме 1 функцию $f_\tau(t)$ можно считать непрерывной. Таким образом, функция $g_\tau(\lambda)$ является допустимой в задаче Фейера, поэтому

$$F(\tau, \mathbb{R}_+) \geq g_\tau(0) = c_\tau^{-1} (\mathcal{F}(\varphi_0 \chi_{\tau/2})(0))^2 = \int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt.$$

Равенство (15) доказано.

Вычислим $g_\tau(\lambda)$. Из уравнения (9)

$$\Delta(t)u(t, \lambda) = -\lambda^{-2}(\Delta(t)(u(t, \lambda))'_t)'_t,$$

следовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi_0 \chi_{\tau/2})(\lambda) &= \int_0^{\tau/2} \varphi_0(t) \varphi(t, \lambda) d\mu(t) = \int_0^{\tau/2} \Delta(t) u(t, \lambda) dt \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \Delta(t) \frac{\partial u}{\partial t}(t, \lambda) \Big|_{t=0}^{\tau/2} = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta(\tau/2) \frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим (16).

Докажем единственность экстремальной функции. Пусть $g_0(\lambda)$ — экстремальная функция в задаче Фейера, функция $\omega_{\alpha+1}(\lambda)$ из леммы 1. Так как функция $g_0(\lambda)$ обращает неравенство (17) в равенство, то она имеет двойные нули в точках $\lambda'_k(\tau/2)$, $k \geq 1$. Рассмотрим четные целые функции

$$F(\lambda) = \omega_{\alpha+1}(\lambda)g_0(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_{\alpha+1}(\lambda)g_\tau(\lambda).$$

Корни $\Omega(\lambda)$ содержатся среди корней функции $F(\lambda)$. Применяя асимптотические формулы (5), (6), получим

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\varphi(t, \lambda)}{\varphi_0(t)} \right)'_t \left(\frac{\tau}{2} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda) \varphi_0(\tau/2) - \varphi(\tau/2, \lambda) \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(\tau/2)}{\lambda^2 \varphi_0^2(\tau/2)} \\ &= \frac{C_{\tau/2}}{\lambda^2 \varphi_0(\tau/2)} \left\{ \cos(\lambda\tau/2 - c_{\tau/2} + \pi/2) + e^{\tau|\operatorname{Im} \lambda|/2} O(|\lambda|^{-1}) \right\}, \end{aligned}$$

поэтому

$$|\psi(iy)| \asymp y^{-\alpha-3/2} e^{\tau y/2}, \quad y \rightarrow +\infty.$$

Применяя (16) и лемму 1, получим

$$|\Omega(iy)| \asymp e^{(\tau+2)y}, \quad y \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из леммы 2 $g_0(\lambda) = g_\tau(\lambda)$. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Если $\tau > 0$, то в задаче Турана

$$T(\tau, \mathbb{R}_+) = \int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$f_\tau(t) = \mathcal{F}^{-1} g_\tau(t) = \frac{(\varphi_0 \chi_{\tau/2} * \varphi_0 \chi_{\tau/2})(t)}{\int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt}.$$

5. Задача Дельсарта

ЗАДАЧА ДЕЛЬСАРТА. Вычислить величину

$$D(\tau, s, \mathbb{R}_+) = \sup \mathcal{F}^{-1}g(0) = \sup \int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda),$$

если

$$\begin{aligned} g = \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad g(0) = 1, \quad g(\lambda) \leq 0, \quad \lambda \geq s, \\ f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad \text{supp } f \subset [0, \tau] \quad f(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Задача Дельсарта решена только при дополнительном соотношении между параметрами τ и $s = \lambda'_1(\tau/2)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\lambda'_1 = \lambda'_1(\tau/2)$, $\tau > 0$. Тогда в задаче Дельсарта

$$D(\tau, \lambda'_1, \mathbb{R}_+) = \left(\int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt \right)^{-1}, \quad (20)$$

экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{b(\tau) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda) \right)^2}{\lambda^4 (1 - (\lambda/\lambda'_1)^2)}, \quad (21)$$

где

$$b(\tau) = \left(\frac{1}{\Delta(\tau/2)} \int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt \right)^{-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим оценку сверху. Так как допустимая функция $g \in B_1^+$, то применяя квадратурную формулу Маркова (10), условие $g(\lambda) \leq 0$ при $\lambda \geq \lambda'_1$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}g(0) &= \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma'_k(\tau/2) g(\lambda'_k(\tau/2)) \\ &\leq \gamma'_0(\tau/2) g(0) = \frac{1}{\int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D(\tau, \lambda'_1, \mathbb{R}_+) \leq \left(\int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt \right)^{-1}.$$

Построим экстремальную функцию. Пусть

$$f_1(t) = \varphi_0(t) \chi_{\tau/2}(t), \quad f_2(t) = \left(\varphi(t, \lambda'_1) - u(\tau/2, \lambda'_1) \varphi_0(t) \right) \chi_{\tau/2}(t),$$

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t), \quad g(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda).$$

Покажем, что для $0 \leq t \leq \tau/2$

$$v(t) = \varphi(t, \lambda'_1) - u(\tau/2, \lambda'_1) \varphi_0(t) = \varphi_0(t) (u(t, \lambda'_1) - u(\tau/2, \lambda'_1)) \geq 0.$$

Достаточно показать, что функция $u(t, \lambda'_1)$ не возрастает на отрезке $[0, \tau/2]$. Так как $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \lambda'_1(\tau/2)) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda'_1(\tau/2)) = 0$ и $\lambda'_1(t)$ убывает по t , то производная $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \lambda'_1(\tau/2))$ сохраняет знак. Имеем $u(0, \lambda'_1) = 1$ и $u(\tau/2, \lambda'_1) < 0$ в силу неравенств $\lambda_1(\tau/2) < \lambda'_1(\tau/2) < \lambda_2(\tau/2)$ (11). Следовательно, производная неположительна.

В силу положительности оператора обобщенного сдвига, теоремы 3

$$\begin{aligned} f_1(t) \geq 0, \quad f_2(t) \geq 0, \quad f(t) \geq 0, \quad \text{supp } f \subset [0, \tau], \\ g(\lambda) = \mathcal{F}f_1(\lambda)\mathcal{F}f_2(\lambda), \quad g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (22)$$

По теореме 1 функцию $f(t)$ можно считать непрерывной.

Функция $\mathcal{F}f_1(\lambda)$ вычислена при доказательстве теоремы 4:

$$\mathcal{F}f_1(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta(\tau/2) \frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda), \quad (23)$$

причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u'_\lambda(\tau/2)}{\lambda^2} = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta(\tau/2)} \int_0^{\tau/2} \Delta(t) u(t, \lambda) dt = -\frac{1}{\Delta(\tau/2)} \int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt. \quad (24)$$

Согласно (9)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Delta(t) \left(u(t, \lambda'_1) \frac{\partial u}{\partial t}(t, \lambda) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, \lambda'_1) u(t, \lambda) \right) \right\} = ((\lambda'_1)^2 - \lambda^2) \Delta(t) u(t, \lambda'_1) u(t, \lambda),$$

поэтому используя (23), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f_2(\lambda) &= \int_0^{\tau/2} \Delta(t) u(t, \lambda'_1) u(t, \lambda) dt - u(\tau/2, \lambda'_1) \mathcal{F}f_1(\lambda) \\ &= \frac{\Delta(\tau/2) u(\tau/2, \lambda'_1) \frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda)}{(\lambda'_1)^2 - \lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \Delta(\tau/2) u(\tau/2, \lambda'_1) \frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda) \\ &= \frac{(\lambda'_1)^2 \Delta(\tau/2) u(\tau/2, \lambda'_1) \frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda)}{\lambda^2 ((\lambda'_1)^2 - \lambda^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда и еще раз из (23)

$$g(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda) = -\frac{(\lambda'_1)^2 \Delta^2(\tau/2) u(\tau/2, \lambda'_1) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda) \right)^2}{\lambda^4 ((\lambda'_1)^2 - \lambda^2)}.$$

Положим $g_\tau(\lambda) = g(\lambda)/g(0)$. В силу (24)

$$g_\tau(\lambda) = \frac{b(\tau) \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(\tau/2) \right)^2}{\lambda^4 (1 - (\lambda/\lambda'_1)^2)},$$

где

$$b(\tau) = \left(\frac{1}{\Delta(\tau/2)} \int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt \right)^{-2}.$$

Так как $g_\tau(0) = 1$, то согласно (22) функция $g_\tau(\lambda)$ является допустимой в задаче Дельсарта. Применяя квадратурную формулу Маркова (10), получим

$$D(\tau, \lambda'_1, \mathbb{R}_+) \geq \int_0^\infty g_\tau(\lambda) d\sigma(\lambda) = \left(\int_0^{\tau/2} \Delta(t) dt \right)^{-1}.$$

Равенство (20) доказано. Функция (21) является экстремальной в задаче Дельсарта. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае степенного и гиперболического весов экстремальная функция в задаче Дельсарта единственна [24, 31]. В общем случае для доказательства единственности экстремальной функции необходима дополнительная информация о мере в интегральном представлении оператора обобщенного сдвига.

6. Задача Бомана

ЗАДАЧА БОМАНА. Вычислить величину

$$B(\tau, \mathbb{R}_+) = \inf \int_0^\infty (\lambda^2 + \lambda_0^2) g(\lambda) d\sigma(\lambda),$$

если функция $g(\lambda)$ удовлетворяет условиям (13) и $\lambda_0 \geq 0$ из (1).

Пусть

$$D_w u(t) = -\frac{1}{w(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(w(t) \frac{\partial}{\partial t} u(t) \right)$$

— дифференциальный оператор, связанный с задачей Штурма–Лиувилля (1). Согласно (1)

$$D_w \varphi(t, \lambda) = (\lambda^2 + \rho^2) \varphi(t, \lambda),$$

поэтому функционал в задаче Бомана может быть записан так

$$\int_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda) d\sigma(\lambda) = D_w \mathcal{F}^{-1} g(0).$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$, $\gamma_1 = \gamma_1(\tau/2)$, $\tau > 0$. Тогда в задаче Бомана

$$B(\tau, \mathbb{R}_+) = \lambda_1^2 + \lambda_0^2, \quad (25)$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{1}{c(\tau)} \left(\frac{\varphi(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2} \right)^2, \quad (26)$$

где

$$c(\tau) = \gamma_1 \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \left(\frac{\varphi(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2} \right)^2 = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\tau/2, \lambda_1)}{2\lambda_1 w(\tau/2) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1)}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим оценку снизу. Как уже отмечалось, допустимая функция $g \in B_1^+$. Мы можем предполагать, что $\lambda^2 g \in B_1^+$, иначе $B(\tau, \mathbb{R}_+) = \infty$. Применяя квадратурную формулу Гаусса (7) дважды, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\lambda^2 + \lambda_0^2) g(\lambda) d\sigma(\lambda) &= \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) (\lambda_k^2(\tau/2) + \lambda_0^2) g(\lambda_k(\tau/2)) \\ &\geq (\lambda_1^2 + \lambda_0^2) \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) g(\lambda_k(\tau/2)) \\ &= (\lambda_1^2 + \lambda_0^2) \int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda) \\ &= (\lambda_1^2 + \lambda_0^2) \mathcal{F}^{-1} g(0) = \lambda_1^2 + \lambda_0^2, \end{aligned} \quad (28)$$

поэтому $B(\tau, \mathbb{R}_+) \geq \lambda_1^2 + \lambda_0^2$.

Построим экстремальную функцию. Пусть

$$f_1(t) = \varphi(t, \lambda_1) \chi_{\tau/2}(t), \quad f(t) = (f_1 * f_1)(t).$$

Имеем

$$f_1(t) \geq 0, \quad \text{supp } f_1 \subset [0, \tau/2], \quad f_1 \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{F} f_1 \in L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma).$$

В силу положительности оператора обобщенного сдвига и теоремы 3

$$\begin{aligned} f(t) &\geq 0, \quad \text{supp } f \subset [0, \tau], \quad f \in C_b(\mathbb{R}_+), \\ g(\lambda) &= \mathcal{F}f(\lambda) = (\mathcal{F}f_1(\lambda))^2 \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Согласно (1)

$$\left\{ w(t) \left(\varphi(t, \lambda_1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \lambda) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \lambda_1) \varphi(t, \lambda) \right) \right\}'_t = (\lambda_1^2 - \lambda^2) w(t) \varphi(t, \lambda_1) \varphi(t, \lambda),$$

поэтому

$$\mathcal{F}f_1(\lambda) = \int_0^{\tau/2} w(t) \varphi(t, \lambda_1) \varphi(t, \lambda) dt = - \frac{w(\tau/2) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1) \varphi(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}.$$

Следовательно,

$$g(\lambda) = \frac{w^2(\tau/2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1) \right)^2 \varphi^2(\tau/2, \lambda)}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)^2}.$$

Из асимптотики (5) $g \in B_1^+$. Применяя (7), получим

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathcal{F}^{-1}g(0) = \int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) g(\lambda_k(\tau/2)) \\ &= \gamma_1 w^2(\tau/2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1) \right)^2 \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \left(\frac{\varphi(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Согласно (29) функция (26)

$$g_\tau(\lambda) = \frac{1}{c(\tau)} \left(\frac{\varphi(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2} \right)^2, \quad c(\tau) = \gamma_1 \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \left(\frac{\varphi(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2} \right)^2,$$

является допустимой в задаче Бомана и по квадратурной формуле Гаусса (7)

$$\begin{aligned} B(\tau, \mathbb{R}_+) &\leq \int_0^\infty (\lambda^2 + \lambda_0^2) g_\tau(\lambda) d\sigma(\lambda) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) (\lambda_k^2(\tau/2) + \lambda_0^2) g_\tau(\lambda_k(\tau/2)) \\ &= \gamma_1 (\lambda_1^2 + \lambda_0^2) g_\tau(\lambda_1) = \lambda_1^2 + \lambda_0^2. \end{aligned}$$

Равенство (25) доказано. Функция (26) является экстремальной. Равенство (27) вытекает из (8).

Докажем единственность экстремальной функции. Пусть $g_0(\lambda)$ — экстремальная функция в задаче Фейера, функция $\omega_\alpha(\lambda)$ из леммы 1.

Так как $g_0(\lambda)$ обращает неравенство (28) в равенство, то в точках $\lambda_k(\tau/2)$, $k \geq 2$, она имеет двойные нули. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda) g_0(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda) g_\tau(\lambda).$$

В силу (26), асимптотики (5) и леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp y^{-4} e^{(\tau+2)y}, \quad y \rightarrow +\infty.$$

По лемме 2 $g_0(\lambda) = \psi(\lambda) g_\tau(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — четный многочлен степени не выше 4. Его степень не может равняться 2 или 4, иначе по асимптотикам (2), (5) будем иметь $\lambda^2 g_0 \notin L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Следовательно, $\psi(\lambda) = \text{const} = 1$ и $g_0(\lambda) = g_\tau(\lambda)$. $\square$

7. Задача Логана

Пусть $g_0(\lambda)$ — действительная непрерывная на полупрямой функция,

$$\Lambda(g) = \sup\{\lambda > 0: g(\lambda) > 0\}.$$

ЗАДАЧА ЛОГАНА. Вычислить величину

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \inf \Lambda(g),$$

если

$$\begin{aligned} g &= \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma), \quad g(\lambda) \not\equiv 0, \\ f &\in C_b(\mathbb{R}_+), \quad f(t) \geq 0, \quad \text{supp } f \subset [0, \tau]. \end{aligned} \quad (30)$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$, $\gamma_1 = \gamma_1(\tau/2)$, $\tau > 0$. Тогда в задаче Логана

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \lambda_1,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{\varphi^2(\tau/2, \lambda)}{1 - (\lambda/\lambda_1)^2}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\omega_\alpha(\lambda)$ из леммы 1. Предположим, что

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \lambda_0 < \lambda_1.$$

Тогда для некоторой допустимой функции $g(\lambda)$ будет $g(\lambda) \leq 0$ для $\lambda \geq \lambda_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Так как $g \in B_1^T$, то применяя квадратурную формулу Гаусса (7), получим

$$0 \leq \int_0^\infty g(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) g(\lambda_k(\tau/2)) \leq 0, \quad (32)$$

поэтому в точках $\lambda_k(\tau/2)$ ($k \geq 1$) функция $g(\lambda)$ имеет двойные нули. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(z)\varphi^2(\tau/2, \lambda).$$

Из асимптотики (5), леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp e^{(r+2)y}, \quad y \rightarrow +\infty.$$

Применяя лемму 2, получим $g(\lambda) = c\varphi^2(\tau/2, \lambda)$, $c > 0$, что противоречит условию

$$g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma).$$

Таким образом,

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) \geq \lambda_1.$$

Функция $g_\tau(\lambda)$ (31) — экстремальная, так как $\Lambda(g_\tau) = \lambda_1$ и $f(t) = \mathcal{F}^{-1}g_\tau(t) \in C_b(\mathbb{R}_+)$, $f(t) \geq 0$, $\text{supp } f \subset [0, \tau]$ (см. [24, 38]).

Докажем единственность экстремальной функции. Пусть $g_0(\lambda)$ — экстремальная функция. Так как $g_0(\lambda) \leq 0$ для $\lambda \geq \lambda_1$, то она обращает неравенство (32) в равенство. Следовательно в точках $\lambda_k(\tau/2)$, $k \geq 2$, она имеет двойные нули, а в точке λ_1 она имеет, по крайней мере, нуль первого порядка. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g_0(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g_\tau(\lambda).$$

Из асимптотики (5), леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp y^{-2}e^{(\tau+2)y}, \quad y \rightarrow +\infty.$$

Применяя лемму 2, получим $g_0(\lambda) = \psi(\lambda)g_\tau(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — четный многочлен степени не выше 2. Он не может иметь степень 2, иначе по асимптотике (5) $g_0 \notin L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Следовательно, $g_0(\lambda) = cg_\tau(\lambda)$, $c > 0$. $\square$

8. Заключение

В работе получены достаточно общие результаты. Тем не менее было бы интересно их усилить в трех направлениях.

В задачах Фейера, Дельсарта, Бомана, Логана при определении допустимых функций мы требуем, чтобы они были интегрируемыми преобразованиями Фурье непрерывных функций с носителем на отрезке $[0, \tau]$. Это требование влечет их принадлежность классу целых функций B_1^+ . Интересно было бы в наших предположениях о задаче Штурма–Лиувилля доказать обратное утверждение, известное как теорема Пэли–Винера. Для степенного и гиперболического весов теорема Пэли–Винера известна.

Интересно результаты работы распространить на случай веса $v(x) = w(|x|)$ на всей прямой. Для этого необходимо собственную функцию $\varphi(t, \lambda)$ с $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ продолжить на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, и основываясь на этом продолжении, построить гармонический анализ в пространствах с этим весом. Такие продолжения для степенного и гиперболического весов известны.

Интересно также результаты работы распространить на случаи многомерных весов

$$w(x) = \prod_{j=1}^d w_j(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$$

и

$$v(x) = \prod_{j=1}^d w_j(|x_j|), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В. В., Бердышева Е. Е. Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в шестиугольнике // Тр. ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 21–29.
2. Arestov V. V., Berdysheva E. E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, № 3. P. 381–388.
3. Бердышева Е. Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 336–350.
4. Boas R. P., Кас М. Inequalities for Fourier Transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 189–206.
5. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1960. Vol. 4. P. 99–157.
6. Cohn H. New upper bounds on sphere packings II // Geom. Topol. 2002. Vol. 6. P. 329–353.
7. Ehm W., Gneiting T., Richards D. Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.
8. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 179–187.
9. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа, связанная с оценкой Левенштейна плотности упаковки $\mathbb{R}^n$ шарами // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6, № 1. С. 71–78.

10. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 346–352.
11. Kolountzakis M. M., Révész Sz. Gy. On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.
12. Kolountzakis M. M., Révész Sz. Gy. Turán's extremal problem for positive definite functions on groups // J. London Math. Soc. 2006. Vol. 74. P. 475–496.
13. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 249–252.
14. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 253–257.
15. Révész Sz. Gy. Turán's extremal problem on locally compact abelian groups // Anal. Math. 2011. Vol. 37, № 1. P. 15–50.
16. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.
17. Fejér L. Über trigonometrische Polynome // J. Angew. Math. 1915. Vol. 146. P. 53–82.
18. Горбачев Д. В., Маношина А. С. Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С. 688–700.
19. Иванов В. И., Рудомазина Ю. Д. О задаче Турана для периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье и малым носителем // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 941–945.
20. Иванов В. И., Горбачев Д. В., Рудомазина Ю. Д. Некоторые экстремальные задачи для периодических функций с условиями на их значения и коэффициенты Фурье // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 92–111.
21. Иванов В. И. О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 6. С. 934–939.
22. Ivanov V. I., Ivanov A. V. Turán problems for periodic positive definite functions // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2010. Vol. 33. P. 219–237.
23. Stechkin S. B. An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. Vol. 23, № 3-4. P. 289–291.
24. Горбачев Д. В. Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Гриф и К, 2005. 192 с.
25. Горбачев Д. В. Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье–Ганкеля // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.
26. Иванов А. А. Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 26–44.
27. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 115–123.

28. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60. P. 303–316.
29. Grozev G. R., Rahman Q. I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64. P. 715–725.
30. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.
31. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. The Delsarte Extremal Problem for the Jacobi Transform // Math. Notes. 2016. Vol. 100, № 5. P. 677–686.
32. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 126–135.
33. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Turán’s and Fejér’s extremal problems for Jacobi transform // Anal. Math. 2017. [In press]
34. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid // Math. Notes. 2017. [In press]
35. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 671 с.
36. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
37. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 519–530.
38. Горбачев Д. В., Иванов В. И., Вепринцев Р. А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 136–152.
39. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
40. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. Vol. 11. P. 245–262.
41. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure // Ark. Mat. 1979. Vol. 17. P. 139–151.
42. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973. 312 с.
43. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Vepintsev R. A. Optimal Argument in Sharp Jackson’s inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 6. P. 338–348.
44. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

REFERENCES

1. Arestov V. V., Berdysheva E. E., 2001, "Turán's problem for positive definite functions with supports in a hexagon", *Proc. Steklov Inst. Math.*, no 1 suppl, pp. 20–29.
2. Arestov V. V., Berdysheva E. E., 2002, "The Turán problem for a class of polytopes", *East J. Approx.*, vol. 8, no 3, pp. 381–388.
3. Berdysheva E. E., 1999, "Two related extremal problems for entire functions of several variables", *Math. Notes*, vol. 66, no 3, pp. 271–282.
4. Boas R. P., Kac M., 1945, "Inequalities for Fourier Transforms of positive functions", *Duke Math. J.*, vol. 12, pp. 189–206.
5. Bohman H., 1960, "Approximate Fourier analysis of distribution functions", *Ark. Mat.*, vol. 4, pp. 99–157.
6. Cohn H., 2002, "New upper bounds on sphere packings II", *Geom. Topol.*, vol. 6, pp. 329–353.
7. Ehm W., Gneiting T., Richards D., 2004, "Convolution roots of radial positive definite functions with compact support", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 356, pp. 4655–4685.
8. Gorbachev D. V., 2000, "Extremum problems for entire functions of exponential spherical type", *Math. Notes*, vol. 68, no 2, pp. 159–166.
9. Gorbachev D. V., 2000, "An extremal problem for an entire functions of exponential spherical type related to the Levenshtein estimate for the sphere packing density in $\mathbb{R}^m$ ", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, vol. 6, no 1, pp. 71–78. [in Russian]
10. Gorbachev D. V., 2001, "An extremal problem for periodic functions with supports in the ball", *Math. Notes*, vol. 69, no 3, pp. 313–319.
11. Kolountzakis M. M., Révész Sz. Gy., 2003, "On a problem of Turán about positive definite functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 131, pp. 3423–3430.
12. Kolountzakis M. M., Révész Sz. Gy., 2006, "Turán's extremal problem for positive definite functions on groups", *J. London Math. Soc.*, vol. 74, pp. 475–496.
13. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no 2, pp. 249–252.
14. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no 2, pp. 253–257.
15. Révész Sz. Gy., 2011, "Turán's extremal problem on locally compact abelian groups", *Anal. Math.*, vol. 37, no 1, pp. 15–50.
16. Siegel C. L., 1935, "Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem", *Acta Math.*, vol. 65, pp. 307–323.
17. Fejér L., 1915, "Über trigonometrische Polynome", *J. Angew. Math.*, vol. 146, pp. 53–82.
18. Gorbachev D. V., Manoshina A. S., 2004, "Turán Extremal Problem for Periodic Functions with Small Support and Its Applications", *Math. Notes*, vol. 76, no 5, pp. 640–652.
19. Ivanov V. I., Rudomazina Yu. D., 2005, "About Turán problem for periodic functions with nonnegative Fourier coefficients and small support", *Math. Notes*, vol. 77, no 6, pp. 870–875.

20. Ivanov V. I., Gorbachev D. V., Rudomazina Yu. D., 2005, “Some extremal problems for periodic functions with conditions on their values and Fourier coefficients” *Proc. Steklov Inst. Math.*, no 2 suppl, pp. 139–159.
21. Ivanov V. I., 2006, “On the Turán and Delsarte problems for periodic positive definite functions”, *Math. Notes*, vol. 80, no 6, pp 875–880.
22. Ivanov V. I., Ivanov A. V., 2010, “Turán problems for periodic positive definite functions”, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.*, vol. 33, pp. 219–237.
23. Stechkin S. B., 1972, “An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients”, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol. 23, no 3-4, pp. 289–291.
24. Gorbachev D. V., 2005, “Selected Problems in the Theory of Functions and Approximation Theory: Their Applications”, *Tula: Grif and K*, 192 p. [in Russian]
25. Gorbachev D. V., 2014, “Boman extremal problem for Fourier–Hankel transform”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 4, pp. 5–10. [in Russian]
26. Ivanov A. V., 2010, “Some extremal problem for entire functions in weighted spaces”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 26–44. [in Russian]
27. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2015, “Boman extremal problem for Dunkl transform”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 21, no 4, pp. 115–123. [in Russian]
28. Frappier C., Olivier P., 1993, “A quadrature formula involving zeros of Bessel functions”, *Math. Comp.*, vol. 60, pp. 303–316.
29. Grozev G. R., Rahman Q. I., 1995, “A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes”, *Math. Comp.*, vol. 64, pp. 715–725.
30. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2015, “Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type”, *Sbornik: Math.*, vol. 206, no 8, pp. 1087–1122.
31. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I., 2016, “The Delsarte Extremal Problem for the Jacobi Transform”, *Math. Notes*, vol. 100, no 5, pp. 677–686.
32. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2016, “Boman extremal problem for Jacobi transform”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, no 4, pp. 126–135.
33. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, “Turán’s and Fejér’s extremal problems for Jacobi transform”, *Anal. Math.* [In press]
34. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I., 2017, “Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid”, *Math. Notes*. [In press]
35. Levitan B. M., Sargsyan I. S., 1970, “Introduction to spectral theory”, *Moscow: Nauka*, 671 p. [in Russian]
36. Levitan B. M., Sargsyan I. S., 1988, “Sturm–Liouville and Dirac Operators”, *Moscow: Nauka*, 432 p. [in Russian]
37. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2016, “Approximation in L_2 by partial integrals of the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator”, *Math. Notes*, vol. 100, no 4, pp. 540–549.

-
38. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A., 2016, “Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, no 4, pp. 136–152. [in Russian]
 39. Olver F. W. J., 1974, “Introduction to asymptotics and special functions”, *New York: Academic Press*, 297 p.
 40. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H., 1973, “The convolution structure for Jacobi function expansions”, *Ark. Mat.*, vol. 11, pp. 245–262.
 41. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H., 1979, “Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure”, *Ark. Mat.*, vol. 17, pp. 139–151.
 42. Levitan B. M., 1973, “Theory of generalized translation operators”, *Moscow: Nauka*, 312 p. [in Russian]
 43. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. 2014, “Optimal Argument in Sharp Jackson’s inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight”, *Math. Notes*, vol. 96, no 6, pp. 338–348.
 44. Levin B. Ya, 1956, “Distribution of Roots of Entire Functions”, *Moscow: Gostekhizdat*, 632 p. [in Russian]

Тульский государственный университет.

Получено 12.03.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-54-97

О ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФОРМ
А. ТУЭ — М. Н. ДОБРОВОЛЬСКОГО —
В. Д. ПОДСЫПАНИНА¹Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский,
Е. А. Матвеева (г. Тула)

Аннотация

В работе строится алгебраическая теория полиномов Туэ. Построение теории опирается на изучение подмодулей $\mathbb{Z}[t]$ -модуля $\mathbb{Z}[t]^2$. Рассматриваются подмодули, заданные одним определяющим соотношением и одним определяющим соотношением k -ого порядка. Более сложным подмодулем является подмодуль заданный одним полиномиальным соотношением. Подмодули пар Туэ j -ого порядка напрямую связаны с полиномами Туэ j -ого порядка. С помощью алгебраической теории подмодулей пар Туэ j -ого порядка удалось получить новое доказательство теоремы М. Н. Добровольского (старшего) о том, что для каждого порядка j существуют два основных полинома Туэ j -ого порядка, через которые выражаются все остальные. Основные полиномы определяются с точностью до унимодулярной многочленной матрицы над кольцом целочисленных многочленов.

В работе вводятся дробно-линейные преобразования ТДП-форм. Показано, что при переходе от ТДП-формы, связанной с алгебраическим числом α к ТДП-форме, связанной с остаточной дробью к алгебраическому числу α , ТДП-форма преобразуется по закону, аналогичному преобразованию минимальных многочленов, а числители и знаменатели соответствующих пар Туэ преобразуются с помощью дробно-линейного преобразования второго рода.

Ключевые слова: минимальный многочлен, приведённая алгебраическая иррациональность, остаточные дроби, цепные дроби, ТДП-форма, модули Туэ, пара Туэ, дробно-линейное преобразование второго рода.

Библиография: 37 названий.

ON FRACTIONAL LINEAR TRANSFORMATIONS OF FORMS
A. TUE — M. N. DOBROVOLSKY — V. D. PODSYPININAN. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii, E. A. Matveeva
(Tula)

Abstract

The work builds on the algebraic theory of polynomials Tue. The theory is based on the study of submodules of $\mathbb{Z}[t]$ -module $\mathbb{Z}[t]^2$. Considers submodules that are defined by one defining relation and one defining relation k -th order. More complex submodule is the submodule given by one polynomial relation. Sub par Tue j -th order are directly connected with polynomials Tue j -th order. Using the algebraic theory of pairs of submodules of Tue j -th order managed to obtain a new proof of the theorem of M. N. Dobrowolski (senior) that for each j there are two fundamental polynomial Tue j -th order, which are expressed through others. Basic polynomials

¹Работа выполнена по грантам РФФИ № 15-01-01540-а, №16-41-710194

are determined with an accuracy of unimodular polynomial matrices over the ring of integer polynomials.

In the work introduced linear-fractional conversion of TDP-forms. It is shown that the transition from TDP-forms associated with an algebraic number α to TDP-the form associated with the residual fraction to algebraic number α , TDP-form is converted under the law, similar to the transformation of minimal polynomials and the numerators and denominators of the respective pairs of Tue is converted using the linear-fractional transformations of the second kind.

Keywords: the minimum polynomial of the given algebraic irrationality, residual fractions, continued fractions, TDP-shape, the modules Tue, couple Tue, linear-fractional transformation of the second kind.

Bibliography: 37 titles.

1. Введение	55
2. Обозначения и необходимые факты	56
3. Базисы двумерной решетки многочленов	60
4. О $\mathbb{Z}[t]$ -модуле $\mathbb{Z}[t]^2$ и его подмодулях с одним линейным определяющим соотношением	62
5. Подмодули с k линейными определяющими соотношениями	71
6. Дробно-линейные преобразования двумерных решёток многочленов	74
7. О полиномах Туэ	76
8 Подмодули с одним полиномиальным определяющим соотношением порядка k	80
9. Модули TDP_j над кольцом $\mathbb{Z}[t]$ ($j = 0, 1, \dots$)	83
10. Дробно-линейные преобразования форм	90
11. Заключение	92
Список цитированной литературы	93

1. Введение

В последнее время в работах Тульской школы теории чисел [5]–[11], [15]–[17], [24], [28]–[30] продолжены исследования из работ [4], [18] — [20], в которых изложены результаты длительных совместных исследований М. Н. Добровольского и его научного руководителя В. Д. Подсыпанина по теории иррациональностей 3-ей и 4-ой степеней. В основе этих исследований лежала теория полиномов А. Туэ и матричные многочленные разложения алгебраических иррациональностей.

Периодический характер разложения иррациональностей второй степени в непрерывную дробь известен ещё со времени Л. Эйлера (1737 г. [31], 1748 г. [32]), Ж. Лагранжа (1770 г. [34]) и Э. Галуа (1828 г. [33]). Закономерности в разложении в непрерывную дробь иррациональностей более высоких степеней до сих пор не известны. Лишь для некоторых иррациональностей найдены разложения в обобщенные непрерывные дроби, которые имеют малое применение в виду плохих приближений, даваемых ими.

Вопрос о характере разложения алгебраического числа α в непрерывную дробь связан с оценкой разности $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$. Первой оценкой этой разности снизу явился результат Ж. Лиувилля [35]. Усиление этой оценки было получено А. Туэ [37] с помощью специальных полиномов. В дальнейшем оценки А. Туэ были уточнены. Наиболее сильный результат в оценке этой разности снизу был получен К. Ф. Ротом [36].

В настоящей работе продолжены исследования М. Н. Добровольского и В. Д. Подсыпанина. Принципиальное отличие их подхода в исследовании полиномов Туэ заключалось в поиске явного вида этих полиномов. Принцип Дирихле, позволяющий установить существование таких полиномов с заданными свойствами, был заменен на рекуррентные соотношения для основных полиномов Туэ порядка j и $j + 1$.

Данная работа является переработанным вариантом статьи [5]. Основная цель настоящего исследования — поиск зависимости полиномов Туэ остаточных дробей.

Отметим, что в работах [5], [4], [18] — [20] использовались разные определения полиномов Туэ, поэтому в данной работе пришлось для полноты изложения привести достаточные значительные фрагменты из работы [5] с необходимыми изменениями, которые даются для развития стройной теории полиномов Туэ.

2. Обозначения и необходимые факты

Как обычно, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел (говорим просто целых), а $\mathbb{Z}[x]$ — кольцо многочленов с целыми коэффициентами.

Через $\mathbb{Z}^*[x]$ будем обозначать мультипликативный моноид многочленов с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом равным 1 (унитарные неприводимые многочлены).

Пусть $n \geq 2$ и $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ — неприводимый многочлен n -ой степени с целыми коэффициентами, а $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — его корни, являющиеся алгебраически сопряженными целыми алгебраическими числами n -ой степени. Таким образом $a_n = 1$ и $\deg f(x) = n > 1$.

Будем говорить, что имеет место особый случай, если найдутся два корня α_ν и α_μ такие, что $\alpha_\mu = \frac{P(\alpha_\nu)}{Q(\alpha_\nu)}$, где многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Если таких корней нет, то будем говорить, что имеется общий случай унитарного неприводимого многочлена.

Общий случай неприводимого многочлена $g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$ с алгебраически сопряженными алгебраическими числами n -ой степени $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ сводится к предыдущему переходом к многочлену $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ с коэффициентами $a_j = b_j b_n^{n-1-j}$ ($j = 0, 1, \dots, n$) и алгебраически сопряженными корнями $\alpha_j = b_n \beta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) — целыми алгебраическими числами. Поэтому дальше будем рассматривать случай целых алгебраических чисел и неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}^*[x]$.

Кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}[\alpha_\nu]$ определяется равенством

$$\mathbb{Z}[\alpha_\nu] = \{ m_0 + m_1\alpha_\nu + \dots + m_{n-1}\alpha_\nu^{n-1} \mid m_0, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{Z} \},$$

так как $\alpha_\nu^n = -(a_0 + a_1\alpha_\nu + \dots + a_{n-1}\alpha_\nu^{n-1})$. Все кольца $\mathbb{Z}[\alpha_1], \dots, \mathbb{Z}[\alpha_n]$ изоморфны между собой, так как для любых двух колец $\mathbb{Z}[\alpha_\nu]$ и $\mathbb{Z}[\alpha_\mu]$ имеется естественный изоморфизм, задаваемый соответствием $m_0 + m_1\alpha_\nu + \dots + m_{n-1}\alpha_\nu^{n-1} \leftrightarrow m_0 + m_1\alpha_\mu + \dots + m_{n-1}\alpha_\mu^{n-1}$. В общем случае неприводимого многочлена $f(x)$ все кольца $\mathbb{Z}[\alpha_1], \dots, \mathbb{Z}[\alpha_n]$ — различные и пересекаются только по $\mathbb{Z}$.

Имеем n изоморфных расширений $\mathbb{Z}[\alpha_1][x], \dots, \mathbb{Z}[\alpha_n][x]$ кольца многочленов $\mathbb{Z}[x]$.

$\mathbb{Z}[\alpha_\nu][x]$ — кольцо полиномов (многочленов) над кольцом целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}[\alpha_\nu]$. В общем случае неприводимого многочлена $f(x)$ все кольца полиномов $\mathbb{Z}[\alpha_1][x], \dots, \mathbb{Z}[\alpha_n][x]$ — различные и пересекаются только по кольцу многочленов $\mathbb{Z}[x]$.

Мы будем говорить многочлены для элементов кольца $\mathbb{Z}[x]$ и полиномы — для $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][x]$, при этом все полиномы попадающие в $\mathbb{Z}[x]$ являются многочленами.

Для дальнейшего нам понадобится разложение в кольце $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][x]$ на полиномиальные множители унитарного неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}^*[x]$.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$f(x) = (x - \alpha_\nu)f_\nu(x), \quad f_\nu(x) = \sum_{l=0}^{n-1} x^l \sum_{k=l+1}^n a_k \alpha_\nu^{k-l-1}, \quad (1)$$

при этом $(x - \alpha_\nu) \nmid f_\nu(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$x^j - \alpha_\nu^j = (x - \alpha_\nu) \left(\sum_{l=0}^{j-1} x^l \alpha_\nu^{j-1-l} \right),$$

поэтому, так как $a_n = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{j=1}^n a_j x^j = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \left(\alpha_\nu^j + (x - \alpha_\nu) \left(\sum_{l=0}^{j-1} x^l \alpha_\nu^{j-1-l} \right) \right) = \\ &= f(\alpha_\nu) + (x - \alpha_\nu) \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{l=0}^{j-1} x^l \alpha_\nu^{j-1-l} \right) = (x - \alpha_\nu) \sum_{l=0}^{n-1} x^l \sum_{j=l+1}^n a_j \alpha_\nu^{j-1-l} \end{aligned}$$

и первое утверждение леммы доказано.

Предположим противное, что $f_\nu(x) = (x - \alpha_\nu)g_\nu(x)$, тогда

$$f(x) = (x - \alpha_\nu)^2 g_\nu(x), \quad f'(x) = (x - \alpha_\nu) (2g_\nu(x) + (x - \alpha_\nu)g'_\nu(x)).$$

Если $d(x) = (f(x), f'(x))$ — наибольший общий делитель многочленов с целыми коэффициентами $f(x)$ и $f'(x)$, то $(x - \alpha_\nu) | d(x)$. Следовательно, степень $d(x)$ не меньше 1, что противоречит неприводимости многочлена $f(x)$, и лемма полностью доказана. $\square$

Если через $\theta^{(1)} \in \mathbb{Z}[\alpha_1], \dots, \theta^{(n)} \in \mathbb{Z}[\alpha_n]$ обозначать набор сопряженных целых алгебраических чисел, то, переходя к полиномам, мы можем говорить о полном наборе сопряженных полиномов, а именно,

$$\mathcal{P}^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^k \gamma_j^{(1)} x^j, \quad \dots, \quad \mathcal{P}^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^k \gamma_j^{(m)} x^j, \quad \dots, \quad \mathcal{P}^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^k \gamma_j^{(n)} x^j.$$

Также, как полный набор сопряженных целых алгебраических чисел является стационарным $\theta = \theta^{(1)} = \dots = \theta^{(n)}$ тогда и только тогда, когда θ — целое рациональное число, и полный набор сопряженных полиномов является стационарным, если они суть один и тот же многочлен с целыми коэффициентами.

Примерами полного набора сопряженных многочленов могут служить:

1. $x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_n$ — полиномы первой степени;
2. $f_1(x), \dots, f_n(x)$ — полиномы степени $n - 1$ из леммы 1;
3. $f(x), \dots, f(x)$ — стационарный набор полиномов-многочленов степени n .

Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольного полинома

$$\mathcal{P}^{(\nu)}(x) = \sum_{j=0}^k \gamma_j^{(\nu)} x^j \in \mathbb{Z}[\alpha_\nu][x]$$

его многочленным представлением называется выражение вида

$$\mathcal{P}^{(\nu)}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_\nu^l p_l(x), \quad p_l(x) \in \mathbb{Z}[x] \quad (l = 0, 1, \dots, n-1).$$

Многочлен $p_l(x)$ называется l -ой многочленной компонентой полинома $\mathcal{P}^{(\nu)}(x)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого полинома $\mathcal{P}^{(\nu)}(x) \in \mathbb{Z}[\alpha_\nu][x]$ многочленное представление существует и единственное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если

$$\mathcal{P}^{(\nu)}(x) = \sum_{j=0}^k \gamma_j^{(\nu)} x^j \in \mathbb{Z}[\alpha_\nu][x]$$

и

$$\gamma_j^{(\nu)} = \sum_{l=0}^{n-1} m_{l,j} \alpha_\nu^l, \quad m_{l,j} \in \mathbb{Z} \quad (j = 0, \dots, k; l = 0, \dots, n-1),$$

то

$$p_l(x) = \sum_{j=0}^k m_{l,j} x^j \quad (l = 0, 1, \dots, n-1), \quad \mathcal{P}^{(\nu)}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_\nu^l p_l(x)$$

и существование многочленного представления доказано.

Предположим, что существует два представления

$$\mathcal{P}^{(\nu)}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_\nu^l p_l(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_\nu^l q_l(x),$$

тогда

$$\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_\nu^l (p_l(x) - q_l(x)) = 0$$

для любого x . Так как хотя бы одна разность $p_l(x) - q_l(x)$ — ненулевой многочлен, то найдется целое число x_0 такое, что многочлен

$$g(t) = \sum_{l=0}^{n-1} t^l (p_l(x_0) - q_l(x_0))$$

— ненулевой многочлен степени не выше $n-1$ и α_ν — его корень, что противоречит неприводимости многочлена $f(x)$. Единственность многочленного представления доказана, и доказательство теоремы завершено. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *Полином $\mathcal{P}^{(\nu)}(x) \in \mathbb{Z}[\alpha_\nu][x]$ делится на многочлен $\varphi(x)$ тогда и только тогда, когда каждая многочленная компонента полинома $\mathcal{P}^{(\nu)}(x)$ делится на многочлен $\varphi(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна.

Пусть полином $\mathcal{P}^{(\nu)}(x)$ делится на многочлен $\varphi(x)$,

$$\mathcal{P}^{(\nu)}(x) = \varphi(x) \mathcal{R}^{(\nu)}(x), \quad \mathcal{R}^{(\nu)}(x) \in \mathbb{Z}[\alpha_\nu][x]$$

и $p_l(x)$ ($l = 0, 1, \dots, n-1$) — его многочленные компоненты, а $r_l(x)$ ($l = 0, 1, \dots, n-1$) — многочленные компоненты для $\mathcal{R}^{(\nu)}(x)$. Тогда для полинома $\mathcal{P}^{(\nu)}(x)$ имеем второе многочленное представление

$$\mathcal{P}^{(\nu)}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_\nu^l \varphi(x) r_l(x).$$

Отсюда в силу предыдущей теоремы получаем

$$p_l(x) = \varphi(x) r_l(x) \quad (l = 0, 1, \dots, n-1),$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Использование многочленного представления позволяет легко доказать теорему о произведении полного набора сопряженных полиномов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{P}^{(1)}(x), \dots, \mathcal{P}^{(m)}(x), \dots, \mathcal{P}^{(n)}(t)$ — полный набор сопряженных полиномов, тогда их произведение является многочленом:

$$\mathcal{P}^{(1)}(x) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}^{(m)}(x) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}^{(n)}(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочленное представление сопряженных полиномов, которые в силу сопряженности имеют одни и те же многочленные компоненты,

$$\mathcal{P}^{(\nu)}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{\nu}^l p_l(x), \quad p_l(x) \in \mathbb{Z}[x] \quad (l = 0, 1, \dots, n-1, \nu = 1, \dots, n).$$

Тогда, если S_n — симметрическая группа степени n и π — произвольная перестановка из S_n , то

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^n \mathcal{P}^{(\nu)}(x) &= \sum_{k=1}^n \sum_{0 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 1, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n}} \left(\prod_{\mu=1}^k p_{l_{\mu}}^{\lambda_{\mu}}(x) \right) \sum_{\pi \in S_n} \prod_{\tau=1}^k \prod_{\sum_{\gamma=1}^{\tau-1} \lambda_{\gamma} < \nu \leq \sum_{\gamma=1}^{\tau} \lambda_{\gamma}} \alpha_{\pi(\nu)}^{l_{\tau}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{0 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 1, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n}} \left(\prod_{\mu=1}^k p_{l_{\mu}}^{\lambda_{\mu}}(x) \right) A(l_1, \lambda_1, \dots, l_k, \lambda_k), \end{aligned}$$

где

$$A(l_1, \lambda_1, \dots, l_k, \lambda_k) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{\tau=1}^k \prod_{\sum_{\gamma=1}^{\tau-1} \lambda_{\gamma} < \nu \leq \sum_{\gamma=1}^{\tau} \lambda_{\gamma}} \alpha_{\pi(\nu)}^{l_{\tau}}$$

— симметрическая функция от полного набора сопряженных целых алгебраических чисел, а как известно (см. [25], стр. 23) такие функции имеют целые значения, поэтому искомое произведение есть многочлен, и теорема доказана. $\square$

Обозначим через $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ кольцо квадратных целочисленных матриц второго порядка. Через $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{Z})$ будем обозначать мультипликативную полугруппу кольца $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, то есть множество всех невырожденных матриц, а через $\mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ — мультипликативную группу обратимых целочисленных матриц, то есть множество унимодулярных матриц. Таким образом, имеем

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \text{если } A, B, C, D \in \mathbb{Z};$$

$$M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{Z}), \quad \text{если } \det M = AD - BC \neq 0;$$

$$M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z}), \quad \text{если } \det M = \pm 1.$$

Аналогичные конструкции нам потребуются для целочисленных многочленов.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}[t])$ — кольцо квадратных матриц второго порядка с целочисленными многочленами:

$$M[t] = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}[t]), \quad \text{если } A(t), B(t), C(t), D(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

$\mathcal{M}_2^*(\mathbb{Z}[t])$ — мультипликативная полугруппа кольца $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}[t])$, то есть множество всех невырожденных матриц целочисленных многочленов:

$$M[t] \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{Z}[t]), \quad \text{если } \det M[t] = A(t)D(t) - B(t)C(t) \neq 0.$$

$\mathcal{U}_2(\mathbb{Z}[t])$ — мультипликативная группа обратимых матриц целочисленных многочленов, то есть множество унимодулярных матриц целочисленных многочленов:

$$M[t] \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z}[t]), \quad \text{если } \det M[t] = \delta(M[t]) = \pm 1,$$

$$M^{-1}[t] = \delta(M[t]) \begin{pmatrix} D(t) & -B(t) \\ -C(t) & A(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z}[t]).$$

3. Базисы двумерной решетки многочленов

Имея в виду цель — перенести некоторые конструкции из геометрии чисел на $\mathbb{Z}[t]$ -модуль $\mathbb{Z}[t]^2$ — модуль Туэ, которые нам важны для дальнейшего, дадим следующие ниже определения. Название модуль Туэ связано с тем, что как мы увидим в последующих разделах, этот модуль тесно связан со всей конструкцией полиномов Туэ, играющих важную роль при решении диофантовых проблем теории чисел, связанных с приближением алгебраических чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Упорядоченная пара многочленов с целыми коэффициентами*

$$T = \{P(t), Q(t)\}$$

называется парой Туэ. Многочлен $P(t)$ называется числителем пары Туэ. Через $m(T)$ обозначается степень числителя. Многочлен $Q(t)$ называется знаменателем пары Туэ. Через $l(T)$ обозначается степень знаменателя. Величина $k(T) = \max(m(T), l(T))$ называется степенью пары Туэ.

Ясно, что множество всех пар Туэ совпадает с $\mathbb{Z}[t]^2 = \mathbb{Z}[t] \times \mathbb{Z}[t]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Модулем Туэ называется множество всех пар Туэ с естественной операцией сложения, когда числитель суммы двух пар Туэ равен сумме числителей слагаемых, а знаменатель суммы — сумме знаменателей. Числитель произведения пары Туэ на многочлен из $\mathbb{Z}[t]$ равен произведению числителя пары на этот многочлен, а знаменатель произведения — произведению знаменателя на тот же многочлен.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Пусть имеется k пар Туэ $T_1 = \{P_1(t), Q_1(t)\}, \dots, T_k = \{P_k(t), Q_k(t)\}$. Говорят, что они линейно зависимы, если существуют многочлены с целыми коэффициентами $c_1(t), \dots, c_k(t)$, не все равные нулю и такие, что имеет место равенство*

$$c_1(t)T_1 + \dots + c_k(t)T_k = \{0, 0\}. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Линейная зависимость пар, вообще говоря, не позволяет выразить одну пару через другие, не выходя за пределы $\mathbb{Z}[t]$ -модуля $\mathbb{Z}[t]^2$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Если среди k пар хотя бы одна нулевая, то, очевидно, что они линейно зависимы.*

ЛЕММА 2. *Любые две пары $T_1 = \{P_1(t), 0\}$ и $T_2 = \{P_2(t), 0\}$ — линейно зависимы. Любые две пары $U_1 = \{0, Q_1(t)\}$ и $U_2 = \{0, Q_2(t)\}$ — линейно зависимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 2 достаточно рассмотреть случай $P_1(t) \neq 0$ и $P_2(t) \neq 0$, но тогда

$$P_2(t)T_1 - P_1(t)T_2 = \{0, 0\}$$

и первое утверждение леммы доказано.

Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

Так как любая пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ однозначно представима в виде

$$T = P(t)\{1, 0\} + Q(t)\{0, 1\}$$

и пары $T_0 = \{1, 0\}, T_1 = \{0, 1\}$ — линейно независимы, то пары T_0 и T_1 образуют базис модуля Туэ.

Таким образом, модуль Туэ $\mathbb{Z}[t]^2$ является унитарным свободным модулем ранга 2 над кольцом многочленов $\mathbb{Z}[t]$, то есть $\mathbb{Z}[t]$ -модулем. Это, в частности, означает, что

$$\mathbb{Z}[t]^2 \cong \mathbb{Z}[t] \oplus \mathbb{Z}[t].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Базисной матрицей Туэ называется матрица $M[t]$ вида

$$M[t] = \begin{pmatrix} P(t) & Q(t) \\ R(t) & S(t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

такая, что две пары Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ и $U = \{R(t), S(t)\}$ являются базисом для модуля Туэ.

Нетрудно видеть, что множество базисных матриц совпадает с унимодулярной группой $\mathcal{U}_2(\mathbb{Z}[t])$, которая кроме этого образует группу матриц перехода от одного базиса модуля Туэ к другому.

Через $M(T, U)$ для пар Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ и $U = \{R(t), S(t)\}$ будем обозначать матрицу

$$M(T, U) = \begin{pmatrix} P(t) & Q(t) \\ R(t) & S(t) \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 3. Две пары Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ и $U = \{R(t), S(t)\}$ — линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$\det M(T, U) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если они линейно зависимы, то найдутся многочлены $c_1(t)$ и $c_2(t)$ одновременно не равные тождественно нулю, такие что $c_1(t)T + c_2(t)U = \{0, 0\}$ и, следовательно, $c_1(t)P(t) + c_2(t)R(t) = 0$ и $c_1(t)Q(t) + c_2(t)S(t) = 0$. Пусть $c_1(t) \neq 0$, тогда

$$c_1(t) (P(t)S(t) - R(t)Q(t)) = (-c_2(t)R(t))S(t) - R(t)(-c_2(t)S(t)) = 0.$$

Так как $\mathbb{Z}[t]$ — кольцо без делителей нуля, то $P(t)S(t) - R(t)Q(t) = 0$, и необходимость доказана.

Перейдём к доказательству достаточности. В силу замечания 2 и леммы 2 достаточно рассмотреть случай, когда следующие два многочлена $c_1(t) = S(t)P(t) - R(t)Q(t)$, $c_2(t) = -Q(t)P(t)$ отличны от нуля.

Пусть $P(t)S(t) - R(t)Q(t) = 0$, тогда

$$\begin{aligned} c_1(t)T + c_2(t)U &= \{c_1(t)P(t) + c_2(t)R(t), c_1(t)Q(t) + c_2(t)S(t)\} = \\ &= \{R(t)Q(t)P(t) - Q(t)P(t)R(t), S(t)P(t)Q(t) - Q(t)P(t)S(t)\} = \{0, 0\} \end{aligned}$$

и достаточность доказана, что заканчивает доказательство леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ называется примитивной, если наибольший общий делитель числителя и знаменателя $(P(t), Q(t)) = 1$.

ЛЕММА 4. Если пары Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ и $U = \{R(t), S(t)\}$ — примитивные и $\det M(T, U) = 0$, то $T = U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из равенства $P(t)S(t) = R(t)Q(t)$ и факториальности кольца $\mathbb{Z}[t]$ в силу примитивности пар следует $P(t) = R(t)$ и $S(t) = Q(t)$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Наибольшим делителем $d(T)$ пары Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ называется наибольший общий делитель числителя и знаменателя:

$$d(T) = (P(t), Q(t)).$$

Ясно, что любую пару Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ можно представить в виде

$$T = d(T) \left\{ \frac{P(t)}{d(T)}, \frac{Q(t)}{d(T)} \right\}$$

и пара Туэ $\left\{ \frac{P(t)}{d(T)}, \frac{Q(t)}{d(T)} \right\}$ — примитивная пара, которую будем обозначать через $\frac{T}{d(T)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Если для двух пар Туэ

$$T = \{P(t), Q(t)\} \quad \text{и} \quad U = \{R(t), S(t)\}$$

$\det M(T, U) \neq 0$, то двумерной решеткой многочленов $\Lambda(T, U)$ с базисом $/T, U/$, базисной матрицей $M(T, U)$ и детерминантом решетки многочленов $\det \Lambda(T, U) = \det M(T, U)$ называется множество вида

$$\Lambda(T, U) = \{c_1(t)T + c_2(t)U \mid c_1(t), c_2(t) \in \mathbb{Z}[t]\}.$$

Таким образом, в силу линейной независимости пар T и U двумерная решетка многочленов $\Lambda(T, U)$ является свободным $\mathbb{Z}[t]$ -модулем ранга 2.

4. О $\mathbb{Z}[t]$ -модуле $\mathbb{Z}[t]^2$ и его подмодулях с одним линейным определяющим соотношением

Через $\langle T, U \rangle = \{c_1(t)T + c_2(t)U \mid c_1(t), c_2(t) \in \mathbb{Z}[t]\}$ будем обозначать подмодуль пар Туэ, порожденный парами T и U . Если T и U линейно независимые пары Туэ, то подмодуль $\langle T, U \rangle$ — свободный $\mathbb{Z}[t]$ -модуль ранга 2 (см. [13], стр. 164). Матрицу $M(T, U)$ будем называть базисной матрицей подмодуля $\langle T, U \rangle$.

Таким образом, если пары T и U линейно независимые, то подмодуль $\langle T, U \rangle$ является двумерной решеткой многочленов $\Lambda(T, U)$.

ТЕОРЕМА 4. Если пары Туэ T и U линейно независимые и матрица

$$C[t] = \begin{pmatrix} c_{1,1}(t) & c_{1,2}(t) \\ c_{2,1}(t) & c_{2,2}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{Z}[t]),$$

то для пар $T_1 = c_{1,1}(t)T + c_{1,2}(t)U$, $U_1 = c_{2,1}(t)T + c_{2,2}(t)U$ и модуля $\langle T_1, U_1 \rangle$ справедливы соотношения

$$\begin{cases} \langle T_1, U_1 \rangle = \langle T, U \rangle, & \text{если } C[t] \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z}[t]), \\ \langle T_1, U_1 \rangle \subset \langle T, U \rangle, & \text{если } C[t] \notin \mathcal{U}_2(\mathbb{Z}[t]), \end{cases}$$

и $M(T, U) = C[t]M(T_1, U_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $C[t] \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z}[t])$, то пары T и U линейно выражаются через пары T_1 и U_1 с помощью обратной матрицы из $\mathcal{U}_2(\mathbb{Z}[t])$, в противном случае её просто не существует. Все остальные утверждения непосредственно следуют из определений и свойств матричного умножения. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Если пары Туэ T и U линейно зависимые, то справедливо равенство

$$\langle T, U \rangle = J \cdot V,$$

где $V = \frac{T}{d(T)} = \frac{U}{d(U)}$ — примитивная пара Туэ, а $J = \langle d(T), d(U) \rangle$ — идеал в кольце целочисленных многочленов $\mathbb{Z}[t]$, порожденный наибольшими делителями пар.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\det M(T, U) = d(T)d(U) \det M\left(\frac{T}{d(T)}, \frac{U}{d(U)}\right).$$

Из линейной зависимости пар Туэ T и U и факториальности кольца $\mathbb{Z}[t]$ в силу леммы 3 следует линейная зависимость соответствующих примитивных пар. Поэтому по лемме 4 они равны. Следовательно, примитивная пара V корректно определена. Но тогда

$$\langle T, U \rangle = \{c_1(t)d(T)V + c_2(t)d(U)V \mid c_1(t), c_2(t) \in \mathbb{Z}[t]\} = J \cdot V,$$

где идеал $J = \langle d(T), d(U) \rangle$ порожден наибольшими делителями пар, и теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 6. Любые три пары Туэ линейно-зависимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеем три пары Туэ

$$T_1 = \{P_1(t), Q_1(t)\}, T_2 = \{P_2(t), Q_2(t)\}, T_3 = \{P_3(t), Q_3(t)\}.$$

Положим

$$c_1(t) = P_2(t)Q_3(t) - P_3(t)Q_2(t), c_2(t) = P_3(t)Q_1(t) - P_1(t)Q_3(t), c_3(t) = P_1(t)Q_2(t) - P_2(t)Q_1(t).$$

Достаточно рассмотреть случай когда среди этих трех пар нет нулевой пары и не для каких двух пар не выполнены условия леммы 3 (см. стр. 61), тогда все три многочлена $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ отличны от нуля.

Непосредственно убеждаемся, что

$$c_1(t)T_1 + c_2(t)T_2 + c_3(t)T_3 = \{0, 0\}$$

и теорема доказана. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f(t)) = f(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный многочленом $f(t)$. Пусть $a(t)$, $b(t)$ — произвольные многочлены из $\mathbb{Z}[t]$. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет линейному определяющему соотношению, если $a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f(t))$. Подмодулем с одним определяющим соотношением назовем множество

$$M(a(t), b(t) \mid f(t)) = \{\{P(t), Q(t)\} \mid a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f(t))\}$$

— всех пар Туэ, удовлетворяющих этому линейному определяющему соотношению.

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$, то определяющему соотношению удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассуждений.

Пусть $a(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$, тогда на числитель пары не накладываются никаких ограничений, а знаменатель будет принадлежать главному идеалу $(f(t))$. Если $a(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$, то числитель и знаменатель пары Туэ меняются ролями.

Поэтому все перечисленные тривиальные случаи исключаются, и дальше рассматриваем только случай $a(t)b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$.

Далее заметим, что если

$$d(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}, \quad a(t) \equiv a_1(t) \pmod{f(t)}, \quad b(t) \equiv b_1(t) \pmod{f(t)},$$

то справедливы равенства

$$M(a(t)d(t), b(t)d(t) \mid f(t)) = M(a(t), b(t) \mid f(t)) = M(a_1(t), b_1(t) \mid f(t)).$$

Поэтому, окончательно, выделяем для дальнейшего рассмотрения только случай

$$a(t) \not\equiv 0, \quad b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}, \quad \max(\deg a(t), \deg b(t)) < \deg f(t), \quad (a(t), b(t)) = 1. \quad (4)$$

Из определения непосредственно следует, что свободный модуль ранга 2

$$f(t)\mathbb{Z}[t]^2 \subset M(a(t), b(t) \mid f(t)).$$

В частности, линейно независимые пары $T_0 = \{f(t), 0\}$ и $T_1 = \{0, f(t)\}$ принадлежат $M(a(t), b(t) \mid f(t))$.

Нетрудно указать пару из $M(a(t), b(t) \mid f(t)) \setminus f(t)\mathbb{Z}[t]^2$. Такой парой будет пара

$$T_3 = \{b(t), -a(t)\}.$$

Более того, если через $M(a(t), b(t))$ обозначить вырожденный случай определяющего соотношения: $a(t)P(t) + b(t)Q(t) = 0$, то при $(a(t), b(t)) = 1$ имеем равенство

$$M(a(t), b(t)) = \{\{b(t)c(t), -a(t)c(t)\} \mid c(t) \in \mathbb{Z}[t]\} = \{b(t), -a(t)\} \cdot \mathbb{Z}[t].$$

Очевидно, что справедливо включение

$$M(a(t), b(t)) \subset M(a(t), b(t) \mid f(t))$$

для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ с целыми коэффициентами.

ЛЕММА 5. Если $T = \{P(t), Q(t)\}$ и $U = \{R(t), S(t)\}$ — две пары Туэ из $M(a(t), b(t) \mid f(t))$, то

$$P(t)S(t) - R(t)Q(t) = f(t)\varphi(t), \quad \varphi(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как T и U из $M(a(t), b(t) \mid f(t))$, то по определению

$$a(t)P(t) + b(t)Q(t) = c_1(t)f(t), \quad a(t)R(t) + b(t)S(t) = c_2(t)f(t),$$

где $c_1(t), c_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Пользуясь этими равенствами, получим

$$\begin{aligned} a(t)b(t)(P(t)S(t) - R(t)Q(t)) &= a(t)b(t)P(t)S(t) - (c_1(t)f(t) - a(t)P(t))(c_2(t)f(t) - b(t)S(t)) = \\ &= f(t)(c_1(t)b(t)S(t) + c_2(t)a(t)P(t) - c_1(t)c_2(t)f(t)). \end{aligned}$$

Так как по условию $(a(t)b(t), f(t)) = 1$, то $a(t)b(t) \mid c_1(t)b(t)S(t) + c_2(t)a(t)P(t) - c_1(t)c_2(t)f(t)$ и

$$\varphi(t) = \frac{c_1(t)b(t)S(t) + c_2(t)a(t)P(t) - c_1(t)c_2(t)f(t)}{a(t)b(t)} \in \mathbb{Z}[t]$$

что и доказывает лемму. $\square$

ЛЕММА 6. Если $T = \{P(t), Q(t)\}$ пара Туэ из $M(a(t), b(t) \mid f(t))$, то

$$T + f(t) \cdot \mathbb{Z}^2[t] \subset M(a(t), b(t) \mid f(t)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f(t) \cdot \mathbb{Z}^2[t] \subset M(a(t), b(t) \mid f(t))$ и

$$T = \{P(t), Q(t)\} \in M(a(t), b(t) \mid f(t)),$$

то по свойствам модуля получаем утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 7. *Существуют две линейно-независимые, примитивные пары Туэ T, U степени меньше n из $M(a(t), b(t) | f(t))$ такие, что любая пара Туэ V из $M(a(t), b(t) | f(t))$ однозначно представима в виде*

$$V = c_1(t)T + c_2(t)U, \quad (5)$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве T одну из пар Туэ, принадлежащих

$$M(a(t), b(t) | f(t)),$$

наименьшей степени m . Так как пара $\{b(t), -a(t)\} \in M(a(t), b(t)) \subset M(a(t), b(t) | f(t))$, то степень $m < n$. Пусть пара $T = \{P(t), Q(t)\}$. Если $d(T) \neq 1$, то $(d(T), f(t)) = 1$ и из равенства

$$a(t)P(t) + b(t)Q(t) = \varphi(t)f(t)$$

следует, что $d(T) | \varphi(t)$ и для $P_1(t) = \frac{P(t)}{d(T)}$, $Q_1(t) = \frac{Q(t)}{d(T)}$, $\varphi_1(t) = \frac{\varphi(t)}{d(T)} \in \mathbb{Z}[t]$ справедливо соотношение

$$a(t)P_1(t) + b(t)Q_1(t) = \varphi_1(t)f(t), \quad \{P_1(t), Q_1(t)\} \in M(a(t), b(t) | f(t)).$$

Поэтому можно без ограничения общности считать, что пара T — примитивная пара Туэ из $M(a(t), b(t) | f(t))$ наименьшей степени m . При этом, легко видеть, что такая примитивная пара Туэ не может иметь вид $\{P(t), 0\}$ или $\{0, Q(t)\}$.

Отсюда следует, что пары Туэ $T_0 = \{f(t), 0\}$ и $T_1 = \{0, f(t)\}$ из $M(a(t), b(t) | f(t))$ обе линейно независимы с T . Пусть для определенности степень этой пары Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ равна степени числителя пары и старший коэффициент числителя равен p_0 , а знаменателя — q_0 , то есть

$$P(t) = p_0 t^m + P_1(t), \quad P_1(t) = \sum_{\nu=1}^m p_\nu t^{m-\nu}, \quad Q(t) = q_0 t^{m_1} + Q_1(t), \quad Q_1(t) = \sum_{\nu=1}^{m_1} q_\nu t^{m_1-\nu}, \quad m_1 \leq m.$$

Рассмотрим пару Туэ T' , заданную равенством

$$T' = \begin{cases} \{t^{n-m}P(t) - p_0 f(t), t^{n-m}Q(t)\}, & \text{если } m_1 < m, \\ \{t^{n-m}P(t) - p_0 f(t), t^{n-m}Q(t) - q_0 f(t)\}, & \text{если } m_1 = m. \end{cases}$$

Ясно, что пара Туэ $T' \in M(a(t), b(t) | f(t))$ и линейно независима от пары Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$, кроме того её степень меньше n .

Следовательно, существуют пары Туэ из $M(a(t), b(t) | f(t))$ линейно независимые с T . Пусть U одна из этих пар Туэ наименьшей степени k . Из предыдущего следует, что $k < n$. Аналогично случаю пары T , можно считать, что U — примитивная пара Туэ из $M(a(t), b(t) | f(t))$ наименьшей степени k .

Пусть такие выбранные примитивные пары Туэ имеют вид:

$$T = \left\{ \sum_{\nu=0}^m g_\nu t^{m-\nu}, \sum_{\nu=0}^m h_\nu t^{m-\nu} \right\}, \quad U = \left\{ \sum_{\nu=0}^k u_\nu t^{k-\nu}, \sum_{\nu=0}^k v_\nu t^{k-\nu} \right\}.$$

По выбору пар $m \leq k < n$.

Далее для выбранных пар

$$g_0 v_0 - h_0 u_0 \neq 0, \quad (6)$$

так как в противном случае пара $u_0 t^{k-m} T - g_0 U = \{P(t), Q(t)\}$, где

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{\nu=0}^m (u_0 g_\nu - g_0 u_\nu) t^{k-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^k g_0 u_\nu t^{k-\nu} = \sum_{\nu=1}^m (u_0 g_\nu - g_0 u_\nu) t^{k-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^k g_0 u_\nu t^{k-\nu}, \\ Q(t) &= \sum_{\nu=0}^m (u_0 h_\nu - g_0 v_\nu) t^{k-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^k g_0 v_\nu t^{k-\nu} = \sum_{\nu=1}^m (u_0 h_\nu - g_0 v_\nu) t^{k-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^k g_0 v_\nu t^{k-\nu}, \end{aligned}$$

линейно независима с парой T и имеет степень меньшую k . Но это противоречит выбору пары U .

Предположим существование пар из $M(a(t), b(t) | f(t))$ и не представимых через T, U по формуле (5). Пусть W является такой парой наименьшей степени l и имеет вид

$$W = \left\{ \sum_{\nu=0}^l p_\nu t^{l-\nu}, \sum_{\nu=0}^l q_\nu t^{l-\nu} \right\}.$$

Очевидно, что $l \geq k \geq m$.

Рассмотрим пару

$$\begin{aligned} \{R(t), S(t)\} &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) t^{l-m} T + (p_0 h_0 - q_0 g_0) t^{l-k} U + (g_0 v_0 - u_0 h_0) W \\ R(t) &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=0}^m g_\nu t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=0}^k u_\nu t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=0}^l p_\nu t^{l-\nu} = \\ &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=1}^m g_\nu t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=1}^k u_\nu t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=1}^l p_\nu t^{l-\nu}, \\ S(t) &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=0}^m h_\nu t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=0}^k v_\nu t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=0}^l q_\nu t^{l-\nu} = \\ &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=1}^m h_\nu t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=1}^k v_\nu t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=1}^l q_\nu t^{l-\nu}. \end{aligned}$$

Эта пара не представима через пары T, U и имеет степень меньшую l . Но это противоречит выбору пары W . Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что подмодуль с одним определяющим соотношением $M(a(t), b(t) | f(t))$ является двумерной решеткой многочленов $\Lambda(T, U)$ с базисом $/T, U/$, причём базис примитивный, то есть обе пары Туэ T и U являются примитивными парами, и степень каждой пары меньше n .

ТЕОРЕМА 8. *Для двумерной решётки многочленов $\Lambda(T, U) = M(a(t), b(t) | f(t))$ справедливо равенство*

$$\det \Lambda(T, U) = \det M(T, U) = \pm f(t). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что пары $T_1 = \{f(t), 0\}$ и $T_2 = \{0, f(t)\}$ принадлежат решётке $\Lambda(T, U) = M(a(t), b(t) | f(t))$.

Пусть базис $/T, U/$ имеет вид $T = \{P(t), Q(t)\}$, $U = \{R(t), S(t)\}$, тогда, согласно лемме 5, имеем: $P(t)S(t) - Q(t)R(t) = \varphi_0(t)f(t)$ и найдутся целочисленные многочлены $c_{\nu, \mu}(t)$ ($\nu = 1, 2$; $\mu = 1, 2$) такие, что выполнены равенства

$$\begin{cases} c_{1,1}(t)P(t) + c_{1,2}(t)R(t) = f(t) \\ c_{1,1}(t)Q(t) + c_{1,2}(t)S(t) = 0 \\ c_{2,1}(t)P(t) + c_{2,2}(t)R(t) = 0 \\ c_{2,1}(t)Q(t) + c_{2,2}(t)S(t) = f(t) \end{cases}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} c_{1,1}(t)(P(t)S(t) - Q(t)R(t)) = f(t)S(t) \\ c_{1,2}(t)(P(t)S(t) - Q(t)R(t)) = -f(t)Q(t) \\ c_{2,1}(t)(P(t)S(t) - Q(t)R(t)) = -f(t)R(t) \\ c_{2,2}(t)(P(t)S(t) - Q(t)R(t)) = f(t)P(t) \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что

$$\begin{cases} c_{1,1}(t)\varphi_0(t) = S(t) \\ c_{1,2}(t)\varphi_0(t) = -Q(t) \\ c_{2,1}(t)\varphi_0(t) = -R(t) \\ c_{2,2}(t)\varphi_0(t) = P(t) \end{cases} \quad (10)$$

Из примитивности пар Туэ T и U делаем вывод, что $\varphi_0(t) = c(T, U) = \pm 1$ и теорема доказана. $\square$

Дадим теперь обобщающее определение подмодуля с одним определяющим соотношением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f^k(t)) = f^k(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный k -ой степенью многочлена $f(t)$. Пусть $a(t)$, $b(t)$ — произвольные многочлены из $\mathbb{Z}[t]$. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет линейному определяющему соотношению k -ого порядка, если $a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f^k(t))$. Подмодулем с одним определяющим соотношением k -ого порядка назовем множество $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ всех пар Туэ, удовлетворяющих этому линейному определяющему соотношению k -ого порядка.

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, то определяющему соотношению k -ого порядка удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассмотрений.

Пусть $a(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \not\equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, тогда на числитель пары не накладываются никаких ограничений, а знаменатель будет принадлежать главному идеалу $(f^k(t))$. Если $a(t) \not\equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, то числитель и знаменатель пары Туэ меняются ролями.

Поэтому все перечисленные тривиальные случаи исключаются, и дальше рассматриваем только случай $a(t)b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$.

Далее заметим, что если

$$d(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}, \quad a(t) \equiv a_1(t) \pmod{f^k(t)}, \quad b(t) \equiv b_1(t) \pmod{f^k(t)},$$

то справедливы равенства

$$M(a(t)d(t), b(t)d(t) \mid f^k(t)) = M(a(t), b(t) \mid f^k(t)) = M(a_1(t), b_1(t) \mid f^k(t)).$$

Поэтому, окончательно, выделяем для дальнейшего рассмотрения только случай

$$a(t) \not\equiv 0, \quad b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}, \quad \max(\deg a(t), \deg b(t)) < k \deg f(t), \quad (a(t), b(t)) = 1. \quad (11)$$

Из определения непосредственно следует, что свободный модуль ранга 2

$$f^k(t)\mathbb{Z}[t]^2 \subset M(a(t), b(t) \mid f^k(t)).$$

В частности, линейно независимые пары $T_0 = \{f^k(t), 0\}$ и $T_1 = \{0, f^k(t)\}$ принадлежат $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$.

Нетрудно указать пару из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t)) \setminus f^k(t)\mathbb{Z}[t]^2$. Такой парой будет пара

$$T_3 = \{b(t), -a(t)\}.$$

Очевидно, что справедливо включение

$$M(a(t), b(t)) \subset M(a(t), b(t) \mid f^{k+1}(t)) \subset M(a(t), b(t) \mid f^k(t)) \subset M(a(t), b(t) \mid f(t))$$

для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k .

ЛЕММА 7. Если $T = \{P(t), Q(t)\}$ и $U = \{R(t), S(t)\}$ — две пары $Ty\acute{e}$ из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$, то

$$P(t)S(t) - R(t)Q(t) = f^k(t)\varphi(t), \quad \varphi(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как T и U из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$, то по определению

$$a(t)P(t) + b(t)Q(t) = c_1(t)f^k(t), \quad a(t)R(t) + b(t)S(t) = c_2(t)f^k(t),$$

где $c_1(t), c_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Пользуясь этими равенствами, получим

$$\begin{aligned} & a(t)b(t)(P(t)S(t) - R(t)Q(t)) = \\ & = a(t)b(t)P(t)S(t) - (c_1(t)f^k(t) - a(t)P(t))(c_2(t)f^k(t) - b(t)S(t)) = \\ & = f^k(t) \left(c_1(t)b(t)S(t) + c_2(t)a(t)P(t) - c_1(t)c_2(t)f^k(t) \right). \end{aligned}$$

Так как по условию $(a(t)b(t), f(t)) = 1$, то $a(t)b(t) \mid c_1(t)b(t)S(t) + c_2(t)a(t)P(t) - c_1(t)c_2(t)f^k(t)$ и

$$\varphi(t) = \frac{c_1(t)b(t)S(t) + c_2(t)a(t)P(t) - c_1(t)c_2(t)f^k(t)}{a(t)b(t)} \in \mathbb{Z}[t]$$

что и доказывает лемму. $\square$

ЛЕММА 8. Если $T = \{P(t), Q(t)\}$ пара $Ty\acute{e}$ из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$, то

$$T + f^k(t) \cdot \mathbb{Z}^2[t] \subset M(a(t), b(t) \mid f^k(t)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f^k(t) \cdot \mathbb{Z}^2[t] \subset M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ и

$$T = \{P(t), Q(t)\} \in M(a(t), b(t) \mid f^k(t)),$$

то по свойствам модуля получаем утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 9. Существуют две линейно-независимые, примитивные пары $Ty\acute{e}$ T_k, U_k степени меньше nk из подмодуля с одним определяющим соотношением k -ого порядка $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ такие, что любая пара $Ty\acute{e}$ V из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ однозначно представляема в виде

$$V = c_1(t)T_k + c_2(t)U_k, \tag{12}$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве T_k одну из пар Туэ, принадлежащих

$$M(a(t), b(t) \mid f^k(t)),$$

наименьшей степени m . Так как пара $\{b(t), -a(t)\} \in M(a(t), b(t)) \subset M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$, то степень $m < n$. Пусть пара $T = \{P(t), Q(t)\}$. Если $d(T) \neq 1$, то $(d(T), f(t)) = 1$ и из равенства

$$a(t)P(t) + b(t)Q(t) = \varphi(t)f^k(t)$$

следует, что $d(T) \mid \varphi(t)$ и для $P_1(t) = \frac{P(t)}{d(T)}$, $Q_1(t) = \frac{Q(t)}{d(T)}$, $\varphi_1(t) = \frac{\varphi(t)}{d(T)} \in \mathbb{Z}[t]$ справедливо соотношение

$$a(t)P_1(t) + b(t)Q_1(t) = \varphi_1(t)f^k(t), \quad \{P_1(t), Q_1(t)\} \in M(a(t), b(t) \mid f^k(t)).$$

Поэтому можно без ограничения общности считать, что пара T — примитивная пара Туэ из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ наименьшей степени m . При этом, легко видеть, что такая примитивная пара Туэ не может иметь вид $\{P(t), 0\}$ или $\{0, Q(t)\}$.

Пары Туэ $T_{k,0} = \{f^k(t), 0\}$ и $T_{k,1} = \{0, f^k(t)\}$ из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ одновременно линейно независимы с T_k .

Пусть для определенности степень этой пары Туэ $T_k = \{P(t), Q(t)\}$ равна степени числителя пары и старший коэффициент числителя равен p_0 , а знаменателя — q_0 , то есть

$$P(t) = p_0 t^m + P_1(t), \quad P_1(t) = \sum_{\nu=1}^m p_\nu t^{m-\nu}, \quad Q(t) = q_0 t^{m_1} + Q_1(t), \quad Q_1(t) = \sum_{\nu=1}^{m_1} q_\nu t^{m_1-\nu}, \quad m_1 \leq m.$$

Рассмотрим пару Туэ T' , заданную равенством

$$T' = \begin{cases} \{t^{nk-m}P(t) - p_0 f^k(t), t^{nk-m}Q(t)\}, & \text{если } m_1 < m, \\ \{t^{nk-m}P(t) - p_0 f^k(t), t^{nk-m}Q(t) - q_0 f^k(t)\}, & \text{если } m_1 = m. \end{cases}$$

Ясно, что пара Туэ $T' \in M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ и линейно независима от пары Туэ $T_k = \{P(t), Q(t)\}$, кроме того её степень меньше nk .

Следовательно, существуют пары Туэ из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ линейно независимые с T_k . Пусть U_k одна из этих пар Туэ наименьшей степени s . Из предыдущего следует, что $s < nk$. Аналогично случаю пары T_k , можно считать, что U_k — примитивная пара Туэ из $M(a(t), b(t) \mid f^k(t))$ наименьшей степени $s < nk$.

Пусть такие выбранные пары Туэ имеют вид:

$$T_k = \left\{ \sum_{\nu=0}^m g_\nu t^{m-\nu}, \sum_{\nu=0}^m h_\nu t^{m-\nu} \right\}, \quad U_k = \left\{ \sum_{\nu=0}^s u_\nu t^{s-\nu}, \sum_{\nu=0}^s v_\nu t^{s-\nu} \right\}.$$

По выбору пар $m \leq s$.

Далее для выбранных пар

$$g_0 v_0 - h_0 u_0 \neq 0, \tag{13}$$

так как в противном случае пара $u_0 t^{s-m} T_k - g_0 U_k = \{P(t), Q(t)\}$, где

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{\nu=0}^m (u_0 g_\nu - g_0 u_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 u_\nu t^{s-\nu} = \sum_{\nu=1}^m (u_0 g_\nu - g_0 u_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 u_\nu t^{s-\nu}, \\ Q(t) &= \sum_{\nu=0}^m (u_0 h_\nu - g_0 v_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 v_\nu t^{s-\nu} = \sum_{\nu=1}^m (u_0 h_\nu - g_0 v_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 v_\nu t^{s-\nu}, \end{aligned}$$

линейно независима с парой T_k и имеет степень меньшую s . Но это противоречит выбору пары U_k .

Предположим существование пар из $M(a(t), b(t) | f(t))$ и не представимых через T_k, U_k по формуле (12). Пусть W является такой парой наименьшей степени l и имеет вид

$$W = \left\{ \sum_{\nu=0}^l p_{\nu} t^{l-\nu}, \sum_{\nu=0}^l q_{\nu} t^{l-\nu} \right\}.$$

Очевидно, что $l \geq s \geq m$.

Рассмотрим пару

$$\begin{aligned} \{R(t), S(t)\} &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) t^{l-m} T + (p_0 h_0 - q_0 g_0) t^{l-s} U + (g_0 v_0 - u_0 h_0) W \\ R(t) &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=0}^m g_{\nu} t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=0}^s u_{\nu} t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=0}^l p_{\nu} t^{l-\nu} = \\ &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=1}^m g_{\nu} t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=1}^s u_{\nu} t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=1}^l p_{\nu} t^{l-\nu}, \\ S(t) &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=0}^m h_{\nu} t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=0}^s v_{\nu} t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=0}^l q_{\nu} t^{l-\nu} = \\ &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=1}^m h_{\nu} t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=1}^s v_{\nu} t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=1}^l q_{\nu} t^{l-\nu}. \end{aligned}$$

Эта пара не представима через пары T_k, U_k и имеет степень меньшую l . Но это противоречит выбору пары W . Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что подмодуль с одним определяющим соотношением k -ого порядка $M(a(t), b(t) | f^k(t))$ является двумерной решеткой многочленов $\Lambda(T_k, U_k)$ с базисом $/T_k, U_k/$, причём базис примитивный, то есть обе пары Туэ T_k и U_k являются примитивными парами, и степень первой пары меньше n , а степень второй меньше nk .

Теперь можно утверждать, что имеет место бесконечная цепочка вложенных двумерных решёток многочленов:

$$\mathbb{Z}^2[t] \supset \Lambda(T_1, U_1) \supset \dots \supset \Lambda(T_k, U_k) \supset \dots \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 10. *Для двумерной решётки многочленов $\Lambda(T_k, U_k) = M(a(t), b(t) | f^k(t))$ справедливо равенство*

$$\det \Lambda(T, U) = \det M(T, U) = \pm f^k(t). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что пары $V_1 = \{f^k(t), 0\}$ и $V_2 = \{0, f^k(t)\}$ принадлежат решётке $\Lambda(T, U) = M(a(t), b(t) | f^k(t))$.

Пусть базис $/T_k, U_k/$ имеет вид $T_k = \{P(t), Q(t)\}$, $U_k = \{R(t), S(t)\}$, тогда, согласно лемме 7, имеем: $P(t)S(t) - Q(t)R(t) = \varphi_0(t)f^k(t)$ и найдутся целочисленные многочлены $c_{\nu, \mu}(t)$ ($\nu = 1, 2$; $\mu = 1, 2$) такие, что выполнены равенства

$$\begin{cases} c_{1,1}(t)P(t) + c_{1,2}(t)R(t) = f^k(t) \\ c_{1,1}(t)Q(t) + c_{1,2}(t)S(t) = 0 \\ c_{2,1}(t)P(t) + c_{2,2}(t)R(t) = 0 \\ c_{2,1}(t)Q(t) + c_{2,2}(t)S(t) = f^k(t) \end{cases} \quad (16)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} c_{1,1}(t)(P(t)S(t) - Q(t)R(t)) = f^k(t)S(t) \\ c_{1,2}(t)(P(t)S(t) - Q(t)R(t)) = -f^k(t)Q(t) \\ c_{2,1}(t)(P(t)S(t) - Q(t)R(t)) = -f^k(t)R(t) \\ c_{2,2}(t)(P(t)S(t) - Q(t)R(t)) = f^k(t)P(t) \end{cases} \quad (17)$$

Из (17) вытекает, что

$$\begin{cases} c_{1,1}(t)\varphi_0(t) = S(t) \\ c_{1,2}(t)\varphi_0(t) = -Q(t) \\ c_{2,1}(t)\varphi_0(t) = -R(t) \\ c_{2,2}(t)\varphi_0(t) = P(t) \end{cases} \quad (18)$$

Из примитивности пар Туэ T_k и U_k делаем вывод, что $\varphi_0(t) = c(T_k, U_k) = \pm 1$ и теорема доказана. $\square$

5. Подмодули с k линейными определяющими соотношениями

Следующее определение является обобщением на случай k определяющих соотношений, когда одному и тому же определяющему соотношению удовлетворяет не только пара, но и её производные до порядка $k - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f(t)) = f(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный многочленом $f(t)$. Пусть $a(t)$, $b(t)$ — произвольные многочлены из $\mathbb{Z}[t]$. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет k линейным определяющим соотношениям, если $a(t)P^{(\nu)}(t) + b(t)Q^{(\nu)}(t) \in (f(t))$ для $\nu = 0, \dots, k - 1$. Подмодулем с k определяющими соотношениями назовем множество

$$M(a(t), b(t) | f(t), k) = \left\{ \{P(t), Q(t)\} \mid a(t)P^{(\nu)}(t) + b(t)Q^{(\nu)}(t) \in (f(t)) \ (\nu = 0, \dots, k - 1) \right\}$$

— всех пар Туэ, удовлетворяющих этим линейным определяющим соотношениям.

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$, то определяющим соотношениям удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассмотрений.

Пусть $a(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$, тогда на числитель пары не накладывается никаких ограничений, а знаменатель и его производные будут принадлежать главному идеалу $(f(t))$. Если $a(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$, то числитель и знаменатель пары Туэ меняются ролями.

ЛЕММА 9. Необходимым и достаточным условием выполнения k соотношений

$$g^{(\nu)}(t) \in (f(t)) \quad (\nu = 0, \dots, k - 1)$$

является выполнение соотношения $g(t) \in (f^k(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Проведём индукцию по k .

При $k = 1$ утверждение тривиально.

Пусть $k \geq 1$ и из $g(t) \in (f^k(t))$ следует $g^{(\nu)}(t) \in (f(t))$ ($\nu = 0, \dots, k - 1$) для любого многочлена $g(t)$.

Пусть $g(t) \in (f^{k+1}(t))$, тогда $g(t) = c(t)f^{k+1}(t)$. Поэтому

$$g'(t) = c'(t)f^{k+1}(t) + c(t)(k+1)f^k(t)f'(t) \in (f^k(t)).$$

Отсюда, в силу индукционного предположения, следует $(g'(t))^{(\nu)} \in (f(t))$ ($\nu = 0, \dots, k - 1$). Но это означает, что $g(t)^{(\nu+1)} \in (f(t))$ и достаточность доказана.

Необходимость.

При $k = 1$ утверждение тривиально.

Пусть $k \geq 1$ и из $g^{(\nu)}(t) \in (f(t))$ ($\nu = 0, \dots, k - 1$) следует $g(t) \in (f^k(t))$ для любого многочлена $g(t)$.

Пусть $g^{(\nu)}(t) \in (f(t))$ ($\nu = 0, \dots, k$), тогда $g(t) = c(t)f^k(t)$, $g'(t) = c_1(t)f^k(t)$. Поэтому

$$g'(t) = c'(t)f^k(t) + c(t)kf^{k-1}(t)f'(t) = c_1(t)f^k(t).$$

Отсюда, в силу неприводимости $f(t)$, следует $c(t) = c_2(t)f(t)$, $c_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Но это означает, что $g(t) \in (f^{k+1}(t))$ и необходимость доказана.

□

Поэтому все перечисленные тривиальные случаи исключаются, и дальше рассматриваем только случай $a(t)b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$.

По аналогии со случаем одного определяющего соотношения выделяем для дальнейшего рассмотрения только случай

$$a(t) \not\equiv 0, \quad b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}, \quad \max(\deg a(t), \deg b(t)) < \deg f(t), \quad (a(t), b(t)) = 1. \quad (19)$$

Из определения непосредственно следует, что свободный модуль ранга 2

$$f^k(t)\mathbb{Z}[t]^2 \subset M(a(t), b(t) \mid f(t), k).$$

В частности, линейно независимые пары $T_0 = \{f^k(t), 0\}$ и $T_1 = \{0, f^k(t)\}$ принадлежат $M(a(t), b(t) \mid f(t), k)$.

ЛЕММА 10. Множество $M(a(t), b(t) \mid f(t), k)$ является $\mathbb{Z}[t]$ -подмодулем модуля $\mathbb{Z}^2[t]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = \{P(t), Q(t)\}$ и $U = \{R(t), S(t)\}$ из $M(a(t), b(t) \mid f(t), k)$, тогда по определению

$$a(t)P^{(\nu)}(t) + b(t)Q^{(\nu)}(t) = c_{1,\nu}(t)f(t), \quad a(t)R^{(\nu)}(t) + b(t)S^{(\nu)}(t) = c_{2,\nu}(t)f(t) \quad (\nu = 0, \dots, k-1),$$

где $c_{1,\nu}(t), c_{2,\nu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ ($\nu = 0, \dots, k-1$).

Пользуясь этими равенствами, получим

$$a(t) \left(P^{(\nu)}(t) + R^{(\nu)}(t) \right) + b(t) \left(Q^{(\nu)}(t) + S^{(\nu)}(t) \right) = f(t) (c_{1,\nu}(t) + c_{2,\nu}(t)) \quad (\nu = 0, \dots, k-1),$$

что означает замкнутость $M(a(t), b(t) \mid f(t), k)$ относительно операции сложения.

Так как для любого $c(t) \in \mathbb{Z}[t]$ имеем:

$$(P(t)c(t))^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} C_{\nu}^{\mu} P^{(\mu)}(t) c^{(\nu-\mu)}(t) \in \mathbb{Z}[t],$$

то

$$\begin{aligned} a(t)(P(t)c(t))^{(\nu)} + b(t)(Q(t)c(t))^{(\nu)} &= \sum_{\mu=0}^{\nu} C_{\nu}^{\mu} c^{(\nu-\mu)}(t) \left(a(t)P^{(\mu)}(t) + b(t)Q^{(\mu)}(t) \right) = \\ &= f(t) \sum_{\mu=0}^{\nu} C_{\nu}^{\mu} c^{(\nu-\mu)}(t) c_{1,\mu}(t) \quad (\nu = 0, \dots, k-1), \end{aligned}$$

что доказывает замкнутость $M(a(t), b(t) \mid f(t), k)$ относительно операции умножения на многочлен и доказывает лемму. □

ЛЕММА 11. Если $T = \{P(t), Q(t)\}$ пара Тьюэ из $M(a(t), b(t) \mid f(t), k)$, то

$$T + f^k(t) \cdot \mathbb{Z}^2[t] \subset M(a(t), b(t) \mid f(t), k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f^k(t) \cdot \mathbb{Z}^2[t] \subset M(a(t), b(t) | f(t), k)$ и

$$T = \{P(t), Q(t)\} \in M(a(t), b(t) | f(t), k),$$

то по свойствам модуля получаем утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 11. *Существуют две линейно-независимые пары Туэ T, U степени меньше nk из $M(a(t), b(t) | f(t), k)$ такие, что любая пара Туэ V из $M(a(t), b(t) | f(t), k)$ однозначно представима в виде*

$$V = c_1(t)T + c_2(t)U, \quad (20)$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве T одну из пар Туэ, принадлежащих

$$M(a(t), b(t) | f(t), k),$$

наименьшей степени m . В силу леммы 11 степень $m < nk$. Легко видеть, что такая примитивная пара Туэ не может иметь вид $\{P(t), 0\}$ или $\{0, Q(t)\}$.

Действительно, если $\{P(t), 0\} \in M(a(t), b(t) | f(t), k)$, то по лемме 9 $P(t) \in (f^k(t))$, что противоречит неравенству $m \leq nk$. Аналогичные рассуждения справедливы для пары Туэ $\{0, Q(t)\}$.

Отсюда следует, что пары Туэ $T_{k,0} = \{f^k(t), 0\}$ и $T_{k,1} = \{0, f^k(t)\}$ из $M(a(t), b(t) | f(t), k)$ обе линейно независимы с T . Пусть для определенности степень этой пары Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ равна степени числителя пары и старший коэффициент числителя равен p_0 , а знаменателя — q_0 , то есть

$$P(t) = p_0 t^m + P_1(t), \quad P_1(t) = \sum_{\nu=1}^m p_\nu t^{m-\nu}, \quad Q(t) = q_0 t^{m_1} + Q_1(t), \quad Q_1(t) = \sum_{\nu=1}^{m_1} q_\nu t^{m_1-\nu}, \quad m_1 \leq m.$$

Рассмотрим пару Туэ T' , заданную равенством

$$T' = \begin{cases} \{t^{nk-m}P(t) - p_0f(t), t^{nk-m}Q(t)\}, & \text{если } m_1 < m, \\ \{t^{nk-m}P(t) - p_0f(t), t^{nk-m}Q(t) - q_0f(t)\}, & \text{если } m_1 = m. \end{cases}$$

Ясно, что пара Туэ $T' \in M(a(t), b(t) | f(t), k)$ и линейно независима от пары Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$, кроме того её степень меньше nk .

Следовательно, существуют пары Туэ из $M(a(t), b(t) | f(t), k)$ линейно независимые с T . Пусть U одна из этих пар Туэ наименьшей степени s . Из предыдущего следует, что $s < nk$.

Пусть такие выбранные пары Туэ имеют вид:

$$T = \left\{ \sum_{\nu=0}^m g_\nu t^{m-\nu}, \sum_{\nu=0}^m h_\nu t^{m-\nu} \right\}, \quad U = \left\{ \sum_{\nu=0}^s u_\nu t^{s-\nu}, \sum_{\nu=0}^s v_\nu t^{s-\nu} \right\}.$$

По выбору пар $m \leq s < nk$.

Далее для выбранных пар

$$g_0 v_0 - h_0 u_0 \neq 0, \quad (21)$$

так как в противном случае пара $u_0 t^{s-m} T - g_0 U = \{P(t), Q(t)\}$, где

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{\nu=0}^m (u_0 g_\nu - g_0 u_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 u_\nu t^{s-\nu} = \sum_{\nu=1}^m (u_0 g_\nu - g_0 u_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 u_\nu t^{s-\nu}, \\ Q(t) &= \sum_{\nu=0}^m (u_0 h_\nu - g_0 v_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 v_\nu t^{s-\nu} = \sum_{\nu=1}^m (u_0 h_\nu - g_0 v_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 v_\nu t^{s-\nu}, \end{aligned}$$

линейно независима с парой T и имеет степень меньшую s . Но это противоречит выбору пары U .

Предположим существование пар из $M(a(t), b(t) | f(t), k)$ и не представимых через T, U по формуле (20). Пусть W является такой парой наименьшей степени l и имеет вид

$$W = \left\{ \sum_{\nu=0}^l p_{\nu} t^{l-\nu}, \sum_{\nu=0}^l q_{\nu} t^{l-\nu} \right\}.$$

Очевидно, что $l \geq s \geq m$.

Рассмотрим пару

$$\{R(t), S(t)\} = (u_0 q_0 - p_0 v_0) t^{l-m} T + (p_0 h_0 - q_0 g_0) t^{l-s} U + (g_0 v_0 - u_0 h_0) W$$

$$\begin{aligned} R(t) &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=0}^m g_{\nu} t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=0}^s u_{\nu} t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=0}^l p_{\nu} t^{l-\nu} = \\ &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=1}^m g_{\nu} t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=1}^s u_{\nu} t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=1}^l p_{\nu} t^{l-\nu}, \\ S(t) &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=0}^m h_{\nu} t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=0}^s v_{\nu} t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=0}^l q_{\nu} t^{l-\nu} = \\ &= (u_0 q_0 - p_0 v_0) \sum_{\nu=1}^m h_{\nu} t^{l-\nu} + (p_0 h_0 - q_0 g_0) \sum_{\nu=1}^s v_{\nu} t^{l-\nu} + (g_0 v_0 - u_0 h_0) \sum_{\nu=1}^l q_{\nu} t^{l-\nu}. \end{aligned}$$

Эта пара не представима через пары T, U и имеет степень меньшую l . Но это противоречит выбору пары W . Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что подмодуль с k определяющими соотношениями $M(a(t), b(t) | f(t), k)$ является двумерной решеткой многочленов $\Lambda_2(T, U)$ с базисом $/T, U/$, причём степень каждой пары меньше nk .

Из определения подмодуля с k определяющими соотношениями $M(a(t), b(t) | f(t), k)$ сразу следует, что имеет место бесконечная цепочка вложенных подмодулей (двумерных решёток многочленов)

$$\mathbb{Z}^2[t] \supset M(a(t), b(t) | f(t), 1) \supset \dots \supset M(a(t), b(t) | f(t), k) \supset \dots \quad (22)$$

6. Дробно-линейные преобразования двумерных решёток многочленов

Напомним определение (см. [7], [8] стр. 104) дробно-линейного преобразования M многочленов $f_{\vec{a}}(\vec{x})$, где

$$f_{\vec{a}}(\vec{x}) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu}, \quad \vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Напомним, что $\mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ — мультипликативная группа квадратных, унимодулярных, целочисленных матриц второго порядка. Таким образом, целочисленная матрица

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$$

тогда и только тогда, когда

$$A, B, C, D \in \mathbb{Z}, \quad \delta(M) = \det M = AD - BC = \pm 1.$$

Заметим, что для обратной матрицы M^{-1} справедливо равенство

$$M^{-1} = \delta(M) \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Для произвольной матрицы $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ дробно-линейным преобразованием M многочлена $f_{\tilde{a}}(x)$ называется преобразование, заданное формулой

$$M(f_{\tilde{a}}(x)) = (Cx + D)^n f_{\tilde{a}}\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right).$$

Отсюда следует, что можно дать следующее определение дробно-линейного преобразования двумерных решёток многочленов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Для произвольной матрицы $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ дробно-линейным преобразованием M первого рода двумерной решётки многочленов $\Lambda(T, U)$ называется преобразование, заданное формулой

$$M(\Lambda(T, U)) = \Lambda(M(T), M(U)),$$

где для произвольной пары $T = \{P(t), Q(t)\}$ преобразование $M(T)$ первого рода определяется равенством $M(T) = \{M(P(t)), M(Q(t))\}$.

ЛЕММА 12. Для произвольной матрицы $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ дробно-линейное преобразование M многочленов переводит линейно независимые пары $\text{Туз } T, U$ в линейно независимые пары $\text{Туз } M(T), M(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, что пары $\text{Туз } M(T), M(U)$ — линейно зависимые, то есть существуют два многочлена $c_1(t)$ и $c_2(t)$ с целыми коэффициентами одновременно не равные нулю, что $c_1(t)M(T) + c_2(t)M(U) = \{0, 0\}$. Так как $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$, то существует обратная матрица $M^{-1} \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$. Применим её к последнему равенству для пар, получим: $M(c_1(t))T + M(c_2(t))U = \{0, 0\}$. Так как из $M(c(t)) = 0$ следует $c(t) = 0$, то получаем линейную зависимость пар $\text{Туз } T, U$. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. $\square$

Из доказанной леммы следует, что определение дробно-линейного преобразования M первого рода двумерной решётки многочленов $\Lambda(T, U)$ корректно.

Оказывается, что можно дать и другое определение преобразования двумерной решётки многочленов $\Lambda(T, U)$ с помощью матрицы M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Для произвольной матрицы $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ дробно-линейным преобразованием $\tilde{M}$ второго рода двумерной решётки многочленов $\Lambda(T, U)$ называется преобразование, заданное формулой

$$\tilde{M}(\Lambda(T, U)) = \Lambda(\tilde{M}(T), \tilde{M}(U)),$$

где для произвольной пары $T = \{P(t), Q(t)\}$ преобразование $\tilde{M}(T)$ второго рода определяется равенством $\tilde{M}(T) = \{D \cdot M(P(t)) - B \cdot M(Q(t)), A \cdot M(Q(t)) - C \cdot M(P(t))\}$.

ЛЕММА 13. Для произвольной матрицы $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ и пары $\text{Туз } T$ справедливо равенство

$$\tilde{M}^{-1}(\tilde{M}(T)) = T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}\tilde{M}^{-1}(\tilde{M}(T)) &= \tilde{M}^{-1}(\{D \cdot M(P(t)) - B \cdot M(Q(t)), A \cdot M(Q(t)) - C \cdot M(P(t))\}) = \\ &= \delta(M)\{A \cdot M^{-1}(D \cdot M(P(t)) - B \cdot M(Q(t))) + B \cdot M^{-1}(A \cdot M(Q(t)) - C \cdot M(P(t))), \\ &\quad D \cdot M^{-1}(A \cdot M(Q(t)) - C \cdot M(P(t))) + C \cdot M^{-1}(D \cdot M(P(t)) - B \cdot M(Q(t)))\} = \\ &= \delta(M)\{(AD - BC)M^{-1}(M(P(t))), (AD - BC)M^{-1}(M(Q(t)))\} = \{P(t), Q(t)\} = T.\end{aligned}$$

□

Из доказанной леммы следует, что дробно-линейное преобразование второго рода имеет обратное преобразование, а, значит, оно преобразует двумерную решётку многочленов $\Lambda(T, U)$ в двумерную решётку многочленов.

7. О полиномах Туэ

Напомним некоторые определения из работы [4], сделав необходимые для дальнейшего модификации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен n -ой степени с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом равным 1, α_ν — корень этого многочлена, а $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Тогда $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu) = P(t) - \alpha_\nu Q(t)$ называется полиномом Туэ для α_ν .

Таким образом, многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ из $\mathbb{Z}[t]$, а полином Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$, вообще говоря, из его расширения $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][t]$.

Другими словами можно сказать, что неприводимый многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}^*[x]$ задает отображение Туэ из декартового квадрата $\mathbb{Z}[t]^2$ в кольцо полиномов $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][t]$ ($\nu = 1, \dots, n$). Образом произвольной пары многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ с целыми коэффициентами и будет полином Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$.

Ясно, что полиномы Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_1), \dots, \mathcal{T}(t, \alpha_\nu), \dots, \mathcal{T}(t, \alpha_n)$ образуют полный набор сопряженных полиномов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Порядком полинома Туэ называется наивысшая степень $(t - \alpha_\nu)$, на которую этот полином делится. Полином Туэ j -го порядка обозначается через $\mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu)$. Полином $R_j(t, \alpha_\nu)$, удовлетворяющий равенству $\mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu) = (t - \alpha_\nu)^j R_j(t, \alpha_\nu)$, называется множителем Туэ порядка j для α_ν , а упорядоченная пара многочленов $T_j = \{P_j(t), Q_j(t)\}$ — парой Туэ порядка j . Многочлен $P_j(t)$ называется числителем пары Туэ. Через m_j обозначается степень числителя. Многочлен $Q_j(t)$ называется знаменателем пары Туэ. Через l_j обозначается степень знаменателя. Величина $k_j = \max(m_j, l_j)$ называется степенью пары Туэ.

Таким образом, для произвольной пары Туэ T и соответствующего полинома Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$ определены четыре функции:

- $j(T)$ — порядок пары Туэ.
- $m(T)$ — степень числителя пары.
- $l(T)$ — степень знаменателя пары.
- $k(T)$ — степень пары.

Единственным полиномом Туэ бесконечного порядка является нулевой полином:

$$\mathcal{T}_\infty(t, \alpha_\nu) = 0 = (t - \alpha_\nu)^j \cdot 0$$

для любого $j \geq 0$, соответствующая пара Туэ будет обозначаться $T_\infty = \{0, 0\}$. Примем естественное соглашение, что $j(\{0, 0\}) = m(\{0, 0\}) = l(\{0, 0\}) = k(\{0, 0\}) = \infty$.

Отметим пять простейших свойств полиномов Туэ, указанных в работе [4], и к ним добавим ещё шестое и седьмое свойства, которые сразу вытекают из определения полинома Туэ порядка j .

1. $f^j(t)$ является полиномом Туэ порядка j .
2. Существуют полиномы Туэ любого порядка.
3. Произведение полиномов Туэ j -го порядка на многочлен с целыми коэффициентами есть также полином Туэ порядка не ниже j .
4. Сумма двух полиномов Туэ является также полиномом Туэ и его порядок не ниже наименьшего из порядков слагаемых.
5. Если α — алгебраическое число степени не ниже второй и полином Туэ $\mathcal{T}_j(t, \alpha) = P_j(t) - \alpha Q_j(t)$ делится на многочлен $\varphi(t)$ с целыми коэффициентами, то $P_j(t)$ и $Q_j(t)$ делятся на $\varphi(t)$ и частное от деления $\mathcal{T}_j(t, \alpha)$ на $\varphi(t)$ есть многочлен Туэ порядка не выше j .
6. Степень полинома Туэ j -го порядка не меньше j .
7. Полином Туэ имеет порядок не ниже j тогда и только тогда, когда он сам и все его производные до порядка $j - 1$ включительно являются полиномами Туэ порядка не ниже 1.

Прежде всего уточним свойство 1, а именно, многочлен $f^j(t)$ является полиномом Туэ для каждого алгебраического числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Его парой Туэ порядка j является пара $T_j = \{f^j(t), 0\}$. Таким образом, полиномы Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_1) = f^j(t), \dots, \mathcal{T}(t, \alpha_\nu) = f^j(t), \dots, \mathcal{T}(t, \alpha_n) = f^j(t)$ образуют стационарный полный набор сопряженных полиномов, но соответствующий полный набор сопряженных полиномов-множителей Туэ $R_j(t, \alpha_1), \dots, R_j(t, \alpha_\nu), \dots, R_j(t, \alpha_n)$ не является стационарным, так как

$$R_j(t, \alpha_\nu) = \left(\sum_{l=0}^{n-1} t^l \sum_{k=l+1}^n a_k \alpha_\nu^{k-l-1} \right)^j = f_\nu^j(t).$$

Перейдем к обсуждению свойства 2. Тривиальными примерами пар Туэ порядка j являются уже упомянутая пара $T_{j,0} = \{f^j(t), 0\}$ и пара $T_{j,1} = \{0, f^j(t)\}$.² Свойство 2 является содержательным, так как кроме тривиальных примеров, указанных выше, для любого порядка $j > 0$ имеются нетривиальные примеры отличные от пар Туэ вида $T_j = f^j(1)T_0$, где T_0 — произвольная пара Туэ нулевого порядка. Именно на изучении таких нетривиальных примеров полиномов Туэ порядка j и были сосредоточены исследования М. Н. Добровольского и В. Д. Подсыпанина.

Например, парами Туэ порядка 1 является пара $T_{1,0} = \{t, 1\}$, которой соответствует полный набор сопряженных полиномов Туэ первого порядка

$$\mathcal{T}_{1,0}(t, \alpha_1) = t - \alpha_1, \quad \dots, \quad \mathcal{T}_{1,0}(t, \alpha_n) = t - \alpha_n,$$

²Мы и далее полиномы Туэ и пары Туэ будем обозначать, как правило, с помощью двух индексов. Первый индекс указывает на порядок, а второй на номер, если речь идет сразу о нескольких полиномах или парах.

со стационарным набором множителей Туэ $R_{1,0}(t, \alpha_1) = 1$, а также пара

$$T_{1,1} = \left\{ -a_0, \sum_{j=1}^{n-1} a_j t^{j-1} + t^{n-1} \right\},$$

которая задает полиномы Туэ

$$\mathcal{T}_{1,1}(t, \alpha_\nu) = -a_0 - \alpha_\nu \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j t^{j-1} + t^{n-1} \right) \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Действительно, так как $a_n = 1$, то

$$\begin{aligned} -a_0 - \alpha_\nu \sum_{j=1}^n a_j t^{j-1} &= -\alpha_\nu \sum_{j=2}^n a_j (t^{j-1} - \alpha_\nu^{j-1}) = \\ &= -\alpha_\nu (t - \alpha_\nu) \sum_{j=2}^n a_j \sum_{l=0}^{j-2} t^l \alpha_\nu^{j-2-l} = (t - \alpha_\nu) R_{1,1}(t, \alpha_\nu), \end{aligned}$$

где $R_{1,1}(t, \alpha_\nu) = -\alpha_\nu \sum_{l=0}^{n-2} t^l \sum_{j=l+2}^n a_j \alpha_\nu^{j-2-l}$ — множитель Туэ первого порядка для α_ν .

Свойства 3 и 4 позволяют нам в следующих разделах на множестве всех пар Туэ порядка не ниже j задать алгебраическую структуру унитарного модуля над кольцом целочисленных полиномов $\mathbb{Z}[t]$.

Остановимся подробнее на свойстве 5, которое является частным случаем теоремы 2 (см. стр. 58). Действительно, полином Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu) = P(t) - \alpha_\nu Q(t)$ имеет нулевую многочленную компоненту $P(t)$ и первую многочленную компоненту $-Q(t)$, что доказывает свойство 5.

Свойство 6 очевидно, так как полином Туэ порядка j отличен от нуля, а в кольце полиномов $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][t]$ ($\nu = 1, \dots, n$) ненулевой полином делится на полином $(t - \alpha_\nu)^j$ тогда и только тогда, когда его степень не меньше j и он имеет корень α_ν кратности не меньше j . Эти рассуждения доказывают и свойство 7.

ЛЕММА 14. *Для любого полинома Туэ $\mathcal{T}_j(t, \alpha) = P_j(t) - \alpha Q_j(t)$ порядка $j \geq 1$ соответствующая пара Туэ $T_j = \{P_j(t), Q_j(t)\} \in M(1, -t \mid f(t))$, то есть выполнены соотношения*

$$f(t) \mid (P_j(t) - tQ_j(t)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\mathcal{T}_j(t, \alpha) = P_j(t) - \alpha Q_j(t) = (t - \alpha)Q_j(t) + (P_j(t) - tQ_j(t)).$$

Поэтому из делимости левой части на $(t - \alpha)$ следует делимость на этот бином последнего выражения в больших скобках. Но это выражение является многочленом с целыми коэффициентами, поэтому он будет делиться на многочлен $f(t)$. $\square$

Легко вычислить произведение полного набора сопряженных многочленов Туэ.

ТЕОРЕМА 12. *Для любой пары многочленов $P_j(t)$ и $Q_j(t)$ из $\mathbb{Z}[t]$, задающих полный набор сопряженных полиномов Туэ j -ого порядка: $\mathcal{T}_j(t, \alpha_1) = P_j(t) - \alpha_1 Q_j(t)$, $\dots$, $\mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu) = P_j(t) - \alpha_\nu Q_j(t)$, $\dots$, $\mathcal{T}_j(t, \alpha_n) = P_j(t) - \alpha_n Q_j(t)$ справедливо равенство*

$$\prod_{\nu=1}^n \mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu) = Q_j^n(t) \cdot f\left(\frac{P_j(t)}{Q_j(t)}\right) = f^j(t) R_j(t), \quad (23)$$

где множитель Туэ $R_j(t) = \prod_{\nu=1}^n R_j(t, \alpha_\nu) \in \mathbb{Z}[t]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\prod_{\nu=1}^n \mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu) = Q_j^n(t) \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{P_j(t)}{Q_j(t)} - \alpha_\nu \right) = Q_j^n(t) \cdot f \left(\frac{P_j(t)}{Q_j(t)} \right).$$

Так как $\prod_{\nu=1}^n (t - \alpha_\nu)^j = f^j(t)$, то равенство (23) доказано, а из делимости двух многочленов из кольца $\mathbb{Z}[t]$ в расширенном кольце $\mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \dots, \alpha_n][t]$ следует делимость в $\mathbb{Z}[t]$, что завершает доказательство теоремы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. *Формой А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина называется бинарная полиномиальная форма $\mathcal{F}(P(t), Q(t))$, задаваемая равенством*

$$\mathcal{F}(P(t), Q(t)) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu P^\nu(t) Q^{n-\nu}(t). \quad (24)$$

Из определения видно, что ТДП-форма задает отображение из декартового квадрата $\mathbb{Z}[t]^2$ в кольцо многочленов $\mathbb{Z}[t]$. Нетрудно видеть, что степень образа равна $n \cdot k$, где k — степень пары $\{P(t), Q(t)\}$.

Формулу (23) теперь можно переписать в виде

$$f \left(\frac{P_j(t)}{Q_j(t)} \right) = \frac{\mathcal{F}(P_j(t), Q_j(t))}{Q_j^n(t)} = f^j(t) \frac{R_j(t)}{Q_j^n(t)}. \quad (25)$$

Из этой формулы видно, что особый интерес представляют примитивные пары Туэ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Пара Туэ $T_j = \{P_j(t), Q_j(t)\}$ порядка j называется примитивной, если её числитель и знаменатель взаимно простые многочлены.*

Заметим, что ТДП-форма является однородной формой порядка n . Действительно,

$$\mathcal{F}(P(t)d(t), Q(t)d(t)) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu P^\nu(t) Q^{n-\nu}(t) d^n(t) = d^n(t) \mathcal{F}(P(t), Q(t)). \quad (26)$$

Пользуясь формулой (25), можно определить два типа итерационных последовательностей рациональных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *ТДП-последовательностью первого рода для примитивной пары Туэ $T_j = \{P_j(t), Q_j(t)\}$ порядка j называется последовательность несократимых дробей $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_l}{q_l}, \dots$, удовлетворяющих соотношениям*

$$d_l = \left(q_l^{m_j} P_j \left(\frac{p_l}{q_l} \right), q_l^{l_j} Q_j \left(\frac{p_l}{q_l} \right) \right), \\ p_{l+1} = d_l^{-1} q_l^{m_j} P_j \left(\frac{p_l}{q_l} \right), \quad q_{l+1} = d_l^{-1} q_l^{l_j} Q_j \left(\frac{p_l}{q_l} \right) \quad (l \geq 0). \quad (27)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Последовательность $\{T_{j_\nu} = \{P_{j_\nu}(t), Q_{j_\nu}(t)\}\}_{\nu=0}^\infty$ примитивных пар Туэ называется монотонной, если $1 \leq j_0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_\nu \leq \dots$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. *ТДП-последовательностью второго рода для монотонной последовательности $\{T_{j_\nu} = \{P_{j_\nu}(t), Q_{j_\nu}(t)\}\}_{\nu=0}^\infty$ примитивных пар Туэ называется последовательность несократимых дробей $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_l}{q_l}, \dots$, удовлетворяющих соотношениям*

$$d_\nu = \left(q_\nu^{m_j} P_{j_\nu} \left(\frac{p_\nu}{q_\nu} \right), q_\nu^{l_{j_\nu}} Q_{j_\nu} \left(\frac{p_\nu}{q_\nu} \right) \right), \\ p_{\nu+1} = d_\nu^{-1} q_\nu^{m_j} P_{j_\nu} \left(\frac{p_\nu}{q_\nu} \right), \quad q_{\nu+1} = d_\nu^{-1} q_\nu^{l_{j_\nu}} Q_{j_\nu} \left(\frac{p_\nu}{q_\nu} \right) \quad (l \geq 0). \quad (28)$$

Возникают естественные вопросы об условиях сходимости этих итерационных последовательностей.

8. Подмодули с одним полиномиальным определяющим соотношением порядка k

С помощью ТДП-формы дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f^k(t)) = f^k(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный k -ой степенью многочлена $f(t)$. Пусть $\mathcal{F}(P(t), Q(t))$ — соответствующая ТДП-форма. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет полиномиальному определяющему соотношению k -ого порядка, если $\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \in (f^k(t))$. Подмодулем с одним определяющим полиномиальным соотношением k -ого порядка назовем множество $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \mid f^k(t))$ всех пар Туэ, удовлетворяющих этому полиномиальному определяющему соотношению k -ого порядка.

Из определения непосредственно следует, что свободный модуль ранга 2

$$f^k(t)\mathbb{Z}[t]^2 \subset M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \mid f^k(t)).$$

В частности, линейно независимые пары $T_0 = \{f^k(t), 0\}$ и $T_1 = \{0, f^k(t)\}$ принадлежат $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \mid f^k(t))$.

Очевидно, что справедливо включение

$$M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \mid f^{k+1}(t)) \subset M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \mid f^k(t)) \subset M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \mid f(t))$$

для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k .

ЛЕММА 15. Для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ из общего случая, если $T = \{P(t), Q(t)\}$ и $U = \{R(t), S(t)\}$ — две пары Туэ из

$$M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \mid f^k(t)),$$

то

$$P(t)S(t) - R(t)Q(t) = f^k(t)\varphi(t), \quad \varphi(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что утверждение достаточно доказать для примитивных пар Туэ. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(P(t), Q(t)) &= d^n(T)\mathcal{F}\left(\frac{P(t)}{d(T)}, \frac{Q(t)}{d(T)}\right), \quad \mathcal{F}(R(t), S(t)) = d^n(U)\mathcal{F}\left(\frac{R(t)}{d(U)}, \frac{S(t)}{d(U)}\right), \\ P(t)S(t) - R(t)Q(t) &= d(T)d(U)\left(\frac{P(t)}{d(T)}\frac{S(t)}{d(U)} - \frac{R(t)}{d(U)}\frac{Q(t)}{d(T)}\right). \end{aligned}$$

Далее заметим, что если

$$T = \{P(t)f(t), Q(t)\} \in M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \mid f^k(t)),$$

то $Q(t) = f(t)Q_1(t)$, $Q_1(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Поэтому, в силу выше сказанного, считаем, что $d(T) = d(U) = 1$,

$$P(t), Q(t), R(t), S(t) \notin (f(t)).$$

Так как T и U из $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$, то по определению

$$\mathcal{F}(P(t), Q(t)) = c_1(t)f^{k_1}(t), \quad \mathcal{F}(R(t), S(t)) = c_2(t)f^{k_2}(t), \quad k_1, k_2 \geq k,$$

где $c_1(t), c_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$ и $(c_1(t), f(t)) = (c_2(t), f(t)) = 1$.

Разложим левую и правую части этих равенств в кольцо многочленов

$$\mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \dots, \alpha_n][t],$$

получим

$$\prod_{\nu=1}^n \left(\frac{P(t) - \alpha_\nu Q(t)}{(t - \alpha_\nu)^{k_1}} \right) = c_1(t), \quad \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{R(t) - \alpha_\nu S(t)}{(t - \alpha_\nu)^{k_2}} \right) = c_2(t).$$

Заметим, что при $\nu \neq \mu$ имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \alpha_\nu} \frac{P(t) - \alpha_\mu Q(t)}{(t - \alpha_\nu)^{k_1}} = \frac{P(\alpha_\nu) - \alpha_\mu Q(\alpha_\nu)}{(\alpha_\nu - \alpha_\mu)^{k_1}} \neq 0,$$

в силу общего случая унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$.

Так как $c_1(\alpha_\nu) \neq 0$, $c_2(\alpha_\nu) \neq 0$ для любого $\nu = 1, \dots, n$, то

$$P(t) - \alpha_\nu Q(t) = R_1(t, \alpha_\nu)(t - \alpha_\nu)^{k_1}, \quad R(t) - \alpha_\nu S(t) = R_2(t, \alpha_\nu)(t - \alpha_\nu)^{k_2},$$

где полиномы $R_1(t, \alpha_\nu), R_2(t, \alpha_\nu) \in \mathbb{Z}[\alpha_\nu][t]$.

Положим $g(t, \alpha_\nu) = (t - \alpha_\nu)^{k_1-k} R_1(t, \alpha_\nu)$ и $h(t, \alpha_\nu) = (t - \alpha_\nu)^{k_2-k} R_2(t, \alpha_\nu)$. Тогда

$$\begin{aligned} P(t)S(t) - R(t)Q(t) &= \left((t - \alpha_\nu)^k g(t, \alpha_\nu) + \alpha_\nu Q(t) \right) S(t) - \\ &- \left((t - \alpha_\nu)^k h(t, \alpha_\nu) + \alpha_\nu S(t) \right) Q(t) = (t - \alpha_\nu)^k (g(t, \alpha_\nu)S(t) - h(t, \alpha_\nu)Q(t)). \end{aligned} \quad (29)$$

Формула (29) справедлива для любого $\nu = 1, \dots, n$.

Таким образом, многочлен $P(t)S(t) - R(t)Q(t)$ делится на n взаимно простых полиномов $(t - \alpha_\nu)^k$ из кольца $\mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_n][t]$, а значит делится на их произведение, равное $f^k(t)$, что и доказывает лемму. $\square$

ТЕОРЕМА 13. *Для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ с целыми коэффициентами множество $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$ всех пар Туэ, удовлетворяющих полиномиальному определяющему соотношению k -ого порядка $\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \in (f^k(x))$, является свободным $\mathbb{Z}[t]$ -модулем ранга 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu) = P(t) - \alpha_\nu Q(t)$ — полиномом Туэ для α_ν ($\nu = 1, \dots, n$), то имеем разложение ТДП-формы $\mathcal{F}(P(t), Q(t))$ в произведение полиномов Туэ:

$$\mathcal{F}(P(t), Q(t)) = \prod_{\nu=1}^n \mathcal{T}(t, \alpha_\nu).$$

Отсюда следует, что если пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\} \in M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$, то соответствующие полиномы Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu) = P(t) - \alpha_\nu Q(t)$ будут иметь порядок не ниже k , и наоборот, если пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ имеет порядок не ниже k , то она удовлетворяет полиномиальному определяющему соотношению k -ого порядка $\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \in (f^k(x))$.

Таким образом, множество $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$ совпадает с множеством всех пар Туэ порядка не ниже k , которое является подмодулем $\mathbb{Z}[t]$ -модуля $\mathbb{Z}^2[t]$.

Перейдём к доказательству того, что ранг этого свободного модуля равен 2. Для этого необходимо показать, что существуют две линейно-независимые пары Туэ T_k, U_k из $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$ такие, что любая пара Туэ V из $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$ однозначно представима в виде

$$V = c_1(t)T_k + c_2(t)U_k, \quad (30)$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Возьмем в качестве T_k одну из пар Туэ, принадлежащих

$$M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t)),$$

наименьшей степени m .

Пары Туэ $T_{k,0} = \{f^k(t), 0\}$ и $T_{k,1} = \{0, f^k(t)\}$ из $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$ не могут быть одновременно линейно зависимыми с T_k . Следовательно, существуют пары Туэ из $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$ линейно независимые с T_k . Пусть U_k одна из этих пар Туэ наименьшей степени s .

Пусть такие выбранные пары Туэ имеют вид:

$$T_k = \left\{ \sum_{\nu=0}^m g_\nu t^{m-\nu}, \sum_{\nu=0}^m h_\nu t^{m-\nu} \right\}, \quad U_k = \left\{ \sum_{\nu=0}^s u_\nu t^{s-\nu}, \sum_{\nu=0}^s v_\nu t^{s-\nu} \right\}.$$

По выбору пар $m \leq s$.

Далее для выбранных пар

$$g_0 v_0 - h_0 u_0 \neq 0, \quad (31)$$

так как в противном случае пара $u_0 t^{s-m} T_k - g_0 U_k = \{P(t), Q(t)\}$, где

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{\nu=0}^m (u_0 g_\nu - g_0 u_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 u_\nu t^{s-\nu} = \sum_{\nu=1}^m (u_0 g_\nu - g_0 u_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 u_\nu t^{s-\nu}, \\ Q(t) &= \sum_{\nu=0}^m (u_0 h_\nu - g_0 v_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 v_\nu t^{s-\nu} = \sum_{\nu=1}^m (u_0 h_\nu - g_0 v_\nu) t^{s-\nu} - \sum_{\nu=m+1}^s g_0 v_\nu t^{s-\nu}, \end{aligned}$$

линейно независима с парой T_k и имеет степень меньшую s . Но это противоречит выбору пары U_k .

Предположим существование пар из $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f(t))$ и не представимых через T_k, U_k по формуле (30). Пусть W является такой парой наименьшей степени l и имеет вид

$$W = \left\{ \sum_{\nu=0}^l p_\nu t^{l-\nu}, \sum_{\nu=0}^l q_\nu t^{l-\nu} \right\}.$$

Очевидно, что $l \geq s \geq m$.

Рассмотрим пару

$$\{R(t), S(t)\} = (u_0 q_0 - p_0 v_0) t^{l-m} T + (p_0 h_0 - q_0 g_0) t^{l-s} U + (g_0 v_0 - u_0 h_0) W$$

$$\begin{aligned}
R(t) &= (u_0q_0 - p_0v_0) \sum_{\nu=0}^m g_\nu t^{l-\nu} + (p_0h_0 - q_0g_0) \sum_{\nu=0}^s u_\nu t^{l-\nu} + (g_0v_0 - u_0h_0) \sum_{\nu=0}^l p_\nu t^{l-\nu} = \\
&= (u_0q_0 - p_0v_0) \sum_{\nu=1}^m g_\nu t^{l-\nu} + (p_0h_0 - q_0g_0) \sum_{\nu=1}^s u_\nu t^{l-\nu} + (g_0v_0 - u_0h_0) \sum_{\nu=1}^l p_\nu t^{l-\nu}, \\
S(t) &= (u_0q_0 - p_0v_0) \sum_{\nu=0}^m h_\nu t^{l-\nu} + (p_0h_0 - q_0g_0) \sum_{\nu=0}^s v_\nu t^{l-\nu} + (g_0v_0 - u_0h_0) \sum_{\nu=0}^l q_\nu t^{l-\nu} = \\
&= (u_0q_0 - p_0v_0) \sum_{\nu=1}^m h_\nu t^{l-\nu} + (p_0h_0 - q_0g_0) \sum_{\nu=1}^s v_\nu t^{l-\nu} + (g_0v_0 - u_0h_0) \sum_{\nu=1}^l q_\nu t^{l-\nu}.
\end{aligned}$$

Эта пара не представима через пары T_k, U_k и имеет степень меньшую l . Но это противоречит выбору пары W . Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что подмодуль с одним определяющим полиномиальным соотношением k -ого порядка $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^k(t))$ является двумерной решеткой многочленов $\Lambda_1(T_k, U_k)$ с базисом $/T_k, U_k/$.

Теперь можно утверждать, что имеет место бесконечная цепочка вложенных двумерных решёток многочленов:

$$\mathbb{Z}^2[t] \supset \Lambda_1(T_1, U_1) \supset \dots \supset \Lambda_1(T_k, U_k) \supset \dots \quad (32)$$

$\square$

9. Модули TDP_j над кольцом $\mathbb{Z}[t]$ ($j = 0, 1, \dots$)

Для изучения указанных выше итерационных последовательностей (см. опр. 19, 21) определим бесконечную последовательность вложенных модулей над кольцом $\mathbb{Z}[t]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. *Модулем TDP_j называется множество всех пар Tu порядка не ниже j с естественной операцией сложения, когда числитель суммы двух пар Tu равен сумме числителей слагаемых, а знаменатель суммы — сумме знаменателей. Числитель произведения пары Tu на многочлен из $\mathbb{Z}[t]$ равен произведению числителя пары на этот многочлен, а знаменатель произведения — произведению знаменателя на тот же многочлен.*

Из свойств 1. — 4. на стр. 77 следует, что каждое множество TDP_j не пусто и является унитарным модулем над кольцом многочленов $\mathbb{Z}[t]$. Из свойства 6 вытекает, что степень любой пары Tu из TDP_j не меньше j . Таким образом, имеем бесконечную цепочку вложенных модулей

$$\mathbb{Z}[t]^2 = \mathsf{TDP}_0 \supset \mathsf{TDP}_1 \supset \dots \supset \mathsf{TDP}_j \supset \dots$$

над кольцом $\mathbb{Z}[t]$.

Из теоремы 13 (стр. 81) следует, что $\mathsf{TDP}_j = M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) | f^j(t))$, и, следовательно, существуют две линейно-независимые пары Tu T_j, U_j из TDP_j такие, что любая пара Tu V из TDP_j однозначно представима в виде

$$V = c_1(t)T_j + c_2(t)U_j, \quad (33)$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Если положить $\mathsf{TDP}_j^* = \{T \in \mathsf{TDP}_j | j(T) = j\}$, то множество TDP_j^* не является модулем, так как не замкнуто относительно сложения и операции умножения на многочлены. Справедливо очевидное разбиение модуля на непересекающиеся множества

$$\mathsf{TDP}_j = \bigcup_{\nu=j}^{\infty} \mathsf{TDP}_\nu^*,$$

причем в это разбиение входит и $\mathbb{TDP}_\infty^* = \{\{0, 0\}\}$ — нулевой модуль.

Введем на множестве всех пар $\text{Ty} \in \mathbb{Z}[t]^2$ линейный оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Для любой пары $\text{Ty} \in T = \{P(t), Q(t)\}$ полагается $\frac{d}{dt} T = \{P'(t), Q'(t)\}$ — производная от пары Ty . Другое обозначение оператора дифференцирования пары просто T' .

ТЕОРЕМА 14. Для любой пары $\text{Ty} \in T = \{P(t), Q(t)\}$ с порядком $j(T) > 0$ справедливо равенство

$$j(T') = j(T) - 1. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $j(T) > 0$, то соответствующий полином $\text{Ty} \in \mathcal{T}(t, \alpha) = (t - \alpha)^{j(T)} R_{j(t)}(t, \alpha)$ и полином $R_{j(t)}(t, \alpha)$ взаимно прост с полиномом $(t - \alpha)$. Так как полином Ty для пары T' равен производной полинома Ty от исходной пары и

$$\mathcal{T}'(t, \alpha) = j(T)(t - \alpha)^{j(T)-1} R_{j(t)}(t, \alpha) + (t - \alpha)^{j(T)} R'_{j(t)}(t, \alpha),$$

то теорема доказана. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ отображает $\mathbb{TDP}_j^*$ в $\mathbb{TDP}_{j-1}^*$ при $j \geq 1$: $\frac{d}{dt}(\mathbb{TDP}_j^*) \subset \mathbb{TDP}_{j-1}^*$, $\frac{d}{dt}(\mathbb{TDP}_j^*) \subset \mathbb{TDP}_{j-1}^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если пара $\text{Ty} \in T$ имеет вид $T = U + \{a, b\}$, где для пары $\text{Ty} \in U$ её порядок $j(U) > 1$ и a, b — целые числа, то $j(T) = 0$, а $j(T') = j(U) - 1 > 0$, так как $T' = U'$.

Непосредственно из определения оператора дифференцирования пар Ty и из свойств дифференцирования многочленов вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15. Для дифференцирования пар Ty справедливы следующие формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{Z} : \{a, b\}' &= \{0, 0\}, \\ \forall a, b \in \mathbb{Z} : (a \cdot T + b \cdot U)' &= a \cdot T' + b \cdot U', \\ \forall a(t) \in \mathbb{Z}[t] : (a(t) \cdot T)' &= a'(t) \cdot T + a(t) \cdot T', \\ \forall a(t) \in \mathbb{Z}[t] : \frac{d^k}{dt^k} (a(t) \cdot T) &= \sum_{\nu=0}^k C_k^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} a(t) \cdot \frac{d^{k-\nu}}{dt^{k-\nu}} T. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 16. Пара $\text{Ty} \in T = \{P(t), Q(t)\}$ имеет порядок не ниже j тогда и только тогда, когда выполнены следующие j условий:

$$P^{(\nu)}(t) \equiv tQ^{(\nu)}(t) \pmod{f(t)} \quad (\nu = 0, \dots, j-1). \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полином Ty

$$\mathcal{T}(t, \alpha) = P(t) - \alpha Q(t) = (t - \alpha)Q(t) + P(t) - tQ(t)$$

для числа α , соответствующий паре $\text{Ty} \in T$. Если $j(T) \geq 1$, то многочлен $P(t) - tQ(t)$ делится на $(t - \alpha)$, но в силу неприводимости унитарного многочлена $f(t)$, корнем которого является целое алгебраическое число α , отсюда следует сравнение (35) при $\nu = 0$. Согласно теореме 14 $j\left(\frac{d^k}{dt^k} T\right) = j(T) - k$ при $k \leq j(T)$, поэтому сравнение (35) выполнено для любого $\nu < j(T)$, и тем самым теорема доказана. $\square$

ЛЕММА 16. Если $T_{k,1} = \{P_{k,1}(t), Q_{k,1}(t)\}$ и $T_{m,2} = \{P_{m,2}(t), Q_{m,2}(t)\}$ — две пары Туэ, имеющие порядок не ниже j , то

$$P_{k,1}(t)Q_{m,2}(t) - P_{m,2}(t)Q_{k,1}(t) = f^j(t)\varphi(t), \quad \varphi(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $k \geq j$ и $m \geq j$, то по определению

$$\mathcal{T}_{k,1}(t, \alpha_\nu) = P_{k,1}(t) - \alpha_\nu Q_{k,1}(t) = (t - \alpha_\nu)^j \left((t - \alpha_\nu)^{k-j} R_{k,1}(t, \alpha_\nu) \right),$$

где $R_{k,1}(t, \alpha_\nu)$ — множитель Туэ порядка k для алгебраического числа α_ν . Аналогично $\mathcal{T}_{m,2}(t, \alpha_\nu) = P_{m,2}(t) - \alpha_\nu Q_{m,2}(t) = (t - \alpha_\nu)^j \left((t - \alpha_\nu)^{m-j} R_{m,2}(t, \alpha_\nu) \right)$, где $R_{m,2}(t, \alpha_\nu)$ — множитель Туэ порядка m для алгебраического числа α_ν .

Положим $g(t, \alpha_\nu) = (t - \alpha_\nu)^{k-j} R_{k,1}(t, \alpha_\nu)$ и $h(t, \alpha_\nu) = (t - \alpha_\nu)^{m-j} R_{m,2}(t, \alpha_\nu)$. Тогда

$$\begin{aligned} P_{k,1}(t)Q_{m,2}(t) - P_{m,2}(t)Q_{k,1}(t) &= ((t - \alpha_\nu)^j g(t, \alpha_\nu) - \alpha_\nu Q_{k,1}(t)) Q_{m,2}(t) - \\ &\quad - ((t - \alpha_\nu)^j h(t, \alpha_\nu) - \alpha_\nu Q_{m,2}(t)) Q_{k,1}(t) = \\ &= (t - \alpha_\nu)^j (g(t, \alpha_\nu)Q_{m,2}(t) - h(t, \alpha_\nu)Q_{k,1}(t)). \end{aligned} \quad (36)$$

Формула (36) справедлива для любого $\nu = 1, \dots, n$.

Таким образом, многочлен $P_{k,1}(t)Q_{m,2}(t) - P_{m,2}(t)Q_{k,1}(t)$ делится на n взаимно простых полиномов $(t - \alpha_\nu)^j$ из кольца $\mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_n][t]$, а значит делится на их произведение, равное $f^j(t)$, что и доказывает лемму. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Основными парами Туэ для порядка j назовем две пары Туэ $T_{k,1}$ и $T_{m,2}$ порядка не ниже j , для которых любая пара Туэ $T_{l,3}$ порядка не ниже j представляется по формуле

$$T_{l,3} = c_1(t)T_{k,1} + c_2(t)T_{m,2}, \quad (37)$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Соответствующие полиномы Туэ будут называться основными для порядка j .

Из теоремы 13 (стр. 81) следует, что для любого порядка j существуют основные пары Туэ и соответствующие основные полиномы Туэ.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Так как через основные пары для порядка j выражаются пары Туэ порядка j , то по крайней мере одна из основных пар имеет порядок j .

ТЕОРЕМА 17. Основные полиномы Туэ для порядка j определяются с точностью до унитарной матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{T}_{j,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{j,2}(t, \alpha)$ — основные полиномы Туэ для порядка j , а полиномы $\mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha)$ выражаются по формулам

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha) = \mathcal{T}_{j,1}(t, \alpha) \cdot c_{1,1}(t) + \mathcal{T}_{j,2}(t, \alpha) \cdot c_{1,2}(t) \\ \mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha) = \mathcal{T}_{j,1}(t, \alpha) \cdot c_{2,1}(t) + \mathcal{T}_{j,2}(t, \alpha) \cdot c_{2,2}(t) \end{cases}, \quad (38)$$

где $c_{1,1}(t)$, $c_{1,2}(t)$, $c_{2,1}(t)$, $c_{2,2}(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами и

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}(t) & c_{1,2}(t) \\ c_{2,1}(t) & c_{2,2}(t) \end{vmatrix} = c = \pm 1. \quad (39)$$

Тогда система разрешима относительно $\mathcal{T}_{j,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{j,2}(t, \alpha)$:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{j,1}(t, \alpha) = \mathcal{T}_{k,1}(t, \alpha) \cdot c_{1,1}^*(t) + \mathcal{T}_{k,2}(t, \alpha) \cdot c_{1,2}^*(t) \\ \mathcal{T}_{j,2}(t, \alpha) = \mathcal{T}_{k,1}(t, \alpha) \cdot c_{2,1}^*(t) + \mathcal{T}_{k,2}(t, \alpha) \cdot c_{2,2}^*(t) \end{cases}, \quad (40)$$

где $c_{1,1}^*(t) = \frac{c_{2,2}(t)}{c}$, $c_{1,2}^*(t) = -\frac{c_{1,2}(t)}{c}$, $c_{2,1}^*(t) = -\frac{c_{2,1}(t)}{c}$, $c_{2,2}^*(t) = \frac{c_{1,1}(t)}{c}$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Таким образом основные многочлены $\mathcal{T}_{j,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{j,2}(t, \alpha)$ выражаются через многочлены $\mathcal{T}_{k,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{k,2}(t, \alpha)$ порядка не ниже j , а следовательно через них выражаются все многочлены порядка не ниже j , и потому многочлены $\mathcal{T}_{k,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{k,2}(t, \alpha)$ являются основными.

С другой стороны, если полиномы $\mathcal{T}_{j,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{j,2}(t, \alpha)$, а также полиномы $\mathcal{T}_{k,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{k,2}(t, \alpha)$ являются двумя парами основных полиномов для порядка j , то имеют место равенства (38), (40) и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} c_{1,1}(t) & c_{1,2}(t) \\ c_{2,1}(t) & c_{2,2}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,1}^*(t) & c_{1,2}^*(t) \\ c_{2,1}^*(t) & c_{2,2}^*(t) \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть матрица

$$C[t] = \begin{pmatrix} c_{1,1}(t) & c_{1,2}(t) \\ c_{2,1}(t) & c_{2,2}(t) \end{pmatrix}$$

является унимодулярной. $\square$

ТЕОРЕМА 18. Если $T_{k,1} = \{P_{k,1}(t), Q_{k,1}(t)\}$ и $T_{m,2} = \{P_{m,2}(t), Q_{m,2}(t)\}$ — две пары Туэ, имеющие порядок не ниже j , и

$$P_{k,1}(t)Q_{m,2}(t) - P_{m,2}(t)Q_{k,1}(t) = f^j(t),$$

то пары $T_{k,1}$ и $T_{m,2}$ являются основными для порядка j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пара Туэ $T_{l,3} = \{P_{l,3}(t), Q_{l,3}(t)\}$ имеет порядок не ниже j .

Рассмотрим три многочлена

$$\begin{aligned} c_1(t) &= P_{m,2}(t)Q_{l,3}(t) - P_{l,3}(t)Q_{m,2}(t), & c_2(t) &= P_{l,3}(t)Q_{k,1}(t) - P_{k,1}(t)Q_{l,3}(t), \\ c_3(t) &= P_{k,1}(t)Q_{m,2}(t) - P_{m,2}(t)Q_{k,1}(t). \end{aligned}$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$c_1(t)T_{k,1} + c_2(t)T_{m,2} + c_3(t)T_{l,3} = T_\infty = \{0, 0\}. \quad (41)$$

По условию $c_3(t) = f^j(t)$, а по лемме 7 (стр. 68) многочлены $c_1(t)$ и $c_2(t)$ имеют вид $c_1(t) = f^j(t)\varphi(t)$ и $c_2(t) = f^j(t)\psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Тогда равенство (41) можно переписать в виде

$$f^j(t)\varphi(t)T_{k,1} + f^j(t)\psi(t)T_{m,2} + f^j(t)T_{l,3} = T_\infty = \{0, 0\}.$$

Сокращая на $f^j(t)$, что возможно, так как кольцо $\mathbb{Z}[t]$ без делителей нуля, получим

$$\varphi(t)T_{k,1} + \psi(t)T_{m,2} + T_{l,3} = T_\infty = \{0, 0\},$$

следовательно,

$$T_{l,3} = -\varphi(t)T_{k,1} - \psi(t)T_{m,2}.$$

Следовательно, данные пары Туэ являются основными для порядка j . $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Матрицей Туэ для порядка j назовем матрицу MT_j вида

$$MT_j = \begin{pmatrix} P_{k,1}(t) & Q_{k,1}(t) \\ P_{m,2}(t) & Q_{m,2}(t) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

такую, что две пары Туэ $T_{k,1} = \{P_{k,1}(t), Q_{k,1}(t)\}$ и $T_{m,2} = \{P_{m,2}(t), Q_{m,2}(t)\}$ порядка не ниже j являются основными для порядка j .

Если выполнено дополнительное условие $\det MT_j = f^j(t)$, то матрицу Туэ MT_j будем называть основной для порядка j .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. На первый взгляд построение основной матрицы Туэ для порядка j , а значит и основных пар Туэ для порядка j не вызывает затруднений, так как для матриц

$$M = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -a_0 & \frac{f(t)-a_0}{t} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

имеем $\det M = f(t)$, $\det M_1 = f(t)$ и пары $T_{1,1} = \{t, 1\}$ и $T_{1,2} = \left\{-a_0, \frac{f(t)-a_0}{t}\right\}$ для матрицы M , и пары $T_{1,3} = \{f(t), 0\}$ и $T_{1,4} = \{t, 1\}$ для матрицы M_1 , являются основными для порядка $j = 1$, то есть $MT_{1,1} = M$ и $MT_{1,2} = M_1$ — основные матрицы Туэ для порядка $j = 1$. Но уже про матрицы $M_{j,1} = M^j$ и $M_{j,2} = M_1^j$ с $\det M_{j,1} = M_{j,2} = f^j(t)$ нельзя утверждать, что они являются матрицами Туэ. Например, $M_{2,2} = M_1^2 = \begin{pmatrix} f(t)^2 & 0 \\ t(f(t)+1) & 1 \end{pmatrix}$, пара Туэ $T_{2,3} = \{f^2(t), 0\}$ имеет порядок 2, а пара Туэ $T_{1,5} = \{t \cdot (f(t)+1), 1\}$ имеет порядок только 1.

ЛЕММА 17. Если для полинома Туэ $\mathcal{T}_l(t, \alpha) = P_l(t) - \alpha Q_l(t) = (t - \alpha)^l \cdot g(t, \alpha)$ выполнено соотношение

$$f(t) | P_l^{(j-1)}(t) - t Q_l^{(j-1)}(t), \quad (44)$$

то полином $\mathcal{T}_l(t, \alpha)$ будет порядка не ниже j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\mathcal{T}_l(t, \alpha) = (t - \alpha)^l \cdot g(t, \alpha)$, где многочлен $g(t, \alpha) \in \mathbb{Z}[\alpha][t]$ и $g(t, \alpha)$ не делится на $(t - \alpha)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_l^{(j-1)}(t, \alpha) &= \sum_{\gamma=0}^{j-1} C_{j-1}^\gamma \left(\prod_{\nu=0}^{\gamma-1} (l - \nu) \right) (t - \alpha)^{l-\gamma} \cdot g^{(j-1-\gamma)}(t, \alpha) = \\ &= (t - \alpha) \sum_{\gamma=0}^{j-2} C_{j-1}^\gamma \left(\prod_{\nu=0}^{\gamma-1} (l - \nu) \right) (t - \alpha)^{l-1-\gamma} \cdot g^{(j-1-\gamma)}(t, \alpha) + \left(\prod_{\nu=0}^{j-2} (l - \nu) \right) (t - \alpha)^{l-j+1} \cdot g(t, \alpha). \end{aligned}$$

Так как последнее слагаемое делится на $(t - \alpha)$ только при $l - j + 1 \geq 1$, то порядок $l \geq j$. $\square$

ТЕОРЕМА 19. Если $\mathcal{T}_{j_1,1}(t, \alpha) = P_{j_1,1}(t) - \alpha Q_{j_1,1}(t)$, $\mathcal{T}_{j_2,2}(t, \alpha) = P_{j_2,2}(t) - \alpha Q_{j_2,2}(t)$ — основные полиномы для порядка j , то

$$P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) = f^j(t)c_j,$$

где постоянная $c_j = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что основными полиномами наименьшей степени для порядка 0 являются $\mathcal{T}_{0,1}(t, \alpha) = 1$, $\mathcal{T}_{0,2}(t, \alpha) = \alpha$ и $P_{0,1}(t)Q_{0,2}(t) - P_{0,2}(t)Q_{0,1}(t) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. Поэтому данные основные полиномы наименьшей степени для порядка 0 удовлетворяют теореме. Следовательно, по теореме 17 ей удовлетворяют любые основные полиномы для порядка 0.

Пусть теорема доказана для основных полиномов для порядка $j - 1$, и покажем её справедливость для основных полиномов для порядка j .

Пусть $\mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha) = P_{k_1,1}(t) - \alpha Q_{k_1,1}(t)$, $\mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha) = P_{k_2,2}(t) - \alpha Q_{k_2,2}(t)$ — основные полиномы для порядка $j - 1$. Тогда любой полином $\mathcal{T}_l(t, \alpha) = P_l(t) - \alpha Q_l(t)$ порядка не ниже j представляется в виде

$$\mathcal{T}_l(t, \alpha) = \mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha) \cdot a_l(t) + \mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha) \cdot b_l(t),$$

где $a_l(t)$, $b_l(t)$ — целочисленные многочлены.

Полином $\mathcal{T}_l(t, \alpha)$ имеет делителем $(t - \alpha)^j$, следовательно, производная $j - 1$ порядка имеет делителем $(t - \alpha)$.

Так как

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_l^{(j-1)}(t, \alpha) &= \sum_{\gamma=0}^{j-1} C_{j-1}^{\gamma} \left(\mathcal{T}_{k_1,1}^{(\gamma)}(t, \alpha) \cdot a_l^{(j-1-\gamma)}(t) + \mathcal{T}_{k_2,2}^{(\gamma)}(t, \alpha) \cdot b_l^{(j-1-\gamma)}(t) \right) = \\ &= \sum_{\gamma=0}^{j-2} C_{j-1}^{\gamma} \left(\mathcal{T}_{k_1,1}^{(\gamma)}(t, \alpha) \cdot a_l^{(j-1-\gamma)}(t) + \mathcal{T}_{k_2,2}^{(\gamma)}(t, \alpha) \cdot b_l^{(j-1-\gamma)}(t) \right) + \\ &\quad + \mathcal{T}_{k_1,1}^{(j-1)}(t, \alpha) \cdot a_l(t) + \mathcal{T}_{k_2,2}^{(j-1)}(t, \alpha) \cdot b_l(t) \end{aligned}$$

и производные $\mathcal{T}_{k_1,1}^{(\gamma)}(t, \alpha)$ и $\mathcal{T}_{k_2,2}^{(\gamma)}(t, \alpha)$ делятся на $(t - \alpha)^{j-\gamma}$ при $\gamma = 0, \dots, j - 2$, то на $(t - \alpha)$ должен делиться полином Туэ

$$\mathcal{T}(t, \alpha) = P(t) - \alpha Q(t) = \mathcal{T}_{k_1,1}^{(j-1)}(t, \alpha) \cdot a_l(t) + \mathcal{T}_{k_2,2}^{(j-1)}(t, \alpha) \cdot b_l(t),$$

где $P(t) = P_{k_1,1}^{(j-1)}(t) a_l(t) + P_{k_2,2}^{(j-1)}(t) b_l(t)$, $Q(t) = Q_{k_1,1}^{(j-1)}(t) a_l(t) + Q_{k_2,2}^{(j-1)}(t) b_l(t)$.

Следовательно, на $f(t)$ должно делиться выражение

$$\left(P_{k_1,1}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_1,1}^{(j-1)}(t) \right) a_l(t) + \left(P_{k_2,2}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_2,2}^{(j-1)}(t) \right) b_l(t). \quad (45)$$

Если последнее условие будет выполнено, то согласно леммы 17 полином $\mathcal{T}_l(t, \alpha)$ будет порядка не ниже j .

Пусть остатки от деления $P_{k_1,1}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_1,1}^{(j-1)}(t)$ и $P_{k_2,2}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_2,2}^{(j-1)}(t)$ на $f(t)$ будут $r_1(t)$ и $r_2(t)$. Рассмотрим два возможных случая.

I. Если оба основных полинома $j - 1$ порядка, то $r_1(t)$ и $r_2(t)$ не равны 0. Действительно, если $r_1(t) = 0$, то условие (45) будет выполнено при $a_l(t) = 1$, $b_l(t) = 0$ и $\mathcal{T}_l(t, \alpha) = \mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha)$ имеет порядок не ниже j . Аналогично, если $r_2(t) = 0$, то при $a_l(t) = 0$, $b_l(t) = 1$ получаем $\mathcal{T}_l(t, \alpha) = \mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha)$ имеет порядок не ниже j .

Пусть

$$r'_1(t) = \frac{r_1(t)}{(r_1(t), r_2(t))}, \quad r'_2(t) = \frac{r_2(t)}{(r_1(t), r_2(t))},$$

и пусть многочлены $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ являются решениями уравнений

$$\varphi_1(t) = r'_2(t), \quad \psi_1(t) = -r'_1(t), \quad r'_1(t)\varphi_2(t) + r'_2(t)\psi_2(t) = f(t).$$

Для них условие (45) выполнено. Действительно, если $P_{k_\nu, \nu}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_\nu, \nu}^{(j-1)}(t) = q_\nu(t)f(t) + r_\nu(t)$ ($\nu = 1, 2$), то

$$\begin{aligned} &\left(P_{k_1,1}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_1,1}^{(j-1)}(t) \right) \varphi_1(t) + \left(P_{k_2,2}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_2,2}^{(j-1)}(t) \right) \psi_1(t) = \\ &= f(t)(q_1(t)\varphi_1(t) + q_2(t)\psi_1(t)) + r_1(t)\varphi_1(t) + r_2(t)\psi_1(t) = f(t)(q_1(t)\varphi_1(t) + q_2(t)\psi_1(t)). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \left(P_{k_1,1}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_1,1}^{(j-1)}(t) \right) \varphi_2(t) + \left(P_{k_2,2}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_2,2}^{(j-1)}(t) \right) \psi_2(t) = \\ & = f(t)(q_1(t)\varphi_2(t) + q_2(t)\psi_2(t)) + r_1(t)\varphi_2(t) + r_2(t)\psi_2(t) = \\ & = f(t)(q_1(t)\varphi_1(t) + q_2(t)\psi_1(t) + (r_1(t), r_2(t))). \end{aligned}$$

Поэтому полученные для них полиномы Туэ будут порядка не ниже j .
Обозначим эти полиномы через

$$\mathcal{T}_{j_1,1}(t, \alpha) = P_{j_1,1}(t) - \alpha Q_{j_1,1}(t), \quad \mathcal{T}_{j_2,2}(t, \alpha) = P_{j_2,2}(t) - \alpha Q_{j_2,2}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) &= (P_{k_1,1}(t)Q_{k_2,2}(t) - P_{k_2,2}(t)Q_{k_1,1}(t)) \cdot \\ &\cdot (\varphi_1(t)\psi_2(t) - \varphi_2(t)\psi_1(t)) = c \cdot f^j(t). \end{aligned}$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{j_1,1}(t, \alpha) &= P_{j_1,1}(t) - \alpha Q_{j_1,1}(t) = \mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha) \cdot \varphi_1(t) + \mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha) \cdot \psi_1(t), \\ \mathcal{T}_{j_2,2}(t, \alpha) &= P_{j_2,2}(t) - \alpha Q_{j_2,2}(t) = \mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha) \cdot \varphi_2(t) + \mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha) \cdot \psi_2(t), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} P_{j\nu,\nu}(t) &= P_{k_1,1}(t) \cdot \varphi_\nu(t) + P_{k_2,2}(t) \cdot \psi_\nu(t), \\ Q_{j\nu,\nu}(t) &= Q_{k_1,1}(t) \cdot \varphi_\nu(t) + Q_{k_2,2}(t) \cdot \psi_\nu(t) \quad (\nu = 1, 2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) = \begin{vmatrix} P_{j_1,1}(t) & Q_{j_1,1}(t) \\ P_{j_2,2}(t) & Q_{j_2,2}(t) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} P_{k_1,1}(t) \cdot \varphi_1(t) + P_{k_2,2}(t) \cdot \psi_1(t) & Q_{k_1,1}(t) \cdot \varphi_1(t) + Q_{k_2,2}(t) \cdot \psi_1(t) \\ P_{k_1,1}(t) \cdot \varphi_2(t) + P_{k_2,2}(t) \cdot \psi_2(t) & Q_{k_1,1}(t) \cdot \varphi_2(t) + Q_{k_2,2}(t) \cdot \psi_2(t) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \psi_2(t) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{k_1,1}(t) & Q_{k_1,1}(t) \\ P_{k_2,2}(t) & Q_{k_2,2}(t) \end{vmatrix} = \\ &= (P_{k_1,1}(t)Q_{k_2,2}(t) - P_{k_2,2}(t)Q_{k_1,1}(t)) \cdot (\varphi_1(t)\psi_2(t) - \varphi_2(t)\psi_1(t)) = \\ &= (c_{j-1}f^{j-1}(t)) \cdot f(t) = c \cdot f^j(t). \end{aligned}$$

Следовательно, полиномы $\mathcal{T}_{j_1,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{j_2,2}(t, \alpha)$ по теореме 18 являются основными и для них теорема справедлива.

Если один из основных полиномов будет порядка выше $j-1$, пусть это будет $\mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha)$, то положим

$$\varphi_1(t) = f(t), \quad \psi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = 0, \quad \psi_2(t) = 1.$$

Для них условие (45) выполнено.

Действительно,

$$\begin{aligned} & \left(P_{k_1,1}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_1,1}^{(j-1)}(t) \right) \varphi_1(t) + \left(P_{k_2,2}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_2,2}^{(j-1)}(t) \right) \psi_1(t) = \\ & = f(t) \cdot \left(P_{k_1,1}^{(j-1)}(t) - t \cdot Q_{k_1,1}^{(j-1)}(t) \right). \end{aligned}$$

Так как условие (45) является необходимым и достаточным, а

$$\mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha) \cdot \varphi_2(t) + \mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha) \cdot \psi_2(t) = \mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha),$$

то условие (45) выполнено и для второго многочлена.

Поэтому полученные для них многочлены Туэ будут порядка не ниже j .

Обозначим эти многочлены через

$$\mathcal{T}_{j_1,1}(t, \alpha) = P_{j_1,1}(t) + \alpha Q_{j_1,1}(t), \quad \mathcal{T}_{j_2,2}(t, \alpha) = P_{j_2,2}(t) + \alpha Q_{j_2,2}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) &= (P_{k_1,1}(t)Q_{k_2,2}(t) - P_{k_2,2}(t)Q_{k_1,1}(t)) \cdot \\ &\cdot (\varphi_1(t)\psi_2(t) - \varphi_2(t)\psi_1(t)) = c \cdot f^j(t). \end{aligned}$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{j_1,1}(t, \alpha) &= P_{j_1,1}(t) + \alpha Q_{j_1,1}(t) = \mathcal{T}_{k_1,1}(t, \alpha) \cdot f(t), \\ \mathcal{T}_{j_2,2}(t, \alpha) &= P_{j_2,2}(t) + \alpha Q_{j_2,2}(t) = \mathcal{T}_{k_2,2}(t, \alpha), \end{aligned}$$

то $P_{j_1,1}(t) = P_{k_1,1}(t) \cdot f(t)$, $Q_{j_1,1}(t) = Q_{k_1,1}(t) \cdot f(t)$, $P_{j_2,2}(t) = P_{k_2,2}(t)$, и $Q_{j_2,2}(t) = Q_{k_2,2}(t)$ ($\nu = 1, 2$), поэтому

$$\begin{aligned} P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) &= f(t)P_{k_1,1}(t)Q_{k_2,2}(t) - P_{k_2,2}(t)Q_{k_1,1}(t)f(t) = \\ &= (c_{j-1}f^{j-1}(t)) \cdot f(t) = c \cdot f^j(t). \end{aligned}$$

Следовательно, многочлены $\mathcal{T}_{j_1,1}(t, \alpha)$, $\mathcal{T}_{j_2,2}(t, \alpha)$ по теореме 18 являются основными и для них теорема справедлива.

Таким образом, всегда существуют основные полиномы для порядка j , для которых теорема справедлива. Но в следствии теоремы 17 она тогда справедлива для любых основных полиномов Туэ для порядка j , что и доказывает теорему. $\square$

Основные полиномы могут быть найдены следующим способом: пусть известны основные полиномы j -го порядка. Рассматриваем основные полиномы $j+1$ -го порядка как полиномы j -го порядка. На основании теоремы 13 (стр. 81) они будут представлены через основные полиномы j -го порядка в виде (37) при определенных условиях, наложенных на множители $c_j(t)$. Таким образом, формула (37) дает нам рекуррентные соотношения для вычисления основных полиномов. Для её реального применения должны быть известны $c_j(t)$, которые зависят от основных полиномов и являются функциями t и j .

10. Дробно-линейные преобразования форм

Так как значением бинарной полиномиальной формы $\mathcal{F}(P(t), Q(t))$ является многочлен, то к нему можно применить дробно-линейное преобразование M многочленов с произвольной невырожденной матрицей M из $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{Z})$:

$$M(\mathcal{F}(P(t), Q(t))) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu (Ct + D)^{n-k} P^\nu \left(\frac{At + B}{Ct + D} \right) Q^{n-\nu} \left(\frac{At + B}{Ct + D} \right),$$

где k — степень пары Туэ $\{P(t), Q(t)\}$.

Введем следующие обозначения:

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел, корней неприводимого унитарного многочлена $f(x) = f_0(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, α — вещественный корень;

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

— разложение в бесконечную цепную дробь;

P_m, Q_m — числитель и знаменатель m -ой подходящей дроби, которые связаны рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} P_{-1} = 1, & P_{-2} = 0 \\ Q_{-1} = 0, & Q_{-2} = 1 \end{cases} \quad (m \geq 0), \quad \begin{cases} P_m = q_m P_{m-1} + P_{m-2} \\ Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2} \end{cases};$$

$$\alpha_m = q_m + \frac{1}{q_{m+1} + \frac{1}{\ddots}}$$

— m -ая остаточная дробь, для которой справедливы соотношения

$$\alpha = \frac{P_{m-1}\alpha_m + P_{m-2}}{Q_{m-1}\alpha_m + Q_{m-2}}, \quad \alpha_m = \frac{Q_{m-2}\alpha - P_{m-2}}{-Q_{m-1}\alpha + P_{m-1}};$$

$$f_m(x) = (-1)^m (Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}}\right)$$

— минимальный многочлен для остаточной дроби α_m ;

$$\alpha_m^{(\nu)} = \frac{Q_{m-2}\alpha^{(\nu)} - P_{m-2}}{-Q_{m-1}\alpha^{(\nu)} + P_{m-1}} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

— полный набор алгебраически сопряженных чисел, корней минимального многочлена $f_m(x)$.

Через $\mathcal{F}_m(P(t), Q(t))$ будем обозначать ТДП-форму, соответствующую минимальному многочлену $f_m(x)$. Если

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \sum_{k=0}^n a_{k,m} x^k \in \mathbb{Z}[x], \\ a_{n,m} &= Q_{m-1}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right|, \quad a_{0,m} = -Q_{m-2}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right) \right|, \\ a_{\nu,m} &= Q_{m-1}^\nu Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^\nu \quad (0 \leq \nu \leq n), \\ a_{n-1,m} &= Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right), \end{aligned}$$

то справедливы равенства

$$\mathcal{F}_m(P(t), Q(t)) = a_{n,m} \prod_{\nu=1}^n \mathcal{T}(t, \alpha_m^{(\nu)})$$

$$\mathcal{T}(t, \alpha_m^{(\nu)}) = P(t) - \alpha_m^{(\nu)} Q(t)$$

— полином Туэ для алгебраического числа $\alpha_m^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \dots, n$).

ТЕОРЕМА 20. *Справедливо равенство*

$$M(\mathcal{F}(P(t), Q(t))) = \mathcal{F}_m((Q_{m-2}M(P(t)) - P_{m-2}M(Q(t))), (P_{m-1}M(Q(t)) - Q_{m-1}M(P(t)))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим унимодулярную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} P_{m-1} & P_{m-2} \\ Q_{m-1} & Q_{m-2} \end{pmatrix}, \quad \det M = P_{m-1}Q_{m-2} - P_{m-2}Q_{m-1} = (-1)^m$$

и применим её к ТДП-форме $\mathcal{F}(P(t), Q(t))$, получим

$$\begin{aligned} M(\mathcal{F}(P(t), Q(t))) &= \sum_{\nu=0}^n a_\nu (Q_{m-1}t + Q_{m-2})^{n-k} P^\nu \left(\frac{P_{m-1}t + P_{m-2}}{Q_{m-1}t + Q_{m-2}} \right) \cdot \\ &\cdot Q^{n-\nu} \left(\frac{P_{m-1}t + P_{m-2}}{Q_{m-1}t + Q_{m-2}} \right) = (M(Q(t)))^n a_n \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{M(P(t))}{M(Q(t))} - \alpha^{(\nu)} \right) = \\ &= a_n \prod_{\nu=1}^n \left(M(P(t)) - \alpha^{(\nu)} M(Q(t)) \right) = \frac{a_n}{\prod_{\nu=1}^n (Q_{m-1}\alpha_m^{(\nu)} + Q_{m-2})} \cdot \\ &\cdot \prod_{\nu=1}^n \left((Q_{m-1}\alpha_m^{(\nu)} + Q_{m-2})M(P(t)) - (P_{m-1}\alpha_m^{(\nu)} + P_{m-2})M(Q(t)) \right) = \\ &= a_n \prod_{\nu=1}^n \frac{P_{m-1} - Q_{m-1}\alpha^{(\nu)}}{P_{m-1}Q_{m-2} - P_{m-2}Q_{m-1}} \cdot \\ &\cdot \prod_{\nu=1}^n \left((Q_{m-2}M(P(t)) - P_{m-2}M(Q(t))) - \alpha_m^{(\nu)} (P_{m-1}M(Q(t)) - Q_{m-1}M(P(t))) \right) = \\ &= \mathcal{F}_m((Q_{m-2}M(P(t)) - P_{m-2}M(Q(t))), (P_{m-1}M(Q(t)) - Q_{m-1}M(P(t)))). \end{aligned}$$

что доказывает теорему. $\square$

11. Заключение

Из материалов статьи видно, что ТДП-формы подчиняются более сложным законам преобразования, когда мы рассматриваем ТДП-формы остаточных дробей. Сама форма подчиняется дробно-линейному преобразованию как и минимальный многочлен, а пара Туэ преобразуется с помощью дробно-линейного преобразования второго рода.

В процессе исследования выяснилось, что особый случай, который связан с группой Галуа, требует специального рассмотрения.

В следующих статьях мы предполагаем продолжить данные исследования, сделав упор на изучении сходимости итерационных ТДП-последовательностей первого и второго рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Из-во "Наука" 1976.
2. Вейль Г. Алгебраическая теория чисел. — М.: ГИ И*Л 1947.
3. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. Перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. 978 с.
4. Добровольский М. Н. О разложении иррациональностей третьей степени в непрерывные дроби // Чебышевский сб. 2010. Т. XI, вып. 4(36). С. 4–24.
5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О формах А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина // Чебышевский сб. 2010. Т. XI, вып. 4(36). С. 70–109.
6. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.
7. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. С. Полякова Дробно-линейные преобразования многочленов и линейные преобразования форм // Материалы XIII Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, Дополнительный том. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 134–149.
8. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.
9. Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 1. С. 34–55.
10. Н. М. Добровольский, Е. И. Юшина О приведенных алгебраических иррациональностях // Алгебра и приложения: труды Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина, Нальчик, 6–11 сентября 2014 г. — Нальчик: из-во КБГУ. С. 44–46.
11. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, вып. 3. С. 47–52.
12. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. — М. Из-во "Наука" 1965.
13. А. И. Кострикин Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры: Учебник для вузов. — 2-е изд., исправл. — М.: Физико-математическая литература, 2001. — 272 с. — ISBN 5-9221-0166-8.
14. Лежен Дирихле П. Г. Лекции по теории чисел. — М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР 1936.
15. Е. А. Морозова Многочлены Туэ для квадратичных иррациональностей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: Современные проблемы и приложения: Материалы XIII Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 354–356.

16. Е. А. Морозова Многочлены Туэ для квадратичных иррациональностей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: Современные проблемы и приложения: Материалы XIII Междунар. конф.: [Доп. том]. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 161–168.
17. Е. А. Морозова Многочлены Туэ для квадратичных иррациональностей // Математика и информатика: Материалы Международной конференции (Москва. 14–18 марта 2016 г.) / — М.: МПГУ 2016. С. 127–130.
18. Подсыпанин В. Д. О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Материалы межвузовской научной конференции математических кафедр пединститутов Центральной зоны. Тула, 1968, С. 68–70.
19. Подсыпанин В. Д. О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. 2007. Т. VIII, вып. 3(23). — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, С. 43–46.
20. Подсыпанин В. Д. О многочленах Туэ и разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. 2010. Т. XI, вып. 4(36). С. 25–69.
21. Подсыпанин Е. В. О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 47–49.
22. Е. В. Подсыпанин Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 184–194.
23. А. К. Сушкевич Теория чисел. Элементарный курс. — 2-е изд. — Харьков: Изд-во Харьковского гос. ун-та им. А. М. Горького, 1956. — 204 с.
24. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.
25. Фельдман Н. И. Приближения алгебраических чисел. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. — 200 с.
26. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — 2-е изд. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1949. — 116 с.
27. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 232 с.
28. Е. И. Юшина О некоторых приведенных алгебраических иррациональностях // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Региональной научной студенческой конференции. Тула: ТулГУ 2015. С. 66–72.
29. Е. И. Юшина О некоторых обобщенных числах Пизо // Университет XXI века: исследования в рамках научных школ: материалы Всероссийской научно-практической конференции. Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого 2015. С. 66–72.
30. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5
31. Euler L. De fractinibus continuis // Comm. Acad. Sci. Imper. Petropol., 1737, v. 9.

32. Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburgur Akademie Notiz. Exhib. August 14, 1775 // Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg, 1849. P. 99-104.
33. Galois E. Théorème sur les fractions contiues périodiques — Annales de Mathematiques (Gergonne), 1828/29, t. 19, p. 294; Oeuvres mathematiques. — Paris: Gauthier Villars, 1951. [Имеется перевод: Галуа Э. Сочинения. — М.: ОНТИ, 1936.]
34. Lagrange J. L. Complement chez Elements d'algebre etc. par M.L. Euler, t. III, 1774.
35. Liouville J. Sur des classes très-étendues de quantités dont la irrationnelles algébriques // C. R. Acad. Sci. Paris 18, 1844, C. 883–885, 910–911.
36. Roth K. F. Rational approximations to algebraic numbers // Mathematika. 1955. Vol. 2. P. 1–20. corrigendum: p. 168.
37. Thue A. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen // J. reine ang. Math. 1910. Vol. 135. PP. 284–305.

REFERENCES

1. Van der Waerden, B. L. 1976 *Algebra*. Moscow: Iz-in "Science".
2. Weyl G. 1947 *Algebraic number theory*. M.: GI I * L.
3. Gauss K. F. 1959 *Proceedings on the theory of numbers*. Translation of B. B. Demyanov, general edition I. M. Vinogradova, comments B. N. Delone. - Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences. 978 p.
4. Dobrovol'skii M. N. 2010 "On the decomposition of irrationalities of the third degree into continuous fractions" *Chebyshevsky Sb.* vol. XI, №. 4 (36). pp. 4–24.
5. Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. 2010, "On the forms of A. Thue M. N. Dobrovolsky — V. D. Podsypanina" *Chebyshevsky sb.* vol. XI, №. 4 (36). pp. 70–109.
6. N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, 2015 "About minimal polynomial residual fractions for algebraic irrationalities", *Chebyshevskii Sb.*, 16:3, pp. 147–182
7. N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. S. Polyakova, 2015 "Fractional-linear transformations of polynomials and linear transformations of forms" *Proceedings of the XIII International Conference Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications, Supplementary volume*. Tula: Publishing house Tul. State. Ped. The university of L. N. Tolstoy. pp. 134–149.
8. N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, D. K. Sobolev, V. N. Soboleva, 2017 "Classification of purely real algebraic irrationalities", *Chebyshevsky Sb.* Vol. 18, no. 2. pp. 98–128.
9. N. M. Dobrovol'skii, D. K. Sobolev, V. N. Soboleva, 2013 "On matrix decomposition of one reduced cubic irrational", *Chebyshevskii Sb.*, 14:1, pp. 34–55
10. N. M. Dobrovol'skii, E. I. Yushina "On reduced algebraic irrationalities" *Algebra and Applications: Proceedings of the International Conference on Algebra LA Kaluzhnina, Nalchik, September 6-11, 2014 - Nalchik* Iz-in Kabardino-Balkarian State University. pp. 44–46.

11. N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, E. I. Yushina, 2012 "On the matrix form of the Galois theorem on purely periodic continued fractions", *Chebyshevskii Sb.*, 13:3, 47–52
12. Davenport G. 1965 *Higher arithmetic. Introduction to number theory*. Iz-in From the "Science".
13. A. I. Kostrikin, 2001 *Introduction to Algebra. Part III. Basic structures: Textbook for high schools. — 2 nd ed., Correct.* M.: Physical and mathematical literature, — 272 p. — ISBN 5-9221-0166-8.
14. Lezhen Dirichlet P. G. 1936 *Lectures on number theory*. M — L.: ONTI NKTP of the USSR.
15. E. A. Morozova 2015 "Thue polynomials for quadratic irrationalities" *Algebra, number theory and discrete geometry: Contemporary problems and applications: Proceedings of the XIIIth International Conference. Conf., Dedicated to the 85th anniversary of the birth of Professor Sergey Sergeevich Ryshkov* Tula: Izd-vo Tul. State. Ped. Un-ta L. N. Tolstoy, pp. 354–356.
16. E. A. Morozova 2015 "Thue polynomials for quadratic irrationalities" *Algebra, number theory and discrete geometry: Contemporary problems and applications: Proceedings of the XIIIth International Conference. Conf.: [Ext. Tom]*. Tula: Publishing House Tul. State. Ped. Un-ta them. L.N. Tolstoy, pp. 161-168.
17. E. A. Morozova 2016 "Thue polynomials for quadratic irrationalities" *Mathematics and Computer Science: Proceedings of the International Conference (Moscow, March 14-18, 2016)* / — M.: MPGU pp. 127–130.
18. Podsypanin V. D. 1968 "On the decomposition of irrationalities of the fourth degree into an continued fraction" *Materials of the Interuniversity Scientific Conference of Mathematical Departments Pedagogical institutes of the Central zone*. Tula, pp. 68–70.
19. Podsypanin V. D. 2007 "On the decomposition of irrationalities of the fourth power into an continued fraction" *Chebyshevskii sbornik*. T. VIII, vol. 3 (23). — Tula: Izd-vo Tul. State. Ped. Un-ta them. L.N. Tolstoy, pp. 43–46.
20. Podsypanin V. D. 2010 "On Thue polynomials and the expansion of irrationalities of the fourth degree into a continued fraction" *Chebyshevskii sbornik*. T. XI, vol. 4 (36). pp. 25–69.
21. Podsypanin E. V. 2007 "On the decomposition of irrationalities of higher powers into a generalized continued fraction (On the materials of VD Podsypanin) manuscript 1970" *Chebyshevskii sbornik* T. 8, issue 3 (23). pp. 47–49.
22. E. V. Podsypanin 1977 "On a generalization of the algorithm of continued fractions associated with the Viggo Brun algorithm" *Zap. Scientific. Sem. LOMI*. T. 67. pp. 184–194.
23. A. K. Sushkevich 1956 *Number theory. Elementary course. — 2 nd ed.* — Kharkov: Publishing house of Kharkov state. Un-ta them. AM Gorky, — 204 p.
24. E. V. Trikolich, E. I. Yushina 2009 "Chain fractions for quadratic Irrationalities from the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ " *Chebyshevsky sb.* T. 10, no. 1. pp. 77–94.
25. Feldman N. I. 1981 *Approximation of algebraic numbers*. — Moscow: Izd-vo Mosk. University, p. 200
26. Khinchin A. Ya. 1949 *Chain fractions. — 2 nd ed.* M.: — L.: GITTL, p. 116

27. Schmidt V. M. 1983 *Diophantine approximations: Per. With the English*. Moscow: Mir, — 232 p.
28. E. I. Yushina 2015 "On some reduced algebraic irrationalities" *Modern problems in mathematics, mechanics, informatics: materials of the Regional Scientific Student Conference*. Tula: Tula State University. pp. 66–72.
29. E. I. Yushina 2015 "On some generalized Piso numbers" *University of the XXI century: research within the framework of scientific schools: materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference*. Tula: TSPU them. L.N. Tolstoy. pp. 66–72.
30. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), *Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control* 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5
31. Euler L. De fractinibus continuis // *Comm. Acad. Sci. Imper. Petropol.*, 1737, v. 9.
32. Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // *Petersburger Akademie Notiz. Exhib.* August 14, 1775 // *Commentationes arithmeticae collectae*. V. II. St. Petersburg, 1849. P. 99-104.
33. Galois E. Théorème sur les fractions contiues périodiques — *Annales de Mathematiques* (Gergonne), 1828/29, t. 19, p. 294; *Oeuvres mathematiques*. — Paris: Gauthier Villars, 1951. [Имеется перевод: Галуа Э. Сочинения. — М.: ОНТИ, 1936.]
34. Lagrange J. L. Complement chez Elements d'algebre etc. par M.L. Euler, t. III, 1774.
35. Liouville J. Sur des classes très-étendues de quantités dont la irrationnelles algébriques // *C. R. Acad. Sci. Paris* 18, 1844, C. 883–885, 910–911.
36. Roth K. F. Rational approximations to algebraic numbers // *Mathematika*. 1955. Vol. 2. P. 1–20. corrigendum: p. 168.
37. Thue A. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen // *J. reine ang. Math.* 1910. Vol. 135. PP. 284–305.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Тульский государственный университет

Получено 02.03.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-98-128

КЛАССИФИКАЦИЯ ЧИСТО-ВЕЩЕСТВЕННЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ¹Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский (г. Тула),
Д. К. Соболев, В. Н. Соболева (г. Москва)

Аннотация

В работе предложена новая классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей на основе их разложения в цепные дроби.

Показано, что для чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α степени $n \geq 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью приведённых алгебраических иррациональностей.

Найдены рекуррентные формулы для нахождения минимальных многочленов остаточных дробей с помощью дробно-линейных преобразований. Композиция этих дробно-линейных преобразований является дробно-линейным преобразованием, переводящим систему сопряжённых к алгебраической иррациональности α в систему сопряжённых к остаточной дроби, обладающую ярко выраженным эффектом концентрации около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Установлено, что последовательность минимальных многочленов для остаточных дробей образует последовательность многочленов с равными дискриминантами.

В работе доказываются предельные соотношения с коэффициентами минимального многочлена, связанные с эффектом концентрации сопряжённых чисел остаточной дроби.

В заключении поставлена проблема о структуре рационального сопряжённого спектра вещественного алгебраического иррационального числа α и о его предельных точках.

Ключевые слова: минимальный многочлен, приведённая алгебраическая иррациональность, обобщенное число Пизо, остаточные дроби, цепные дроби.

Библиография: 28 названий.

CLASSIFICATION PURELY REAL ALGEBRAIC
IRRATIONALITIESN. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii (Tula)
D. K. Sobolev, V. N. Soboleva (Moscow)

Abstract

We study the appearance and properties of minimal residual fractions of polynomials in the decomposition of algebraic numbers into continued fractions.

It is shown that for purely real algebraic irrationalities α of degree $n \geq 2$, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, the sequence of residual fractions α_m is a sequence of given algebraic irrationalities.

The definition of the generalized number of Piso, which differs from the definition of numbers he's also the lack of any requirement of integrality.

It is shown that for arbitrary real algebraic irrationals α of degree $n \geq 2$, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, the sequence of residual fractions α_m is a sequence of generalized numbers Piso.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Found an asymptotic formula for the conjugate number to the residual fractions of generalized numbers Piso. From this formula it follows that associated to the residual fraction α_m are concentrated about fractions $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ is either in the interval of radius $O\left(\frac{1}{Q_{m-1}^2}\right)$ in the case of purely real algebraic irrationals, or in circles with the same radius in the General case of real algebraic irrationals, which have complex conjugate of a number.

It is established that, starting from some number $m_0 = m_0(\alpha)$, fair recurrent formula for incomplete private q_m expansions of real algebraic irrationals α , Express q_m using the values of the minimal polynomial $f_{m-1}(x)$ for residual fractions α_{m-1} and its derivative at the point q_{m-1} .

Found recursive formula for finding the minimal polynomials of the residual fractions using fractional-linear transformations. Composition this fractional-linear transformation is a fractional-linear transformation that takes the system conjugate to an algebraic irrationality of α in the system of associated to the residual fraction, with a pronounced effect of concentration about rational fraction $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

It is established that the sequence of minimal polynomials for the residual fractions is a sequence of polynomials with equal discriminantly.

In conclusion, the problem of the rational structure of a conjugate of the spectrum of a real algebraic irrational number α and its limit points.

Keywords: minimal polynomial, given an algebraic irrationality, generalized number Piso, residual fractions, continued fractions.

Bibliography: 28 titles.

1. Введение	99
2. Необходимые определения и факты	101
3. Дробно-линейные преобразования для многочленов и линейные преобразования форм	103
4. Дробно-линейные преобразования целочисленных многочленов	107
5. Поведение остаточных дробей и их сопряжённых чисел	108
6. Свойства минимальных многочленов остаточных дробей	109
7. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей	111
8. Цепные последовательности с дробно-линейными преобразованиями	115
9. Предельные соотношения с коэффициентами минимального многочлена	120
10. Заключение	125
Список цитированной литературы	125

1. Введение

История теории цепных дробей насчитывает уже более трехсот лет. В значительной степени основы этой теории были заложены в трудах Л. Эйлера и Ж. Л. Лагранжа. Согласно этой теории для любого вещественного иррационального² α имеет место единственное разложение в бесконечную непрерывную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}}}}, \quad (1)$$

где неполные частные q_k и остаточные дроби α_k однозначно определяются из условий

$$q_k = [\alpha_k], k \geq 0; \quad \alpha_k = \frac{1}{\alpha_{k-1} - q_{k-1}}, \quad k \geq 1.$$

²На протяжении всей главы через α обозначается только вещественное иррациональное число.

Как обычно, через P_k и Q_k будем обозначать числитель и знаменатель k -ой подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ к числу α . Эти числа связаны хорошо известными рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{cases},$$

которые остаются верными при $k \geq 0$, если принять обычное соглашение, что $P_{-1} = 1$, $P_{-2} = 0$ и $Q_{-1} = 0$, $Q_{-2} = 1$.

Аналогичные формулы справедливы для числа α и его остаточных дробей:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\alpha_{k+1} P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}, \\ \alpha_{k+1} = \frac{\alpha Q_{k-1} - P_{k-1}}{P_k - \alpha Q_k}, \end{cases} \quad k \geq -1. \quad (2)$$

Благодаря известному равенству

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} \quad (k \geq -1),$$

которое легко доказывается по индукции, соотношения между числом α и его остаточными дробями можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha = \frac{P_k}{Q_k} + \frac{(-1)^k}{Q_k(\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1})}, \\ \alpha_{k+1} = -\frac{Q_{k-1}}{Q_k} + \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k(P_k - \alpha Q_k)} = -\frac{Q_{k-1}}{Q_k} + \frac{1}{Q_k |P_k - \alpha Q_k|}, \end{cases} \quad (k \geq 0). \quad (3)$$

Заметим, что соотношения между подходящими дробями позволяют записать вещественную иррациональность α в виде знако-чередующегося ряда

$$\alpha = q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{Q_{\nu-1} Q_{\nu}}.$$

О разложение алгебраических иррациональностей степени $n > 2$ в цепные дроби известно очень мало. Это один из труднейших вопросов современной теории чисел. В работах [1], [2], [3] — [4], [6], [14], [12], [13], [15] — [17] представлены различные аспекты этой теории.

Наиболее развита теория цепных дробей квадратических иррациональностей. В последнее время обнаруживаются новые интересные факты касающиеся этих дробей (см. [20]).

Отметим, что в работе [24] даётся описание множества приведённых алгебраических иррациональностей n -ой степени и установлено, что это множество обладает свойством рациональной выпуклости. В работе [25] показано, что аналогичным свойством обладают и обобщенные числа Пизо.

В работе [10] исследовались минимальные многочлены остаточных дробей разложения вещественных алгебраических иррациональностей в цепные дроби. В этих вопросах существенную роль сыграли дробно-линейные преобразования минимальных многочленов вещественных алгебраических иррациональностей. Это естественно, так как каждое число эквивалентно своей остаточной дроби, а эквивалентность задается с помощью унимодулярного дробно-линейного преобразования.

Целью данной работы — дать новую классификацию чисто-вещественных алгебраических иррациональностей на основе их разложения в цепные дроби и установить предельные соотношения для коэффициентов минимальных многочленов остаточных дробей.

Отметим, что случай приведённых алгебраических иррациональностей n -ой степени имеет тесную связь с квадратурными формулами с весами в методе К. К. Фролова (см. [7]–[9], [22], [23]). Дело в том, что приведённые иррациональности порождают чисто-вещественные алгебраические поля n -ой степени. Если рассмотреть решётку подобную решётке целых сопряжённых алгебраических чисел из чисто-вещественного алгебраического поля, то точки взаимной решётки, попавших в единичный n -мерный куб, будут образовывать алгебраическую сетку. Именно эти сетки и используются в методе Фролова, решая проблему построения квадратурных формул, дающих правильный порядок убывания нормы линейного функционала погрешности приближённого интегрирования на классе E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами Фурье.

Кратко остановимся на содержании данной статьи.

Во втором разделе (стр. 101–103) даются необходимые определения и обозначения, которые используются на протяжении всей статьи.

Третий раздел (стр. 103–107) посвящён рассмотрению дробно-линейных преобразований многочленов и линейных преобразований однородных бинарных форм и детальному изучению их свойств.

Четвертый раздел (стр. 107–108) посвящён рассмотрению дробно-линейных преобразований целочисленных многочленов и изучению их свойств.

В пятом разделе (стр. 108–109) дается описание поведения остаточных дробей и их сопряжённых чисел для разложения алгебраических чисел в цепные дроби.

Шестой раздел (стр. 109–111) посвящён изучению минимальных многочленов остаточных дробей.

В седьмом разделе (стр. 111–115) строится новая классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей с точки зрения разложения их в цепные дроби.

В восьмом разделе (стр. 115–120) дается определение цепной последовательности дробно-линейных преобразований плоскости и интерпретация полученных результатов в терминах этих последовательностей.

Девятый раздел (стр. 120–124) посвящён доказательству предельных соотношений с коэффициентами минимального многочлена, связанных с эффектом концентрации сопряжённых чисел остаточной дроби.

В заключении (стр. 125–125) формулируются дальнейшие перспективные направления исследований.

Отметим, что все пропущенные доказательства теорем и лемм содержатся в работах [10], [11].

2. Необходимые определения и факты

Прежде всего напомним определения приведённой алгебраической иррациональности n -ой степени. Здесь мы следуем работам [12], [13], [24].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен³, у которого все корни $\alpha^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — различные вещественные числа, удовлетворяющие условию

$$-1 < \alpha^{(n)} < \dots < \alpha^{(2)} < 0, \quad \alpha^{(1)} > 1,$$

тогда алгебраическое число $\alpha = \alpha^{(1)}$ называется приведённой алгебраической иррациональностью степени n .

Нетрудно видеть, что если $\alpha = \alpha^{(1)}$ — приведённая алгебраическая иррациональность, то все n алгебраически сопряжённых полей $\mathbb{Q}(\alpha^{(1)}), \dots, \mathbb{Q}(\alpha^{(n)})$ являются вещественными.

Заметим, что для минимального многочлена $f(x)$, задающего приведённую алгебраическую иррациональность α степени n , всегда выполнено неравенство

$$a_0 < 0, \tag{4}$$

так как на промежутке $[0; \infty)$ имеется только один корень α , при $x > \alpha$ имеем $f(x) > 0$, поэтому $f(0) < 0$. Кроме того выполняются неравенства

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = f(1) < 0, \tag{5}$$

$$a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}a_1 + (-1)^na_0 = (-1)^nf(-1) > 0. \tag{6}$$

ЛЕММА 1. Для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени n её остаточная дробь α_1 также является вещественной алгебраической иррациональностью степени n , удовлетворяющей неприводимому многочлену

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^n a_{k,1}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

где

$$a_{k,1} = - \sum_{m=n-k}^n a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \quad (0 \leq k \leq n).$$

Справедливо равенство

$$f_1(x) = -f_0(q_0) \prod_{j=1}^n \left(x - \frac{1}{\alpha^{(j)} - q_0} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что из неравенств

$$-1 < \alpha^{(n)} < \dots < \alpha^{(2)} < 0$$

вытекают неравенства

$$-1 < \beta^{(2)} = \frac{1}{\alpha^{(2)} - q_0} < \dots < \beta^{(n)} = \frac{1}{\alpha^{(n)} - q_0} < 0.$$

Таким образом, упорядоченность сопряженных чисел меняется на противоположную.

Из этой леммы по индукции доказывается следующая теорема.

³В частности, неприводимость многочлена означает, что $(a_0, \dots, a_n) = 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольной вещественной алгебраической иррациональности α степени n все её остаточные дроби α_m также являются вещественными алгебраическими иррациональностями степени n , удовлетворяющими неприводимым многочленам*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^n a_{k,m} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$

где

$$a_{k,m} = - \sum_{l=n-k}^n a_{l,m-1} C_l^{l+k-n} q_{m-1}^{l+k-n}, \quad (0 \leq k \leq n).$$

Многочлены $f_m(x)$ имеют корни

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)} Q_{m-1}} \quad (1 \leq j \leq n). \quad (7)$$

Справедливы равенства

$$f_m(x) = -f_{m-1}(q_{m-1}) \prod_{j=1}^n (x - \alpha_m^{(j)}).$$

3. Дробно-линейные преобразования для многочленов и линейные преобразования форм

Как обычно, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Через $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ мы будем обозначать соответствующие кольца многочленов, а через $\mathbb{PZ}[X, Y]$, $\mathbb{PQ}[X, Y]$, $\mathbb{PR}[X, Y]$, $\mathbb{PC}[X, Y]$ — соответствующие мультипликативные группы однородных форм.

Справедливы очевидные вложения

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x] &\subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x], \\ \mathbb{PZ}[X, Y] &\subset \mathbb{PQ}[X, Y] \subset \mathbb{PR}[X, Y] \subset \mathbb{PC}[X, Y]. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbb{K}$ — одно из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, тогда, если

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1},$$

то

$$f_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{\nu} \in \mathbb{K}[x], \quad F_{\vec{a}}(X, Y) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} X^{\nu} Y^{n-\nu} \in \mathbb{PK}[X, Y].$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$F_{\vec{a}}(X, Y) = Y^n f_{\vec{a}}\left(\frac{X}{Y}\right). \quad (8)$$

Формула (8) задает биекцию φ между $\mathbb{K}_n[x]$ — $\mathbb{K}$ -модулем всех многочленов степени не выше n и $\mathbb{K}$ -модулем $\mathbb{PK}_n[X, Y]$ — всех однородных форм порядка n .⁴

⁴Здесь мы принимаем соглашение, что нулевая форма и только она принадлежит всем $\mathbb{PK}_n[X, Y]$.

Обозначим через $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ кольцо квадратных матриц второго порядка с элементами из $\mathbb{K}$. Через $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ будем обозначать мультипликативную группу кольца $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, то есть множество всех невырожденных матриц, а через $\mathcal{U}_2(\mathbb{K})$ — множество унимодулярных матриц. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad \text{если } A, B, C, D \in \mathbb{K}; \\ M &\in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K}), \quad \text{если } \det M = AD - BC \neq 0; \\ M &\in \mathcal{U}_2(\mathbb{K}), \quad \text{если } \det M = \pm 1. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для произвольной невырожденной матрицы M из $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ дробно-линейным преобразованием M многочленов $f_{\vec{a}}(x) \in \mathbb{K}[x]$ назовем преобразование, заданное формулой

$$M(f_{\vec{a}}(x)) = (Cx + D)^n f_{\vec{a}}\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для произвольной невырожденной матрицы M из $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ линейным преобразованием M формы $F_{\vec{a}}(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$ назовем преобразование, заданное формулой

$$M(F_{\vec{a}}(X, Y)) = F_{\vec{a}}(AX + BY, CX + DY).$$

Очевидно, что единичная матрица E задает тождественные преобразования:

$$E(f_{\vec{a}}(x)) = f_{\vec{a}}(x), \quad E(F_{\vec{a}}(X, Y)) = F_{\vec{a}}(X, Y). \quad (9)$$

С произвольной матрицей $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ свяжем матрицу $M^{(n+1)} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, заданную равенством

$$\begin{aligned} M^{(n+1)} &= \begin{pmatrix} D^n & C_n^1 C D^{n-1} & \dots & C_n^{n-1} C^{n-1} D & C^n \\ BD^{n-1} & m(1, 1) & \dots & m(1, n-1) & AC^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B^{n-1} D & m(n-1, 1) & \dots & m(n-1, n-1) & A^{n-1} C \\ B^n & C_n^1 A B^{n-1} & \dots & C_n^{n-1} A^{n-1} B & A^n \end{pmatrix} = \\ &= (m(\nu, j))_{\nu=0, \dots, n}^{j=0, \dots, n}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$m(\nu, j) = \sum_{\lambda=\max(0, j-\nu)}^{\min(n-\nu, j)} C_{\nu}^{j-\lambda} A^{j-\lambda} B^{\nu-j+\lambda} C_{n-\nu}^{\lambda} C^{\lambda} D^{n-\nu-\lambda}.$$

ЛЕММА 2. Для произвольной невырожденной матрицы $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ справедливо равенство

$$M(f_{\vec{a}}(x)) = f_{\vec{b}}(x), \quad (11)$$

где

$$\vec{b} = \vec{a} \cdot M^{(n+1)}. \quad (12)$$

Из леммы 2 следует, что любое дробно-линейное преобразование с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ переводит $\mathbb{K}_n[x]$ в себя.

ЛЕММА 3. Для произвольной невырожденной матрицы $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ справедливо равенство

$$M(F_{\vec{a}}(X, Y)) = F_{\vec{b}}(X, Y), \quad (13)$$

где

$$\vec{b} = \vec{a} \cdot M^{(n+1)}. \quad (14)$$

Из леммы 3 следует, что любое линейное преобразование с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ переводит $\mathbb{PK}_n[X, Y]$ в себя.

Из этих лемм вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольной невырожденной матрицы $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ биекция φ , заданная равенством (8), сохраняется, то есть, если*

$$M(f_{\vec{a}}(x)) = f_{\vec{b}}(x), \quad (15)$$

то

$$M(F_{\vec{a}}(X, Y)) = F_{\vec{b}}(X, Y). \quad (16)$$

Будем через $\mathbb{K}_n^*[x]$ обозначать множество всех многочленов степени n с $a_0 \neq 0$ и через $\mathbb{PK}_n^*[X, Y]$ — всех невырожденных однородных форм порядка n , то есть форм $F_{\vec{a}}(X, Y)$ с $a_n \neq 0$ и $a_0 \neq 0$.

По основной теореме алгебры для любого многочлена $f_{\vec{a}}(x) \in \mathbb{K}_n^*[x]$ имеется n корней $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)} \in \mathbb{C}$ и справедливо разложение в $\mathbb{C}_n^*[x]$:

$$f_{\vec{a}}(x) = a_n (x - \alpha^{(1)}) \dots (x - \alpha^{(n)}).$$

Переходя к формам, получим два разложения

$$\begin{aligned} F_{\vec{a}}(X, Y) &= a_n (X - \alpha^{(1)}Y) \dots (X - \alpha^{(n)}Y) = \\ &= a_0 (\beta^{(1)}X + Y) \dots (\beta^{(n)}X + Y); \\ \beta^{(\nu)} &= \frac{-1}{\alpha^{(\nu)}} \quad \nu = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом, бинарная форма $F_{\vec{a}}(X, Y)$ имеет n корневых прямых

$$X - \alpha^{(\nu)}Y = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

на которых она обращается в ноль.

ЛЕММА 4. *Для любых многочленов $f_{\vec{a}}(x)$, $g_{\vec{b}}(x)$ и произвольного дробно-линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ справедливо равенство*

$$M(f_{\vec{a}}(x)g_{\vec{b}}(x)) = M(f_{\vec{a}}(x))M(g_{\vec{b}}(x)).$$

ЛЕММА 5. *Для любых форм $F_{\vec{a}}(X, Y)$, $G_{\vec{b}}(X, Y)$ и произвольного линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ справедливо равенство*

$$M(F_{\vec{a}}(X, Y)G_{\vec{b}}(X, Y)) = M(F_{\vec{a}}(X, Y))M(G_{\vec{b}}(X, Y)).$$

ЛЕММА 6. *Для любого дробно-линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ ($A \neq C\alpha^{(\nu)}$ $\nu = 1, \dots, n$) многочлен*

$$M(f(x)) = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu}x^{\nu}$$

имеет корни

$$\begin{aligned} \beta^{(\nu)} &= \frac{D\alpha^{(\nu)} - B}{A - C\alpha^{(\nu)}} \quad (1 \leq \nu \leq n), \quad b_n = \begin{cases} C^n f\left(\frac{A}{C}\right), & \text{при } C \neq 0, \\ a_n A^n, & \text{при } C = 0, \end{cases} \\ b_0 &= \begin{cases} D^n f\left(\frac{B}{D}\right), & \text{при } D \neq 0, \\ a_n B^n, & \text{при } D = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Из леммы 6 вытекает, что корни многочлена $f(x)$ преобразуются в корни многочлена $M(f(x))$ под действием дробно-линейного преобразования комплексной плоскости

$$M^*(z) = \frac{Dz - B}{-Cz + A}$$

с матрицей

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 7. Для любого линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ и формы $F(X, Y)$ с корневыми прямыми $X - \alpha^{(\nu)}Y = 0$ ($\nu = 1, \dots, n$) форма

$$M(F(X, Y)) = \sum_{\nu=0}^n b_\nu X^\nu Y^{n-\nu}$$

имеет корневые прямые

$$(A - C\alpha^{(\nu)})X - (D\alpha^{(\nu)} - B)Y = 0 \quad (1 \leq \nu \leq n), \quad b_n = F(A, C), \\ b_0 = F(B, D).$$

Из леммы 7 вытекает, что корневые прямые формы $F(X, Y)$ преобразуются в корневые прямые формы $M(F(X, Y))$ под действием линейного преобразования двумерного комплексного пространства

$$M^*(X, Y) = (DX - BY, -CX + AY)$$

с матрицей

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 8. Для композиции $\circ$ дробно-линейных преобразований справедливо равенство

$$M_1 \circ M = M \cdot M_1,$$

где $\cdot$ — матричное умножение, при этом корни многочленов преобразуются по закону

$$(M_1 \circ M)^* = M_1^* \cdot M^*.$$

ЛЕММА 9. Для композиции $\circ$ линейных преобразований форм справедливо равенство

$$M_1 \circ M = M \cdot M_1,$$

где $\cdot$ — матричное умножение, при этом корневые прямые форм преобразуются по закону

$$(M_1 \circ M)^* = M_1^* \cdot M^*.$$

Напомним определение дискриминанта $D(f)$ многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

имеющего корни $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$. Согласно определению

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2.$$

Аналогично, дискриминантом $D(F)$ формы

$$F(X, Y) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} Y + \dots + a_1 X Y^{n-1} + a_0 Y^n, \quad a_n \neq 0, a_0 \neq 0,$$

имеющей корневые прямые $X - \alpha^{(\nu)} Y = 0$ ($\nu = 1, \dots, n$), называется величина

$$D(F) = a_n^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2 = a_0^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\beta^{(\nu)} - \beta^{(\mu)} \right)^2.$$

Данное определение корректно, так как по теореме Виета $\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(n)} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ и для $\beta^{(\nu)} = \frac{-1}{\alpha^{(\nu)}}$ ($\nu = 1, \dots, n$) имеем:

$$\begin{aligned} a_0^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\beta^{(\nu)} - \beta^{(\mu)} \right)^2 &= a_0^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \frac{\left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2}{\left(\alpha^{(\nu)} \alpha^{(\mu)} \right)^2} = \\ &= a_0^{2n-2} \frac{\prod_{\nu < \mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2}{\left(\prod_{\nu=1}^n \alpha^{(\nu)} \right)^{2(n-1)}} = a_n^{2n-2} \prod_{\nu < \mu} \left(\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\mu)} \right)^2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Для любого дробно-линейного преобразования с матрицей $M \in \mathcal{M}_2^*(\mathbb{K})$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ ($A \neq C \alpha^{(\nu)}$, ($\nu = 1, \dots, n$)) и многочлена $M(f(x))$ справедливо равенство для дискриминантов

$$(\det M)^{n(n-1)} D(f) = D(M(f)).$$

4. Дробно-линейные преобразования целочисленных многочленов

Обозначим через $\mathbb{P}_n[x]$ множество всех неприводимых целочисленных многочленов $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени n . Таким образом, если $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$, то

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \neq a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad (0 \leq j \leq n)$$

и из равенства $f(x) = g(x)h(x)$, $\deg(g(x)) \leq \deg(h(x))$ следует $g(x) \equiv 1$, $h(x) \equiv f(x)$. В частности, любой неприводимый многочлен является примитивным, то есть $(a_0, \dots, a_n) = 1$.

Через $\mathbb{PP}_n[X, Y]$ обозначим множество всех неприводимых бинарных целочисленных форм $F(X, Y) \in \mathbb{P}\mathbb{Z}_n[x]$ степени n . Таким образом, если $F(X, Y) \in \mathbb{P}\mathbb{Z}_n[x]$, то

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} Y + \dots + a_1 X Y^{n-1} + a_0 Y^n, \\ a_n &\neq 0 \neq a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad (0 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

и из равенства $F(X, Y) = G(X, Y)H(X, Y)$, $\deg(G(X, Y)) \leq \deg(H(X, Y))$ следует $G(X, Y) \equiv 1$, $H(X, Y) \equiv F(X, Y)$. В частности, любая неприводимая форма является примитивной, то есть $(a_0, \dots, a_n) = 1$.

Обозначим согласно Г. Вейлю [5] через $Ct(f)$ содержание многочлена $f(x)$, а через $Ct(F)$ — содержание формы F . Таким образом, $Ct(f) = Ct(F) = (a_0, \dots, a_n)$.

ЛЕММА 10. Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ справедливо равенство

$$Ct(f) = Ct(M(f)).$$

В силу биекции φ , заданной равенством (8) (стр. 103), для любого линейного унимодулярного преобразования целочисленных форм справедливо равенство содержаний

$$Ct(F) = Ct(M(F)).$$

ЛЕММА 11. Образ любого неприводимого многочлена $f(x)$ при дробно-линейном преобразовании с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{U}_2^*$ является неприводимым многочленом.

В силу биекции φ аналогичное утверждение справедливо для неприводимых форм.

ТЕОРЕМА 4. Для любого дробно-линейного преобразования с унимодулярной матрицей $M \in \mathcal{U}_2^*(\mathbb{Z})$ и многочлена $f(x)$ с корнями $\alpha^{(\nu)}$ ($A \neq C\alpha^{(\nu)}$, $(\nu = 1, \dots, n)$) и многочлена $M(f(x))$ справедливо равенство дискриминантов

$$D(f) = D(M(f)).$$

В силу биекции φ аналогичное утверждение $D(M(F)) = D(F)$ справедливо для любого линейного преобразования форм F из $\mathbb{P}\mathbb{Z}_n[X, Y]$ с унимодулярной матрицей M из $\mathcal{U}_2^*(\mathbb{Z})$.

5. Поведение остаточных дробей и их сопряжённых чисел

Введем следующие обозначения

$$\delta(\alpha) = \min_{2 \leq j \leq n} |\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}| > 0,$$

так как все корни различные.

Для $m \geq 1$ величины θ_{m-1} ($0 < \theta_{m-1} < 1$) определяются из равенства

$$\alpha = \alpha^{(1)} = \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^{m-1}\theta_{m-1}}{Q_{m-1}Q_m}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\theta_{m-1} = \frac{Q_m}{\alpha_m Q_{m-1} + Q_{m-2}}.$$

Остаточная дробь $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ имеет разложение

$$\alpha_m = \alpha_m^{(1)} = q_m + \frac{1}{q_{m+1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}} > 1 \quad (m \geq 1).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — его вещественные корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Пусть последовательность многочленов $f_m(x)$ ($m \geq 1$) определена рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \sum_{k=0}^n a_{k,m} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0, \\ \varepsilon_m &= \text{sign}(f_{m-1}(q_{m-1})), \\ a_{k,m} &= \varepsilon_m \sum_{\nu=n-k}^n a_{\nu,m-1} C_{\nu}^{\nu+k-n} q_{m-1}^{\nu+k-n} = \varepsilon_m \frac{f_{m-1}^{(n-k)}(q_{m-1})}{(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n). \end{aligned} \quad (17)$$

Многочлены $f_m(x)$ имеют корни

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{\alpha^{(j)} Q_{m-2} - P_{m-2}}{P_{m-1} - \alpha^{(j)} Q_{m-1}} \quad (1 \leq j \leq n). \quad (18)$$

Справедливы равенства

$$f_m(x) = \varepsilon_m f_{m-1}(q_{m-1}) \prod_{j=1}^n (x - \alpha_m^{(j)}). \quad (19)$$

Существует номер $m_0 = m_0(\alpha)$ такой, что для любого $m \geq m_0$ остаточная дробь $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ является приведённой алгебраической иррациональностью и выполнены соотношения

$$\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} = \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_1}}}}, \quad (20)$$

$$\alpha_m^{(j)} = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1}^2 \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)} \right)} \quad (2 \leq j \leq n). \quad (21)$$

6. Свойства минимальных многочленов остаточных дробей

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — его вещественные корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Для последовательности минимальных многочленов $f_m(x)$ остаточных дробей $\alpha_m = \alpha_m^{(1)}$ последовательность дискриминантов $D(f_m)$ целочисленная, стационарная.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

$\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — его вещественные корни, и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Если α — приведённая алгебраическая иррациональность, то минимальный многочлен $f_m(x)$ для остаточной дроби α_m имеет вид

$$f_m(x) = (-1)^m (Q_{m-1}x + Q_{m-2})^n f_0\left(\frac{P_{m-1}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x + Q_{m-2}}\right) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu,m} x^\nu. \quad (22)$$

Справедливы равенства

$$a_{n,m} = Q_{m-1}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right|, \quad a_{0,m} = -Q_{m-2}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}\right) \right|, \quad (23)$$

$$a_{\nu,m} = Q_{m-1}^\nu Q_{m-2}^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{f_0^{(\mu)}\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^\nu \quad (0 \leq \nu \leq n), \quad (24)$$

$$a_{n-1,m} = Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0'\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right). \quad (25)$$

ЛЕММА 12. Пусть α корень минимального многочлена

$$f_0(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x],$$

тогда

$$f_0^{(\nu)}(\alpha) \neq 0 \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Обозначим через $c(\alpha, \varepsilon) > 0$ константу в теореме Рота [28]. Таким образом для любого целого p и натурального q справедливо неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\alpha, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}. \quad (26)$$

Пусть

$$\Delta(\alpha) = \max_{2 \leq j \leq n} |\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}|.$$

ЛЕММА 13. Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и

$$f_0(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен, тогда при $t > t_0$ для любой подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу α справедливы неравенства

$$a_n \frac{c(\alpha, \varepsilon) \left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left| f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right) \right| < a_n \frac{(1 + \Delta(\alpha))^{n-1}}{Q_m^2}. \quad (27)$$

Из леммы 13 и теоремы 7 следует, что при $n > 2$ старший коэффициент $a_{n,m}$ минимального многочлена $f_m(x)$ для приведённой алгебраической иррациональности α_m растёт как величина порядка $O(Q_{m-1}^{n-2-\varepsilon})$.

Действительно, при $t > t_0$ имеем

$$\begin{aligned} a_n \frac{c(\alpha, \varepsilon) \left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1}}{Q_m^{2+\varepsilon}} < \left| f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right) \right| < a_n \frac{(1 + \Delta(\alpha))^{n-1}}{Q_m^2}, \\ a_n c(\alpha, \varepsilon) \left(\frac{\delta(\alpha)}{2}\right)^{n-1} Q_{m-1}^{n-2-\varepsilon} < a_{n,m} = Q_{m-1}^n \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right| < a_n (1 + \Delta(\alpha))^{n-1} Q_{m-1}^{n-2}. \end{aligned}$$

Обозначим через $A_\nu(\alpha)$ величину

$$A_\nu(\alpha) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(j)})^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и

$$f_0(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен, тогда при $t > t_0$ для любой подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к приведённой алгебраической иррациональности α и остаточной дроби α_m справедливы соотношения

$$\alpha_m = -\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}} + \frac{f'_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)}{Q_{m-1}^2 \left| f_0\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right) \right|} + (-1)^{m-1} \frac{\lambda_m}{Q_{m-1}^2}, \quad (28)$$

где

$$\lambda_m = A_1(\alpha) + \frac{(-1)^{m-1} \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} A_2(\alpha) \varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| < 2. \quad (29)$$

7. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей

Рассмотрим неприводимый целочисленный многочлен

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

у которого все корни $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ — вещественные числа. Этому многочлену соответствуют n изоморфных алгебраических расширений поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$: $\mathbb{F}_n^{(1)} = \mathbb{Q}(\alpha^{(1)}), \dots, \mathbb{F}_n^{(n)} = \mathbb{Q}(\alpha^{(n)})$. Будем через $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$ обозначать произвольный набор алгебраически сопряженных чисел, где $\theta^{(\nu)} \in \mathbb{F}_n^{(\nu)}$.

Через $\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)})$ обозначим рациональное арифметическое пространство:

$$\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) = \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} m_{\mu} (\alpha^{(1)})^{\mu}, \dots, \sum_{\mu=0}^{n-1} m_{\mu} (\alpha^{(n)})^{\mu} \right) \middle| m_0, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

ЛЕММА 14. *Рациональное n -мерное арифметическое пространство $\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)})$ всюду плотно в n -мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка в n -мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_0 + y_1 \alpha^{(1)} + \dots + y_{n-1} (\alpha^{(1)})^{n-1} = x_1 \\ y_0 + y_1 \alpha^{(2)} + \dots + y_{n-1} (\alpha^{(2)})^{n-1} = x_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_0 + y_1 \alpha^{(n)} + \dots + y_{n-1} (\alpha^{(n)})^{n-1} = x_n \end{cases} \quad (30)$$

Так как определитель Вандермонда

$$W(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^{(1)} & \dots & (\alpha^{(1)})^{n-1} \\ 1 & \alpha^{(2)} & \dots & (\alpha^{(2)})^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^{(n)} & \dots & (\alpha^{(n)})^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (30) имеет единственное решение $(y_0, \dots, y_{n-1})$.

Пусть $a = \max_{\substack{\nu=1, \dots, n, \\ \mu=0, \dots, n-1}} (|\alpha^{(\nu)}|^{\mu})$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Определим целые $m_0, \dots, m_{n-1}$ и натуральное N из условий

$$\frac{n \cdot a}{N} < \varepsilon, \quad m_{\mu} = [N \cdot y_{\mu}] \quad (\mu = 0, \dots, n-1).$$

Тогда для $\theta^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{m_{\mu}}{N} (\alpha^{(\nu)})^{\mu}$ имеем:

$$|\theta^{(\nu)} - x_{\nu}| < \varepsilon \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Точка $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ называется точкой общего положения, если $x_{\nu} \neq 0$ ($\nu = 1, \dots, n$) и $|x_1 - x_2| + \dots + |x_1 - x_n| > 0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Точка $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ называется точкой абсолютно общего положения, если $x_{\nu} \neq 0$ ($\nu = 1, \dots, n$) и $|x_{\nu} - x_{\mu}| > 0$ для любых $\nu \neq \mu$.*

Ясно, что в рациональном арифметическом пространстве $\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)})$ не являются точками общего положения только рациональные точки вида $(m, \dots, m)$ $m \in \mathbb{Q}$. Все остальные точки являются точками общего положения. Точками абсолютно общего положения являются только точки $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$, где $\theta^{(1)}$ — алгебраическая иррациональность степени n , а $\theta^{(2)}, \dots, \theta^{(n)}$ — её алгебраически сопряженные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Для точки абсолютно общего положения $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с выделенной координатой x_ν её типом назовем матрицу

$$\begin{pmatrix} t & t & t & t_1 & \dots & t_m \\ 1 & k_- & k_+ & k_1 & \dots & k_m \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где целые $t, t_1, \dots, t_m, k_-, k_+, k_1, \dots, k_m$ определены условиями

$$t \leq x_\nu < t+1, \quad t_1 < \dots < t_m, \quad t_\nu \neq t \quad (1 \leq \nu \leq m),$$

на полуинтервале $[t, x_\nu)$ ровно k_- чисел x_μ ,

на интервале $(x_\mu, t+1)$ ровно k_+ чисел x_μ ,

на каждом полуинтервале $[t_j, t_j+1)$ ровно k_j чисел x_μ ($j = 1, \dots, m$).

Таким образом, выполнено равенство

$$1 + k_- + k_+ + k_1 + \dots + k_m = n.$$

Из леммы 14 сразу следует, что в любом рациональном арифметическом пространстве $\mathbb{F}^n(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)})$ для заданного ν и типа (31) найдется алгебраическая иррациональность n -ой степени $\theta^{(\nu)} \in \mathbb{F}_n^{(\nu)}$ такая, что набор сопряженных алгебраических иррациональностей $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$ имеет тип (31).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Типом алгебраической иррациональности n -ой степени $\theta^{(\nu)} \in \mathbb{F}_n^{(\nu)}$ называется тип точки $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$ с выделенной координатой $\theta^{(\nu)}$.

Из этого определения следует, что всякая приведенная иррациональность $\alpha = \alpha^{(1)}$ с алгебраически сопряженными числами $\alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ имеет тип

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_0 & q_0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & n-1 \end{pmatrix},$$

где q_0 — натуральное число, равное нулевому неполному частному разложения α в цепную дробь:

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{\ddots}}}} > 1.$$

ЛЕММА 15. Если α — приведённая алгебраическая иррациональность, то необходимым и достаточным условием существования приведённой алгебраической иррациональности β , для которой α — первая остаточная дробь, является существование натурального q , для которого выполнены условия

$$-\frac{1}{q} < \alpha^{(\nu)} < -\frac{1}{q+1} \quad (2 \leq \nu \leq n), \quad (32)$$

тогда

$$\beta = q + \frac{1}{\alpha}. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если β имеет вид (33), то алгебраически сопряжённые к β иррациональности имеют вид

$$\beta^{(\nu)} = q + \frac{1}{\alpha^{(\nu)}} \quad (2 \leq \nu \leq n). \quad (34)$$

Так как β — приведённая алгебраическая иррациональность, то выполняются неравенства

$$-1 < q + \frac{1}{\alpha^{(\nu)}} < 0 \quad (2 \leq \nu \leq n),$$

которые эквивалентны неравенствам (32). Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Приведённая алгебраическая иррациональность n -ой степени $\alpha = \alpha^{(1)} \in \mathbb{F}_n^{(1)}$ называется приведённой алгебраической иррациональностью порядка m , если найдётся последовательность приведённых алгебраических иррациональностей $\beta_m, \dots, \beta_1$ такая, что

$$\beta_\nu = q_\nu + \frac{1}{q_{\nu-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\alpha}}}} \quad (\nu = 1, \dots, m) \quad (35)$$

и не существует приведённой алгебраической иррациональности β_{m+1} , для которой β_m — первая остаточная дробь.

Таким образом, если для приведённой алгебраической иррациональности α не выполнено условие леммы 15, то α имеет порядок 0. Все приведённые квадратические иррациональности имеют бесконечный порядок в силу периодичности цепной дроби.

ТЕОРЕМА 9. При $n \geq 3$ всякая приведённая алгебраическая иррациональность α степени n имеет конечный порядок $m \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть найдётся последовательность приведённых алгебраических иррациональностей $\beta_m, \dots, \beta_1$ такая, что выполнены равенства (35), тогда последовательно для сопряжённых чисел $\beta_\nu^{(\mu)}$ ($\nu = m, \dots, 1$), ($\mu = 2, \dots, n$) находим

$$\begin{aligned} & -1 < \beta_m^{(\mu)} < 0, \\ & -\frac{1}{q_m} < \beta_{m-1}^{(\mu)} < -\frac{1}{q_m + 1}, \\ & -\frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}} < \beta_{m-2}^{(\mu)} < -\frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}, \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \\ & \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}} < \beta_1^{(\mu)} < -\frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}}, & m \text{ чётное} \\ -\frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}} < \beta_1^{(\mu)} < -\frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}}, & m \text{ нечётное} \end{array} \right. \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}} < \alpha^{(\mu)} < -\frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}}, \quad m \text{ нечетное} \\ -\frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}} < \alpha^{(\mu)} < -\frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}}, \quad m \text{ четное} \end{array} \right.$$

Так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m}}}} - \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_m + 1}}}} \right| = 0,$$

то при бесконечном порядке приведенной иррациональности α получаем $\alpha^{(2)} = \dots = \alpha^{(n)}$, что невозможно при $n \geq 3$. Теорема полностью доказана. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что каждая чисто-вещественная алгебраическая иррациональность α n -ой степени либо является приведенной алгебраической иррациональностью конечного порядка $m \geq 0$, либо эквивалентна некоторой приведенной алгебраической иррациональности конечного порядка $m \geq 0$.

8. Цепные последовательности с дробно-линейными преобразованиями

В работе [15] дано определение сходимости последовательности целочисленных матриц к числу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Говорят, что матричное разложение

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

сходится к числу α , если для матриц

$$M_n = \prod_{k=0}^n \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha.$$

В этом случае пишется

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

В работе [12] дается достаточно систематичное изложение теории матричных представлений действительных чисел. Нас сейчас будет интересовать случай, соответствующий обычным цепным дробям. Если число α разложено в цепную дробь (1), то справедливо матричное разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{\nu=0}^{\infty} \begin{pmatrix} q_{\nu} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

так как

$$M_m = \prod_{\nu=0}^m \begin{pmatrix} q_{\nu} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_m & P_{m-1} \\ Q_m & Q_{m-1} \end{pmatrix} \quad (m \geq 0)$$

и последовательность матриц M_m сходится к числу α в силу свойств подходящих дробей.

Рассмотрим произвольное дробно-линейное преобразование комплексной плоскости с матрицей M :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad w = M(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}.$$

Из равенств (2) вытекает, что иррациональное число α и остаточная дробь α_{k+1} связаны взаимнообратными дробно-линейными преобразованиями:

$$M_k = \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix}, \quad M_k^* = \begin{pmatrix} Q_{k-1} & -P_{k-1} \\ -Q_k & P_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \alpha = M_k(\alpha_{k+1}) \\ \alpha_{k+1} = M_k^*(\alpha) \end{cases}. \quad (37)$$

Анализируя формулы (7) для корней минимального многочлена $f_m(x)$, мы приходим к выводу, что они получаются из корней исходного минимального многочлена под действием дробно-линейного преобразования M_{k-1}^* .

Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть α — вещественная иррациональность. Назовем цепной последовательностью первого рода дробно-линейных преобразований для многочленов последовательность

$$\left\{ M_{\nu}(\alpha) = \begin{pmatrix} P_{\nu}(\alpha) & P_{\nu-1}(\alpha) \\ Q_{\nu}(\alpha) & Q_{\nu-1}(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \dots \right\},$$

где $P_{\nu}(\alpha)$ — числитель, а $Q_{\nu}(\alpha)$ — знаменатель подходящей дроби с номером ν к числу α .

Цепной последовательностью первого рода дробно-линейных преобразований комплексной плоскости назовем последовательность

$$\left\{ M_{\nu}^*(\alpha) = \begin{pmatrix} Q_{\nu-1}(\alpha) & -P_{\nu-1}(\alpha) \\ -Q_{\nu}(\alpha) & P_{\nu}(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \nu = 0, 1, \dots \right\}.$$

Чтобы лучше понять эффект концентрации алгебраически-сопряжённых чисел к остаточной дроби α_m около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ докажем следующие леммы.

ЛЕММА 16. Пусть $M^*(z)$ — произвольное дробно-линейное преобразование комплексной плоскости с унимодулярной матрицей M^* :

$$M^* = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}, |AD - BC| = 1, C \neq 0,$$

тогда:

внешность круга $K\left(\frac{A}{C}, 1\right) = \{z \mid |z - \frac{A}{C}| \geq 1\}$ переходит во внутренность круга $K\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$ с выколотым центром,
 окружность $C\left(\frac{A}{C}, 1\right)$ переходит в окружность $C\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$,
 внутренность круга $K\left(\frac{A}{C}, 1\right)$ с выколотым центром переходит во внешность круга $K\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{C^2}\right)$,
 любое кольцо

$$R\left(\frac{A}{C}, 1, r\right) = \left\{z \mid r < \left|z - \frac{A}{C}\right| < 1\right\} \quad (0 < r < 1)$$

переходит в кольцо $R\left(-\frac{D}{C}, \frac{1}{rC^2}, \frac{1}{C^2}\right)$,

точка $z = \frac{A}{C}$ — полюс дробно-линейного преобразования $M^*(z)$ с вычетом $\frac{1}{C^2}$.

Рассмотрим дробно-линейное преобразование $N^*(z)$ с матрицей

$$N^* = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C, D \in \mathbb{Z}, C \neq 0, \quad N^*(z) = \frac{Cz + D}{C} = z + \frac{D}{C}.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1^* = N^* \cdot M^* = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AD - BC \\ -C^2 & AC \end{pmatrix}$$

ЛЕММА 17. Пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} C & -D \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}, \quad C \neq 0,$$

тогда для дробно-линейного преобразования многочленов $M_1 = N \circ M$ с матрицей

$$M_1 = M \cdot N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & BC - AD \\ C^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и корней $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n)}$ многочлена $g(x) = M_1(f(x))$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g(x) &= M_1(f(x)) = C^{2n} x^n f\left(\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2 x}\right) = \\ &= C^{2n} f\left(\frac{A}{C}\right) x^n + \sum_{\nu=1}^n \frac{f^{(\nu)}\left(\frac{A}{C}\right)}{\nu!} C^{2(n-\nu)} x^{n-\nu} (BC - AD)^\nu \end{aligned} \quad (38)$$

и

$$\beta^{(\nu)} = M_1^*\left(\alpha^{(\nu)}\right) = \frac{AD - BC}{C^2\left(\frac{A}{C} - \alpha^{(\nu)}\right)} \quad (1 \leq \nu \leq n). \quad (39)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть α — вещественная иррациональность, тогда цепной последовательностью второго рода дробно-линейных преобразований для многочленов назовем последовательность

$$\left\{M_{\nu,1}(\alpha) = \begin{pmatrix} P_\nu(\alpha)Q_\nu(\alpha) & P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha) - P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha) \\ Q_\nu^2(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \mid \nu = 0, 1, \dots\right\},$$

где $P_\nu(\alpha)$ — числитель, а $Q_\nu(\alpha)$ — знаменатель подходящей дроби с номером ν к числу α .

Цепной последовательностью второго рода дробно-линейных преобразований комплексной плоскости назовем последовательность

$$\left\{M_{\nu,1}^*(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & P_\nu(\alpha)Q_{\nu-1}(\alpha) - P_{\nu-1}(\alpha)Q_\nu(\alpha) \\ -Q_\nu^2(\alpha) & P_\nu(\alpha)Q_\nu(\alpha) \end{pmatrix} \mid \nu = 0, 1, \dots\right\}.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть α — вещественная иррациональность степени $n > 2$ и

$$f_0(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_n^*[x]$$

— минимальный многочлен.

Для последовательности многочленов $g_\nu(x) = M_{\nu,1}(\alpha)(f_0(x))$ и корней

$$\beta_\nu^{(j)} = M_{\nu,1}^*(\alpha)(\alpha^{(j)}) \quad (1 \leq j \leq n)$$

справедливы соотношения

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta_\nu^{(j)} = 0 \quad (2 \leq j \leq n), \quad (40)$$

$$\beta_\nu^{(1)} = \alpha_{\nu+1} + \frac{Q_{\nu-1}(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)}. \quad (41)$$

Введём обозначения:

$$\lambda_\nu = \alpha^{(1)} - \alpha^{(\nu+1)} \quad (1 \leq \nu \leq n-1),$$

$\sigma_\nu(x_1, \dots, x_k)$ — элементарный симметрический многочлен порядка ν от $x_1, \dots, x_k$
($1 \leq \nu \leq k$).

ЛЕММА 18. Пусть выполнены условия теоремы 10, тогда справедливы предельные соотношения:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu^2(-1)^{\nu-1} \beta_\nu^{(j)} = \frac{1}{\lambda_{j-1}} \quad (2 \leq j \leq n), \quad (42)$$

при $1 \leq \mu \leq n-1$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu^{2\mu}(-1)^{(\nu-1)\mu} \sigma_\mu(\beta_\nu^{(2)}, \dots, \beta_\nu^{(n)}) = \sigma_\mu\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}}\right). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из доказательства теоремы 10 следует, что

$$Q_\nu^2(-1)^{\nu-1} \beta_\nu^{(j)} = \frac{1}{\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(j)}} = \frac{1}{\frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(1)} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(j)}}.$$

Так как

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{P_\nu(\alpha)}{Q_\nu(\alpha)} - \alpha^{(1)} = 0,$$

то (42) установлено.

Соотношение (43) вытекает из (42) в силу однородности элементарных симметрических многочленов и их непрерывности. $\square$

ТЕОРЕМА 11. При $1 \leq \nu \leq n$ справедливы равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) = \frac{f_0^{(\nu)}(\alpha)}{\nu! \sigma_{\nu-1} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}} \right)}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в лемме 17 $A = P_m$, $B = P_{m-1}$, $C = Q_m$, $D = Q_{m-1}$, тогда $AD - BC = (-1)^{m-1}$ и многочлен

$$g(x) = M_1(f_0(x)) = Q_m^{2n} f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) x^n + \sum_{\nu=1}^n \frac{f_0^{(\nu)} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{\nu!} Q_m^{2(n-\nu)} x^{n-\nu} (-1)^{m\nu}$$

имеет корни:

$$\beta_m^{(j)} = M_{m,1}^*(\alpha)(\alpha^{(j)}) = \frac{(-1)^{m-1}}{Q_m^2 \left(\frac{P_m}{Q_m} - \alpha^{(j)} \right)} \quad (2 \leq j \leq n), \quad (45)$$

$$\beta_m^{(1)} = \alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m}. \quad (46)$$

Обозначим через $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ элементарные симметрические функции от $\beta_m^{(2)}, \dots, \beta_m^{(n)}$, тогда по теореме Виета получим:

$$\beta_m^{(1)} + \sigma_1 = (-1)^{m-1} \frac{f'_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}, \quad (47)$$

$$\beta_m^{(1)} \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu = (-1)^{\nu(m-1)} \frac{f_0^{(\nu)} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{\nu! Q_m^{2\nu} f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)} \quad (2 \leq \nu \leq n). \quad (48)$$

Из равенства (47) следует:

$$\begin{aligned} \beta_m^{(1)} (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) + \sigma_1 (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) &= f'_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) &= f'_0(\alpha) \end{aligned}$$

и равенство (44) доказано при $\nu = 1$.

Из равенства (48) и леммы 18 следует:

$$\begin{aligned} \beta_m^{(1)} (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) Q_m^{2(\nu-1)} (-1)^{(m-1)(\nu-1)} \sigma_{\nu-1}(\beta_m^{(2)}, \dots, \beta_m^{(n)}) + \\ + Q_m^{2\nu} (-1)^{(m-1)\nu} \sigma_\nu(\beta_m^{(2)}, \dots, \beta_m^{(n)}) f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) &= \frac{f_0^{(\nu)} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{\nu!}, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) (-1)^{m-1} Q_m^2 f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) &= \frac{f_0^{(\nu)}(\alpha)}{\nu! \sigma_{\nu-1} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}} \right)} \end{aligned}$$

и равенство (44) доказано при $2 \leq \nu \leq n$. $\square$

ТЕОРЕМА 12. *Справедливо равенство*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) Q_m^2 \left| \frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right| = 1. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Тейлора получаем:

$$f_0 \left(\frac{P_m}{Q_m} \right) = \sum_{\nu=1}^n \frac{f_0^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} \left(\frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right)^\nu = - \sum_{\nu=1}^n \frac{f_0^{(\nu)} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)}{\nu!} \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} \right)^\nu.$$

Отсюда и из равенства (47) следует:

$$\begin{aligned} & \beta_m^{(1)}(-1)^m Q_m^2 \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} + \sum_{\nu=2}^n \frac{f_0^{(\nu)}\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)}{\nu! f_0'\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)} \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} \right)^\nu \right) + \\ & + \sigma_1(-1)^{m-1} Q_m^2 \frac{f_0\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)}{f_0'\left(\frac{P_m}{Q_m}\right)} = 1, \\ & \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) (-1)^m Q_m^2 \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} \right) = 1, \end{aligned}$$

так как при $\nu \geq 2$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) Q_m^2 \left(\alpha - \frac{P_m}{Q_m} \right)^\nu = 0$$

в силу теоремы Рота. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если утверждение теоремы 11 нетривиально, то утверждение теоремы 12 тривиально. Действительно, из равенства (3) следует, что

$$\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} = \frac{1}{Q_m |P_m - \alpha Q_m|}.$$

Поэтому

$$\left(\alpha_{m+1} + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right) Q_m^2 \left| \frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right| = \frac{Q_m^2 \left| \frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right|}{Q_m |P_m - \alpha Q_m|} = 1.$$

9. Предельные соотношения с коэффициентами минимального многочлена

По теореме 5 (стр. 108)

$$f_m(x) = -f_{m-1}(q_{m-1})x^n - \frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{1!}x^{n-1} - \sum_{\nu=2}^n \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!}x^{n-\nu}. \quad (50)$$

Из формулы (50) и формул Виета следует, что

$$(-1)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} = \alpha_m^{(1)} \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

где $\sigma_0 = 1$, $\sigma_n = 0$, $\sigma_1 = \sigma_1(\alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(n)}) = \alpha_m^{(2)} + \dots + \alpha_m^{(n)}$,

$$\sigma_\nu = \sigma_\nu(\alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(n)}) = \sum_{2 \leq \mu_1 < \dots < \mu_\nu \leq n} \alpha_m^{(\mu_1)} \dots \alpha_m^{(\mu_\nu)} \quad (2 \leq \nu \leq n-1) \quad (51)$$

— элементарные симметрические многочлены от $\alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(n)}$.

Так как

$$\alpha_m^{(1)} = -\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} - \sigma_1,$$

то получаем $n - 1$ равенство

$$\begin{aligned} (-1)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} &= \left(-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} - \sigma_1 \right) \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu \quad (\nu = 2, \dots, n), \\ (-1)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} + \frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \sigma_{\nu-1} &= -\sigma_1 \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu. \end{aligned} \quad (52)$$

Далее нам потребуются следующие следствия из теорем 5 (стр. 108) и 7 (стр. 110):

$$-f_{m-1}(q_{m-1}) = Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|, \quad (53)$$

$$-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{1!} = Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2} Q_{m-1}} f'_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right), \quad (54)$$

$$\begin{aligned} -\frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu!} &= Q_{m-1}^{n-\nu} Q_{m-2}^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2} Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{n-\nu} \\ &\quad (0 \leq \nu \leq n), \end{aligned} \quad (55)$$

$$-\frac{f_{m-1}^{(n)}(q_{m-1})}{n!} = -Q_{m-2}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right) \right|. \quad (56)$$

ЛЕММА 19. *Справедливо равенство*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \sigma_\nu = (-1)^\nu C_{n-1}^\nu \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно равенству (21) (стр. 109) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \alpha_m^{(\nu)} &= -1 + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1} Q_{m-2} \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(\nu)} \right)} \quad (2 \leq \nu \leq n), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \alpha_m^{(\nu)} &= -1, \\ \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \sigma_\nu &= \sum_{2 \leq \mu_1 < \dots < \mu_\nu \leq n} \prod_{j=1}^{\nu} \left(-1 + \frac{(-1)^m}{Q_{m-1} Q_{m-2} \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(\mu_j)} \right)} \right), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \sigma_\nu &= \sum_{2 \leq \mu_1 < \dots < \mu_\nu \leq n} (-1)^\nu = (-1)^\nu C_{n-1}^\nu \end{aligned}$$

и лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 20. *При $\nu = 1, \dots, n$ справедливо равенство*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) \left(\left(-\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} - C_{n-1}^{\nu-1} \right) \right) = 0. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\left(-\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} - C_{n-1}^{\nu-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{2 \leq \mu_1 < \dots < \mu_{\nu-1} \leq n} \prod_{j=1}^{\nu} \left(1 - \frac{(-1)^m}{Q_{m-1} Q_{m-2} \left(\frac{(-1)^m \theta_{m-1}}{Q_{m-1} Q_m} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(\mu_j)} \right)} \right) - C_{n-1}^{\nu-1} = \\
&= O \left(\frac{1}{Q_{m-1} Q_{m-2}} \right),
\end{aligned}$$

поэтому согласно равенствам (53) и (54) получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) \left(\left(-\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} - C_{n-1}^{\nu-1} \right) = \\
&= O \left(\frac{1}{Q_{m-2}^2} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) \right) = \\
&= O \left(\frac{1}{Q_{m-2}^2} \left(\frac{Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2} Q_{m-1}} f'_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right)}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) \right) = \\
&= O \left(\frac{n}{Q_{m-1} Q_{m-2}} - \frac{f'_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{Q_{m-2}^2 Q_{m-1}^2 \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right).
\end{aligned}$$

Согласно лемме 13 (стр. 111)

$$\frac{f'_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{Q_{m-2}^2 Q_{m-1}^2 \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} = O \left(\frac{Q_{m-1}^\varepsilon}{Q_{m-2}^2} \right).$$

Предположим, что для бесконечного числа номеров m выполняется неравенство

$$Q_{m-1}^\varepsilon > c Q_{m-2}^2 > 0,$$

тогда $Q_{m-1} > c^{\frac{1}{\varepsilon}} Q_{m-2}^{\frac{2}{\varepsilon}}$. Но тогда,

$$\left| \alpha - \frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right| < \frac{1}{Q_{m-2} Q_{m-1}} < \frac{1}{c^{\frac{1}{\varepsilon}} Q_{m-2}^{1+\frac{2}{\varepsilon}}},$$

что противоречит неравенству Рота (26). Отсюда следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{m-1}^\varepsilon}{Q_{m-2}^2} = 0,$$

что доказывает утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 21. При $\nu = 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} - \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) C_{n-1}^{\nu-1} \right) = \\
= -(\nu-1) C_n^\nu.
\end{aligned} \tag{59}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно равенству (52) имеем:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} &= \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} (-1)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} - \\
&- \left(-\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \sigma_1 \right) \left((-1)^{\nu-1} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^{\nu-1} \sigma_{\nu-1} \right) + (-1)^\nu \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \sigma_\nu.
\end{aligned}$$

Применяя леммы 19 и 20, получим

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} - \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) C_{n-1}^{\nu-1} \right) = \\ = -(n-1)C_{n-1}^{\nu-1} + C_{n-1}^\nu = -(\nu-1)C_n^\nu \end{aligned}$$

и лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 22. При $\nu = 2, \dots, n$ и $2 \leq \mu \leq \nu$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \left(\frac{Q_{m-1}^{n-\nu} Q_{m-2}^\nu f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) (Q_{m-2} Q_{m-1})^{-\mu}}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) \right) = 0. \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \left(\frac{Q_{m-1}^{n-\nu} Q_{m-2}^\nu f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) (Q_{m-2} Q_{m-1})^{-\mu}}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{(Q_{m-2} Q_{m-1})^\mu \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|}.$$

Повторяя рассуждения леммы 20, получим доказываемое утверждение. $\square$

ЛЕММА 23. При $\nu = 2, \dots, n-1$ справедливы равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2} Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{n-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) C_{n-1}^{\nu-1}}{Q_{m-2} Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = C_n^\nu, \quad (61)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{\mu=2}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2} Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{n-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = 0. \quad (62)$$

При $\nu = n$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right) \right|}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{Q_{m-2} Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = 1. \quad (63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 21, 22 и равенств (53)–(55) вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{f_{m-1}^{(\nu)}(q_{m-1})}{\nu! f_{m-1}(q_{m-1})} - \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} \right) C_{n-1}^{\nu-1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \right)^\nu \frac{Q_{m-1}^{n-\nu} Q_{m-2}^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \left(\frac{Q_{m-1}^{n-1} Q_{m-2} \left(n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right| - \frac{1}{Q_{m-2}Q_{m-1}} f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right)}{Q_{m-1}^n \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) C_{n-1}^{\nu-1} \right) = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} - \right. \\
&\quad \left. - n C_{n-1}^{\nu-1} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) C_{n-1}^{\nu-1}}{Q_{m-2}Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = -(\nu-1) C_n^\nu.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) C_{n-1}^{\nu-1}}{Q_{m-2}Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = \\
&= n C_{n-1}^{\nu-1} - (\nu-1) C_n^\nu = C_n^\nu
\end{aligned}$$

и первое утверждение леммы доказано.

Далее, заметим что

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} = \frac{\sum_{\mu=2}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} C_{n-\mu}^{m-\nu}}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \\
&\quad + C_{n-1}^{m-\nu} - \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) C_{n-1}^{\nu-1}}{Q_{m-2}Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (61) следует (62).

Из равенства (56) следует, что

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f_0^{(\mu)} \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{\mu!} \frac{(-1)^{m+(m-1)\mu}}{(Q_{m-2}Q_{m-1})^\mu} = (-1)^m f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right).$$

Так как $(-1)^m f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right) < 0$, то при $\nu = n$ из (61) следует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(- \frac{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-2}}{Q_{m-2}} \right) \right|}{\left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} + \frac{f_0' \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right)}{Q_{m-2}Q_{m-1} \left| f_0 \left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right) \right|} \right) = 1$$

и лемма полностью доказана. $\square$

10. Заключение

Из материалов статьи видно, что приведённые алгебраические иррациональности в случае чисто-вещественных алгебраических полей играют принципиальную роль в вопросах разложения алгебраических иррациональностей в цепную дробь. Начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными алгебраическими числами.

По-видимому, представляет интерес дальнейшее изучение явления концентрации около дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ сопряжённых к остаточной дроби α_m .

Рассмотрим множество всех сопряжённых к остаточным дробям — сопряжённый спектр иррационального числа α . При $n > 2$ сопряжённый спектр является бесконечным множеством, а при $n = 2$ — конечным множеством.

Если множество всех дробей вида $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$ назвать рациональным сопряжённым спектром вещественного алгебраического числа, то возникает естественный вопрос о его структуре.

В квадратичном случае имеется конечное число предельных точек для рационального сопряжённого спектра — это сопряжённый спектр. Какая ситуация имеет место в общем случае?

Из материалов статьи видно, что теория дробно-линейных преобразований многочленов параллельна теории линейных преобразований однородных бинарных форм. Последняя теория оказывается во многом более простая и доказательства большинства утверждений более короткие.

Такая связь не является случайной. По-видимому, теория дробно-линейных преобразований многочленов более связана с диофантовыми приближениями первого рода, а линейные преобразования однородных форм — с диофантовыми приближениями второго рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Г. Александров Исследование на ЭВМ непрерывных дробей // Алгоритмические исследования в комбинаторике. М.: Наука. 1978. С. 142–161, 187.
2. В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров Цепные дроби, группа $GL(2, \mathbb{Z})$ и числа Пизо // Матем. тр. 2007. Т. 10, № 1. С. 97–131.
3. А. Д. Брюно Разложение алгебраических чисел в цепные дроби // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4, № 2. С. 211–221.
4. А. Д. Брюно Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 2. С. 35–65.
5. Г. Вейль Алгебраическая теория чисел. М.: Гос. из-во И. Л. 1947. 226 с.
6. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197–391.
7. Н. М. Добровольский Гиперболическая дзета-функция решёток // Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
8. Н. М. Добровольский Квадратурные формулы на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ // Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6091–84.
9. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

10. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.
11. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. С. Полякова Дробно-линейные преобразования многочленов и линейные преобразования форм // Материалы XIII Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, Дополнительный том. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 134–149.
12. Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 1. С. 34–55.
13. Н. М. Добровольский, Е. И. Юшина О приведенных алгебраических иррациональностях // Алгебра и приложения: труды Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина, Нальчик, 6–11 сентября 2014 г. – Нальчик: из-во КБГУ. С. 44–46.
14. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, вып. 3. С. 47–52.
15. Подсыпанин В. Д. О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Материалы межвузовской научной конференции математических кафедр пединституты Центральной зоны. Тула, 1968, С. 68–70.
16. В. Д. Подсыпанин О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 43–46.
17. Е. В. Подсыпанин, Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 184–194.
18. Е. В. Подсыпанин О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сб. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 47–49.
19. В. В. Прасолов Многочлены. — 3-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2003. — 336 с.
20. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.
21. Фельдман Н. И. Приближения алгебраических чисел. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. — 200 с.
22. К. К. Фролов Оценки погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231, №. 4. С. 818–821.
23. К. К. Фролов Квадратурные формулы на классах функций: дис. ... к-та физ.-мат. наук. М: ВЦ АН СССР. 1979.
24. Е. И. Юшина О некоторых приведенных алгебраических иррациональностях // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Региональной научной студенческой конференции. Тула: ТулГУ 2015. С. 66–72.

25. Е. И. Юшина О некоторых обобщенных числах Пизо // Университет XXI века: исследования в рамках научных школ: материалы Всероссийской научно-практической конференции. Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого 2015. С. 66–72.
26. N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016, no. 2. P. 27–39.
27. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5
28. K. F. Roth Rational approximations to algebraic numbers // Mathematika. 1955. Vol. 2. P. 1–20. corrigendum: p. 168.

REFERENCES

1. Aleksandrov, A. G. 1978, "Computer investigation of continued fractions." , *Algorithmic studies in combinatorics Nauka, Moscow*, pp. 142–161, 187. (Russian)
2. Berestovskii, V. N. & Nikonorov, Yu. G. 2007, "Continued Fractions, the Group $GL(2, \mathbb{Z})$, and Pisot Numbers", *Siberian Adv. Math.*, vol. 17, no. 4, pp. 268–290.
3. Bruno, A. D. 1964, "Continued fraction expansion of algebraic numbers", *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 4, no. 2, pp. 1–15. (Russian)
4. Bruno, A. D. 2015, "Universal generalization of the continued fraction algorithm", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 16, no. 2, pp. 35–65. (Russian)
5. Weyl, Hermann 1940, "Algebraic Theory of Numbers." , *Annals of Mathematics Studies, no. 1. Princeton University Press, Princeton, N. J.*, viii+223 pp.
6. Voronoi, GF 1896, On Generalization of the Algorithm of Continued Fraction, Warsawa University.
7. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Hyperbolic Zeta function lattices." , *Dep. v VINITI* 24.08.84, №6090–84. (Russian)
8. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Quadrature formulas for classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$." , *Dep. v VINITI* 24.08.84. № 6091–84. (Russian)
9. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "About the modern problems of the theory of hyperbolic zeta-functions of lattices" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1(53), pp. 176 – 190. (Russian)
10. Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2015, "About minimal polynomial residual fractions for algebraic irrationalities" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 3(55), pp. 147–182. (Russian)
11. Dobrovol'skii, N. M., Sobolev, D. K. & Soboleva, V. N. 2013, "On the matrix decomposition of a reduced cubic irrational" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, no. 1(45), pp. 34–55. (Russian)
12. Dobrovol'skii, N. M. & Yushina, E. I. 2014, "On the reduction of algebraic irrationalities" , *Algebra and Applications: Proceedings of the International Conference on Algebra, dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaloujnine, Nalchik, 6–11 September 2014 – Nalchik: publishing house KBSU.*, pp. 44 – 46. (Russian)

13. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. & Yushina, E. I. 2012, "On a matrix form of a theorem of Galois on purely periodic continued fractions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, no. 3(43), pp. 47–52. (Russian)
14. Podsypanin, V. D. 2007, "On the expansion of irrationalities of the fourth degree in the continued fraction", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 8, no. 3(23), pp. 43–46. (Russian)
15. Podsypanin, E. V. 1977, "A generalization of the continued fraction algorithm that is related to the Viggo Brun algorithm", *Studies in number theory (LOMI)*, 4. *Zap. Nauch. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, vol. 67, pp. 184–194, 227. (Russian)
16. Podsypanin, E. V. 2007, "On the expansion of irrationalities of higher degrees in the generalized continued fraction (Materials V. D. Podsypanin) the manuscript of 1970", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 8, no. 3(23), pp. 47–49. (Russian)
17. Prasolov, V. V. 2001, "Polynomials." Translated from the 2001 Russian second edition by Dmitry Leites. *Algorithms and Computation in Mathematics*, 11. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xiv+301 pp. ISBN: 3-540-40714-6.
18. Trikolich, E. V. & Yushina, E. I. 2009, "Continued fractions for quadratic irrationalities from the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 10, no. 1(29), pp. 77–94. (Russian)
19. Frolov, K. K. 1976, "Upper bounds for the errors of quadrature formulae on classes of functions.", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* Vol. 231, no. 4, pp. 818–821. (Russian)
20. Frolov, K. K. 1979, "Kvadrurnye formuly na klassakh funktsiy.", PhD thesis. Moscow. *VTS AN SSSR*. (Russian)
21. Yushina, E. I. 2015, "About some the reduction of algebraic irrationalities", *Modern problems of mathematics, mechanics, Computer Science: Proceedings of the Regional scientific student conference. Tula: TulSU*, pp. 66–72.
22. N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii 2016, "On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities", *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, no. 2, pp. 27–39.
23. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva 2016, "Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition", *Springer International Publishing Switzerland*, V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), *Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control* 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5
24. Roth, K. F. 1955, "Rational approximations to algebraic numbers", *Mathematika.*, vol. 2, pp. 1–20. corrigendum: p. 168.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Тульский государственный университет

Московский педагогический государственный университет

Получено 02.03.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 519.21

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-129-143

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В GEOGEBRA

А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский (Тула)

Аннотация

В статье дается обзор средств системы *GeoGebra*, предназначенных для выполнения различных преобразований объектов на плоскости встроенными инструментами и командами [5, 6]. Преобразования, которые могут быть реализованы как инструментами, так и командами – это зеркальное отражение объекта относительно прямой (осевая симметрия), отражение объекта относительно точки (центральная симметрия), инверсия относительно окружности, поворот вокруг точки, параллельный перенос по вектору, гомотетия относительно точки. Кроме того, командами *Shear* и *Stretch*, не имеющими инструментальных аналогов, можно совершать разнообразные сдвиги объектов вдоль и поперек направлений.

Ключевые слова: *GeoGebra*, отражение, инверсия, поворот, параллельный перенос, гомотетия, сдвиги.

Библиография: 12 названий.

THE TRANSFORMATION OF OBJECTS IN GEOGEBRA

Esayan A. R., Dobrovolsky N. N. (Tula)

Abstract

The article provides an overview of the system *GeoGebra* is designed to perform various transformations of objects on the plane using built-in tools and commands. Transformations that can be implemented with tools and commands – a mirror image of the object relative to the direct (axial symmetry), reflection of an object about a point (central symmetry), inversion relative to the circle, rotate around a point, parallel to the migration on a vector, homothety relative to the point. In addition, with commands, *Shear* and *Stretch*, not having tools analogues, you can make variety shifts of objects along and across of directions.

Keywords: *GeoGebra*, reflection, inversion, rotation, translation, homothety, shifts.

Bibliography: 12 titles.

1. Введение

Система *GeoGebra* относится к системам динамической геометрии с новыми возможностями обучения на основе визуализации объектов и создании динамических моделей, позволяющие называть ее виртуальной математической лабораторией. *GeoGebra* позволяет создавать как статические чертежи, так и сложные модели, строить графики функций, решать некоторые математические задачи как численно, так и символично. Так же систему можно использовать для компьютерных экспериментов.

В работе [3] подробно рассматриваются возможности системы *GeoGebra* для построения моделей при решении различных задач – геометрии, дискретной математики с использованием различных средств. В статье [6] более углубленно изучается вопрос использования системы для компьютерных доказательств теорем. В статье [5] рассматриваются вопросы проверки гипотез с использованием *GeoGebra*.

В данной работе рассматриваются вопросы использования инструментов системы для решения задач планиметрии.

2. Отражение относительно прямой

Инструмент “ *Отражение относительно прямой*” используется для построения объекта B , являющегося зеркальным отражением объекта A относительно некоторой прямой m . Запускается процесс создания B щелчком сначала по объекту A , а затем по прямой m . При отражении относительно прямой по каждой точке $P \in A$ формируется точка $Q \in B$ такая, что, во-первых, Q расположена на перпендикулярной прямой, опущенной из P на m , во-вторых, P и Q находятся на одинаковом расстоянии от m и, в-третьих, $Q=P$ тогда и только тогда, когда P лежит на m . Специфично работает рассматриваемый инструмент только с объектами-векторами, а именно, вектор сначала отражается относительно прямой, но затем результат параллельно переносится в начало исходного вектора. В качестве A могут выступать практически любые объекты, m может быть не только прямой, но и лучом или отрезком.

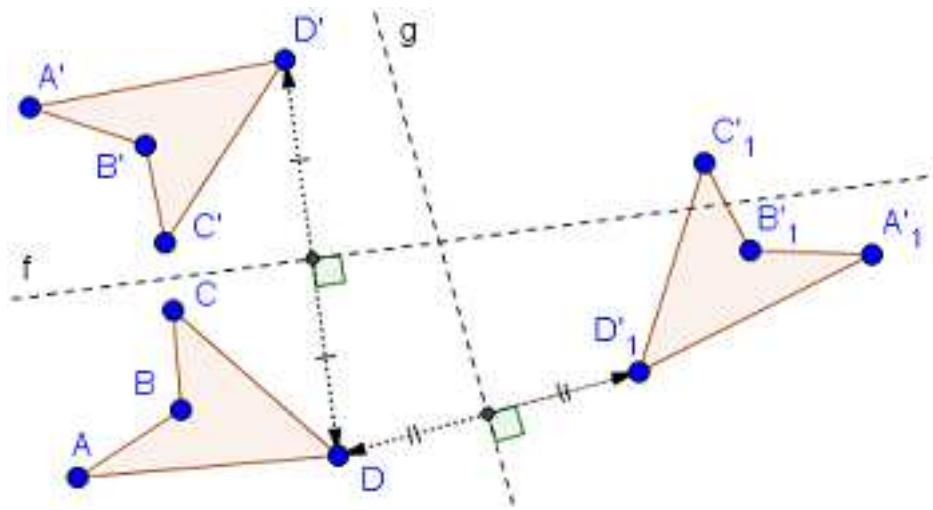


Рис. 14: Отражение четырехугольника $ABCD$ относительно прямых f и g

Рассмотренное преобразование A в B обладает симметрией, в том смысле, что оно переводит B в A . Поэтому его называют также осевой симметрией, а прямую m – осью симметрии.

На рис. 1 показано отражение четырехугольника $ABCD$ относительно прямых f и g . Отдельно выделено отражение вершины D от этих же прямых.

В общем случае отражение точки $P(x,y)$ в точку Q относительно прямой, заданной уравнением $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, аналитически описывается так:

$$P(x, y) \rightarrow Q \left(x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}, y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \right).$$

A. Reflect[obj, line]

Отражение относительно прямой

А) По команде A реализуется отражение объекта obj относительно прямой $line$.

3. Отражение относительно точки

Инструмент “ *Отражение относительно точки*” используется для построения объекта B , являющегося отражением объекта A относительно некоторой точки O . Запускается процесс создания B щелчком сначала по объекту A , а затем по точке O . В качестве A могут выступать практически любые объекты. При отражении относительно точки O по каждой точке $P \in A$ формируется точка $Q \in B$ такая, что, во-первых Q расположена на прямой PO , во-вторых, P и Q находятся на одинаковом расстоянии от O и, в-третьих, $Q=P$ тогда и только тогда, когда

$P=O$. Специфично работает рассматриваемый инструмент только с объектами-векторами, а именно, вектор сначала отражается относительно точки P , но затем результат параллельно переносится в начало исходного вектора. Таким образом A и B оказываются исходящими из одной точки, но противоположно направленными.

Рассмотренное преобразование A в B обладает симметрией, в том смысле, что оно же преобразует и B в A . Точку O называют центром симметрии. То есть фактически инструмент “ Отражение относительно точки” реализует преобразование, называемое в геометрии центральной симметрией. Заметим, что центральная симметрия является частным случаем преобразования поворота, то есть это поворот относительно центра O на 180° .

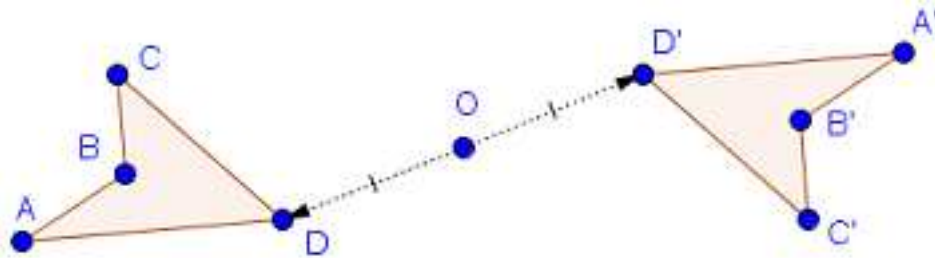


Рис. 15: Отражение четырехугольника $ABCD$ относительно прямых f и g

На рис. 2 показано отражение четырехугольника $ABCD$ относительно точки O . Отдельно выделено отражение вершины D относительно O .

В общем случае отражение точки $P(x, y)$ в точку Q относительно точки $O=(x_0, y_0)$ аналитически описывается так:

$$P(x, y) \rightarrow Q(2x_0 - x, 2y_0 - y).$$

A. Reflect[obj, point]

Отражение относительно точки

А) По команде A реализуется отражение объекта obj относительно точки $point$.

4. Отражение относительно окружности

Инструмент “ Отражение относительно окружности” используется для построения по данному объекту A так называемого инверсного ему объекта B по отношению к некоторой фиксированной окружности. При этом говорят, что объекта B получен из объекта A преобразованием инверсии относительно этой окружности. Реализуется преобразование при щелчке сначала по объекту A , а затем по окружности. Пусть C окружность с центром в точке O радиуса R . При инверсии A в B относительно C каждая точка $P \in A$ ($P \neq O$) преобразуется в точку $Q \in B$ следующим образом. Во-первых, Q лежит на прямой PO и, во-вторых, выполняется соотношение $PO \cdot QO = R^2$. При $P=O$ считается, что Q – бесконечно удаленная точка. Точку O называют полюсом или центром инверсии. Если точка Q инверсная для P , то P инверсная для Q . Точки, инверсные друг другу называют взаимно обратными точками.

Преобразование инверсии обладает такими свойствами:

- внутренние точки для инверсной окружности при инверсии переходят во внешние точки для этой окружности и наоборот;
- прямая, проходящая через полюс, при преобразовании инверсии переходит сама в себя;

- прямая, не проходящая через полюс, при преобразовании инверсии переходит в окружность, проходящую через полюс;
- окружность, проходящая через полюс, при преобразовании инверсии переходит в прямую, не проходящую через полюс;
- окружность, не проходящая через полюс, при преобразовании инверсии переходит в окружность, не проходящую через полюс;
- инверсия является конформным отображением, то есть сохраняет углы между кривыми.

Покажем, как по точке P без использования инструмента “” построить инверсную ей точку Q относительно заданной окружности с центром в точке O и радиуса R . Рассмотрим возможные случаи.

1) $PO > R$, то есть точка P находится вне инверсной окружности. Проведем отрезок PO и из P касательную к окружности (см. рис. 3). Из точки касания D опустим перпендикуляр на OP и пусть Q – точка пересечения этого перпендикуляра и OP . Тогда Q и является инверсной для P точкой, что вытекает из следующей цепочки отношений:

$$\triangle OQD \sim \triangle ODP \Rightarrow \frac{OQ}{R} = \frac{R}{OP} \Rightarrow OP \cdot OQ = R^2.$$

2) $PO < R$, то есть P находится внутри инверсной окружности. Через точки O и P проведем прямую и из точки P восстановим к ней перпендикуляр. В точке D – пересечения этого перпендикуляра с инверсной окружностью проведем к ней касательную. Тогда точка Q – пересечения касательной с продолжением OP и является инверсной для P точкой.

3) $PO = R$, то есть P находится на инверсной окружности. Тогда $Q = P$.

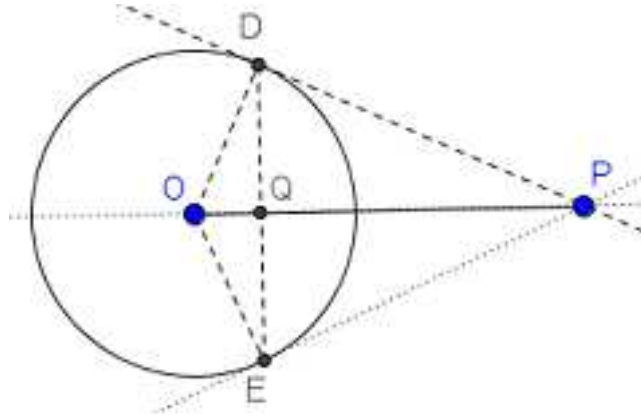


Рис. 16: Построение инверсной для P точки Q

Здесь демонстрируется пример формирования инверсий некоторых объектов относительно окружностей. Все инверсии построены инструментом “ Отражение относительно окружности”. На рис. 4 кардиоиды сформированы как инверсия параболы, созданной по фокусу F и директрисе d . На рис. 5 приведены примеры инверсии квадрата. На рис. 6 представлена инверсия графика функции $\sin(x)$.

В общем случае инверсия относительно окружности с центром в точке $O = (x_0, y_0)$ и радиусом R аналитически описывается так:

$$P(x, y) \rightarrow Q \left(x_0 + \frac{R^2(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, y_0 + \frac{R^2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right).$$

`A. Reflect[obj, circle]`

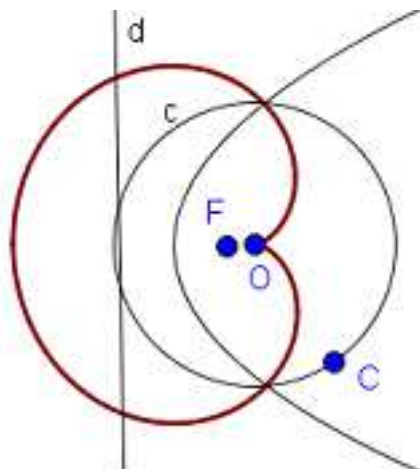


Рис. 17: Кардиоиды – инверсия параболы относительно окружности

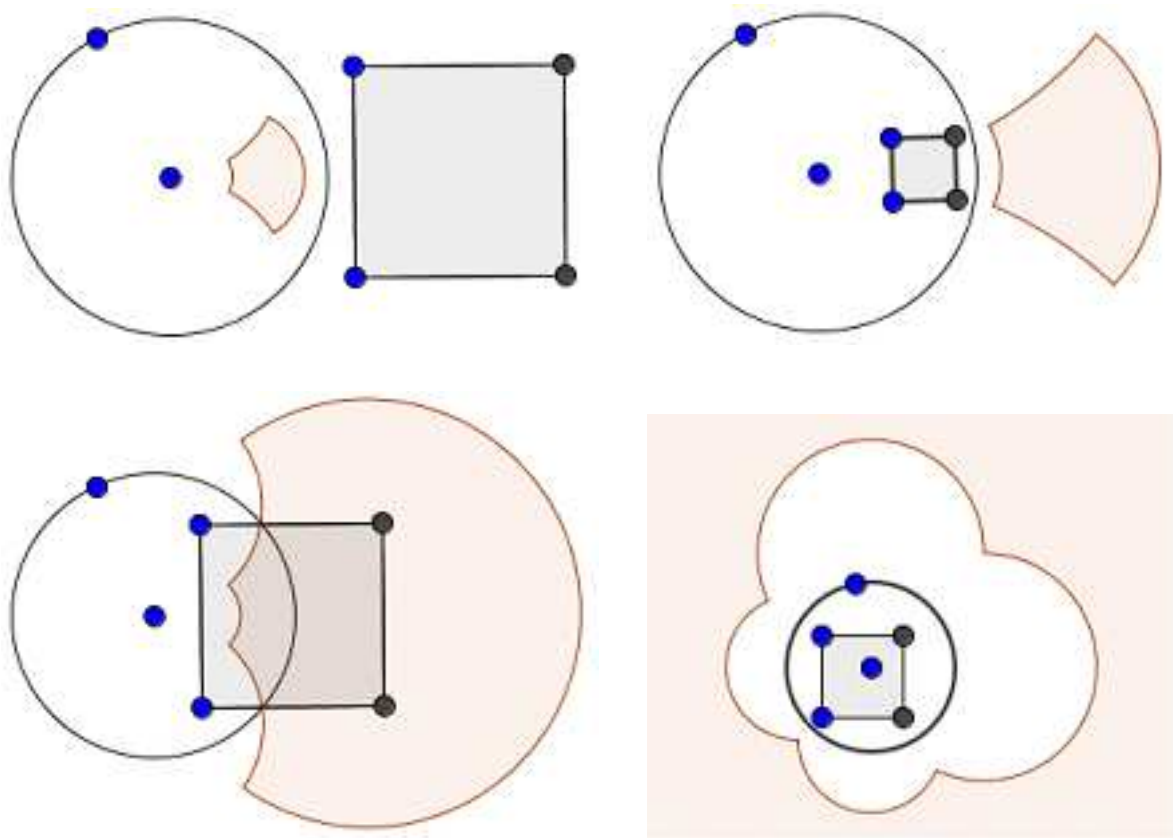


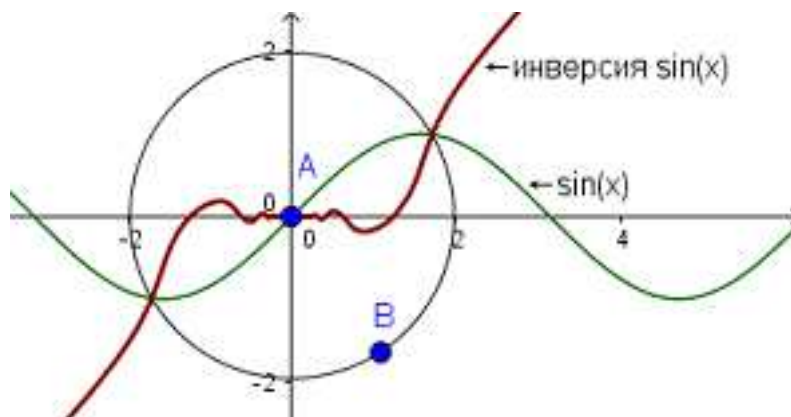
Рис. 18: Примеры инверсии квадрата относительно заданной окружности

Инверсия относительно окружности

А) По команде *A* реализуется инверсия объекта *obj* относительно окружности *circle*.

5. Поворот вокруг точки

Инструмент “ Поворот вокруг точки” используется для построения копии объекта, повернутого вокруг некоторой точки на заданный угол. При этом указанные точку и угол

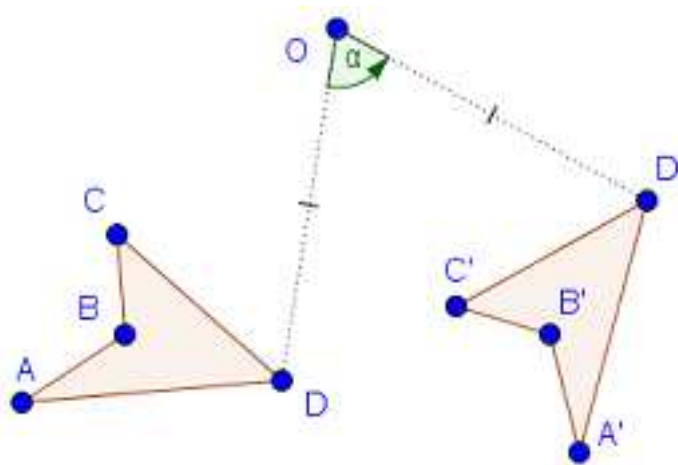
Рис. 19: Инверсия графика функции $\sin(x)$ относительно окружности

называют соответственно центром поворота и углом поворота. При выполнении операции сначала надо щелкнуть левой кнопкой мыши по объекту, затем по центру поворота, и, наконец, ввести в поле ввода появившейся панели требуемый угол поворота. По умолчанию поворот реализуется против часовой стрелки, хотя прямо при задании угла радиокнопкой можно переключиться на поворот по часовой стрелке. При угле поворота, равном 180° , преобразование поворота превращается в центральную симметрию.

На рис. 7 показан поворот четырехугольника $ABCD$ относительно точки O на угол α . Отдельно выделен поворот вершины D .

В общем случае поворот точки $P(x, y)$ вокруг точки $O=(x_0, y_0)$ на угол α аналитически описывается так:

$$P(x, y) \rightarrow Q((x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha + x_0, (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha + y_0).$$

Рис. 20: Поворот четырехугольника $ABCD$ относительно точки O на угол α

A. Rotate[obj, α] B. Rotate[obj, α , O]

Поворот (вращение) объекта

А) По команде A реализуется поворот объекта obj относительно начала координат на угол α .

В) По команде B реализуется поворот объекта obj относительно точки O на угол α .

6. Параллельный перенос по вектору

Инструмент “ Параллельный перенос по вектору” используется для построения копии объекта путем его параллельного переноса на данный вектор, то есть на заданную величину по заданному направлению. При выполнении операции сначала надо щелкнуть левой кнопкой мыши по объекту, а затем по вектору, на которой будет осуществлен параллельный перенос. Возможен и другой вариант выполнения операции – как и ранее сначала щелкнуть левой кнопкой мыши по объекту, затем по точке или позиции и, наконец, снова по точке или позиции. При щелчках по позициям на их месте появляются точки. Между двумя точками появляется новый вектор с началом в первой точке и концом во второй точке. Этот вектор и используется для параллельного переноса исходного объекта.

На рис. 8 показан перенос четырехугольника $ABCD$ по векторам $\vec{IJ}$ и $\vec{KL}$. Отдельно выделен перенос по этим векторам вершины D .

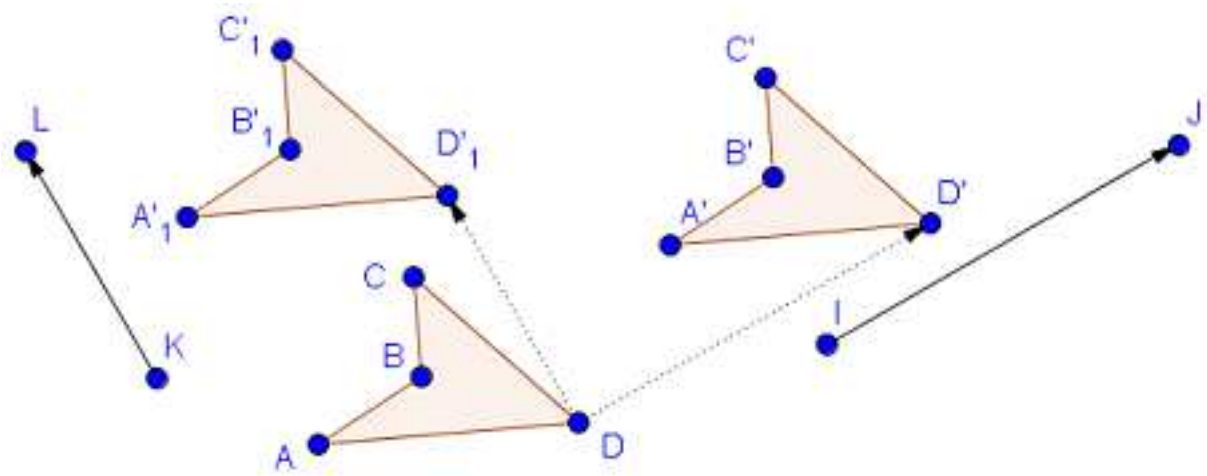


Рис. 21: Параллельный перенос четырехугольника $ABCD$ по векторам $\vec{IJ}$ и $\vec{KL}$

В общем случае параллельный перенос точки $P(x, y)$ в точку Q по заданному вектору v аналитически описывается так: $\vec{PQ} = v$. Если у вектора v начальная и конечная точки – $I(x_1, y_1)$ и $J(x_2, y_2)$, то это означает, что:

$$P(x, y) \rightarrow Q(x + x_2 - x_1, y + y_2 - y_1).$$

- | |
|--|
| A. <i>Translate</i> [<i>obj</i> , <i>vec</i>]
B. <i>Translate</i> [<i>vec</i> , <i>P</i>] |
|--|

Параллельный перенос по вектору

A) По команде A реализуется параллельный перенос объекта *obj* по вектору *vec*.

B) По команде B реализуется параллельный перенос вектора *vec* в точку *P*, то есть начало *vec* совмещается с *P*.

7. Гомотетия относительно точки

Инструмент “ Гомотетия относительно точки” используется для построения по некоторому объекту A подобного ему объекта B с заданным коэффициентом подобия с размещением его в определенной позиции относительно указанной точки (центра) F . При выполнении операции сначала надо щелкнуть левой кнопкой мыши по объекту, а затем по точке или позиции, и, наконец, ввести в поле ввода появившейся панели коэффициент подобия. Если щелчок

производился по позиции, то на этом месте появляется точка. Если O – начало координат, то гомотетия с центром F и коэффициентом подобия k преобразует точки $P \in A$ в точки $Q \in B$ так, что $\overrightarrow{OQ} = k \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}$ ($k \neq 0$). Заметим, что $|k|$ влияет только на размер полученного объекта; знак k , позиции центра и исходного объекта – на позицию полученного объекта. Гомотетия с $k=-1$ является центральной симметрией. На рис. 9 приведен пример гомотетии с коэффициентом 2 и центром F .

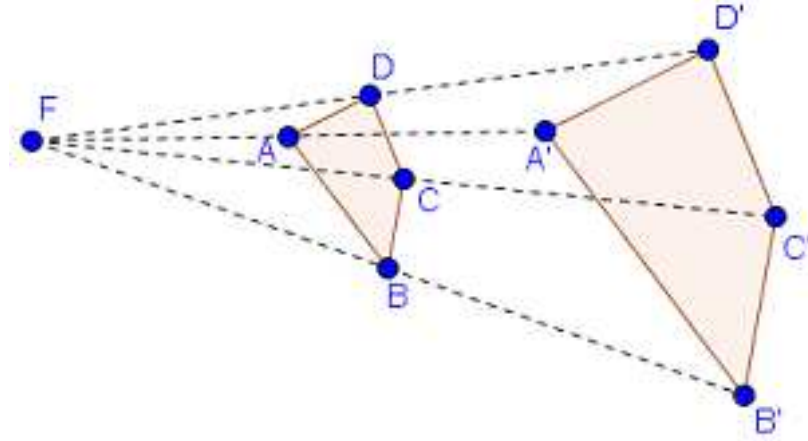


Рис. 22: Гомотетия четырехугольника с коэффициентом 2 и центром F

В общем случае гомотетия с центром в точке $F(x_0, y_0)$ и коэффициентом подобия k переводит точку $P(x, y)$ в точку Q так:

$$P(x, y) \rightarrow Q(k \cdot x - x_0, k \cdot y - y_0).$$

A. <i>Dilate</i> [<i>obj</i> , <i>k</i>] B. <i>Dilate</i> [<i>obj</i> , <i>k</i> , <i>P</i>]

Гомотетия относительно точки

А) По команде A реализуется гомотетия объекта *obj* с коэффициентом подобия k относительно начала координат.

В) По команде B реализуется гомотетия объекта *obj* с коэффициентом подобия k относительно точки P .

8. Сдвиги вдоль и поперек направления

Командами *Shear* и *Stretch* можно совершать разнообразные сдвиги объектов вдоль и поперек направлений. Аналоги соответствующих встроенных инструментов для этих команд отсутствуют.

A. <i>Shear</i> [<i>obj</i> , <i>line</i> , <i>k</i>] B. <i>Stretch</i> [<i>obj</i> , <i>line</i> , <i>k</i>] C. <i>Stretch</i> [<i>obj</i> , <i>vec</i>]

Сдвиги вдоль и поперек направления

Здесь рассматриваются команды сдвигов объектов вдоль линии, поперек линии и по заданному вектору.

А) Команда A реализует преобразование сдвига (скоса) объекта *obj* вдоль прямой *line* с коэффициентом k ($k \neq 0$). Знак k задает направление перемещения. Выполняется данная операция следующим образом. Все точки $P \in obj$, расположенные на прямой *line*, остаются без изменений. Каждая точка $P \in obj$, не лежащая на прямой *line*, сдвигается параллельно *line* на

величину пропорциональную расстоянию от P до $line$ с коэффициентом пропорциональности k . Сдвиги в разных полуплоскостях от $line$ происходят в противоположных направлениях. Фактически сдвигается копия объекта obj , а сам объект остается без изменений. Отметим, что при сдвигах типа *shear* площади объектов не изменяются.

В общем случае понять, как вдоль прямой m с коэффициентом k выполняется сдвиг некоторой точки $P(x_0, y_0)$ в точку $Q(x_1, y_1)$, можно из рис. 11. На нем демонстрируется не только преобразование *shear* конкретной точки $P \rightarrow Q$, но и для двух возможных вариантов расположения прямой m показаны все случаи направлений перемещения точки при различных знаках k .

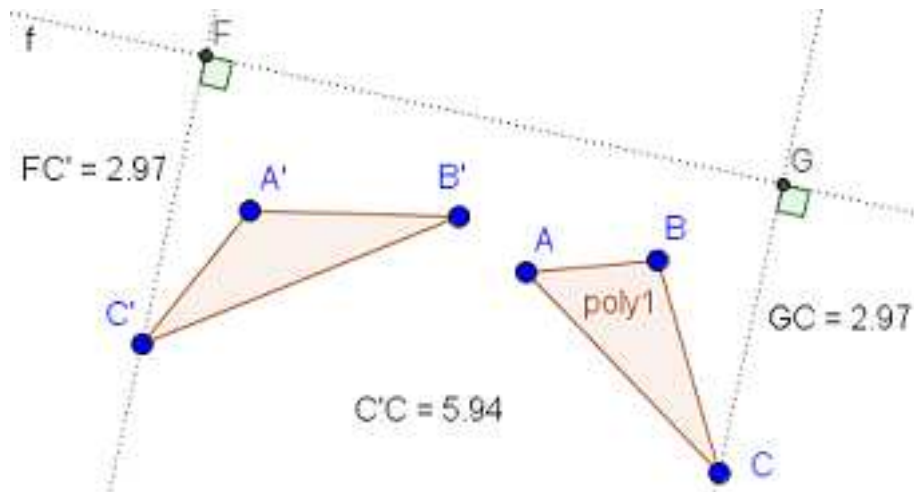


Рис. 23: Сдвиг $\triangle ABC$ вдоль линии f с коэффициентом 2

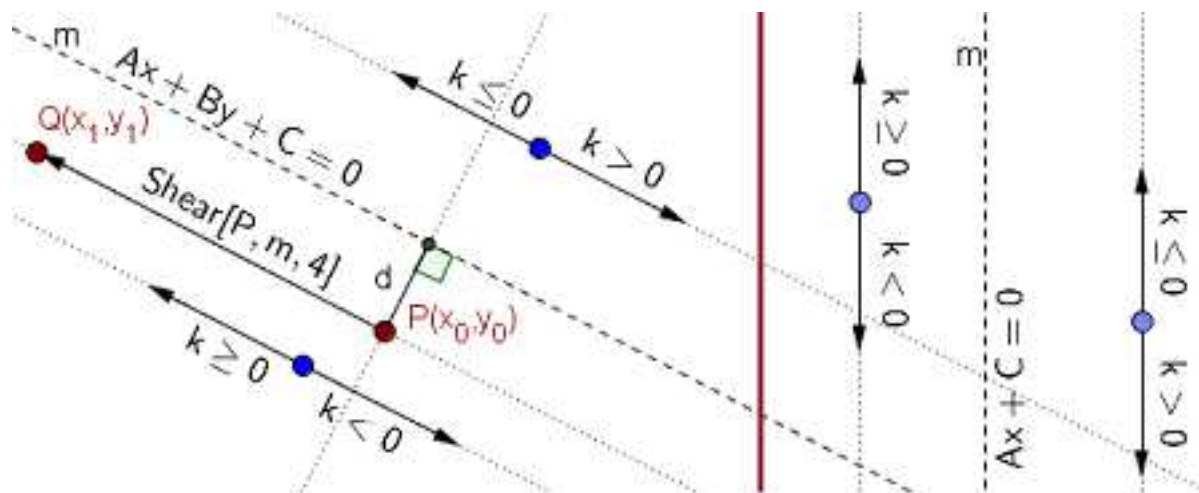


Рис. 24: Сдвиг конкретной точки $P(x_0, y_0) \rightarrow Q(x_1, y_1)$ вдоль прямой m и влияние знака k на направление сдвига

Покажем, что при сдвиге $P(x_0, y_0) \rightarrow Q(x_1, y_1)$ вдоль прямой m ($Ax + By + C = 0$) с коэффициентом k координаты x_1 и y_1 точки Q можно определять по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t \cdot B \\ y_1 = y_0 - t \cdot A \end{cases}, \quad 345 \quad t = \frac{k \cdot (Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}. \quad (1)$$

Рассмотрим общий случай, когда $B \neq 0$, то есть m не перпендикулярна оси абсцисс. Из того,

что длина отрезка PQ равна $|k| \cdot d$ и точка Q лежит на прямой, параллельной m , получаем:

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = k^2 d^2, \\ y_1 - y_0 = -\frac{A}{B}(x_1 - x_0). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно x_1 и y_1 получим

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \pm t \cdot B \\ y_1 = y_0 \mp t \cdot A \end{cases}, \quad 345 \quad t = \frac{k \cdot (Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}, \quad (2)$$

что соответствует заданию двух возможных направлений на прямой m и, следовательно, двум возможным вариантам реализации *Shear*. В *GeoGebra* осуществлена реализация (1).

Остается рассмотреть случай $B=0$. Поскольку при $B=0$ прямая m перпендикулярна оси абсцисс, то:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \pm kd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \pm k(x_0 - (-\frac{C}{A})) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \pm k(x_0 + \frac{C}{A}) \end{cases}.$$

Таким образом снова получены соотношения (2), но при $B=0$. Как и при $B \neq 0$ в данном случае из двух возможностей вычисления y_1 в *Geogebra* реализован вариант со знаком “-” после y_0 и, тем самым, формулы (1) установлены.

В) Команда B реализует преобразование сдвига (*stretch*) объекта obj поперек прямой $line$ с коэффициентом k ($k \neq 0$). Знак k задает направление перемещения, при этом объекты с k и $-k$ являются зеркальным отражением друг относительно $line$. Выполняется данная операция следующим образом. Все точки $P \in obj$, расположенные на прямой $line$, остаются без изменений. Каждая точка $P \in obj$, не лежащая на прямой $line$, сдвигается перпендикулярно $line$ на величину пропорциональную расстоянию от P до $line$ с коэффициентом пропорциональности k . Сдвиги в разных полуплоскостях от $line$ происходят в противоположных направлениях. Фактически сдвигается копия объекта obj , а сам объект остается без изменений.

На рис. 12 показаны сдвиги $\triangle ABC$ (*poly1*) и $\triangle FIH$ (*poly2*) поперек линии f с коэффициентом 2, осуществленные соответственно командами $Stretch[poly1, f, 2]$ и $Stretch[poly2, f, 2]$. На изображении можно видеть пояснения к тому, как осуществлен сдвиг конкретной точки C ($C \rightarrow Ct$).

Покажем, что при сдвиге $P(x_0, y_0) \rightarrow Q(x_1, y_1)$ поперек прямой m ($Ax + By + C = 0$) с коэффициентом k координаты x_1 и y_1 точки Q можно определять по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t \cdot A \\ y_1 = y_0 + t \cdot B \end{cases}, \quad 345 \quad t = \frac{(k-1) \cdot (Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}. \quad (3)$$

Рассмотрим общий случай, когда $A \neq 0$, то есть m не параллельна оси абсцисс. Из того, что длина отрезка PQ равна $|k-1| \cdot d$ и точка Q лежит на прямой, перпендикулярной m , получаем:

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = (k-1)^2 d^2, \\ y_1 - y_0 = \frac{B}{A}(x_1 - x_0). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно x_1 и y_1 получим

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \pm t \cdot A \\ y_1 = y_0 \pm t \cdot B \end{cases}, \quad 345 \quad t = \frac{(k-1) \cdot (Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}, \quad (4)$$

что соответствует заданию двух возможных направлений на прямой m и, следовательно, двум возможным вариантам реализации *Stretch*. В *GeoGebra* осуществлена реализация (3).

Остается рассмотреть случай $A=0$. Поскольку при $A=0$ прямая m параллельна оси абсцисс, то:

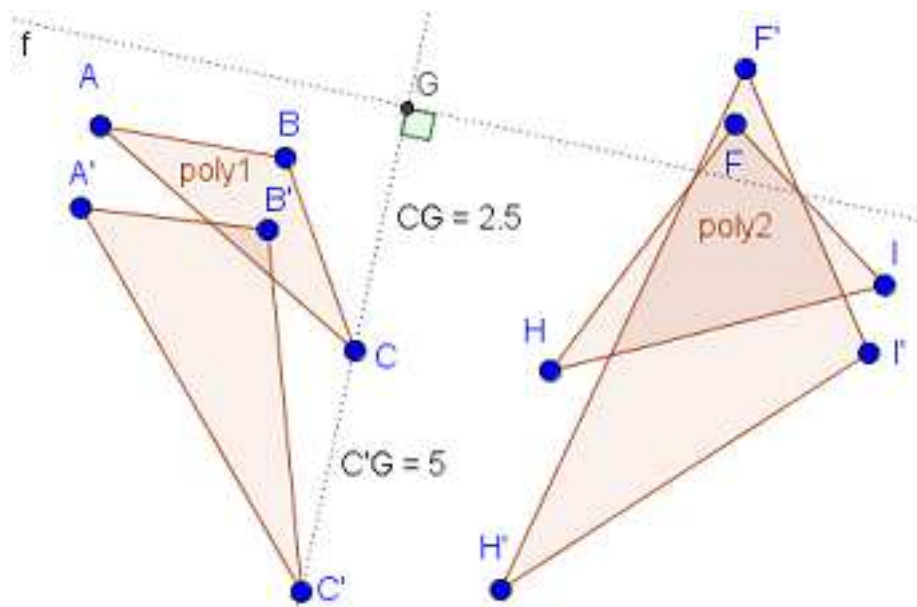


Рис. 25: Сдвиг $\triangle ABC$ и $\triangle FIH$ перпендикулярно линии f с коэффициентом 2

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + (k-1)d \\ y_1 = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 \pm (k-1) \left(x_0 + \frac{C}{B}\right) \\ y_1 = y_0 \end{cases}.$$

Таким образом снова получены соотношения (3), но при $A=0$. Как и при $A \neq 0$ в данном случае из двух возможностей вычисления x_1 в *GeoGebra* реализован вариант со знаком “+” после x_0 и, тем самым, формулы (3) установлены.

Для большей убедительности проделанных выкладок, создадим динамическую модель для экспериментальной проверки справедливости формул (3). Сделать это можно следующей последовательностью действий:

1. инструментом “ Прямая” проведем прямую через две точки и через контекстное меню изменим ее имя на m , а имена точек – на R и S соответственно. Пока будем считать, что прямая m не перпендикулярна оси абсцисс;
2. через строку ввода определим коэффициенты прямой m , введя три соотношения $A=x[m]$, $B=y[m]$, $C=z[m]$. Определим также переменную $k=0.4$ и, включив на панели “Объекты” соответствующую радиокнопку, превратим ее в бегунок;
3. инструментом “ Точка” сформируем точку D вне m . Переименуем D на P и через панель “Настройки” зададим для нее заголовок $P(x_0, y_0)$ ($P(x_0, y_0)$), а также установим вывод заголовка вместо P ;
4. инструментом “ Перпендикулярная прямая” проведем прямую, перпендикулярную m и проходящую через точку P ;
5. инструментом “ Пересечение” сформируем точку D пересечения m и проведенного перпендикуляра;
6. через строку ввода вычислим вспомогательную переменную t и по ней точку Q :

$$t = (k-1) * (A * x[P] + B * y[P] + C) / (A^2 + B^2);$$

$$Q = (x[P] + t * A, y[P] + t * B).$$

Через панель “*Настройки*” для точки Q сформируем заголовок $Q(x_1, y_1)$ ($Q(x_1, y_1)$) и установим его вывод вместо имени Q ;

1. инструментом “ Текст” в *LaTeX*-режиме создадим проверочную надпись, введя выражение:

$$t = \frac{(k-1)(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2} = \frac{(k-1)(A \cdot x(P) + B \cdot y(P) + C)}{A^2 + B^2},$$

$$x_1 = x_0 + t \cdot A \rightarrow x[Q] = x[P] + t \cdot A,$$

$$y_1 = y_0 + t \cdot B \rightarrow y[Q] = y[P] + t \cdot B.$$

Первая строка проверочной надписи является информационной и демонстрирует, не только значение t , но и по какой формуле проводятся вычисления. Правые части двух следующих строк вычисляются заново при изменении значений бегунка, перемещении свободных точек R и S по полотну, а также точки P по прямой, перпендикулярной m . Однако во всех ситуациях мы получаем одно и то же значения *true*, что и является экспериментальным подтверждением справедливости формул (3).

Построенная модель для поведения экспериментов, представлена на рис. 61. Несмотря на то, что создавалась модель для случая, когда m не перпендикулярна оси абсцисс, ее можно использовать и для этого случая. На рис. 14 показан сдвиг по вектору u $\triangle CDE$ (*poly1*).

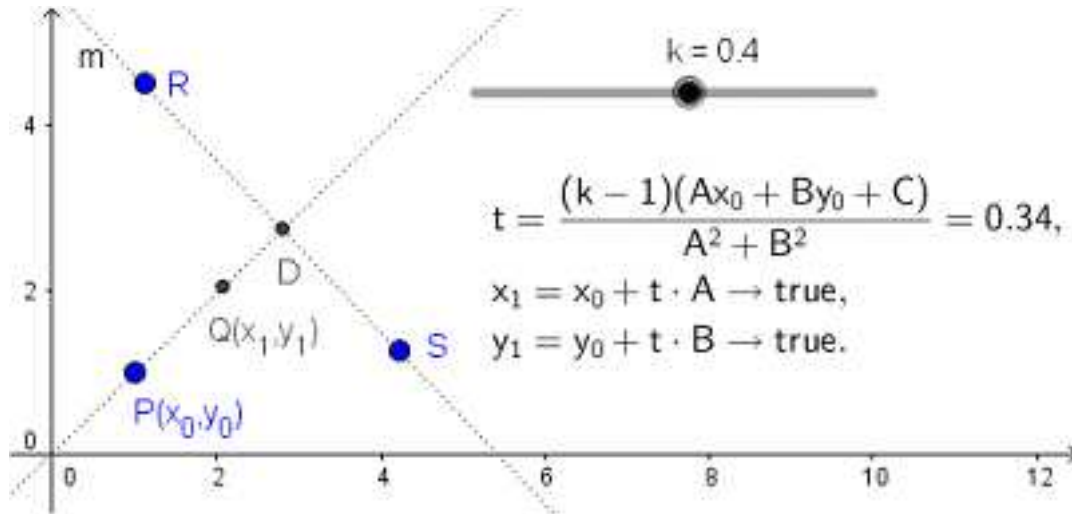
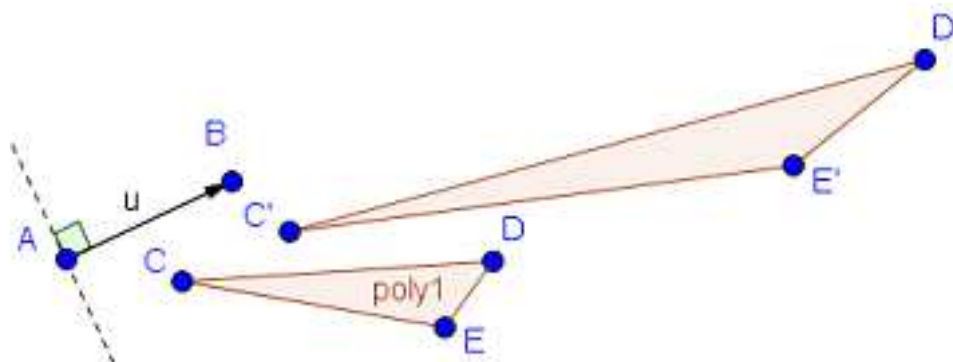
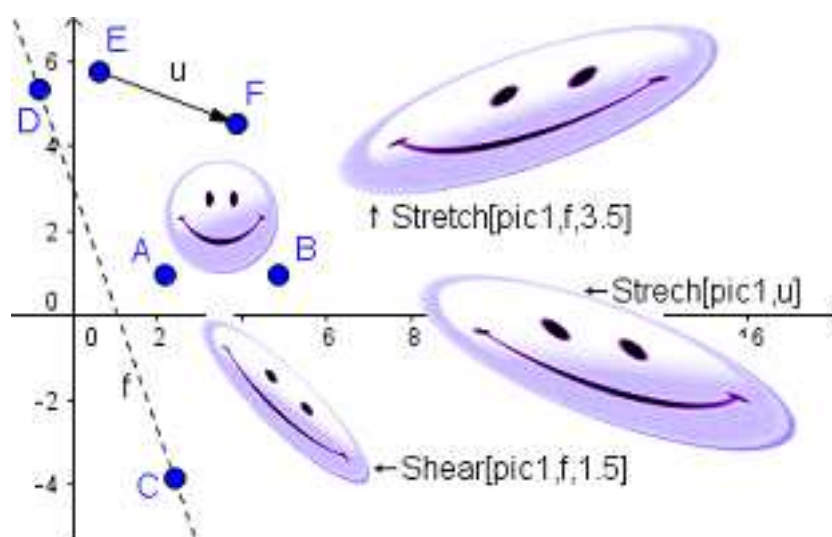


Рис. 26: Динамическая модель для экспериментальной проверки формул (3)

C) Команда C реализует преобразование сдвига (*stretch*) объекта obj параллельно ненулевому вектору vec . Это означает следующее. Сдвиг происходит с коэффициентом k , равным длине вектора vec , поперек прямой f , перпендикулярной вектору vec и проходящей через его начало. То есть, команда C выполняется точно так же, как и команда $Stretch[obj, f, Length[vec]]$.

На рис. 15 показаны сдвиги изображения смайлика с именем *pic1*, осуществленные командами: $Shear[pic1, f, 1.5]$ – поперек линии f с коэффициентом 3.5, $Stretch[pic1, f, 3.5]$ – вдоль линии f с коэффициентом 3.5 и $Stretch[pic1, u]$ – параллельно вектору u . В последнем случае команды $Stretch[pic1, u]$ и $Stretch[pic1, f, Length[u]]$ равносильны, где f – прямая, перпендикулярная вектору u и проходящая через его начало. Предварительно изображение смайлика было загружено на полотно из заранее заготовленного файла *smiley.png* с помощью инструмента “ Изображение”.

Рис. 27: Сдвиг $\triangle CDE$ параллельно вектору u Рис. 28: Сдвиг изображения поперек линии f с коэффициентом 3.5 (*Stretch*), вдоль линии f с коэффициентом 1.5 (*Shear*) и по вектору u (*Stretch*)

9. Заключение

Обсуждаемые в статье встроенные средства системы *GeoGebra*, связанные с выполнением различных преобразований объектов на плоскости, легко осваиваются, просты в использовании и могут служить хорошим инструментарием при обучении решению разнообразных геометрических задач и в школе, и в вузе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безумова О. Л. Обучение геометрии с использованием возможностей *GeoGebra* / О. Л. Безумова, Р. П. Овчинникова и др. Архангельск, Изд. ООО «Кира», 2011, -140 с.
2. Есаян А. Р. Создание новых инструментов в *GeoGebra* // Проблемы модернизации современного образования, Реценз. кол. монография, Калуга, 2016. С. 29–59.
3. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский, Е. А. Седова, А. В. Якушин. Динамическая математическая образовательная среда *GeoGebra*. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. — Ч. 1. — 417 с.

4. А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва Построение динамических моделей для решения некоторых задач дискретной математики в GeoGebra //
5. А. Р. Есаян, А. В. Якушин Экспериментальное обоснование гипотез в GeoGebra // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 1. С. 92–108.
6. А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский Компьютерное доказательство гипотезы о центроидах // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 1. С. 73–91.
7. Заславский А. А. Геометрические преобразования. М.: МЦМНО, 2004. -86 с.
8. Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, главная ред. физ.- мат. лит., 1966. - 648 с.
9. Коксетер Г. С. М., Новые встречи с геометрией / Коксетер Г.С.М, Крейцер С.: Библиотека математического кружка, 1978. -224 с.
10. Ларин С. В. Компьютерная анимация в среде *GeoGebra* на уроках математики, Легион, –Ростов-на-Дону, 2015. -192 с.
11. GeoGebra Manual. The official manual of GeoGebra. PDF generated at: Tue, 28 Apr 2015 19:24:47 CEST. -325 p.
12. Hohenwarter M., GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht (English: GeoGebra — educational material and applications for mathematics teaching). PhD thesis, University of Salzburg. 2006. — 334 p. http://www.geogebra.org/publications/mhohen_diss.pdf

REFERENCES

1. Bezumova O. L. Obuchenie geometrii s ispol'zovaniem vozmozhnostej GeoGebra / O. L. Bezumova, R. P. Ovchinnikova i dr. Arhangel'sk, Izd. ООО "Kira", 2011, 140 с.
2. Esayan, A. R., 2016. "Creating new tools in GeoGebra" // Problems of modernization of modern education, The reviewed collective monograph, Kaluga, P. 29–59.
3. Zaslavskij A. A. Geometricheskie preobrazovaniya. M.: MCMNO, 2004. -86 s.
4. Kokseter G. S. M. Vvedenie v geometriyu. M.: Nauka, glavnaya red. fiz.- mat. lit., 1966. -648 s.
5. Kokseter G. S. M., Noveye vstrechi s geometriey / Kokseter G.S.M, Krejcer S.: Biblioteka matematicheskogo kruzhska, 1978. -224 s.
6. Larin S. V. Komp'yuternaya animaciya v srede GeoGebra na urokah matematiki, Legion, –Rostov-na-Donu, 2015. -192 s.
7. GeoGebra Manual. The official manual of GeoGebra. PDF generated at: Tue, 28 Apr 2015 19:24:47 CEST. -325 p.
8. Hohenwarter M., GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht (English: GeoGebra — educational material and applications for mathematics teaching). PhD thesis, University of Salzburg. 2006. — 334 p. http://www.geogebra.org/publications/mhohen_diss.pdf

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

Поступило 25.05.2017

Получено 11.01.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 514.76

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-144-153

**ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ПОЧТИ ЭРМИТОВОЙ СТРУКТУРЫ
ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ**

Л. А. Игнаточкина (г. Москва)

Аннотация

Введено понятие индуцированного преобразования почти эрмитовой структуры линейного расширения почти контактного метрического многообразия. Получены явные формулы этого преобразования почти эрмитовой структуры. Исследована инвариантность четырех основных соотношений на структурный и виртуальный тензоры почти эрмитова многообразия, которые используются при классификации Грея–Хервеллы почти эрмитовых многообразий. Было выяснено, что одно из этих соотношений является инвариантным относительно индуцированного преобразования почти эрмитовой структуры линейного расширения. Для остальных трех условий были найдены требования на функцию, задающую индуцированное преобразование, при выполнении которых названные условия оказались инвариантными относительно индуцированного преобразования почти эрмитовой структуры линейного расширения гладкого многообразия с почти контактной метрической структурой. С использованием этих результатов было выяснено, какие из шестнадцати классов почти эрмитовых многообразий являются инвариантными относительно индуцированных преобразований линейных расширений. Для остальных классов классификации Грея–Хервеллы были получены условия на функцию, задающую индуцированное преобразование, при выполнении которых исходная почти эрмитова структура линейного расширения и преобразованная почти эрмитова структура принадлежат одному и тому же классу из классификации почти эрмитовых многообразий.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, почти контактная метрическая структура, линейное расширение, конформное преобразование.

Библиография: 15 названий.

**INDUCED TRANSFORMATIONS
FOR ALMOST HERMITIAN STRUCTURE
OF LINEAR EXTENSIONS**

L. A. Ignatochkina (Moscow)

Abstract

Induced transformation of almost Hermitian structure for linear extension of the manifold with almost contact metric structure was considered in this paper. We got formulas for induced transformation of almost Hermitian structure for linear extension of the smooth manifold with almost contact metric structure. There exist four equations for the Gray–Hervella’s classification of the smooth manifolds with almost Hermitian structures. In this paper we studied invariance of these equations. One equation is invariant. The conditions of invariance for three other equations were got in this paper. These equations defined sixteen classes of the smooth manifolds with almost Hermitian structure. In this paper we studied invariance for these classes. One class

is invariant. Six classes are invariant if and only if exterior differential of function of induced transformation is contained in the second fundamental distribution. Other classes are invariant if and only if the function of induced transformation is constant.

Keywords: almost Hermitian structure, almost contact metric structure, conformal change.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Линейные расширения гладких многообразий (то есть многообразие вида $M \times \mathbb{R}$, где M — гладкое многообразие, а $\mathbb{R}$ — вещественная прямая) рассматривались в работах [1], [2], [3]. В работах [1], [2] была построена почти эрмитова структура на многообразии $M \times \mathbb{R}$, причем многообразие M отождествляется с многообразием $M \times 0$, являющемся омбилической гиперповерхностью в $M \times \mathbb{R}$. Соотношение между классами почти контактных метрических структур на M и соответствующими классами почти эрмитовых структур на $M \times \mathbb{R}$ были подробно изучены в работах [4], [5].

Конформное преобразование метрики гладкого многообразия, то есть переход от метрики g к метрике $e^{2f}g$, где f — гладкая функция на многообразии, при наличии на этом многообразии других фиксированных тензорных полей определяет конформное преобразование для всей их совокупности. Например, под конформным преобразованием почти эрмитовой структуры понимается переход от пары (J, g) к паре $(J, e^{2f}g)$, а под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры понимается переход от структуры (Φ, ξ, η, g) к структуре $(\Phi, e^{-f}\xi, e^f\eta, e^{2f}g)$. Такие преобразования структуры широко изучались. В качестве примера приведем работы [6], [7], [8], [9].

Если даны два, связанные между собой, многообразия с дополнительными тензорными структурами, то преобразование структуры на первом многообразии позволяет индуцировать преобразование структуры второго многообразия. Например, в работе [10] рассматривались почти эрмитова структура на базе главного T^1 -расслоения, ее конформное преобразование и индуцированное преобразование почти контактной метрической структуры на тотальном пространстве расслоения.

Зададим на почти контактном метрическом многообразии M конформное преобразование его структуры. Тогда на линейном расширении $M \times \mathbb{R}$ получим некоторое преобразование его почти эрмитовой структуры. Оно задается при помощи отображения присоединенных G -структур, построенного в работах [11], [12]. Тогда первой задачей становится получение инвариантного вида введенного преобразования и второй задачей — исследование инвариантности 16 классов почти эрмитовых многообразий относительно введенного преобразования.

2. Почти эрмитовы и почти контактные метрические структуры на многообразиях

Пусть M — связное гладкое $2n$ -мерное многообразие. Почти эрмитовой структурой на нем называется пара тензорных полей (J, g) , где J — антиинволютивный эндоморфизм, g — риманова метрика, согласованная с J , то есть $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для любых векторных полей X, Y на M . Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется почти эрмитовым многообразием.

Напомним [13], что в комплексификации касательного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, $m \in M$, строится базис $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, $a = 1, \dots, n$, $\hat{a} = a + n$, в котором матрицы тензоров

J_m и g_m имеют вид

$$(J_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

где I_n — единичная матрица порядка n , $i, j = 1, \dots, 2n$. Такой базис и соответствующий ему репер $(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$ называются *адаптированными* почти эрмитовой структуре (J, g) многообразия. Коротко они называются A -базисом и A -репером. На пространстве расслоения A -реперов тензорные поля J и g задаются системами функций вида (1). Эти системы функций называются *компонентами* тензорных полей J и g на пространстве расслоения A -реперов. Ковариантный дифференциал тензорного поля J в римановой связности ∇ метрики g определяет два тензорных поля

$$B(X, Y) = \frac{1}{4}(\nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JY}(J)X);$$

$$C(X, Y) = -\frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)).$$

Эти тензорные поля называются *виртуальным* и *структурным тензором*, соответственно. Ненулевые компоненты этих тензорных полей на пространстве расслоения A -реперов обозначаются

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}J_{b,c}^a; \quad B_{ab}{}^c = \frac{i}{2}J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}};$$

$$B^{abc} = \frac{i}{2}J_{[\hat{b},\hat{c}]}^a; \quad B_{abc} = -\frac{i}{2}J_{[b,c]}^{\hat{a}},$$

где i — мнимая единица, квадратные скобки обозначают альтернирование по заключенным в них индексам. Компоненты виртуального и структурного тензора попарно комплексно сопряжены

$$\bar{B}^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c; \quad \bar{B}^{abc} = B_{abc}.$$

Согласно [14] пространство W тензорных полей α типа $(3,0)$, обладающих свойствами

$$\alpha(X, Y, Z) = -\alpha(X, Z, Y) = -\alpha(X, JY, JZ),$$

распадается в прямую сумму четырех неприводимых подпространств относительно группы $U(n)$:

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4. \quad (2)$$

Ковариантный дифференциал келеровой формы $F(X, Y) = g(JX, Y)$ почти эрмитова многообразия является тензорным полем указанного вида. В зависимости от того, какому из получающихся 16 подпространств он принадлежит, выделяют 16 классов почти эрмитовых многообразий. Критерии этих классов имеют вид [15]

$$\begin{aligned} \{0\} : B^{abc} = 0, B^{ab}{}_c = 0; W_1 : B^{[abc]} = B^{abc}, B^{ab}{}_c = 0; W_2 : B^{[abc]} = 0, B^{ab}{}_c = 0; \\ W_3 : B^{abc} = 0, B^{ab}{}_b = 0; W_4 : B^{abc} = 0, B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]}; \quad W_1 \oplus W_2 : B^{ab}{}_c = 0; \\ W_1 \oplus W_3 : B^{[abc]} = B^{abc}, B^{ab}{}_b = 0; W_1 \oplus W_4 : B^{[abc]} = B^{abc}, B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}; \\ W_2 \oplus W_3 : B^{[abc]} = 0, B^{ab}{}_b = 0; W_2 \oplus W_4 : B^{[abc]} = 0, B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}; \\ W_3 \oplus W_4 : B^{abc} = 0; W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 : B^{ab}{}_b = 0; W_1 \oplus W_2 \oplus W_4 : B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}; \\ W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 : B^{[abc]} = B^{abc}; W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 : B^{[abc]} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\{\alpha_a, \alpha^a \equiv \alpha_{\hat{a}}\}$ — компоненты формы Ли

$$\omega = \frac{-1}{n-1} \delta F \circ J \quad (4)$$

на пространстве расслоения A -реперов.

Пусть M — связное гладкое $2n+1$ -мерное многообразие. Пусть на нем фиксирована четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g) , где Φ — тензорное поле типа $(1,1)$, η — 1-форма, ξ — векторное поле, g — риманова метрика. При этом выполняются соотношения

$$\begin{aligned} 1) \Phi(\xi) = 0; \quad 2) \eta \circ \Phi = 0; \quad 3) \eta(\xi) = 1; \quad 4) \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \\ 5) g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned} \quad (5)$$

Такая четверка тензорных полей называется *почти контактной метрической структурой*. Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура называется *почти контактным метрическим многообразием*.

Напомним [13], что в комплексификации касательного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, $m \in M$ строится базис $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m)$, $a = 1, \dots, n$, $\hat{a} = a + n$, в котором компоненты тензоров Φ_m и g_m имеют вид

$$(\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$i, j = 1, \dots, 2n$. Такой базис и соответствующий ему репер $(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m)$ называются *адаптированными* почти контактной метрической структуре многообразия. Короче они называются *A -базисом* и *A -репером*, соответственно. На пространстве расслоения A -реперов тензорные поля Φ и g задаются системами функций вида (1). Эти системы функций называются *компонентами* тензорных полей Φ и g на пространстве расслоения A -реперов.

Ковариантный дифференциал $\nabla\Phi$ эндоморфизма Φ в римановой связности метрики g определяет шесть тензорных полей, ненулевые компоненты

$$\{C^{ab}{}_c, C_{ab}{}^c\}, \{C^{abc}, C_{abc}\}, \{C^{ab}, C_{ab}\}, \{C^a{}_b, C_a{}^b\}, \{D^{ab}, D_{ab}\}, \{D^a, D_a\}$$

которых задаются следующим образом

$$\begin{aligned} C^{ab}{}_c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},c}^a; & C^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[b,\hat{c}]}^a \\ C^{ab} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},0}^a - \sqrt{-1} \Phi_{0,\hat{b}}^a; & C^a{}_b &= -\sqrt{-1} \Phi_{0,b}^a \\ C_{ab}{}^c &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}; & C_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[b,c]}^{\hat{a}} \\ C_{ab} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},0}^{\hat{a}} + \sqrt{-1} \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}; & C_a{}^b &= \sqrt{-1} \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} \\ D_{ab} &= -\sqrt{-1} \Phi_{[a,b]}^0; & D^{ab} &= \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0 \\ D_a &= -\sqrt{-1} \Phi_{a,0}^0; & D^a &= \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},0}^0, \end{aligned} \quad (6)$$

где нулевой индекс соответствует вектору ξ_m . Эти тензорные поля называются *структурными тензорами* почти контактного метрического многообразия.

Отметим, что $\bar{C}^{ab}{}_c = C_{ab}{}^c$, $\bar{C}_{abc} = C^{abc}$, $\bar{C}_{ab} = C^{ab}$, $\bar{C}_a{}^b = C^a{}_b$, $\bar{D}_{ab} = D^{ab}$, $\bar{D}_a = D^a$.

3. Линейные расширения почти контактных метрических многообразий

Пусть M — $(2n+1)$ -мерное почти контактное метрическое многообразие со структурой (Φ, ξ, η, g) . Тогда [1] на декартовом произведении $M \times \mathbb{R}$ многообразия M и вещественной

прямой $\mathbb{R}$ внутренним образом порождается почти эрмитова структура (J, h) . Пусть ν — единичный вектор вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда компоненты тензорных полей J и h на пространстве расслоения реперов вида (m, e_i, ν) , где $\{(m, e_i)\}$ — множество всех вещественных реперов многообразия M , будут задаваться следующими матрицами:

$$(J_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \Phi_j^i & \eta_j \\ -\xi^i & 0 \end{pmatrix}; \quad (h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $i, j = 1, \dots, 2n+1$, $\alpha, \beta = 1, \dots, 2n+2$. Если для многообразия M рассматривать подрасслоение A -реперов, то матрицы J и h на пространстве расслоения реперов вида $b_1 = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m, \nu)$ будут иметь вид [5]:

$$(J_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} iI_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iI_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Так как реперы b_1 не являются A -реперами для почти эрмитовой структуры (J, h) , рассмотрим реперы $b_2 = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_{\hat{0}})$, где

$$\varepsilon_0 = \frac{\xi_m - i\nu}{\sqrt{2}}; \quad \varepsilon_{\hat{0}} = \frac{\xi_m + i\nu}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

На пространстве расслоения реперов b_2 тензорные поля J и h принимают вид матриц (1), где вместо I_n стоит I_{n+1} .

Из вида матриц (7) следует, что

$$J(\xi) = \nu, \quad J(\nu) = -\xi. \quad (9)$$

Согласно работе [5] компоненты структурного и виртуального тензоров почти эрмитовой структуры линейного расширения $M \times \mathbb{R}$ и компоненты структурных тензоров почти контактной метрической структуры многообразия M связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} B^{ab}{}_c &= C^{ab}{}_c; & B_{ab}{}^c &= C_{ab}{}^c; \\ B^{ab}{}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D^{ab} - C^{[ab]}); & B_{ab}{}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{ab} - C_{[ab]}); \\ B^{a0}{}_b &= \frac{1}{\sqrt{2}}C^a{}_b; & B_{a0}{}^b &= \frac{1}{\sqrt{2}}C_a{}^b; \\ B^{a0}{}_0 &= \frac{1}{2}D^a; & B_{a0}{}^0 &= \frac{1}{2}D_a; \\ B^{abc} &= C^{abc}; & B_{abc} &= C_{abc}; \\ B^{ab0} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}C^{ab}; & B_{ab0} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}C_{ab}; \\ B^{0ab} &= \frac{1}{\sqrt{2}}D^{ab}; & B_{0ab} &= \frac{1}{\sqrt{2}}D_{ab}; \\ B^{00a} &= -\frac{1}{4}D^a; & B_{00a} &= -\frac{1}{4}D_a. \end{aligned} \quad (10)$$

4. Преобразование почти эрмитовой структуры линейного расширения почти контактного метрического многообразия, индуцированное конформным преобразованием

Под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры $I = (\Phi, \xi, \eta, g)$ многообразия M мы будем понимать переход к почти контактной метрической структуре $II = (\Phi, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$, где

$$\tilde{\xi} = e^{-f}\xi; \quad \tilde{\eta} = e^f\eta; \quad \tilde{g} = e^{2f}g,$$

f — произвольная гладкая функция на многообразии M .

Для совместного изучения свойств исходного и полученного при преобразовании многообразий удобно задать его с помощью отображения пространств расслоения A -реперов [11]. Обозначим его ψ . Это отображение задается следующим образом:

$$(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m) \rightarrow (m, \tilde{\varepsilon}_a = e^{-f(m)} \varepsilon_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f(m)} \varepsilon_{\hat{a}}, \tilde{\xi}_m = e^{-f(m)} \xi_m),$$

где $m \in M$. Задание отображения ψ равносильно заданию перехода от структуры I к структуре II многообразия M .

Согласно результатам, полученным в работе [11] при конформном преобразовании почти контактной метрической структуры ее структурные тензоры связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{ab}{}_c \circ \psi) &= C^{ab}{}_c + \beta^a \delta^b_c - \beta^b \delta^a_c & (e^f \circ \pi)(\tilde{D}_a \circ \psi) &= D_a + \beta_a \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{C}_{ab}{}^c \circ \psi) &= C_{ab}{}^c + \beta_a \delta^c_b - \beta_b \delta^c_a & (e^f \circ \pi)(\tilde{D}_{ab} \circ \psi) &= D_{ab} \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{D}^a \circ \psi) &= D^a + \beta^a & (e^f \circ \pi)(\tilde{C}_{ab} \circ \psi) &= C_{ab} \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{D}^{ab} \circ \psi) &= D^{ab} & (e^f \circ \pi)(\tilde{C}_a{}^b \circ \psi) &= C_a{}^b - \check{\beta}_0 \delta_a^b \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^a{}_b \circ \psi) &= C^a{}_b - \check{\beta}_0 \delta_b^a & (e^f \circ \pi)(\tilde{C}_{abc} \circ \psi) &= C_{abc}, \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{C}^{abc} \circ \psi) &= C^{abc} \end{aligned} \quad (11)$$

где система функций $\{\beta_a, \beta^a \equiv \beta_{\hat{a}}, \check{\beta}_0\}$ является компонентами 1-формы df на пространстве расслоения A -реперов, а π — проекция тотального пространства расслоения A -реперов на базу M , ставящая в соответствие каждому реперу его вершину.

Заметим, что $\check{\beta}_0 = df_m(\xi_m)$, а $df_m(\nu) = 0$, так как изначально функция f определена на многообразии M , а на многообразии $M \times \mathbb{R}$ определяется равенством $f(m, t) = f(m)$, $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$. Тогда на пространстве расслоения A -реперов b_2 над многообразием $M \times \mathbb{R}$ первые две группы компонент формы df будут такими же как и на многообразии M , то есть $\{\beta_a, \beta^a\}$, а две последние компоненты будут иметь вид

$$\beta_0 = df_m(\varepsilon_0) = \frac{\check{\beta}_0}{\sqrt{2}}; \quad \beta_{\hat{0}} \equiv \beta^0 = df_m(\varepsilon_{\hat{0}}) = \frac{\check{\beta}_0}{\sqrt{2}}. \quad (12)$$

В частности, из этого следует, что функции β_0 и β^0 являются вещественными.

Рассмотрим линейные расширения многообразия M с почти контактной метрической структурой I и многообразия M с почти контактной метрической структурой II . Тогда на каждом из них будет индуцирована почти эрмитова структура. Обозначим первую из них (J, h) , а вторую $(\tilde{J}, \tilde{h})$. Переход от структуры (J, h) к структуре $(\tilde{J}, \tilde{h})$ на многообразии $M \times \mathbb{R}$ назовем *преобразованием*, *индуцированным конформным преобразованием многообразия M* (короче, *индуцированным преобразованием*). Это преобразование определяется отображением реперов вида b_1 почти эрмитовых многообразий $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ и $(M \times \mathbb{R}, \tilde{J}, \tilde{h})$ следующим образом

$$(p, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m, \nu) \rightarrow (p, \tilde{\varepsilon}_a = e^{-f(m)} \varepsilon_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f(m)} \varepsilon_{\hat{a}}, \tilde{\xi}_m = e^{-f(m)} \xi_m, \nu), \quad (13)$$

где $p \in M \times \mathbb{R}$. Обозначим это отображение также как отображение расслоений A -реперов для многообразия M , а именно, ψ .

Учитывая, что векторы ε_a и $\tilde{\varepsilon}_a$ являются собственными векторами операторов J_m и $\tilde{J}_m$ (а точнее, их комплексификаций) соответственно, отвечающих собственному значению i , а векторы $\varepsilon_{\hat{a}}$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}$ являются собственными векторами операторов J_m и $\tilde{J}_m$ (а точнее, их комплексификаций) соответственно, отвечающих собственному значению $-i$ из (13) получим

$$\tilde{J}_m(\tilde{\varepsilon}_a) = J(\varepsilon_a); \quad \tilde{J}_m(\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}) = J(\varepsilon_{\hat{a}}). \quad (14)$$

Кроме того, из (9) следует, что

$$\tilde{J}(\xi) = J(\xi); \quad \tilde{J}(\nu) = e^{-f} J(\nu). \quad (15)$$

Пусть X — произвольное векторное поле на $M \times \mathbb{R}$. Разложим вектор X_m по базису b_1 . Тогда, используя (14) и (15), а также (9), получаем, что

$$\tilde{J}(X) = J(X) + (e^f - 1)h(X, \xi)\nu - (e^{-f} - 1)h(X, \nu)\xi. \quad (16)$$

Аналогичным образом, раскладывая векторы X_m и Y_m произвольных векторных полей по базису b_1 и используя (7) для h и $\tilde{h}$, получим

$$\tilde{h}(X, Y) = e^{2f}h(X, Y) + (1 - e^{2f})h(X, \nu)h(Y, \nu). \quad (17)$$

Итак, индуцированное преобразование на линейном расширении $M \times \mathbb{R}$ в инвариантном виде задается формулами (16) и (17).

Из (16) получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Индукцированное преобразование на $M \times \mathbb{R}$ будет конформным, то есть почти эрмитова структура (J, h) переходит в почти эрмитову структуру $(J, \tilde{h} = e^{2f}h)$ тогда и только тогда, когда f является тождественным нулем.*

Найдем связь между компонентами структурного и виртуального тензоров почти эрмитовых структур (J, h) и $(\tilde{J}, \tilde{h})$ на линейном расширении $M \times \mathbb{R}$. Из (13) и (8) следует, что для A -реперов b_2 на $M \times \mathbb{R}$ определяется отображение

$$\Psi : (p, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{0}}) \rightarrow (p, \tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}, \tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}),$$

где $p = (m, t) \in M \times \mathbb{R}$, $\tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(m)\varepsilon_a$, $\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{a}}$,

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{(e^{-f}(m) + 1)\varepsilon_0 + (e^{-f}(m) - 1)\varepsilon_{\hat{0}}}{2}; \quad \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} = \frac{(e^{-f}(m) - 1)\varepsilon_0 + (e^{-f}(m) + 1)\varepsilon_{\hat{0}}}{2}.$$

Тогда, используя формулы (10), (11) и (12), получим

$$\begin{aligned} (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab}_c \circ \Psi) &= B^{ab}_c + \beta^a \delta^b_c - \beta^b \delta^a_c; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab}_c \circ \Psi) &= B^{ab}_c + \beta_a \delta^c_b - \beta_b \delta^c_a; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab}_0 \circ \Psi) &= B^{ab}_0; & (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab}_0 \circ \Psi) &= B^{ab}_0; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{a0}_b \circ \Psi) &= B^{a0}_b - \beta_0 \delta^a_b; & (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{a0}_b \circ \Psi) &= B^{a0}_b - \beta^0 \delta^a_b; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{a0}_0 \circ \Psi) &= B^{a0}_0 + \frac{1}{2}\beta^a; & (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{a0}_0 \circ \Psi) &= B^{a0}_0 + \frac{1}{2}\beta_a; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{abc} \circ \Psi) &= B^{abc}; & (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{abc} \circ \Psi) &= B^{abc}; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab0} \circ \Psi) &= B^{ab0}; & (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ab0} \circ \Psi) &= B^{ab0}; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{0bc} \circ \Psi) &= B^{0bc}; & (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{0bc} \circ \Psi) &= B^{0bc}; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{00c} \circ \Psi) &= B^{00c} - \frac{1}{4}\beta^c; & (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{00c} \circ \Psi) &= B^{00c} - \frac{1}{4}\beta_c; \end{aligned} \quad (18)$$

Используя определение формы Ли (4) и формулы (18), получим, что компоненты формы Ли ω преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} (e^f \circ \pi)(\tilde{\alpha}^a \circ \Psi) &= \alpha^a + \frac{2n-1}{n}\beta^a; & (e^f \circ \pi)(\tilde{\alpha}_a \circ \Psi) &= \alpha_a + \frac{2n-1}{n}\beta_a; \\ (e^f \circ \pi)(\tilde{\alpha}^0 \circ \Psi) &= \alpha^0 + 2\beta^0; & (e^f \circ \pi)(\tilde{\alpha}_0 \circ \Psi) &= \alpha_0 + 2\beta_0. \end{aligned}$$

5. Инвариантные классы относительно индуцированных преобразований

Найдем инвариантные классы относительно индуцированных преобразований в классификации (3).

Пусть индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ принимают значения от 0 до n . Выясним, будет ли инвариантным условие $\tilde{B}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0$ для линейного расширения $M \times \mathbb{R}$. Это условие представляет из себя три группы равенств $\tilde{B}_{[abc]} = 0$, $\tilde{B}_{[ab0]} = 0$ и $\tilde{B}_{[00a]} = 0$. Используя формулы (18), мы видим, что все три группы равенств остаются инвариантными. Следовательно, условие $\tilde{B}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0$ остается инвариантным при индуцированных преобразованиях.

Рассмотрим условие $\tilde{B}_{[\alpha\beta\gamma]} = \tilde{B}_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Из формул (18) следует, что группы равенств $\tilde{B}_{[abc]} = \tilde{B}_{abc}$ и $\tilde{B}_{[ab0]} = \tilde{B}_{ab0}$ остаются инвариантными, а группа равенств $\tilde{B}_{[00a]} = 0$ будет инвариантной только если $\beta_a = \beta^a = 0$. Это означает, что векторное поле $\beta^\sharp$ (а точнее, его комплексификация), двойственное 1-форме df , в каждой точке $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$ раскладывается только по векторам ε_0 и $\varepsilon_{\hat{0}}$. Тогда, используя (12) и (8), получим, что $\beta_m^\sharp = \tilde{\beta}_0 \xi_m$, то есть векторное поле $\beta^\sharp$ принадлежит распределению $\mathfrak{M}$ почти контактного метрического многообразия M , определяемого векторным полем ξ .

Рассмотрим условие $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\beta = 0$. Из формул (18) следует, что группа равенств $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\beta = 0$ инвариантна тогда и только тогда, когда $\beta_a = \beta^a = 0$. А группа равенств $B^{0\beta}{}_\beta = 0$ инвариантна тогда и только тогда, когда $\beta_0 = \beta^0 = 0$. Итак, условие $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\beta = 0$ является инвариантным тогда и только тогда, когда функция f является константой.

Рассмотрим условие $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\gamma = \xi^{[\alpha}\delta_{\gamma}^{\beta]}$. Из формул (18) следует, что группы равенств $\tilde{B}^{ab}{}_0 = \tilde{\alpha}^{[a}\delta_0^{b]}$ и $\tilde{B}^{0a}{}_b = \alpha^{[0}\delta_b^{a]}$ инвариантны. А группы равенств $\tilde{B}^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}$ и $\tilde{B}^{a0}{}_0 = \alpha^{[a}\delta_0^{0]}$ инвариантны тогда и только тогда, когда $\beta_a = \beta^a = 0$. Итак, условие $\tilde{B}^{\alpha\beta}{}_\gamma = \xi^{[\alpha}\delta_{\gamma}^{\beta]}$ является инвариантным тогда и только тогда, когда векторное поле $\beta^\sharp$ принадлежит распределению $\mathfrak{M}$.

Из полученных результатов и классификации (3) получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Класс $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ инвариантен относительно индуцированных преобразований линейных расширений. Классы W_1 , $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ инвариантны относительно индуцированных преобразований тогда и только тогда, когда векторное поле $\beta^\sharp$, двойственное 1-форме $\beta = df$, принадлежит распределению $\mathfrak{M}$ почти контактного метрического многообразия M , определяемого векторным полем ξ . Остальные классы классификации (3) инвариантны тогда и только тогда, когда функция f является константой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tashiro Y. On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds I // Tohoku Math. J. 1963. Vol. 15. P. 62-78.
2. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1979. Том 9. С. 1-246.
3. Chineza D., Gonzalez C. A Classification of Almost Contact Metric Manifolds // Annali di Matematica pure ed applicata. 1990. Vol. CLVI. P. 15-36.
4. Rodina E. V. On linear extensions of some almost contact manifolds // Webs and quasigroups. Tver State Univ. 1995, P. 106.

5. Родина Е. В. Линейные расширения почти контактных метрических многообразий: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 1997. 98 с.
6. Игнаточкина Л. А. Многообразия Вайсмана–Грея с J -инвариантным тензором конформной кривизны // Матем. сб. 2003. Том 194, №2. С. 61-72.
7. Кириченко В. Ф., Ускорев И. В. Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур // Матем. заметки. 2008. Том 84, №6. С. 838-850.
8. Кириченко В. Ф., Ежова Н. А. Конформные инварианты многообразий Вайсмана–Грея // УМН. 1996. Том 51, №2. С. 163-164.
9. Ignatochkina L. A., Abood H. M. On Vaisman-Gray manifold with vanishing conharmonic curvature tensor // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2017. Vol. 101, №10. p. 2271–2284.
10. Ignatochkina L. A., Morozov P. B. The transformations induced by conformal transformations on T^1 - bundle // Journal of Basrah Researchers ((Sciences)). 2011. Vol. 37, №4C. p.8–15.
11. Игнаточкина Л. А. Обобщение преобразований, индуцированных на T^1 -расслоениях конформными преобразованиями их базы // Матем. сб. 2011. Том 202, №5. С. 45–62.
12. Игнаточкина Л. А. Локальное строение многообразий Вайсмана–Грея // Современная математика и ее приложения, Геометрия и анализ. 2015. Том 96, С. 70–80.
13. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса.: Печатный Дом, 2013. 458 с.
14. Gray A., Hervella L. M. The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants // Annali di Matematica pura ed applicata. 1980. Vol. CXXIII, №IV. P. 35-58.
15. Banaru M. A new characterization of the Gray-Hervella classes of almost Hermitian manifold // 8th International conference on differential geometry and its applications. Opava-Czech Republic, 27-31 August 2001. p. 4.

REFERENCES

1. Tashiro, Y. 1963, "On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds I *Tohoku Math. J.*, vol. 15, pp. 62-78.
2. Evtushik, L. E., Lumiste, Ju. G., Ostianu, N. M. & Shirokov A. P. 1979, "Differential geometric structure on manifolds *Itogi nauki i tehniki. Problemi geometrii.*, vol. 9, pp. 1-246.
3. Chineza, D. & Gonzalez, C. 1990, "A Classification of Almost Contact Metric Manifolds *Annali di Matematica pure ed applicata.*, vol. CLVI, pp. 15-36.
4. Rodina, E. V. 1995, "On linear extensions of some almost contact manifolds *Webs and quasigroups. Tver State Univ.*, pp. 106.
5. Rodina, E. V. 1997, "Linear extensions of almost contact metric manifolds Diss. ... kand. fis.-mat. nauk., M.: MPGU, 98 p.
6. Ignatochkina, L. A. 2003, "Vaisman–Gray manifolds with J -invariant conformal curvature tensor *Sb. Math.*, vol. 194, no. 2, pp. 225–235.

7. Kirichenko, V.F. & Uskorev, I.V. 2008, "Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures *Mathematical Notes*, vol. 84, no. 6, pp. 783–794.
8. Kirichenko, V.F. & Ezhova N.A. 1996, "Conformal invariants of Vaisman-Gray manifolds *Russian Mathematical Surveys*, vol. 51, no. 2, p. 331.
9. Ignatochkina, L.A. & Abood, H.M., 2017 "On Vaisman-Gray manifold with vanishing conharmonic curvature tensor *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, vol. 101, no. 10, pp. 2271–2284.
10. Ignatochkina, L.A. & Morozov, P.B., 2011 "The transformations induced by conformal transformations on T^1 - bundle *Journal of Basrah Researchers ((Sciences))*, vol. 37, no. 4C, pp. 8–15.
11. Ignatochkina, L.A. 2011, "Generalization for transformations of T^1 -bundle which induced by conformal transformations of their base *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 665–682.
12. Ignatochkina, L.A. 2016 "Local Structure of Vaisman–Gray Manifolds *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 217, no. 5, pp. 595–606.
13. Kirichenko, V.F. 2013, "Differential geometric structure on manifolds 2, Pechatny Dom, Odessa, 458 p.
14. Gray, A.& Hervella, L.M. 1980, "The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants *Annali di Matematica pura ed applicata*, vol. CXXIII, no. IV. pp. 35-58.
15. Banaru, M. 2001, "A new characterization of the Gray-Hervella classes of almost Hermitian manifold 8thInternational conference on differential geometry and its applications, Opava-Czech Republic, p. 4.

Московский педагогический государственный университет

Получено 22.03.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-154-172

О КОНГРУЭНЦ-КОГЕРЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ РИСА
И АЛГЕБРАХ С ОПЕРАТОРОМ

А. Н. Лата (г. Москва)

Аннотация

В работе описываются конгруэнц-когерентные алгебры Риса и алгебры с оператором. Концепция когерентности была предложена Д. Гейгером.

В разделе 3 найдены условия отсутствия свойства конгруэнц-когерентности для алгебр имеющих собственные подалгебры. Для алгебр Риса получено необходимое условие конгруэнц-когерентности. Для произвольной алгебры с оператором найдены достаточные условия конгруэнц-когерентности. Кроме того, полностью описаны конгруэнц-когерентные унары.

В разделе 4 рассматриваются модификации свойства конгруэнц-когерентности. Понятия слабой и локальной когерентности были предложены И. Хайда. Установлены достаточные условия слабой и локальной когерентности алгебр с оператором.

В разделе 5 рассматриваются алгебры $\langle A, d, f \rangle$, сигнатура которых состоит из тернарной операции $d(x, y, z)$ и унарной операции f , являющейся эндоморфизмом относительно первой операции. Тернарная операция $d(x, y, z)$ определена в соответствии с подходом, предложенным В. К. Карташовым. Для алгебр $\langle A, d, f \rangle$ получены необходимые и достаточные условия конгруэнц-когерентности. Для алгебр $\langle A, d, f, 0 \rangle$ с нулевой операцией 0 для которой $f(0) = 0$, найдены необходимые и достаточные условия слабой и локальной когерентности.

Ключевые слова: решетка конгруэнций, конгруэнц-когерентность, слабая когерентность, локальная когерентность, алгебра Риса, конгруэнция Риса, алгебра с операторами, унар с мальцевской операцией, операция почти единогласия, слабая операция почти единогласия.

Библиография: 33 названия.

ON CONGRUENCE-COHERENT REES ALGEBRAS
AND ALGEBRAS WITH AN OPERATOR

A. N. Lata (Moscow)

Abstract

The paper contains a classification of congruence-coherent Rees algebras and algebras with an operator. The concept of coherence was introduced by D. Geiger. An algebra A is called coherent if each of its subalgebras containing a class of some congruence on A is a union of such classes.

In Section 3 conditions for the absence of congruence-coherence property for algebras having proper subalgebras are found. Necessary condition of congruence-coherence for Rees algebras are obtained. Sufficient condition of congruence-coherence for algebras with an operator are obtained. In this section we give a complete classification of congruence-coherent unars.

In Section 4 some modification of the congruence-coherent is considered. The concept of weak and locally coherence was introduced by I. Chajda. An algebra A with a nullary operation 0 is called weakly coherent if each of its subalgebras including the kernel of some congruence

on A is a union of classes of this congruence. An algebra A with a nullary operation 0 is called locally coherent if each of its subalgebras including a class of some congruence on A also includes a class the kernel of this congruence. Section 4 is devoted to proving sufficient conditions for algebras with an operator being weakly and locally coherent.

In Section 5 deals with algebras $\langle A, d, f \rangle$ with one ternary operation $d(x, y, z)$ and one unary operation f acting as endomorphism with respect to the operation $d(x, y, z)$. Ternary operation $d(x, y, z)$ was defined according to the approach offered by V. K. Kartashov. Necessary and sufficient conditions of congruence-coherent for algebras $\langle A, d, f \rangle$ are obtained. Also, necessary and sufficient conditions of weakly and locally coherent for algebras $\langle A, d, f, 0 \rangle$ with nullary operation 0 for which $f(0) = 0$ are obtained.

Keywords: congruence lattice, coherence, weakly coherence, locally coherence, Rees algebra, Rees congruence, algebra with operators, unar with Mal'tsev operation, near-unanimity operation, weak near-unanimity operation.

Bibliography: 33 titles.

Посвящается 80-летию профессора Владимира Константиновича Карташова.

1. Введение

Универсальная алгебра A *конгруэнц-когерентна*, если любая подалгебра в A , содержащая класс произвольной конгруэнции в A , является объединением классов этой конгруэнции. Таковыми являются конгруэнц-простые алгебры и алгебры без собственных подалгебр. Кроме того, свойством конгруэнц-когерентности обладают группы, кольца.

В работе [1] показано, что конгруэнц-когерентное многообразие, задается мальцевскими условиям и является конгруэнц-регулярным. Однако, обратное неверно. В [2] показано, что многообразие, порождаемое квазипримальной алгеброй, является конгруэнц-когерентным. В [3] получено полное описание конгруэнц-когерентных алгебр де Моргана и p -алгебр. В [4] описаны конгруэнц-когерентные дистрибутивные двойные p -алгебры. В работе [5] доказано, что если декартов квадрат алгебры конгруэнц-когерентен, то сама алгебра конгруэнц-регулярна и потому конгруэнц-перестановочна. В [6] описаны конгруэнц-когерентные двойные де Морган-Стоуновы алгебры. В работе [7] получено полное описание конгруэнц-когерентных алгебр в классе симметричных расширенных алгебр де Моргана.

Подалгебра B алгебры A называется *подалгеброй Риса*, если объединение диагонали и квадрата $B \times B$ является конгруэнцией в A . Указанная конгруэнция называется *конгруэнцией Риса*. Алгебра A является *алгеброй Риса*, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса. Класс *Риса* состоит из алгебр Риса. Алгебры Риса охарактеризованы в работах [8, 9, 10], см. также [11, 12].

Алгеброй с операторами называется алгебра с выделенной системой унарных операций, действующих как эндоморфизмы для остальных основных операций. Указанные алгебры изучались в работах [13, 14, 15, 16, 17].

2. Необходимые определения

Подалгебра алгебры называется *собственной*, если она отлична от самой алгебры. Неодноэлементная алгебра называется *конгруэнц-простой (простой)*, если она имеет в точности две конгруэнции (наибольшую ∇ и наименьшую Δ). Через $\text{Con}A$ обозначается решетка конгруэнций алгебры A , через $\text{Sub}A$ обозначается решетка подалгебр алгебры A . Класс конгруэнции θ , порожденный элементом x , будем обозначать через $[x]\theta$.

Другие определения и утверждения теории решеток можно найти в [18, 19].

Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар. Далее для любых целых чисел $h > 0$, $t \geq 0$ через $C_h^t = \langle a | f^t(a) = f^{h+t}(a) \rangle$ обозначается унар с образующим a и определяющим соотношением $\langle a | f^t(a) = f^{h+t}(a) \rangle$. Унар C_n^0 называется *циклом длины n* . Через F_1 обозначается свободный однопорожденный унар. Цепью C^∞ называется унар, изоморфный унару $\langle \mathbb{Z}, f \rangle$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $f(n) = n + 1$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом.

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geq 0$ и $n \geq 1$. Через $T(A)$ обозначается множество периодических элементов унара A . Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t , для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geq 1$, называется *глубиной элемента a* и обозначается через $t(a)$. *Глубиной $t(A)$ унара A* называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) | a \in T(A)\}$ не ограничено, глубина унара считается бесконечной.

Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c , отличные от a , что $f(b) = a = f(c)$.

Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f \rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geq 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A .

Далее через σ_n , где $n \in \mathbb{N}$, обозначается $\text{Ker} f^n$; при этом полагаем $\sigma_0 = \Delta$. В [21] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ определяется бинарное отношение σ : $x\sigma y \Leftrightarrow \exists n > 0 (f^n(x) = f^n(y))$, и показано, что это отношение является конгруэнцией любой алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ с оператором $f \in \Omega$.

Конгруэнция $\bar{\alpha}$ унара $\langle A, f \rangle$ называется расширением конгруэнции α подунара B унара A , если условие $x\bar{\alpha}y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда $x\alpha y$ в B , либо $x = y$.

Пусть v — узловой элемент унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_v обозначается бинарное отношение на унаре $\langle A, f \rangle$, определенное по правилу [20]: $x\theta_v y$ тогда и только тогда, когда $x = y$, или $x, y \in f^{-1}(v)$.

В [21] на связном унаре, имеющем одноэлементный подунар, определено бинарное отношение β_n по правилу: $x\beta_n y$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или $t(x), t(y) \leq n$. По лемме 15 [21], при любом $n \geq 0$ отношение β_n является конгруэнцией унара с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (1).

3. Конгруэнц-когерентные алгебры

Пусть B — собственная подалгебра алгебры A . Обозначим через $\theta_{A \setminus B}$ конгруэнцию удовлетворяющую условию: существуют $x, z \in B$ и $y \in A \setminus B$ такие, что $(x, y) \in \theta_{A \setminus B}$ и $[z]\theta_{A \setminus B} \subseteq B$.

Из определения следует, что если алгебра A имеет конгруэнцию $\theta_{A \setminus B}$ для некоторой подалгебры B , то она не является конгруэнц-когерентной. Кроме того, если алгебра A не имеет конгруэнцию $\theta_{A \setminus B}$ для любой подалгебры B , то она является конгруэнц-когерентной. Таким образом, алгебра A конгруэнц-когерентна тогда и только тогда, когда она не имеет конгруэнций $\theta_{A \setminus B}$ для любой подалгебры B .

Необходимо отметить, что конгруэнция $\theta_{A \setminus B}$ определена неоднозначно.

ПРИМЕР 1. Пусть $\langle A, f \rangle$ — унар с узловым элементом v . Тогда существуют различные элементы $x, y \in A$ такие, что $f(x) = v = f(y)$. Рассмотрим $\langle B, f \rangle$, где $B = \{z \in A | f^k(z) \neq v, k \geq 0\}$ и конгруэнцию:

1. $\sigma_1 = \text{Ker} f$. Имеем $x, y \in [x]\sigma_1$ и $[v]\sigma_1 \subset B$, где $x \in B$ и $y \in A \setminus B$.
2. θ_v . Имеем $x, y \in [x]\theta_v$ и $[v]\theta_v \subset B$, где $x \in B$ и $y \in A \setminus B$.

Таким образом, если подунар $\langle B, f \rangle$ унара $\langle A, f \rangle$ расширяется до подалгебры $\langle B, \Omega \rangle$ алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ и $\theta_v \in \text{Con}\langle A, \Omega \rangle$, то имеем дополнительные примеры существования конгруэнции $\theta_{A \setminus B}$.

ПРИМЕР 2. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$ и $|A| \geq 3$. Рассмотрим различные двухэлементные подунары $\langle B, f \rangle$ и $\langle C, f \rangle$, где $B \cap C = \{a\}$. При этом в качестве конгруэнции $\theta_{A \setminus B}$ может быть конгруэнция Риса $\theta_C = C^2 \cup \Delta_A$.

Приведем условия отсутствия свойства конгруэнц-когерентности для алгебр имеющих собственные подалгебры.

ЛЕММА 1. Пусть B_1, B_2 — собственные подалгебры A . При этом B_1, B_2 пересекаются и не совпадают. Если существует конгруэнция Риса по подалгебре B_1 или B_2 , то алгебра A не является конгруэнц-когерентной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует конгруэнция Риса $\theta_{B_1} = B_1^2 \cup \Delta_A$. По определению конгруэнции θ_{B_1} , подалгебра B_2 содержит хотя бы один одноэлементный класс, но не является объединением классов конгруэнции θ_{B_1} . Таким образом, алгебра A не является конгруэнц-когерентной. $\square$

ЛЕММА 2. Если алгебра имеет более двух непересекающихся подалгебр и существует конгруэнция Риса по прямой сумме двух подалгебр отличная от единичной конгруэнции, то она не является конгруэнц-когерентной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны два случая.

Случай 1: B, C и D попарно непересекающиеся подалгебры алгебры A .

Пусть $\theta_{C \oplus D}$ — конгруэнция Риса алгебры A . Прямая сумма $B \oplus C$ — подалгебра алгебры A . Подалгебра $B \oplus C$ содержит класс $[b]\theta_{C \oplus D} = \{b\}$ для любого $b \in B$, но не содержит класс $[c]\theta_{C \oplus D} = C \oplus D$ для любого $c \in C$. Откуда, подалгебра $B \oplus C$ не является объединением классов конгруэнции $\theta_{C \oplus D}$. Таким образом, алгебра A не является конгруэнц-когерентной.

Случай 2: B и D , а также C и D непересекающиеся подалгебры алгебры A , причем $B \subset C$.

По условию $\theta_{B \oplus D}$ — конгруэнция Риса алгебры A . Подалгебра C содержит класс $[b]\theta_{C \oplus D} = \{b\}$ для любого $b \in C \setminus B$, но не содержит класс $[d]\theta_{B \oplus D} = B \oplus D$ для любого $d \in D$. Откуда, подалгебра C не является объединением классов конгруэнции $\theta_{B \oplus D}$. Таким образом, алгебра A не является конгруэнц-когерентной. $\square$

Из лемм 1 и 2 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если алгебра Риса A является конгруэнц-когерентной, то она удовлетворяет одному из условий:

1. Алгебра A не имеет собственных подалгебр;
2. $A = B \oplus C$, где B и C без собственных подалгебр;
3. $\langle \text{Sub}A, \subseteq \rangle$ — цепь.

Следующее утверждение дает ответ на вопрос, при каких условиях многообразие является многообразием Риса.

ТЕОРЕМА 1 ([8]). Многообразие V является многообразием Риса тогда и только тогда, когда каждая фундаментальная операция зависит не более, чем от одной переменной.

ЛЕММА 3. Если унар $\langle A, f \rangle \cong C_n^0$ или $\langle A, f \rangle \cong C_n^0 + C_m^0$, где $n, m \in \mathbb{N}$, то $\langle A, f \rangle$ является конгруэнц-когерентным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай когда $\langle A, f \rangle \cong C_n^0$ очевиден.

Пусть $\langle A, f \rangle \cong C_n^0 + C_m^0$, где $n, m \in \mathbb{N}$, и $\langle B, f \rangle$ — поунар унара $\langle A, f \rangle$. Если $\langle B, f \rangle$ собственный, то очевидно, либо $\langle B, f \rangle \cong C_n^0$, либо $\langle B, f \rangle \cong C_m^0$. Пусть θ — нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, f \rangle$. Тогда возможны два случая:

Случай 1: θ является расширением некоторой конгруэнции подунара $\langle B, f \rangle$. Тогда утверждение очевидно.

Случай 2: θ не является расширением некоторой конгруэнции подунара $\langle B, f \rangle$. Тогда $\langle A, f \rangle$ разбивается на классы, причем, ни один класс полностью не принадлежит $\langle B, f \rangle$. Таким образом, $\langle A, f \rangle$ является конгруэнц-когерентным.

В случае если $\langle B, f \rangle$ несобственный, то утверждение очевидно. $\square$

ЛЕММА 4. Если унар $\langle A, f \rangle \cong F_1$ или $\langle A, f \rangle$ содержит подунар изоморфный F_1 , то $\langle A, f \rangle$ не является конгруэнц-когерентным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Случай 1:* $\langle A, f \rangle \cong F_1$.

Тогда по предложению 1 [22], любая конгруэнция $\theta \in \text{Con}\langle A, f \rangle$ задается парой $(f^k(a), f^{k+d}(a))$, где $k, d \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим нетривиальную конгруэнцию θ_1 порожденную парой $(a, f^3(a))$ и подунар B порожденный элементом $f(a)$. Очевидно, подунар B содержит класс $[f(a)]\theta_1$, но $a \notin B$. Таким образом, подунар B не является объединением классов конгруэнции θ_1 . Следовательно, унар $\langle A, f \rangle$ не является конгруэнц-когерентным.

Случай 2: $\langle A, f \rangle$ содержит подунар $\langle B, f \rangle \cong F_1$.

Рассмотрим расширение нетривиальной конгруэнции θ_1 порожденной парой $(a, f^3(a))$ на унаре $\langle B, f \rangle$. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 1. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\langle A, f \rangle$ — неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром, либо не имеющий узловых элементов, либо имеющий единственный узловой элемент, являющийся неподвижным. Пусть также a — неподвижный элемент унара $\langle A, f \rangle$.

Тогда $\beta_n = \sigma_n$ и $[a]\sigma_m = [a]\sigma_{m-1} \cup \left(\bigcup_{t(y)=m} [y]\sigma_{m-1} \right)$, причем $|[y]\sigma_{m-1}| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения конгруэнций β_n, σ_n , следствия 3 [21] и леммы 12 [21] вытекает $\beta_n = \sigma_n$, где $n > 0$ (По определению $\beta_0 = \Delta = \sigma_0$).

Пусть $0 \leq n \leq t(A)$, $0 \leq m \leq t(A)$ и $n < m$. Тогда σ_n и σ_m — несовпадающие конгруэнции унара $\langle A, f \rangle$. Так как $0 \leq n \leq t(A)$, $0 \leq m \leq t(A)$, то найдутся такие элементы $b, c \in A$, для которых $t(b) = n$ и $t(c) = m$, причем, $b \neq c$, поскольку $n < m$. Предположим, что $[a]\sigma_n \supset [a]\sigma_m$. Так как $t(c) = m$, то $f^m(c) = a$. Учитывая, что $f^m(a) = a$, имеем $f^m(c) = f^m(a)$, откуда $c \in [a]\sigma_m$. Тогда $c \in [a]\sigma_n$. Следовательно, $f^n(c) = a$, и значит, $t(c) \leq n$, что противоречит условию $n < m$. Окончательно, $[a]\sigma_n \neq [a]\sigma_m$ (то есть $[a]\sigma_n \subset [a]\sigma_m$) для любых $n < m$. Так как $\beta_{m-1} = \sigma_{m-1}$, то для элемента $y \in A$ глубины $t(y) = m$ имеем $[y]\sigma_{m-1} = \{y\}$. $\square$

Пусть унарная операция f на A неинъективна, $\langle A_1, f \rangle$ подунар унара $\langle A, f \rangle$ и $f(x) = f(y) = v$ для некоторых различных элементов $x, y \in A_1$. Обозначим через $M = \{a \in A_1 | f(a) = v\}$. Для непустого собственного подмножества C множества M обозначим через

$$B_1 = \{b \in A_1 | f^k(b) = a, k > 0, \forall a \in C\} \text{ и } B_2 = \{b \in A_1 | f^k(b) = a, k > 0, \forall a \in M \setminus C\}.$$

Обозначим через $D = A_1 \setminus (C \cup B_1 \cup B_2)$, где $B_3 \subseteq B_2$ (возможно $B_3 = \emptyset$). Таким образом, получили подунар $D_v = \langle D, f \rangle$ унара $\langle A, f \rangle$. Причем, если унар $\langle A, f \rangle$ связан, то $|\{x, y, v\}| = 3$ и глубина унара D_v больше 1.

ЛЕММА 5. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — алгебра с оператором $f \in \Omega$. Пусть также

1. операция f на A неинъективна;

2. $\langle A, f \rangle \not\cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;

3. подунар D_v унара $\langle A, f \rangle$ расширяется до подалгебры алгебры $\langle A, \Omega \rangle$;

Тогда алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ не является конгруэнц-когерентной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим подунар D_v и конгруэнцию σ_1 , где D_v и σ_1 как и выше. Если подунар D_v связан, то существуют различные элементы $a, b \in A$ отличные от v такие, что $f^2(a) = v$ или (и) $f^n(v) = b$, где $n > 0$. По построению подунар D_v содержит класс $[a]\sigma_1$ (или/ и класс $[b]\sigma_1$), но не является объединением классов конгруэнции σ_1 . Таким образом, $\langle A, \Omega \rangle$ не является конгруэнц-когерентной.

Очевидно, что если подунар D_v несвязен, то D_v содержит некоторый класс конгруэнции σ_1 . С другой стороны, по построению не является объединением классов конгруэнции σ_1 . Следовательно, $\langle A, \Omega \rangle$ не является конгруэнц-когерентной. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть унарная операция f на A неинъективна. Если унар $\langle A, f \rangle \not\cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $\langle A, f \rangle$ не является конгруэнц-когерентным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если $\langle A, f \rangle \cong C_n^0$, или $\langle A, f \rangle \cong C_n^0 + C_m^0$, или $\langle A, f \rangle \cong C_1^t$, где $n, m \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ является конгруэнц-когерентной

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай когда $\langle A, f \rangle \cong C_n^0$ очевиден.

Пусть $\langle A, f \rangle \cong C_n^0 + C_m^0$ и B — подалгебра алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Так как B замкнута относительно операции f , то $\langle B, f \rangle$ — подунар унара $\langle A, f \rangle$. Поскольку f — оператор (эндоморфизм), то $\text{Con}\langle A, \Omega \rangle \subseteq \text{Con}\langle A, f \rangle$. По лемме 3, подунар $\langle B, f \rangle$ является объединением классов любой неединичной конгруэнции алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Таким образом, подалгебра B алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ является объединением классов любой неединичной конгруэнции алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Следовательно, алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ является конгруэнц-когерентной.

Пусть теперь $\langle A, f \rangle \cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Обозначим через a неподвижный элемент унара $\langle A, f \rangle$. Из предложения 1 [23] вытекает, что любая подалгебра B алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ является классом $[a]\sigma_s$, $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и глубина подунара $\langle B, f \rangle$ равна s . По замечанию 1, для $n < s$ имеем, B — объединение классов конгруэнции σ_n . Для ∇_A и σ_m , где $m > s$, утверждение очевидно. Так как в этом случае B не содержит класса рассматриваемых конгруэнций. $\square$

Из предложения 2 и предложения 3 [21] вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Если унар $\langle A, f \rangle \cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $\langle A, f \rangle$ является конгруэнц-когерентным.

ТЕОРЕМА 2. Унар $\langle A, f \rangle$ является конгруэнц-когерентным тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ — один из унаров следующего вида:

1. C_n^0 , $n \in \mathbb{N}$;
2. $C_n^0 + C_m^0$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$;
3. C_1^t , $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если операция f на A неинъективна и унар $\langle A, f \rangle \not\cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то по следствию 1, унар $\langle A, f \rangle$ не является конгруэнц-когерентным. Откуда, имеем случай 3.

Если операция f на A инъективна, то по предложению 1 и лемме 4 имеем случаи 1 и 2.

Достаточность. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет условию 1 или условию 2, то по лемме 3 он конгруэнц-когерентен.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет условию 3, то по следствию 2, он конгруэнц-когерентен. $\square$

4. Модификации конгруэнц–когерентности

Универсальная алгебра A , имеющая нульарную операцию 0 , называется *слабо когерентной* [24], если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A условие $[0]\theta \subseteq B$ влечет $[x]\theta \subseteq B$ для любого $x \in B$.

Универсальная алгебра A , имеющая нульарную операцию 0 , называется *локально когерентной* [25], если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A из того, что $[x]\theta \subseteq B$ для некоторого $x \in B$ следует $[0]\theta \subseteq B$.

Как показано в [24] алгебра конгруэнц–когерентна тогда и только тогда, когда она локально и слабо когерентна.

Чтобы алгебра $\langle A, \Omega \rangle$, с нульарной операцией 0 была алгеброй с оператором $f \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $f(0) = 0$. Нульарная операция 0 , заданная на унаре $\langle A, f \rangle$ условием $f(0) = 0$ часто рассматривается в теории унаров. В этом случае алгебру $\langle A, f, 0 \rangle$ называют *унаром с нулем*.

Пусть унарная операция f на A неинъективна, $\langle A_1, f \rangle$ подунар унара $\langle A, f \rangle$ и $f(x) = f(y) = v$ для некоторых различных элементов $x, y \in A_1$. Обозначим через $M = \{a \in A_1 \mid f(a) = v\}$. Для непустого собственного подмножества C множества M обозначим через

$$B_1 = \{b \in A_1 \mid f^k(b) = a, k > 0, \forall a \in C\} \text{ и } B_2 = \{b \in A_1 \mid f^k(b) = a, k > 0, \forall a \in M \setminus C\}.$$

Обозначим через $D = A_1 \setminus (C \cup B_1 \cup B_2)$, где $B_3 \subseteq B_2$ (возможно $B_3 = \emptyset$). Подалгебру $\langle D, f, 0 \rangle$ унара с нулем $\langle A, f, 0 \rangle$ обозначим через D_0 , если $v = 0$ и D_v^0 в противном случае. Причем, если $\langle A, f, 0 \rangle$ связан, то $|\{x, y, 0\}| = 3$ и глубина унара D_0 больше 1.

Как и лемма 5 доказываются следующие две леммы.

ЛЕММА 6. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — алгебра с оператором $f \in \Omega$ и нульарной операцией $0 \in \Omega$. Пусть также

1. операция f на A неинъективна;
2. $\langle A, f, 0 \rangle \not\cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
3. подунар D_v^0 унара $\langle A, f \rangle$ расширяется до подалгебры алгебры $\langle A, \Omega \rangle$;

Тогда алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ не является слабо когерентной.

ЛЕММА 7. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — алгебра с оператором $f \in \Omega$ и нульарной операцией $0 \in \Omega$. Пусть также

1. операция f на A неинъективна;
2. $\langle A, f, 0 \rangle \not\cong C_1^t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
3. подунар D_0 унара $\langle A, f \rangle$ расширяется до подалгебры алгебры $\langle A, \Omega \rangle$;

Тогда алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ не является локально когерентной.

ЛЕММА 8. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — алгебра с оператором $f \in \Omega$ и нульарной операцией $0 \in \Omega$. Пусть также

1. $\langle A, f, 0 \rangle$ — связный унар с нулем 0 ;
2. существует узловой элемент $v \in A$ отличный от 0 ;
3. существует единственный элемент $a \in A$ глубины $k > t(v) + 1$;

4. Если глубина унара $t(A) < \infty$, то $t(v) \neq t(A) - 1$;

5. подунар D_v^0 унара $\langle A, f \rangle$ расширяется до подалгебры алгебры $\langle A, \Omega \rangle$;

Тогда алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ не является локально когерентной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет условиям леммы. По условию существуют различные элементы $x, y, a \in A$ такие, что $f(x) = f(y) = v$ и $t(a) \geq t(v) + 2$. Рассмотрим подунар D_v^0 такой, что $a \in D_v^0$, и конгруэнцию $\sigma_{t(x)}$. Без ограничения общности, пусть $f^m(a) = x$, где $m > 0$. По построению подунар D_v^0 не содержит класс $[0]\sigma_{t(x)}$. По определению конгруэнции $\sigma_{t(x)}$, подунар D_v^0 содержит класс $[a]\sigma_{t(x)}$. Таким образом, алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ не является локально когерентной. $\square$

5. Унары с мальцевской операцией и близкие алгебры

Унаром с мальцевской операцией [26] называется алгебра $\langle A, d, f \rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d , на которой истинны тождества Мальцева $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$ и тождество перестановочности $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$.

Унары с мальцевской операцией образуют подкласс в классе алгебр с операторами.

В [26] показано, что на любом унаре $\langle A, f \rangle$ можно задать тернарную операцию p так, что алгебра $\langle A, p, f \rangle$ становится унаром с мальцевской операцией, а унарная операция — ее эндоморфизмом. Эта алгебра определяется следующим образом.

Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f \rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n -кратного применения операции f к элементу x ; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, и $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leq k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Многообразие называется *арифметическим*, если оно конгруэнц-перестановочно и конгруэнц-дистрибутивно. Арифметичность многообразия эквивалентна существованию терма Пиксли от основных операций, то есть, тернарного терма d , для которого выполнены тождества Пиксли $d(x, x, y) = d(y, x, x) = d(y, x, y) = y$ [27].

Из (1) следует, что класс K унаров с мальцевской операцией $p(x, y, z)$ содержится в многообразии, заданном тождествами Пиксли. Отсюда, K является конгруэнц-перестановочным и конгруэнц-дистрибутивным.

С помощью конструкции предложенной В. К. Карташовым в [26], В. Л. Усольцевым в [28] на произвольном унаре была определена тернарная операция $s(x, y, z)$, называемая симметрической, удовлетворяющая тождествам $s(x, y, y) = s(y, y, x) = s(y, x, y) = x$ и также перестановочная с унарной.

$$s(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (2)$$

Алгебры $\langle A, s, f \rangle$ образуют еще один подкласс класса унаров с мальцевской операцией.

В [29] аналогичным образом на произвольном унаре были определены тернарная операция $w(x, y, z)$ и операция большинства $m(x, y, z)$ перестановочные с унарной.

$$w(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) > k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \quad (3)$$

$$m(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geq k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что $w(x, y, z) = s(x, s(x, y, z), z)$. Следовательно, $\langle A, w, f \rangle \cong \langle A, s, f \rangle$.

Отметим, что операция $s(x, y, z)$ является слабой операцией почти единогласия (удовлетворяет тождествам WNU).

Алгебры $\langle A, w, f \rangle$ и $\langle A, m, f \rangle$ образуют подклассы в классе алгебр с операторами.

k -арная операция φ называется k -NU-операцией (операцией почти единогласия, near-unanimity operation), если выполнены тождества

$$\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \varphi(y, x, \dots, x) = x (k > 3).$$

В тернарном случае φ называют операцией большинства.

k -арная операция ϕ называется k -WNU-операцией (слабой операцией почти единогласия, weak near-unanimity operation), если выполнены тождества

$$\phi(x, \dots, x) = x, \quad \phi(x, \dots, x, y) = \phi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \phi(y, x, \dots, x).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f , где $d(x_1, x_2, x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (1)–(4). Алгебра $\langle A, d, f \rangle$ является конгруэнц-когерентной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. операция f на A является инъективной;
2. унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$, где $|A| \geq 3$;
3. унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^t для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть алгебра $\langle A, d, f \rangle$ не удовлетворяет условиям 1–3. Тогда по лемме 5, алгебра $\langle A, d, f \rangle$ не является конгруэнц-когерентной.

Достаточность. Пусть алгебра $\langle A, d, f \rangle$ удовлетворяет условию 1 или условию 2, то по теореме 2 [21], теореме 9 [30] и теореме 2 [29] соответствующие алгебры конгруэнц-просты. Следовательно, алгебра $\langle A, d, f \rangle$ конгруэнц-когерентна.

Пусть теперь алгебра $\langle A, d, f \rangle$ удовлетворяет условию 3, то по предложению 2 она конгруэнц-когерентна. $\square$

ЛЕММА 9. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f , где $d(x_1, x_2, x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (1)–(4). Пусть также $\langle A, f \rangle$ — неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром. Отношение β_n при любом $n > 0$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, d, f \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для операции $p(x, y, z)$ утверждение доказано в [21, лемма 15]. Воспользуемся рассуждениями данной работы и докажем утверждение для операций $m(x, y, z)$ и $s(x, y, z)$.

Пусть $n > 0$. Очевидно, что β_n — эквивалентность. Из того, что на связном унаре с одноэлементным подунаром для любого $x \in A$, кроме $x = a$, выполняется $t(f(x)) = t(x) - 1$, получаем, что $\beta_n \in \text{Con}\langle A, f \rangle$.

Пусть $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in A$ и $x_1\beta_n y_1, x_2\beta_n y_2, x_3\beta_n y_3$. В случаях, когда $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ или $t(x_i) \leq n, t(y_i) \leq n, i = 1, 2, 3$, стабильность β_n относительно операции $d(x, y, z)$ вытекает из определения отношения β_n .

Рассмотрим случай, когда $t(x_i) \leq n$, $t(y_i) \leq n$, $i = 2, 3$ и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n$. Тогда, из определения отношения β_n следует, что $x_1 = y_1$. По лемме 10 [21],

$$k(x_1, x_2) = \max\{t(x_1), t(x_2)\} = t(x_1) > n$$

и $k(x_2, x_3) \leq n$. Отсюда, учитывая (2) и (4), имеем

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ x_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Аналогично получаем, что

$$d(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_1, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ y_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Откуда, $d(x_1, x_2, x_3)\beta_n d(y_1, y_2, y_3)$.

Случай, когда $t(x_i) \leq n$, $t(y_i) \leq n$, $i = 1, 2$ и $t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$ аналогичен предыдущему.

Рассмотрим случай, когда $t(x_i) \leq n$, $t(y_i) \leq n$, $i = 1, 3$ и $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n$. Из определения отношения β_n следует, что $x_2 = y_2$. По лемме 10 [21],

$$k(x_1, x_2) = \max\{t(x_1), t(x_2)\} = t(x_2) = \max\{t(x_2), t(x_3)\} = k(x_2, x_3).$$

Отсюда,

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ x_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Аналогично,

$$d(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_2, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ y_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Откуда, $d(x_1, x_2, x_3)\beta_n d(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $t(x_3) \leq n$, $t(y_3) \leq n$ и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n$, $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n$. Тогда, по определению отношения β_n , имеем $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Предположим, что $t(x_1) > t(x_2)$. По лемме 10 [21], $k(x_1, x_2) = t(x_1)$ и $k(x_2, x_3) = t(x_2)$. Тогда

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ x_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Аналогично,

$$d(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_1, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ y_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Отсюда, $d(x_1, x_2, x_3)\beta_n d(y_1, y_2, y_3)$. Если $t(x_1) < t(x_2)$, то рассуждения аналогичны.

Пусть теперь $t(x_1) = t(x_2)$. По лемме 10 [21], $k(x_1, x_2) \leq t(x_1) = t(x_2) = k(x_2, x_3)$. Если $k(x_1, x_2) < k(x_2, x_3)$, то

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_3, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ x_1, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_3, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ y_1, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Откуда, $d(x_1, x_2, x_3)\beta_n d(y_1, y_2, y_3)$. Если же $k(x_1, x_2) = k(x_2, x_3)$, то

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ x_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_2, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ y_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

что вновь приводит к $d(x_1, x_2, x_3)\beta_n d(y_1, y_2, y_3)$.

Случай, когда $t(x_1) \leq n, t(y_1) \leq n$ и $t(x_2) > n$ или $t(y_2) > n, t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$ аналогичен предыдущему.

Рассмотрим последний случай, когда $t(x_2) \leq n, t(y_2) \leq n$ и $t(x_1) > n$ или $t(y_1) > n, t(x_3) > n$ или $t(y_3) > n$. Из определения отношения β_n имеем $x_1 = y_1, x_3 = y_3$. По лемме 10 [21], $k(x_1, x_2) = t(x_1) = t(y_1) = k(y_1, y_2)$ и $k(x_2, x_3) = t(x_3) = t(y_3) = k(y_2, y_3)$. Если $t(x_1) < t(x_3)$, то и $t(y_1) < t(y_3)$. Тогда

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_3, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ x_1, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_3, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ y_1, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Откуда, $d(x_1, x_2, x_3)\beta_n d(y_1, y_2, y_3)$.

Если $t(x_1) = t(x_3)$, то и $t(y_1) = t(y_3)$. Тогда

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ x_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_2, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ y_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Отсюда, $d(x_1, x_2, x_3)\beta_n d(y_1, y_2, y_3)$.

Если $t(x_1) > t(x_3)$, то

$$d(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ x_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

и, аналогично,

$$d(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_1, & \text{если } d(x, y, z) = s(x, y, z); \\ y_3, & \text{если } d(x, y, z) = m(x, y, z). \end{cases}$$

Откуда, $d(x_1, x_2, x_3)\beta_n d(y_1, y_2, y_3)$. $\square$

ЛЕММА 10. Пусть $\langle A, d, f, 0 \rangle$ — алгебра с оператором f , где $d(x_1, x_2, x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (1)–(4), и нулевой операцией 0 , для которой $f(0) = 0$. Пусть также $\langle A, f \rangle$ — связный унар с узловым элементом $v \in A$, где $v \neq 0$. Если глубина унара $t(A) < \infty$, то $t(v) \neq t(A) - 1$. Тогда алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ не является локально когерентной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет условиям леммы. По условию существуют различные элементы $x, y, a \in A$ такие, что $f(x) = f(y) = v$ и $t(a) \geq t(v) + 2$. Без ограничения общности, пусть $f^m(a) = x$, где $m > 0$. Рассмотрим подунар $C_1^{t(a)}$ с образующим a и конгруэнцию $\beta_{t(x)}$. По построению подунар $C_1^{t(a)}$ не содержит класс $[0]_{\beta_{t(x)}}$. По определению конгруэнции $\beta_{t(x)}$, подунар $C_1^{t(a)}$ содержит класс $[a]_{\beta_{t(x)}}$. Таким образом, алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ не является локально когерентной. $\square$

Будем называть *унаром специального вида* неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром, который либо не имеет узловых элементов, либо имеет единственный узловой элемент, являющийся неподвижным.

ЛЕММА 11. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f , где $d(x_1, x_2, x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (1)–(4). Следующие утверждения верны.

1. Пусть $B \subseteq A$ и операция f на B инъективна. Тогда $k(a, b) = \infty$ для различных элементов $a, b \in B$.
2. Пусть $\theta \in \text{Con}\langle A, d, f \rangle$, $\theta \neq \nabla$. Тогда, для любых $a, b \in A$, из условия $a\theta b$ следует $k(a, b) < \infty$.
3. Пусть $\langle A, f \rangle$ — унар специального вида, $\theta \in \text{Con}\langle A, d, f \rangle$, $(b, c) \in \theta$, $b \neq c$ и $t(b) \leq t(c)$. Тогда для любых $x, y \in A$ из $t(x) \leq t(c)$ и $t(y) \leq t(c)$ следует, что $x\theta y$.
4. Если $\langle A, f \rangle$ — унар специального вида, то любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f \rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n \geq 0$.
5. Пусть унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ — неодноэлементный связный унар, имеющий одноэлементный подунар. Пусть также $\theta \in \text{Con}\langle A, d, f \rangle$, $(b, c) \in \theta$, $b \neq c$ и $t(b) < t(c)$ для некоторых $b, c \in A$. Тогда для любых $x, y \in A$ из $t(x) < t(c)$ и $t(y) < t(c)$ следует, что $x\theta y$ и $x, y \in [c]\theta$.
6. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный неодноэлементный связный унар с одноэлементным подунаром и $c \in A$. Если элемент c и все элементы из A , имеющие глубину, меньшую $t(c)$, лежат в некотором классе конгруэнции $\theta \in \text{Con}\langle A, d, f \rangle$, то все элементы глубины $t(c)$ лежат в этом классе.
7. Если конгруэнция θ удовлетворяет предыдущему условию, то $\theta = \beta_{t(c)}$.
8. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ представляется в виде суммы подунаров B и C , где B — произвольная компонента связности, на которой операция f не инъективна, а C — подунар с инъективной операцией. Тогда любая нетривиальная конгруэнция θ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ является расширением некоторой конгруэнции ее подалгебры $\langle B, d, f \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Следует из определения $k(x, y)$.

2) Для операций $p(x, y, z)$ и $t(x, y, z)$ утверждение доказано в [31, лемма 2] и [32, лемма 5] соответственно. Воспользуемся рассуждениями этих работ и докажем утверждение для операции $s(x, y, z)$.

Пусть $k(a, b) = \infty$. Предположим, что $a\theta b$. Так как $\theta \neq \nabla$, то $(b, c) \notin \theta$ для некоторого $c \in A$. Поскольку $k(a, b) = \infty \geq k(b, c)$, то из (2) имеем $s(a, b, c) = a$ или $s(a, b, c) = b$. С другой стороны, $s(b, b, c) = c$, что противоречит выбору пары (b, c) .

3) Для операций $p(x, y, z)$ и $t(x, y, z)$ утверждение доказано в [21, лемма 11] и [32, лемма 4] соответственно. Воспользуемся рассуждениями этих работ и докажем утверждение для операции $s(x, y, z)$.

Из условия $t(b) \leq t(c)$, по следствию 2 [21], вытекает $k(b, c) = t(c)$. Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $t(x), t(y) \leq t(c)$. По следствию 2 [21], $k(x, b) = \max\{t(b), t(x)\}$. Отсюда, по условию,

$$k(x, b) \leq t(c) = k(b, c).$$

Тогда, из (2) получаем, что $s(x, b, c) = b$ или $s(x, b, c) = c$. В то же время, $s(x, c, c) = x$, откуда $x\theta b$. Аналогично, $y\theta b$ и, окончательно, $x\theta y$.

4) Для операций $p(x, y, z)$ и $m(x, y, z)$ утверждение доказано в [21, лемма 12] и [32, следствие 1] соответственно. Воспользуемся рассуждениями этих работ и докажем утверждение для операции $s(x, y, z)$.

Пусть θ — неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$. Поскольку, $\Delta = \sigma_0$, то рассмотрим $\theta \neq \Delta$. Допустим, что глубины всех элементов унара, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ , ограничены глубиной некоторого элемента c . Тогда $(b, c) \in \theta$ для некоторого $b \in A$, где $t(b) \leq t(c)$ и $b \neq c$. Поскольку для любых различных $x, y \in A$, таких, что $(x, y) \in \theta$, выполняются условия $t(x) \leq t(c)$ и $t(y) \leq t(c)$, то по следствию 3 [21] имеем, что $(x, y) \in \sigma_{t(c)}$. Отсюда, $\theta \leq \sigma_{t(c)}$.

Допустим, что $x \neq y$ и $(x, y) \in \sigma_{t(c)}$. Тогда, по следствию 3 [21], имеем $t(x) \leq t(c)$ и $t(y) \leq t(c)$. Отсюда, по утверждению пункта 3, имеем $(x, y) \in \theta$. Таким образом, $\sigma_{t(c)} \leq \theta$ и $\theta = \sigma_{t(c)}$.

Предположим теперь, что глубины элементов, принадлежащих нетривиальным парам конгруэнции θ не ограничены в совокупности. Так как $\theta \neq \nabla$, то $(x, y) \notin \theta$ для некоторых $x, y \in A$. По предположению, найдется такой элемент c , входящий в некоторую пару $(b, c) \in \theta$, что $t(x) < t(c)$ и $t(y) < t(c)$. В силу симметричности θ , можно считать, что $t(b) \leq t(c)$. Тогда, по утверждению пункта 3 имеем $x\theta y$, что противоречит выбору x, y .

5) Для операции $p(x, y, z)$ утверждение доказано в [33, лемма 4]. Докажем утверждение для операций $m(x, y, z)$ и $s(x, y, z)$.

Пусть $\theta \in \text{Con}\langle A, d, f \rangle$, $(b, c) \in \theta$, $b \neq c$ и $t(b) < t(c)$ для некоторых $b, c \in A$. Из последнего, в силу леммы 10 [21], вытекает $k(b, c) = t(c)$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $t(x) < t(c)$, и $t(y) < t(c)$. По лемме 10 [21], $k(x, c) = t(c)$. Тогда, из (2) получаем, что $s(x, c, b) = c$. В то же время, $s(x, c, c) = x$, откуда получаем $x\theta c$. Из (4) получаем, что $m(b, c, x) = x$. В то же время, $m(c, c, x) = c$, откуда получаем $x\theta c$. Аналогично, $y\theta c$ и, окончательно, $x\theta y$.

6) Для операции $p(x, y, z)$ утверждение доказано в [33, следствие 1]. Докажем утверждение для операций $m(x, y, z)$ и $s(x, y, z)$.

Пусть a — неподвижный элемент унара $\langle A, f \rangle$. По условию, $a\theta c$. Предположим, что для некоторого элемента $x \in A$, где $t(x) = t(c)$, утверждение леммы не выполняется, то есть $x \notin [c]\theta$. Поскольку $t(x) = t(c)$, то $k(x, a) = k(a, c)$. Тогда из (2) получаем, что $s(x, c, a) = c$. В то же время, $s(x, a, a) = x$, откуда $x\theta c$, что противоречит предположению.

Аналогично из (4) получаем, что $m(c, a, x) = x$. В то же время, $m(c, c, x) = c$, откуда $x\theta c$, что противоречит предположению.

7) Утверждение следует из утверждения пункта 6) и определения отношения β_n .

8) Для операций $p(x, y, z)$ и $m(x, y, z)$ утверждение доказано в [20, лемма 15] и [32, лемма 6] соответственно. Воспользуемся рассуждениями этих работ и докажем утверждение для операции $s(x, y, z)$.

Достаточно показать, что любой элемент из C порождает одноэлементный класс конгруэнции θ . Из утверждений пунктов 1 и 2 следует, что $(x, y) \notin \theta$ для любых несовпадающих $x, y \in C$. Пусть $b \in B$, $c \in C$. Так как элементы b и c лежат в разных компонентах связности, то $k(a, b) = \infty$. Тогда, из утверждения пункта 2 имеем, $(b, c) \notin \theta$. $\square$

ЛЕММА 12. Пусть $\langle A, d, f, 0 \rangle$ — алгебра с оператором f , где $d(x_1, x_2, x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (1)–(4), и нулевой операцией 0 , для которой $f(0) = 0$. Пусть также связный унар $\langle A, f \rangle$ содержит единственный узловой элемент 0 . Тогда алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ является слабо когерентной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны два случая.

Случай 1: $t(A) = 1$.

Алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ является конгруэнц-простой, поскольку по теореме 2 [21], теореме 9 [30] и теореме 2 [29] соответствующие алгебры конгруэнц-просты. Следовательно, алгебра $\langle A, p, f, 0 \rangle$ является слабо когерентной.

Случай 2: $t(A) > 1$.

По утверждению 4 леммы 11 имеем, что любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f \rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n \geq 0$. При этом любая подалгебра $\langle B, d, f, 0 \rangle$ алгебры $\langle A, d, f, 0 \rangle$ либо не содержит класс $[0]\sigma_n$, либо содержит класс $[0]\sigma_n$ для некоторого $n > 0$.

Случаи когда подалгебра $\langle B, d, f, 0 \rangle$ не содержит класс $[0]\sigma_n$, либо является классом $[0]\sigma_n$ для некоторого $n > 0$, очевидны.

Рассмотрим случай когда подалгебра $\langle B, d, f, 0 \rangle$ строго содержит класс $[0]\sigma_n$. Тогда существует элемент $b \in B$ такой, что $b \notin [0]\sigma_n$. Следовательно, $t(b) > n$. Тогда по определению конгруэнции σ_n имеем, что $[b]\sigma_n = \{b\}$. Откуда, $B = [0]\sigma_n \cup \left(\bigcup_{b \in B, t(b) > n} [b]\sigma_n \right)$.

Для любого $m < n$ подалгебра $\langle B, d, f, 0 \rangle$ содержит класс $[0]\sigma_m$. По замечанию 1 и рассмотренному выше имеем, что подалгебра $\langle B, d, f, 0 \rangle$ содержит класс $[0]\sigma_m$ и есть объединение классов конгруэнции σ_m . Таким образом, алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ является слабо когерентной. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\langle A, d, f, 0 \rangle$ — алгебра с оператором f , где $d(x_1, x_2, x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (1)–(4), и нулевой операцией 0 , для которой $f(0) = 0$. Алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ является слабо когерентной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ является одним из следующих:

1. произвольный унар с инъективной операцией;
2. связный унар, который не содержит узловых элементов, за исключением, может быть, элемента 0 ;
3. сумма унара из пункта 2 и произвольного унара с инъективной операцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ не удовлетворяет условиям 1–3. Тогда по лемме 6, алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ не является слабо когерентной.

Достаточность. Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ удовлетворяет условию 1, то по теореме 2 [21], теореме 9 [30] и теореме 2 [29] соответствующие алгебры конгруэнц-просты. Следовательно, алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ слабо когерентна.

Пусть теперь алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ удовлетворяет условию 2, тогда по лемме 12 алгебра слабо когерентна. Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ удовлетворяет условию 3, то по лемме 12 и утверждению 8 леммы 11 алгебра является слабо когерентной. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\langle A, d, f, 0 \rangle$ — алгебра с оператором f , где $d(x_1, x_2, x_3)$ — операция, определенная по одному из правил (1)–(4), и нулевой операцией 0 , для которой $f(0) = 0$. Алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ является локально когерентной тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ является одним из следующих:

1. произвольный унар содержащий одноэлементную компоненту порожденную 0 или одноэлементный унар;

2. унар, в котором для всех $x \in A$ выполняется $f(x) = 0$, где $|A| \geq 3$;
3. унар $C_1^t, t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
4. связный унар конечной глубины $t(A)$, в котором существует единственный узловый элемент $a \neq 0$, глубина которого равна $t(A) - 1$, и других узловых элементов нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ не удовлетворяет условиям 1–4. Тогда по леммам 7 и 10, алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ не является локально когерентной.

Достаточность. Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ удовлетворяет условию 1. Пусть θ — нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f, 0 \rangle$ и $a \in A \setminus \{0\}$. Так как элементы a и 0 лежат в разных компонентах связности, то $k(a, b) = \infty$. Тогда, по утверждению 2 леммы 11, $(b, c) \notin \theta$. Таким образом, $[0]\theta$ — одноэлементный класс конгруэнции θ . Поскольку, любая подалгебра алгебры $\langle A, d, f, 0 \rangle$ содержит элемент 0 , то алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ локально когерентна.

Пусть теперь алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ удовлетворяет условию 2 или условию 3, то по теореме 2 [21], теореме 9 [30] и теореме 2 [29] соответствующие алгебры конгруэнц-просты. Следовательно, алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ локально когерентна.

Пусть алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ удовлетворяет условию 4. Пусть θ — нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, d, f, 0 \rangle$ и $\langle B, d, f, 0 \rangle$ — собственная подалгебра алгебры $\langle A, d, f, 0 \rangle$. Предположим, что алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ не локально когерентна. Тогда существует элемент $x \in A$ такой, что $[x]\theta \subseteq B$, но $[0]\theta \not\subseteq B$. Значит существуют элементы $a \in A \setminus B$ и $b \in B$ такие, что $a, b \in [0]\theta$. Без ограничения общности, пусть $t(b) \leq t(a)$. Тогда по утверждениям 5 и 7 леммы 11, $\theta = \beta_{t(a)}$. По определению конгруэнции $\beta_{t(a)}$, $[0]\theta = [0]\beta_{t(a)}$. Откуда, не существует элемента $x \in A$ такого, что $[x]\beta_{t(a)} \subseteq B$, что противоречит предположению. Таким образом, алгебра $\langle A, d, f, 0 \rangle$ локально когерентна. $\square$

6. Заключение

Хочется выразить сердечную благодарность заведующему кафедрой алгебры, геометрии и математического анализа ФГБОУ ВО «ВГСПУ», талантливому педагогу и удивительному человеку В. К. Карташову за внимание, заботу, за мудрые советы и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Geiger D. Coherent algebras // Notices Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 21. A-436.
2. Taylor W. Uniformity of congruences // Algebra Universalis. 1974. Vol. 4. Pp. 342–360. doi:10.1007/BF02485747
3. Beazer R. Coherent De Morgan algebras // Algebra Universalis. 1987. Vol. 24, Issue 1. Pp. 128–136. doi:10.1007/BF01188390
4. Adams M. E., Atallah M., and Beazer R. Congruence distributive double p -algebras // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1996. Vol. 39. issue 2. Pp. 71–80. doi: 10.1017/S0013091500022793
5. Duda J. $A \times A$ congruence coherent implies A congruence regular // Algebra Universalis. 1991. Vol. 28. Pp. 301–302 doi: 10.1007/BF01190858
6. Blyth T. S., Fang J. Congruence coherent double MS-algebras // Glasgow Math. J. 1999. Vol. 41. Issue 2. Pp. 289–295.
7. Blyth T. S., Fang J. Congruence Coherent Symmetric Extended de Morgan Algebras // Studia Logica. 2007. Vol. 87. Pp. 51–63. doi:10.1007/s11225-007-9076-3

8. Chajda I., Duda J. Rees algebras and their varieties // Publ. Math. (Debrecen). 1985. Vol. 32. Pp. 17–22.
9. Chajda I. Rees ideal algebras // Math. Bohem. 1997. Vol. 122. No. 2. Pp. 125–130.
10. Šešelja B., Tepavčević A. On a characterization of Rees varieties // Tatra Mountains Math. Publ. 1995. Vol. 5. Pp. 61–69.
11. Duda J. Rees sublattices of a lattice // Publ. Math. 1988. Vol. 35. Pp. 77–82.
12. Varlet J. C. Nodal filters in semilattices // Comm. Math. Univ. Carolinae. 1973. Vol. 14. Pp. 263–277.
13. Johnsson B. A survey of Boolean algebras with operators // Algebras and Orders, NATO ASI Series. 1993. Vol. 389. Pp. 239–286.
14. Hyndman J., Nation J. B., Nishida J. Congruence Lattices of Semilattices with Operators // Studia Logica. 2016. Vol. 104. issue 2. Pp. 305–316. doi:10.1007/s11225-015-9641-0
15. Bonsangue M. M., Kurz A., Rewitzky I. M. Coalgebraic representations of distributive lattices with operators // Topology and its Applications. 2007. Vol. 154. No. 4. Pp. 778–791.
16. Adaricheva K. V., Nation J. B. Lattices of quasi-equational theories as congruence lattices of semilattices with operators: part I, part II // International Journal of Algebra and Computation. 2012. Vol. 22. Issue 07, part I: 27 p., part II: 16 p.
17. Nurakunov A. M. Equational theories as congruences of enriched monoids // Algebra Universalis. 2008. Vol. 58. No. 3. Pp. 357–372.
18. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
19. Артамонов В. А. [и др.] Общая алгебра. Т.2. / под общей ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. 480 с.
20. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Известия Волг. гос. пед. ун-та, сер. "Естественные и физико-математические науки". 2005. N 4(13). С. 17–24.
21. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 7. С. 189–207.
22. Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978. Вып. 5. С. 11–44.
23. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15. Вып. 3. С. 100–113.
24. Chajda I. Weak coherence of congruences // Czechoslovak Math. J. 1991. Vol. 41. no. 1. Pp. 149–154.
25. Chajda I. Locally coherent algebras // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math. 1999. Vol. 38. no. 1. Pp. 43–48.
26. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.

27. Pixley A.F. Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1963. Vol. 14. No. 1. Pp. 105–109.
28. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p , заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // *Чебышевский сб.* 2011. Т. 12. Вып. 2. С. 127–134.
29. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // *Чебышевский сб.* 2013. Т. 14. Вып. 4. С. 196–204.
30. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // *Уч. зап. Орловского гос. ун-та.* 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.
31. Усольцев В. Л. О гамильтоновом замыкании на классе алгебр с одним оператором // *Чебышевский сб.* 2015. Т. 16, вып. 4. С. 284–302.
32. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // *Чебышевский сб.* 2016. Т. 17. Вып. 4. С. 157–166.
33. Лата А. Н. О коатомах и дополнениях в решетках конгруэнций унаров с мальцевской операцией // *Чебышевский сб.* 2015. Т. 16. Вып. 4. С. 212–226.

REFERENCES

1. Geiger, D. 1974, “Coherent algebras“, *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 21, A-436.
2. Taylor, W. 1974, “Uniformity of congruences“, *Algebra Universalis*, vol. 4, no. 1, pp. 342–360. doi:10.1007/BF02485747
3. Beazer, R. 1987, “Coherent De Morgan algebras“, *Algebra Universalis*, vol. 24, no. 1, pp. 128–136. doi:10.1007/BF01188390
4. Adams, M. E., Atallah, M. & Beazer, R. 1996, “Congruence distributive double p -algebras“, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, vol. 39, no. 2, pp. 71–80. doi: 10.1017/S0013091500022793
5. Duda, J. 1991, “ $A \times A$ congruence coherent implies A congruence regular“, *Algebra Universalis*, vol. 28, no. 2, pp. 301–302. doi: 10.1007/BF01190858
6. Blyth, T. S., Fang, J. 1999, “Congruence coherent double MS-algebras“, *Glasgow Math. J.*, vol. 41, no. 2, pp. 289–295.
7. Blyth, T. S., Fang, J. 2007, “Congruence Coherent Symmetric Extended de Morgan Algebras“, *Studia Logica*, vol. 87, no. 1, pp. 51–63. doi:10.1007/s11225-007-9076-3
8. Chajda, I., Duda, J. 1985, “Rees algebras and their varieties“, *Publ. Math. (Debrecen)*, vol. 32, pp. 17–22.
9. Chajda, I. 1997, “Rees ideal algebras“, *Math. Bohem.*, vol. 122, no. 2, pp. 125–130.
10. Šešelja, B., Tepavčević, A. 1995, “On a characterization of Rees varieties“, *Tatra Mountains Math. Publ.*, vol. 5, pp. 61–69.
11. Duda, J. 1988, “Rees sublattices of a lattice“, *Publ. Math. (Debrecen)*, vol. 35, pp. 77–82.
12. Varlet, J. C. 1973, “Nodal filters in semilattices“, *Comm. Math. Univ. Carolinae*, vol. 14, no. 2, pp. 263–277.

13. Johnsson, B. 1993, "A survey of Boolean algebras with operators", *Algebras and Orders, NATO ASI Series*, vol. 389, pp. 239–286. doi: 10.1007/978-94-017-0697-1_6
14. Hyndman, J., Nation, J.B. & Nishida, J. 2016, "Congruence Lattices of Semilattices with Operators", *Studia Logica*, vol. 104, no. 2, pp. 305–316. doi:10.1007/s11225-015-9641-0
15. Bonsangue, M.M., Kurz, A. & Rewitzky, I.M. 2007, "Coalgebraic representations of distributive lattices with operators", *Topology and its Applications*, vol. 154, no. 4, pp. 778–791. doi: 10.1016/j.topol.2005.10.010
16. Adaricheva, K.V., Nation, J.B. 2012, "Lattices of quasi-equational theories as congruence lattices of semilattices with operators: part I, part II", *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 22, issue 07, part I: 27 pp. doi: 10.1142/S0218196712500658; part II: 16 pp. doi: 10.1142/S021819671250066X
17. Nurakunov, A.M. 2008, "Equational theories as congruences of enriched monoids", *Algebra Universalis*, vol. 58, no. 3, pp. 357–372. doi: 10.1007/s00012-008-2080-2
18. Grätzer, G. 1978, "General Lattice Theory *Akademie-Verlag*, Berlin.
19. Artamonov, V.A., Salii, V.N., Skorniyakov, L.A., Shevrin, L.N. & Shul'geifer, E.G. 1991, "Obshchaya algebra. Tom 2"[General algebra. Vol. 2], in Skorniyakov, L.A. (ed.), *Nauka*, Moscow, 480 pp. (Russian)
20. Usol'tsev, V.L. 2005, "On subdirect irreducible unars with Mal'tsev operation", *Izvestiya VGPU. Seriya estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki*, Volgograd, no. 4(13), pp. 17–24. (Russian)
21. Usol'tsev, V.L. 2008, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 14, no. 7, pp. 189–207 (Russian); translation in *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 281–293. doi: 10.1007/S1095800997306
22. Egorova, D.P. 1978, "The congruence lattice of unary algebra", *Uporyadochennyye Mnozhestva i Reshetki: Mezhvuzovskiy Nauchnyy Sbornik*, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, Saratov, issue 5, pp. 11–44. (Russian)
23. Chajda, I. 1991, "Weak coherence of congruences", *Czechoslovak Math. J.*, vol. 41, no. 1, pp. 149–154.
24. Chajda, I. 1999, "Locally coherent algebras", *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math.*, vol. 38, no. 1, pp. 43–48.
25. Kartashov, V.K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skorniyakova (Universal algebra and application: theses of International workshop dedicated memory of prof. L.A. Skorniyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)
26. Pixley, A.F. 1963, "Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 14, no. 1, pp. 105–109. doi: 10.1090/S0002-9939-1963-0146104-X
27. Usol'tsev, V.L. 2011, "Free algebras of variety of unars with Mal'tsev operation p , define by identity $p(x, y, x) = y$ ", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, issue 2, pp. 127–134. (Russian)

28. Usol'tsev, V.L. 2013, "On strictly simple ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 14, issue 4, pp. 196–204. (Russian)
29. Usol'tsev, V.L. 2012, "On polynomially complete and abelian unars with Mal'tsev operation", *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta*, Izdatel'stvo Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta, Orel, vol. 6(50), part 2, pp. 229–236. (Russian)
30. Usol'tsev, V.L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 15, issue 3, pp. 100–113. (Russian)
31. Usol'tsev, V.L. 2015, "On hamiltonian closure on class of algebras with one operator", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 16, issue 4, pp. 284–302. (Russian)
32. Usol'tsev, V.L. 2016, "Rees algebras and rees congruence algebras of one class of algebras with operator and basic near-unanimity operation", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 17, issue 4, pp. 157–166. (Russian)
33. Lata, A.N. 2015, "On coatoms and complements in congruence lattices of unars with Mal'tsev operation", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 16, issue 4, pp. 212–226. (Russian)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Получено 26.05.2017

Получено 11.03.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 514.76

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-173-182

ИНВАРИАНТЫ ОБОБЩЕННЫХ f -ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

А. В. Никифорова (г. Москва)

Аннотация

Рассмотрены такие обобщения конформных преобразований почти контактных метрических многообразий, как обобщенные конформные преобразования, f -преобразования, обобщенные f -преобразования почти контактных метрических структур. Приведены компоненты тензорных полей почти контактной метрической структуры в A -реперах. Дано выражение компонент тензора аффинной деформации римановой связности для обобщенного конформного преобразования почти контактного метрического многообразия. Установлено, что ни один из шести структурных тензоров почти контактного метрического многообразия относительно этого преобразования не инвариантен. Далее выявлены структурные тензоры, инвариантные относительно f -преобразований — частного случая обобщенных конформных преобразований почти контактных метрических структур. Это второй, третий и пятый структурные тензоры. Для тех структурных тензоров, которые не инвариантны в общем случае, получены условия их инвариантности. После этого рассмотрен вопрос об инвариантности тех же структурных тензоров при обобщенных f -преобразованиях. Установлено, что второй структурный тензор инвариантен относительно рассматриваемых преобразований, третий и пятый тензоры являются относительными инвариантами, то есть инвариантно их обращение в ноль, а для первого структурного тензора получено условие инвариантности относительно обобщенного f -преобразования почти контактных метрических структур.

Ключевые слова: f -преобразование, почти контактные метрические структуры, структурные тензоры.

Библиография: 15 названий.

THE INVARIANTS OF GENERALIZED
 f -TRANSFORMATIONS FOR ALMOST CONTACT METRIC
STRUCTURES

A. V. Nikiforova (Moscow)

Abstract

In this paper we consider such generalizations of conformal transformations for contact metric manifolds as generalized conformal transformations, f -transformations, generalized f -transformations. Components of tensor fields for almost contact metric structure are given. These components are found in A -frame. Components for the tensor of affine deformation by Riemannian connection are calculated in this paper. We study six structure tensors of almost contact metric manifold. They are not invariant under generalized conformal transformations. We consider a particular case of the generalized conformal transformation, i.e. f -transformation, third, fifth structure tensors are invariant under this transformation. Conditions of invariance for other structure tensors are received. The invariance of six structure tensors under generalized f -transformations is studied. The second structure tensor is invariant under the generalized f -transformation. Vanishing of third and fifth structure tensors is invariant

under this transformation. We got the conditions of invariance under these transformations for first structured tensor under generalized f -transformation.

Keywords: f -transformation, almost contact metric structure, structured tensors.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Конформные преобразования псевдо-римановых многообразий являются классическим объектом изучения многомерной дифференциальной геометрии. Такие преобразование рассматривались в работах Б. Римана, Г. Вейля и др. Под ними понимается переход от псевдо-римановой метрики g к метрике $\tilde{g}$ по формуле $\tilde{g} = e^{2f}g$, где f — гладкая на многообразии функция. Позже, в связи с активными исследованиями пост римановых многообразий и псевдо-римановых многообразий, наделенных дополнительными структурами, стали актуальны исследования обобщений конформных преобразований. Например, в работе Л. Смолли [1] рассмотрены расширенные конформные преобразования пространства Картана–Вейля. В работе Б. Н. Фролова [2] классические конформные преобразования были перенесены на пространство Римана–Картана, и названы конформными σ -преобразованиями. Другие виды обобщений конформных преобразований используются в работах [3], [4], [5].

Классическими примерами римановых многообразий, наделенных дополнительными структурами, являются почти эрмитовы и почти контактные метрические многообразия.

В начале 50-х годов двадцатого века в работе [6] Дж. Грея было введено понятие почти контактного метрического многообразия. Почти контактные метрические структуры индуцируются на пространствах главных тороидальных расслоений над почти эрмитовыми многообразиями, а также на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. Исследованием конформных преобразований почти контактных метрических структур занимались Чиней и Марреро [7], Ольчак [8], Кириченко и Левковец [9], и другие.

Кроме римановой метрики, на почти контактном метрическом многообразии определены еще три структурных тензорных поля. Чтобы при конформном преобразовании римановой метрики новое многообразие получилось почти контактным метрическим, надо сохранить согласованность структурных тензорных полей в преобразованном многообразии, для чего конформное преобразование необходимо определить по-другому. А именно (см. например [10], [11]): $\tilde{g} = e^{2f}g$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{\xi} = e^{-f}\xi$, $\tilde{\eta} = e^f\eta$.

Если же положить тензорные поля Φ , ξ и η инвариантными относительно некоторого преобразования, то условия согласованности удастся сохранить, например, при преобразовании метрики g по формуле $\tilde{g}(X, Y) = e^{2f}g(\Phi X, \Phi Y) + \eta X \eta Y$. Такие преобразования называются f -преобразованиями. Они были рассмотрены Е. В. Родиной в [12] и являются частным случаем более общего преобразования, введенными Л. А. Игнаточкиной в [13] — обобщенных конформных преобразований при $\tilde{\eta} = \eta$.

2. Тензорные поля почти контактной метрической структуры

Пусть M — гладкое многообразие.

Четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g) , где Φ тензорное поле типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — дифференциальная 1-форма, g — риманова метрика, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} 1) \Phi^2 &= -id + \xi \otimes \eta; \quad 2) \Phi(\xi) = 0; \quad 3) \eta \circ \Phi = 0; \quad 4) \eta(\xi) = 1; \\ 5) g(\Phi X, \Phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \end{aligned} \tag{1}$$

где X и Y — векторные поля, называется *почти контактной метрической структурой* на многообразии M .

Гладкое многообразие M , на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием*.

Пусть $t \in M$ — произвольная фиксированная точка гладкого многообразия M , $T_m(M)$ — касательное пространство в этой точке.

Рассмотрим два отображения

$$\ll: T_m(M) \rightarrow T_m(M); \quad \mathfrak{m}: T_m(M) \rightarrow T_m(M),$$

которые задаются формулами

$$\ll = -\Phi_m^2; \quad \mathfrak{m} = \xi_m \otimes \eta_m,$$

где $\Phi_m = \Phi(m)$, $t \in M$ — значение тензорного поля Φ , рассматриваемого как гладкое сечение векторного расслоения тензоров типа $(1,1)$, в точке t . Это тензор типа $(1,1)$ на касательном пространстве $T_m(M)$. Аналогичным образом определяются тензоры ξ_m (вектор) и η_m (ковектор).

Отображения $\ll$ и $\mathfrak{m}$ являются $\mathbb{R}$ -линейными и представляют собой взаимно дополнительные проекторы, такие, что векторное пространство $T_m(M)$ распадается в прямую сумму их образов, то есть в нашем случае

$$T_m(M) = \mathfrak{L}_m \oplus \mathfrak{M}_m,$$

где введены обозначения $\mathfrak{L} \ll = \mathfrak{L}_m$; $\mathfrak{L}\mathfrak{m} = \mathfrak{M}_m$.

При этом подпространство $\mathfrak{M}_m$ одномерно, а подпространство $\mathfrak{L}_m$ является четномерным. Напомним, что модуль векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ распадается в прямую сумму распределений площадки которых для каждой точки $t \in M$ совпадают с $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{L}_m$ соответственно. Распределения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ называются первым и вторым фундаментальным распределениями соответственно [14].

Система $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, состоящая из собственных векторов комплексификации тензора Φ_m — оператора $\Phi_m^{\mathbb{C}}$, отвечающих собственным значениям i и $-i$ соответственно, образует базис комплексификации $\mathfrak{L}_m^{\mathbb{C}}$. Добавим к этой системе вектор ξ_m , который также будем обозначать ε_0 . Тогда система векторов

$$(\xi_m \equiv \varepsilon_0, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}) \quad (2)$$

будет образовывать базис комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ касательного пространства $T_m(M)$. Он называется *адаптированным базисом*, или короче *A-базисом*. Будем считать, что индексы $a, b, c, d, \dots$ пробегает значения $1, \dots, n$, индексы $i, j, k, \ell, \dots$ пробегает значения $0, 1, \dots, 2n$ и $\hat{a} = a + n$. Тогда A-базис коротко можно обозначить следующим образом: (ε_i) .

Назовем *A-репером* набор $p = (t, \varepsilon_i)$, где $t \in M$, (ε_i) — A-базис в комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ касательного пространства $T_m(M)$. Компоненты $\{\Phi_j^i\}$; $\{\xi^i\}$; $\{\eta_i\}$; $\{g_{ij}\}$ тензорных полей (Φ, ξ, η, g) почти контактной метрической структуры в A-реперах имеют следующий вид:

$$\Phi_0^0 = 0; \Phi_a^0 = \Phi_0^a = 0; \Phi_{\hat{a}}^0 = \Phi_0^{\hat{a}} = 0; \Phi_b^a = \Phi_{\hat{b}}^{\hat{a}} = 0; \Phi_b^a = i\delta_b^a; \Phi_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -i\delta_a^b; \quad (3)$$

$$\xi^0 = 1; \xi^a = \xi^{\hat{a}} = 0; \eta_0 = 1; \eta_a = \eta_{\hat{a}} = 0;$$

$$g_{00} = 1; g_{a0} = g_{0a} = 0; g_{0\hat{a}} = g_{\hat{a}0} = 0; g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0; g_{\hat{a}b} = g_{b\hat{a}} = \delta_b^a.$$

3. Обобщенные конформные преобразования почти контактных метрических многообразий и их инварианты

Пусть $M, (\Phi, \xi, \eta, g)$ — почти контактное метрическое многообразие. Рассмотрим на этом многообразии новую четверку $(\tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$, где

$\tilde{\eta}$ — произвольная 1-форма, такая что $\tilde{\eta}(\xi) \neq 0$;

$$\tilde{\xi} = (\tilde{\eta}(\xi))^{-1} \xi;$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi - (\tilde{\eta} \circ \Phi) \otimes \tilde{\xi};$$

$$\tilde{g} = e^{2f}(g - \eta \otimes \eta) + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}. \quad (4)$$

Здесь f — произвольная, гладкая на M , функция. Переход от четверки (Φ, ξ, η, g) к $(\tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ называется *обобщенным конформным преобразованием почти контактного метрического многообразия M* .

Применив основную теорему римановой геометрии для метрики $\tilde{g}$ при вычислении тензора аффинной деформации обобщенных конформных преобразований $T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, где ∇ и $\tilde{\nabla}$ — римановы связности метрик g и $\tilde{g}$, получили следующий результат:

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(T(X, Y), Z) = & 2e^{2f}\beta Xg(Y, Z) + 2e^{2f}\beta Yg(Z, X) - 2e^{2f}\beta Zg(X, Y) - \\ & - 2e^{2f}X(f)\eta Y\eta Z - e^{2f}\nabla_X \eta Y\eta Z - e^{2f}\eta Y\nabla_X \eta Z + \nabla_X \tilde{\eta} Y\tilde{\eta} Z + \tilde{\eta} Y\nabla_X \tilde{\eta} Z - \\ & - 2e^{2f}Y(f)\eta Z\eta X - e^{2f}\nabla_Y \eta Z\eta X - e^{2f}\eta Z\nabla_Y \eta X + \nabla_Y \tilde{\eta} Z\tilde{\eta} X + \tilde{\eta} Z\nabla_Y \tilde{\eta} X + \\ & + 2e^{2f}Z(f)\eta X\eta Y + e^{2f}\nabla_Z \eta X\eta Y + e^{2f}\eta X\nabla_Z \eta Y - \nabla_Z \tilde{\eta} X\tilde{\eta} Y + \tilde{\eta} X\nabla_Z \tilde{\eta} Y \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь β — внешний дифференциал функции f . По определению $\beta(X) = df(X) = X(f)$. Запишем полученное равенство в компонентах:

$$\begin{aligned} 2T_{ij}^a = & (2e^{2f}\beta_i g_{jk} - 2e^{2f}\beta_i \eta_j \eta_k - e^{2f}\eta_{j,i} \eta_k - e^{2f}\eta_j \eta_{k,i} + \tilde{\eta}_{j,i} \tilde{\eta}_k + \tilde{\eta}_j \tilde{\eta}_{k,i} + \\ & + 2e^{2f}\beta_j g_{ki} - 2e^{2f}\beta_j \eta_k \eta_i - e^{2f}\eta_{k,j} \eta_i - e^{2f}\eta_k \eta_{i,j} + \tilde{\eta}_{k,j} \tilde{\eta}_i + \tilde{\eta}_k \tilde{\eta}_{i,j} - \\ & - 2e^{2f}\beta_k g_{ij} + 2e^{2f}\beta_k \eta_i \eta_j + e^{2f}\eta_{i,k} \eta_j + e^{2f}\eta_i \eta_{j,k} - \tilde{\eta}_{i,k} \tilde{\eta}_j - \tilde{\eta}_i \tilde{\eta}_{j,k}) \tilde{g}^{kq}. \end{aligned} \quad (6)$$

Матрица $\tilde{g}$ при этом в А-репере имеет вид:

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_0 \tilde{\eta}_0 & \tilde{\eta}_0 \tilde{\eta}_a & \tilde{\eta}_0 \tilde{\eta}_{\bar{a}} \\ \tilde{\eta}_a \tilde{\eta}_0 & \tilde{\eta}_a \tilde{\eta}_b & e^{2f} \delta_a^b + \tilde{\eta}_a \tilde{\eta}_{\bar{b}} \\ \tilde{\eta}_{\bar{a}} \tilde{\eta}_0 & e^{2f} \delta_{\bar{a}}^a + \tilde{\eta}_{\bar{a}} \tilde{\eta}_b & \tilde{\eta}_{\bar{a}} \tilde{\eta}_{\bar{b}} \end{pmatrix}$$

Воспользовавшись определением обратной матрицы: $\tilde{g}_{ij} \tilde{g}^{jk} = \delta_i^k$, получим:

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} (2e^{-2f} \tilde{\eta}_{\bar{a}} \tilde{\eta}_a + 1) \tilde{\eta}_0^{-2} & -e^{-2f} \tilde{\eta}_{\bar{a}} \tilde{\eta}_0^{-1} & -e^{-2f} \tilde{\eta}_a \tilde{\eta}_0^{-1} \\ -e^{-2f} \tilde{\eta}_{\bar{a}} \tilde{\eta}_0^{-1} & 0 & e^{-2f} \delta_b^a \\ -e^{-2f} \tilde{\eta}_a \tilde{\eta}_0^{-1} & e^{-2f} \delta_b^a & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь компоненты тензора аффинной деформации окончательно могут быть выражены через тензоры и функции, задающие обобщенное конформное преобразование. Напомним, что на почти контактном метрическом многообразии определено 6 структурных тензоров: B, C, D, E, F, G . Они выражаются через ковариантный дифференциал тензора Φ следующим образом [14]:

$$B(X, Y) = -\frac{1}{4}(\Phi^2 \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2 \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X));$$

$$C(X, Y) = -\frac{1}{4}(\Phi^2 \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X));$$

$$D(X) = -\frac{1}{2}(\Phi^2 \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi X));$$

$$E(X) = \frac{1}{2}(\Phi^2 \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi);$$

$$F(X) = -\frac{1}{2}(\Phi^2 \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi);$$

$$G = -\Phi \nabla_{\xi}(\Phi)\xi.$$

Тензор $\tilde{\Phi}$ тоже имеет свой ковариантный дифференциал, который также определяет шестерку структурных тензоров. Для того чтобы выяснить, какие из новых структурных тензоров совпадут со старыми, выразим $\tilde{\nabla}\tilde{\Phi}$ через тензор аффинной деформации и ковариантную производную тензора Φ в римановой связности исходного почти контактного метрического многообразия.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\tilde{\Phi})Y &= \nabla_X(\Phi)Y - \nabla_X(\tilde{\eta}(\Phi Y))\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(\nabla_X(\Phi)Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(\Phi Y)\nabla_X\tilde{\xi} + \\ &+ T(X, \Phi Y) - T(X, \tilde{\eta}(\Phi Y)\tilde{\xi}) - \Phi(T(X, Y)) + \tilde{\eta}\Phi(T(X, Y))\tilde{\xi} \end{aligned} \quad (7)$$

В [13] рассматривалось преобразование, являющееся частным случаем обобщенных конформных преобразований. Единственным инвариантом относительно этих преобразований оказался второй структурный тензор C . Таким образом, можно предположить, что если существует структурный тензор, инвариантный относительно обобщенных конформных преобразований, то это второй структурный тензор. Однако, при проведении вычислений, оказалось, что ни второй структурный тензор, ни остальные пять структурных тензоров почти контактного метрического многообразия не инвариантны относительно обобщенных конформных преобразований.

4. Инварианты f -преобразования почти контактных метрических многообразий

Частным случаем обобщенных конформных преобразований при $\tilde{\eta} = \eta$ являются f -преобразования [12]. По определению этом случае

$$\tilde{\eta} = \eta, \tilde{\xi} = \xi, \tilde{\Phi} = \Phi, \tilde{g} = e^{2f}(g - \eta \otimes \eta) + \eta \otimes \eta.$$

Кроме того, существенно упрощается матрица $\tilde{g}^{ij}$:

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2f}\delta_b^a \\ 0 & e^{-2f}\delta_b^a & 0 \end{pmatrix}$$

и тензор аффинной деформации, компоненты которого в A -репере вычисляются следующим

образом:

$$\begin{aligned}
T_{00}^0 &= 0; \quad T_{00}^a = (e^{-2f} - 1)\eta_{\hat{a},0}; \quad T_{00}^{\hat{a}} = (e^{-2f} - 1)\eta_{a,0}; \\
T_{a0}^0 &= T_{0a}^0 = T_{\hat{a}0}^0 = T_{0\hat{a}}^0 = 0; \quad T_{ab}^0 = (1 - e^{2f})\eta_{(a,b)}; \quad T_{\hat{a}\hat{b}}^0 = (1 - e^{2f})\eta_{(\hat{a},\hat{b})}; \\
2T_{\hat{a}b}^0 &= 2T_{b\hat{a}}^0 = (1 - e^{2f})\eta_{b,\hat{a}} + (1 - e^{2f})\eta_{\hat{a},b} - 2e^{2f}\beta_0\delta_b^a; \\
2T_{a0}^b &= 2T_{0a}^b = (e^{-2f} - 1)(\eta_{\hat{b},a} - \eta_{a,\hat{b}}) + 2\beta_0\delta_a^b; \\
2T_{\hat{a}0}^{\hat{b}} &= 2T_{0\hat{a}}^{\hat{b}} = (e^{-2f} - 1)(\eta_{b,\hat{a}} - \eta_{\hat{a},b}) + 2\beta_0\delta_b^a; \\
2T_{\hat{a}0}^b &= 2T_{0\hat{a}}^b = (e^{-2f} - 1)(\eta_{\hat{b},\hat{a}} - \eta_{\hat{a},\hat{b}}); \quad 2T_{a0}^{\hat{b}} = 2T_{0a}^{\hat{b}} = (e^{-2f} - 1)(\eta_{b,a} - \eta_{a,b}); \\
T_{ab}^c &= T_{ba}^c = 2\beta_{(a}\delta_{b)}^c; \quad T_{\hat{a}\hat{b}}^{\hat{c}} = T_{\hat{b}\hat{a}}^{\hat{c}} = 2\beta^{(a}\delta_{\hat{c}}^{\hat{b})}; \quad T_{ab}^{\hat{c}} = T_{\hat{a}\hat{b}}^c = 0 \\
T_{\hat{a}b}^c &= T_{ab}^c = 2\beta^{[a}\delta_{\hat{b}}^{c]}; \quad T_{\hat{a}\hat{b}}^{\hat{c}} = T_{\hat{a}\hat{b}}^{\hat{c}} = 2\beta_{[a}\delta_{\hat{c}}^{\hat{b}]}
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь система функций $\{\eta_{i,j}\}$ определяет компоненты ковариантного дифференциала 1-формы η , а круглые скобки означают операцию симметризации, а квадратные — альтернирования. Итак, в этом случае упростится выражение для вычисления тензора аффинной деформации (6), а также выражение (7), благодаря соотношению $\eta \circ \Phi = 0$ примет вид:

$$\tilde{\nabla}_X(\tilde{\Phi})Y = \nabla_X(\Phi)Y - \nabla_X(\eta)(\Phi Y)\xi - \eta(\nabla_X(\Phi)Y)\xi + T(X, \Phi Y) - \Phi(T(X, Y)) \tag{9}$$

Используя полученные соотношения, исследуем на инвариантность второй структурный тензор.

$$-4\tilde{C}(X, Y) = \tilde{\Phi}^2\tilde{\nabla}_{\tilde{\Phi}^2Y}(\tilde{\Phi})\tilde{\Phi}X + \tilde{\Phi}^2\tilde{\nabla}_{\tilde{\Phi}Y}(\tilde{\Phi})\tilde{\Phi}^2X$$

Воспользуемся тем, что в рамках f -преобразований $\Phi = \tilde{\Phi}$, и тем, что Φ — структура Яно.

$$\begin{aligned}
-4\tilde{C}(X, Y) &= \Phi^2\nabla_{\Phi^2Y}(\Phi)\Phi X + \Phi^2T(\Phi^2Y, \Phi^2X) + \Phi T(\Phi^2Y, \Phi X) + \\
&\quad + \Phi^2\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2X - \Phi^2T(\Phi Y, \Phi X) + \Phi T(\Phi Y, \Phi^2X)
\end{aligned}$$

Применим формулу связи между вторыми структурными тензорами исходного и преобразованного многообразий:

$$\begin{aligned}
-4\tilde{C}(X, Y) &= -4C(X, Y) + \Phi^2T(\Phi^2Y, \Phi^2X) + \Phi T(\Phi^2Y, \Phi X) - \\
&\quad - \Phi^2T(\Phi Y, \Phi X) + \Phi T(\Phi Y, \Phi^2X)
\end{aligned}$$

Таким образом, преобразованный тензор $\tilde{C}$ отличается от исходного на некоторое выражение. Он будет инвариантен относительно f -преобразования тогда и только тогда, когда это выражение равно нулю. Распишем его в компонентах в А-репере и будем придавать свободным индексам различные значения. Получим:

$$\Phi_i^t\Phi_j^p\Phi_q^qT_{ps}^x\Phi_x^y\Phi_y^k + \Phi_j^q\Phi_q^s\Phi_i^tT_{st}^p\Phi_p^k - \Phi_j^q\Phi_i^tT_{qt}^s\Phi_s^p\Phi_p^k + \Phi_j^q\Phi_i^t\Phi_t^sT_{qs}^p\Phi_p^k = 0.$$

Заметим, что при $i = 0$, $j = 0$, или $k = 0$, все слагаемые обнуляются, что следует из (3). Таким образом, необходимо рассмотреть всего три случая:

- 1) $i = a, j = b, k = c$: $-T_{ab}^c + T_{ba}^c - T_{ba}^c + T_{ba}^c = 0$;
- 2) $i = \hat{a}, j = b, k = c$: $-T_{\hat{a}b}^c - T_{b\hat{a}}^c + T_{b\hat{a}}^c + T_{b\hat{a}}^c = 0$;
- 3) $i = a, j = b, k = \hat{c}$: $-T_{ab}^{\hat{c}} - T_{ba}^{\hat{c}} - T_{ba}^{\hat{c}} - T_{ba}^{\hat{c}} = 0$.

В первых двух случаях слагаемые в сумме дают ноль в силу симметричности T . Из (8) следует, что в третьем случае каждое слагаемое суммы равно нулю. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Второй структурный тензор инвариантен относительно f -преобразований.*

Аналогично предыдущим рассуждениям приходим к выводу, что имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Первый структурный тензор инвариантен относительно f -преобразования тогда, и только тогда, когда $\beta^\sharp \in \mathfrak{M}$*

Дальнейшие вычисления позволили как выявить структурные тензоры, инвариантные относительно f -преобразований, так и получить условия их инвариантности для тех тензоров, которые в общем случае не инвариантны относительно f -преобразований. Таким образом, имеют место

ТЕОРЕМА 3. *Третий и пятый структурные тензоры инвариантны относительно f -преобразования.*

ТЕОРЕМА 4. *Четвертый структурный тензор инвариантен относительно f -преобразования тогда и только тогда, когда для произвольных векторных полей X и Y на M выполнены следующие соотношения:*

$$(e^{-2f} - 1)(\eta(\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y) - \eta(\nabla_{\Phi Y}(\Phi)X)) = 2\beta(\xi)g(\Phi X, \Phi Y);$$

$$\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi Y - \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi X + \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X \in \mathfrak{L}.$$

ТЕОРЕМА 5. *Шестой структурный тензор инвариантен относительно f -преобразования тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $\nabla_\xi(\eta)X = 0$ для произвольного векторного поля X на M .*

5. Инвариантность структурных тензоров почти контактных метрических многообразий относительно обобщенных f -преобразований

Рассмотрим частный случай обобщенного конформного преобразования, для которого выполнено $\tilde{\Phi} = \Phi$. Тогда

$$\Phi^2(X) = -X + \tilde{\eta}(X)\tilde{\xi}$$

$$\Phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$$

Отсюда следует, что $\tilde{\eta} = \sigma\eta$, где σ — некоторая положительно определенная функция. Без потери общности обозначим ее e^σ . Тогда получим:

$$\tilde{\eta} = e^\sigma\eta, \tilde{\xi} = e^{-\sigma}\xi, \tilde{\Phi} = \Phi, \tilde{g} = e^{2f}(g - \eta \otimes \eta) + e^{2\sigma}\eta \otimes \eta \quad (10)$$

Так как при $\sigma = 0$ эти формулы задают f -преобразование, назовем (10) *обобщенным f -преобразованием*. Матрица $\tilde{g}^{ij}$ в этом случае не сильно отличается от аналогичной матрицы для f -преобразований и имеет вид:

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2f}\delta_b^a \\ 0 & e^{-2f}\delta_b^a & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\tilde{\eta} = e^\sigma\eta$, компоненты формы $\tilde{\eta}$ в А-репере равны нулю тогда и только тогда, когда равны нулю соответствующие компоненты формы η . А именно $\tilde{\eta}_a = \tilde{\eta}_{\hat{a}} = 0$. Это позволяет утверждать, что компоненты тензора аффинной деформации, где все индексы принимают

значения отличные от нуля, в точности совпадут с такими же компонентами тензора аффинной деформации для f -преобразований. Таким образом, для обобщенных f -преобразований имеем: $T_{ab}^{\tilde{c}} = T_{\tilde{a}\tilde{b}}^c = 0$, $T_{\tilde{a}\tilde{b}}^c = T_{a\tilde{b}}^c = 2\beta^{[a}\delta_{\tilde{b}}^{c]}$, $T_{\tilde{a}\tilde{b}}^{\tilde{c}} = T_{a\tilde{b}}^{\tilde{c}} = 2\beta_{[a}\delta_{\tilde{b}}^{\tilde{c}]}$.

Следовательно, теоремы 1 и 2 имеют место и для обобщенных f -преобразований. Инвариантность же пятого структурного тензора сохранится только с поправкой на множитель, так как, если в выражении, задающем пятый структурный тензор, умножить обе части на e^σ , получим: $\tilde{F} = e^{-\sigma}F$. Тензоры, обращение в ноль которых инвариантно относительно рассматриваемых преобразований, называются *относительными инвариантами* [15]. Таким образом, пятый структурный тензор является относительным инвариантом относительно обобщенных f -преобразований.

Аналогично, тензор D также является относительным инвариантом обобщенных f -преобразований.

Таким образом, второй структурный тензор инвариантен относительно обобщенных f -преобразований почти контактных метрических структур. Первый структурный тензор инвариантен относительно f -преобразования тогда, и только тогда, когда $\beta^\sharp \in \mathfrak{M}$, третий и пятый структурные тензоры являются относительными инвариантами обобщенных f -преобразований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smalley L. L. Brans-Dicke — type models with nonmetricity // Phys. Rev. D. 1986. Vol. 33. P. 3590-3593.
2. Фролов Б. Н. Пуанкаре калибровочная теория гравитации. М.: МПГУ, 2003. 160 с.
3. Gambini R., Herrera L. Einstein Cartan theory in spin coefficient formalism // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 1449-1454.
4. Nich H.T. Spontaneously broken conformal gauge theory of gravitation // Phys. Lett. 1982. Vol. A88. P. 388-390.
5. Obukhov Ju. N. Conformal invariance and space-time torsion // Phys. Lett. 1982. Vol. A90. P. 13-16.
6. Gray J. Some global properties of contact structures // Ann. Math. 1959. Vol. 69, №2. P. 412-450.
7. Chineza D., Marrero J. C. Conformal changes of almost contact metric structures // Riv. Mat. Univ. Parma. 1992. Vol. 1. P. 19-31.
8. Olszak Z. Locally conformal almost cosymplectic manifolds // Colloq. Math. 1989. Vol. 57, №1. P. 73-87.
9. Кириченко В. Ф., Левковец В. А. О геометрии L-многообразий // Мат. заметки. 2006. Том 79, №6. С. 854-869.
10. Кириченко В. Ф., Баклашова Н. С. Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты // Мат. заметки. 2007. Том 82, №3. С. 347-360.
11. Кириченко В. Ф., Дондукова Н. Н. Контактные геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Мат. заметки. 2006. Том 80, №2. С. 209-219.
12. Родина Е. В. Линейные расширения почти контактных метрических многообразий: дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МПГУ, 1997. 104 с.

13. Игнаточкина Л. А. Обобщение преобразований, индуцированных на T^1 -расслоениях конформными преобразованиями их базы // Матем. сб. 2011. Том 202, №5. С. 45–62.
14. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: "Печатный Дом 2013. 458 с.
15. Кириченко В. Ф., Ускорев И. В. Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур // Мат. заметки. 2008. Том 84, №6. С. 838–850.

REFERENCES

1. Smalley, L. L. 1986, "Brans-Dicke — type models with nonmetricity *Phys. Rev. D.*, vol. 33, pp. 3590-3593.
2. Frolov, B. N. 2003, "Poincaré-gauged calibration theory of gravity MPGU, Moscow, 160 p.
3. Gambini, R. & Herrera, L. 1980, "Einstein Cartan theory in spin coefficient formalism *J. Math. Phys.*, vol. 21, pp. 1449-1454.
4. Nich, H. T. 1982, "Spontaneously broken conformal gauge theory of gravitation *Phys. Lett.*, vol. A88, pp. 388-390.
5. Obukhov, Ju. N. 1982, "Conformal invariance and space-time torsion *Phys. Lett.*, vol. A90, pp. 13-16.
6. Gray, J. 1959, "Some global properties of contact structures *Ann. Math.*, vol. 69, no.2, pp. 412-450.
7. Chineia, D. & Marrero J. C. 1992, "Conformal changes of almost contact metric structures *Riv. Mat. Univ. Parma.*, vol. 1, pp. 19-31.
8. Olszak, Z. 1989, "Locally conformal almost cosymplectic manifolds *Colloq. Math.*, vol. 57, no. 1, pp. 73-87.
9. Kirichenko, V. F. & Levkovec, V. A. 2006, "On geometry of L-manifolds *Mathematical Notes*, vol. 79, no. 6, pp. 854-869.
10. Kirichenko, V. F. & Baklashova, N. S. 2007, "The geometry of contact Lee forms and a contact analog of Ikuta's theorem *Mathematical Notes*, vol. 82, no. 3, pp. 347–360.
11. Kirichenko, V. F. & Dondukova, N. N. 2006, "Contactly geodesic transformations of almost-contact metric structures *Mathematical Notes*, vol. 80, no. 2, pp. 209–219.
12. Rodina, E. V. 1997, "Linear extensions of almost contact metric manifolds Diss. ... kand. fis.-mat. nauk., MPGU, Moscow, 98 p.
13. Ignatochkina, L. A. 2011, "Generalization for transformations of T^1 -bundle which induced by conformal transformations of their base *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 665–682.
14. Kirichenko, V. F. 2013, "Differential geometric structure on manifolds:, 2, Pechatny Dom, Odessa, 458 p.
15. Kirichenko, V. F. & Uskorev, I. V. 2008, "Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures *Mathematical Notes*, vol. 84, no. 6, pp. 783–794.

Московский педагогический государственный университет

Получено ‘

Получено 24.03.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 514.76

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-183-194

**СТРОЕНИЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУР
ТОТАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ГЛАВНОГО
 T^1 -РАССЛОЕНИЯ С ПЛОСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ НАД
НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ
МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ**

И. А. Петров (г. Москва)

Аннотация

В статье получено строение почти эрмитовых структур тотального пространства главного T^1 -расслоения с плоской связностью над некоторыми классами почти контактных метрических многообразий, такими, как контактные, K -контактные, сасакиевые, нормальные, косимплектические, слабо косимплектические, точнее косимплектические и почти косимплектические. Над контактным и K -контактным многообразием почти эрмитова структура принадлежит классу $W_2 \oplus W_4$. Форма Ли отличается от формы плоской связности на постоянный множитель, равный -2 . При этом двойственное векторное поле Ли отличается от некоторого векторного поля из вертикального распределения на этот же постоянный множитель. Также, эта почти эрмитова структура является локально конформно почти келеровой. Над сасакиевым многообразием почти эрмитова структура принадлежит классу W_4 . Форма Ли отличается от формы плоской связности на постоянный множитель, равный 2 . При этом двойственное векторное поле Ли также отличается от некоторого векторного поля из вертикального распределения на этот же постоянный множитель. Над слабо косимплектическим многообразием почти эрмитова структура является семикелеровой. Форма Ли, как и двойственное векторное поле Ли, являются тождественно нулевыми. Над косимплектическим многообразием почти эрмитова структура является келеровой. Также, форма Ли, как и двойственное векторное поле Ли, являются тождественно нулевыми. Над нормальным многообразием почти эрмитова структура является эрмитовой. Над точнее косимплектическим многообразием почти эрмитова структура является G_1 почти эрмитовой структурой, а над почти косимплектическим многообразием является G_2 почти эрмитовой структурой.

Ключевые слова: главное T^1 -расслоение, почти контактная метрическая структура, почти эрмитова структура, форма Ли, локальная конформность.

Библиография: 15 названий.

**THE STRUCTURE OF ALMOST HERMITIAN STRUCTURES
OF TOTAL SPACE OF PRINCIPAL FIBER T^1 -BUNDLE WITH
FLAT CONNECTION OVER SOME CLASSES OF ALMOST
CONTACT METRIC MANIFOLDS**

I. A. Petrov (Moscow)

Abstract

In paper we studied almost Hermitian structures of total space of principal fiber T^1 -bundle with flat connection over some classes of almost contact metric manifolds, such as contact, K -contact, Sasakian, normal, cosymplectic, nearly cosymplectic, exactly cosymplectic and weakly cosymplectic manifolds. Over contact and K -contact manifolds almost Hermitian

structure belongs to the $W_2 \oplus W_4$ class. Lee's form is different from the form of the flat connection by constant factor, equal to -2 . Moreover, dual Lee's vector field is different from some vector field from vertical distribution by the same constant factor. Also, this almost Hermitian structure is local conformal almost Kahlerian. Over Sasakian manifolds almost Hermitian structure belongs to the W_4 class. Lee's form is different from the form of the flat connection by constant factor, equal to 2 . Moreover, dual Lee's vector field also is different from some vector field from vertical distribution by the same constant factor. Over weakly cosymplectic manifolds almost Hermitian structure is semiKahlerian. Lee's form and dual Lee's vector field are identically zero. Over cosymplectic manifolds almost Hermitian structure is Kahlerian. Also, Lee's form and dual Lee's vector field are identically zero. Over normal manifolds almost Hermitian structure is Hermitian. Over exactly cosymplectic manifolds almost Hermitian structure is G_1 almost Hermitian structure, and over nearly cosymplectic manifolds almost Hermitian structure is G_2 almost Hermitian structure.

Keywords: principal fiber T^1 -bundle, almost contact metric structure, almost Hermitian structure, Lee's form, local conformity.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Главные тороидальные расслоения, т.е. расслоения со структурной группой, являющейся компактной абелевой группой, которая изоморфна r -мерному тору [8], интересны и актуальны не только дифференциальной геометрии, но и теоретической физике. Исследованию главных тороидальных расслоений посвящена статья В.Ф. Кириченко [8], в которой он развил результаты Д. Блэра [9], Ш. Кобаяси [10] и Й. Ватанабэ [11]. В ней он получает аппарат исследования главных тороидальных расслоений, а также рассматривает почти эрмитовы структуры, которые он фиксирует на базе расслоения, тем самым индуцируя почти контактные метрические структуры на тотальном пространстве. И. П. Борисовский в своей работе [12] рассматривает частный случай главных тороидальных расслоений, а именно такие, структурная группа которых изоморфна 1-мерному тору. В ней он фиксирует на базе расслоения келерову почти эрмитову структуру, получая сасакиеву почти контактную метрическую структуру на тотальном пространстве. Л. А. Игнаточкина в своей работе [13] также рассматривает главные T^1 -расслоения над почти эрмитовыми многообразиями, а затем изучает преобразования почти контактных метрических структур, получающихся на тотальном пространстве.

А. В. Савинову, рассматривающему главные T^1 -расслоения над почти контактными метрическими многообразиями, в работе [6] удалось получить формулы связи компонент виртуального и структурного тензоров почти эрмитовой структуры тотального пространства и компонент структурных тензоров почти контактной метрической структуры базы расслоения.

В данной работе рассматриваются главные T^1 -расслоения над некоторыми классами почти контактных метрических многообразий. Фиксируя плоскую связность в главном расслоении, также можно индуцировать почти эрмитову структуру на тотальном пространстве, формулы связи при этом получаются из формул, полученных в [6]. Рассматриваются форма и векторное поле Ли почти эрмитовой структуры, а также доказываются некоторые теоремы о локальной конформности.

2. Предварительные сведения

Пусть многообразие M имеет размерность $2n + 1$, $\mathfrak{X}(M)$ — его модуль гладких векторных полей. Также, пусть на нем фиксированы четыре тензорных поля: дифференциальная 1-форма η , называемая *контактной формой*, векторное поле ξ , называемое *векторным полем Роба*,

эндоморфизм Φ , называемый *структурным эндоморфизмом* и риманова метрика g . При этом должны выполняться условия:

$$1) \eta(\xi) = 1; 2) \eta \circ \Phi = 0; 3) \Phi(\xi) = 0; 4) \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi;$$

$$5) g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y); X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Тогда четверку (η, ξ, Φ, g) называют *почти контактной метрической структурой* [14].

С помощью структурного эндоморфизма можно определить тензорное поле N_Φ типа $(2, 1)$ (называемое *тензорным полем Нейенхейса*) по формуле:

$$4N_\Phi(X, Y) = \Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]; X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ковариантный дифференциал $\nabla \Phi$ в римановой связности метрики g определяет 6 тензорных полей B, C, D, E, F, G , которые называются *структурными тензорами* почти контактной метрической структуры. На пространстве расслоения A -реперов над многообразием M со структурной группой $\{e\} \times U(n)$ их ненулевые компоненты $B = \{C_{ab}{}^c, C^{ab}{}_c\}$, $C = \{\tilde{C}^{abc}, \tilde{C}_{abc}\}$, $D = \{C^{ab}, C_{ab}\}$, $E = \{C^a{}_b, C_a{}^b\}$, $F = \{\tilde{D}_{ab}, \tilde{D}^{ab}\}$, $G = \{D^a, D_a\}$ выражаются через $\nabla \Phi$:

$$C^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}\Phi_{b,c}^a, \quad \tilde{C}^{abc} = \frac{i}{2}\Phi_{b,\hat{c}}^a,$$

$$C^{ab} = -i\Phi_{0,\hat{b}}^a + \frac{i}{2}\Phi_{\hat{b},0}^a, \quad C^a{}_b = -i\Phi_{0,b}^a, \quad C_{ab}{}^c = \frac{i}{2}\Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}},$$

$$\tilde{C}_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}}, \quad C_{ab} = i\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{i}{2}\Phi_{b,0}^{\hat{a}},$$

$$C_a{}^b = i\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}, \quad \tilde{D}_{ab} = -i\Phi_{[a,b]}^0, \quad \tilde{D}^{ab} = i\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0,$$

$$D_b = -i\Phi_{b,0}^0, \quad D^b = i\Phi_{b,0}^0.$$

Пусть многообразие P имеет размерность $2n + 2$, $\mathfrak{X}(P)$ — его модуль гладких векторных полей. Пусть также на нем фиксированы два тензорных поля: эндоморфизм J , называемый *почти комплексной структурой*, и риманова метрика $\tilde{g}$. При этом должны выполняться условия:

$$1) J \circ J = -id; 2) \tilde{g}(JX, JY) = \tilde{g}(X, Y); X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

Тогда пару $(J, \tilde{g})$ называют *почти эрмитовой структурой*. С помощью почти эрмитовой структуры определяется *келерова форма* F и *форма Ли* α по формулам:

$$F(X, Y) = \tilde{g}(JX, Y); \quad \alpha(X) = -\frac{1}{n}\delta F \circ J(X); \quad X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

Для формы Ли существует двойственное ей векторное поле $\alpha^\#$, называемое *векторным полем Ли*, для которого выполняется [5]:

$$\alpha(X) = \tilde{g}(X, \alpha^\#); \quad X \in \mathfrak{X}(P).$$

Ковариантный дифференциал $\tilde{\nabla} J$ в римановой связности метрики $\tilde{g}$ определяет 2 тензорных поля B и C , одно из которых называется *виртуальным*, а другое *структурным* тензором почти эрмитовой структуры. На пространстве расслоения A -реперов над многообразием P со структурной группой $U(n)$ их ненулевые компоненты $B = \{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$, $C = \{B^{abc}, B_{abc}\}$ выражаются через $\tilde{\nabla} J$:

$$B_{ab}{}^c = \frac{i}{2}J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}J_{b,c}^a, \quad B_{abc} = -\frac{i}{2}J_{[b,c]}^{\hat{a}}, \quad B^{abc} = \frac{i}{2}J_{[\hat{b},\hat{c}]}^a.$$

Ковариантный дифференциал $\tilde{\nabla}J$ выражается через виртуальный и структурный тензор, виртуальный зависит от *примитивного* и *бесследного* тензоров, а структурный от *кососимметричного* и *квазисимметричного*. Обнуляя тот или иной тензор, получается 16 классов почти эрмитовых структур [5], которые совпадают с классификацией [7].

Рассмотрим главное расслоение (P, M, π, T^1) , у которого базой расслоения является нечетномерное многообразие M с почти контактной метрической структурой (η, ξ, Φ, g) , а структурной группой является одномерный тор T^1 . Тогда, на тотальном пространстве, которое будет являться четномерным многообразием P , зафиксировав связность и обозначив ее форму связности через ω , задается почти эрмитова структура $(J, \tilde{g})$ по формулам:

$$J = i_H \circ \Phi \circ \pi_* - \omega \otimes \tilde{\xi} + \pi^* \eta \otimes \nu; \quad \tilde{g}(X, Y) = g(\pi_* X, \pi_* Y) \circ \pi + \omega(X)\omega(Y),$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, i_H — горизонтальный лифт, $\tilde{\xi} = i_H \xi$, $\nu = \lambda(1)$, $\lambda : \mathfrak{g} = \mathbb{R} \rightarrow f$, а $\mathfrak{g}$ — присоединенная алгебра Ли T^1 , которая для одномерного тора является вещественной прямой, а f — векторное пространство фундаментальных векторных полей [6].

В работе [6] получены формулы связи структурных тензоров почти контактной метрической структурой и виртуального и структурного тензоров почти эрмитовой.

Зафиксируем плоскую связность, тогда эти формулы примут вид:

$$\begin{aligned} B^{ab}{}_c &= C^{ab}{}_c, \quad B^{ab}{}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(D^{ab} - C^{[ab]}), \quad B^{a0}{}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}C^a{}_b, \quad B^{a0}{}_0 = \frac{1}{2}D^a, \\ B^{0a}{}_b &= -\frac{1}{\sqrt{2}}C^a{}_b, \quad B_{ab}{}^c = C_{ab}{}^c, \quad B_{a0}{}^0 = \frac{1}{2}D_a, \\ B_{ab}{}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{ab} - C_{[ab]}), \quad B_{a0}{}^b = \frac{1}{\sqrt{2}}C_a{}^b, \quad B_{0a}{}^b = -\frac{1}{\sqrt{2}}C_a{}^b, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} B^{abc} &= C^{abc}, \quad B^{ab0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}C^{ab}, \quad B^{0ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}D^{ab}, \\ B^{0a0} &= \frac{1}{4}D^a, \quad B_{abc} = C_{abc}, \\ B_{a0b} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}C_{ab}, \quad B_{0ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}D_{ab}, \quad B_{00a} = -\frac{1}{4}D_a. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Нормальная структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *нормальной*, т. е. тензор Нейенхейса ее структурного эндоморфизма представим в виде [1]:

$$N_\Phi = -2d\eta \otimes \xi.$$

Рассмотрим критерий нормальной структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{abc} = C_{ab} = D_{ab} = D_a = 0.$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{abc} = B_{0ab} = B_{00a} = B_{a0b} = 0. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. *Структурный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с нормальной структурой на базе расслоения является тождественно нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (3) можно переписать в виде:

$$B_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0 \dots n$, что означает тождественное равенство нулю структурного тензора. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается эрмитово многообразие, согласно классификации [5].

4. Косимплектическая структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *косимплектической* [2], т.е.:

$$\nabla\Phi = 0.$$

Рассмотрим критерий косимплектической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{abc} = C_{ab}{}^c = C_{ab} = C_a{}^b = D_a^b = D_{ab} = D_a = 0.$$

Используя формулы (1), получим, что компоненты виртуального тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{ab}{}^c = B_{a0}{}^b = B_{a0}{}^0 = B_{ab}{}^0 = B_{0a}{}^b = 0. \quad (4)$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{abc} = B_{0ab} = B_{00a} = B_{a0b} = 0. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2. *Виртуальный и структурный тензоры почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с косимплектической структурой на базе расслоения являются тождественно нулевыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (4) можно представить в виде:

$$B_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0,$$

а формулы (5) в виде:

$$B_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0 \dots n$, т.е. виртуальный и структурный тензоры являются тождественно нулевыми. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается келерово многообразие, согласно классификации [5].

ТЕОРЕМА 3. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с косимплектической структурой на базе расслоения является тождественно нулевой. При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ также является тождественно нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Компоненты формы Ли выражаются через компоненты виртуального тензора следующим образом:

$$\alpha_\beta = -\frac{2}{n} B_{\gamma\beta}{}^{\gamma},$$

где $\beta, \gamma = 0 \dots n$ [15]. Виртуальный тензор является тождественно нулевым, следовательно форма и векторное поле Ли также являются тождественно нулевыми. $\square$

5. Контактная метрическая и K -контактная структура

В 1953 году китайский математик Чжень Шэньшэнь впервые построил расслоение реперов над нечетномерным многообразием, являющимся дифференцируемым и обладающего контактной формой. Позднее, американский математик Альфред Грей назвал такие многообразия контактными. В 1960 году Сасаки доказал, что на таком многообразии внутренним образом порождается структурный эндоморфизм и векторное поле Роба, а также можно определить риманову метрику, т.е. построил почти контактную метрическую структуру, которая являлась бы контактной.

Почти контактная метрическая структура будет являться *контактной* тогда и только тогда:

$$d\eta(X, Y) = g(X, \Phi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Рассмотрим критерий контактной метрической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{[abc]} = C_{[ab]} = C_{ab}{}^c = D_{ab} = D_a = 0, \quad 2C_a{}^b = D_a^b = -2i\delta_a^b.$$

Используя формулы (1), получим, что компоненты виртуального тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$\begin{aligned} B_{ab}{}^c &= B^{ab}{}_0 = B^{ab}{}_c = B^{a0}{}_0 = B_{a0}{}^0 = B_{ab}{}^0 = 0, \\ B^{a0}{}_b &= \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_b^a, \quad B^{0a}{}_b = -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_b^a, \quad B_{a0}{}^b = -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b, \quad B_{0a}{}^b = \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{[abc]} = B^{[abc]} = B_{0ab} = B^{0ab} = B_{00a} = B^{00a} = B_{[a|0|b]} = B^{[a|0|b]} = 0. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 4. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с контактной метрической структурой на базе расслоения примитивен, а структурный тензор квазисимметричен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, положив $\alpha^0 = -\sqrt{2}i$, $\alpha^a = 0$, непосредственная проверка с использованием формул (6) показывает, что:

$$B^{\lambda\mu}{}_{\nu} = \alpha^{[\lambda}\delta_{\nu}^{\mu]},$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$, т.е. виртуальный тензор является примитивным. Например, покажем, что $B^{a0}{}_b = \alpha^{[a}\delta_b^{0]}$:

$$B^{a0}{}_b = \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b = \frac{1}{2}(0 \cdot \delta_b^0 - (-\sqrt{2}i) \cdot \delta_b^a) = \frac{1}{2}(\alpha^a \cdot \delta_b^0 - \alpha^0 \cdot \delta_b^a) = \alpha^{[a}\delta_b^{0]}.$$

Используя формулы (7), можно показать, что:

$$B_{[\lambda\mu\nu]} = 0,$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$, т.е. структурный тензор является квазисимметричным. Покажем, например, что $B_{[a0b]} = 0$:

$$B_{[a0b]} = \frac{1}{6}(B_{a0b} + B_{0ba} + B_{ba0} - B_{0ab} - B_{ab0} - B_{b0a}).$$

Из (7) следует, что $B_{0ab} = 0$. Используя это, получаем:

$$B_{[a0b]} = \frac{1}{6}(B_{a0b} + B_{b0a} - B_{ab0} - B_{b0a}).$$

Структурный тензор кососимметричен по последним двум индексам, т.е.:

$$B_{ba0} = -B_{b0a}, \quad B_{ab0} = -B_{a0b}.$$

Получаем:

$$B_{[a0b]} = \frac{1}{6}(2B_{a0b} - 2B_{b0a}) = \frac{1}{3}(B_{a0b} - B_{b0a}).$$

Из (7) следует, что $B_{[a|0|b]} = 0$, т.е. $B_{a0b} - B_{b0a} = 0$. Получаем, что $B_{[a0b]} = 0$.

Следовательно, на тотальном пространстве получается почти эрмитово многообразие класса $W_2 \oplus W_4$, согласно классификации [5]. $\square$

ТЕОРЕМА 5. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с контактной метрической структурой на базе расслоения отличается от формы связности ω на постоянный множитель, равный -2 . При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ отличается от векторного поля ν из вертикального распределения на этот же постоянный множитель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим локальное сечение главного расслоения A -реперов над многообразием M и получим базис $(\xi, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ комплексификации локального модуля векторных полей. Подействовав горизонтальным лифтом i_H на этот базис, можно получить векторные поля $(\tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}})$ на тотальном пространстве P . С помощью $\tilde{\xi}$ и ν построим еще два векторных поля: $\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\tilde{\xi} - i\nu}{\sqrt{2}}$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} = \frac{\tilde{\xi} + i\nu}{\sqrt{2}}$. Тогда, набор векторных полей $(\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}, \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}})$ будет являться базисом комплексификации локального модуля векторных полей на P [6].

Т.к. компоненты формы Ли равны: $\alpha^0 = -\sqrt{2}i$, $\alpha^a = 0$, то компоненты двойственного вектора Ли будут равны: $(\alpha^\#)^0 = -\sqrt{2}i$, $(\alpha^\#)^a = 0$ и формулы комплексно сопряженные. Векторное поле Ли можно разложить по базису:

$$\alpha^\# = (\alpha^\#)^{\hat{0}} \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} + (\alpha^\#)^0 \tilde{\varepsilon}_0.$$

Подставляя обозначения $\tilde{\varepsilon}_0$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}$ и компонент векторного поля $\alpha^\#$ получим, что $\alpha^\# = -2\nu$, а из этого получаем, что $\alpha = -2\omega$. $\square$

ТЕОРЕМА 6. *Почти эрмитова структура $W_2 \oplus W_4$ на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью над контактным многообразием будет являться локально конформно почти келеровой, т.е. для каждой точки такого многообразия с такой структурой существует окрестность и функция f , такие, что структура $(J, e^{2f}\tilde{g})$ будет почти келеровой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. форма Ли α отличается от формы связности ω на постоянный множитель, а связность является плоской, т.е. форма этой связности является замкнутой, следовательно, и форма Ли является замкнутой. Используя [7], получаем, что данная почти эрмитова структура будет являться локально конформно почти келеровой. $\square$

Можно рассмотреть подкласс контактных метрических структур на базе расслоения, таких что:

$$\nabla_X(\eta)Y = g(X, \Phi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Они называются *K-контактными структурами*. Критерий, записанный в компонентах $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения *A*-реперов отличается от критерия контактных метрических структур, только тем, что добавляется условие:

$$C_{ab} = C^{ab} = 0.$$

В этом случае виртуальный тензор почти эрмитовой структуры главного T^1 -расслоения будет также являться примитивным, а структурный также квазисимметричным, что говорит о принадлежности почти эрмитовой структуры к классу $W_2 \oplus W_4$. Такая структура также является локально конформно почти келеровой. Форма Ли α и векторное поле Ли $\alpha^\#$, по аналогии с контактными метрическими структурами, также отличаются от формы связности ω и векторного поля ν из вертикального распределения на постоянный множитель, равный -2 .

6. Сасакиева структура

Многообразие называется *многообразием Сасаки*, если:

$$\nabla_X(\Phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Примером многообразия Сасаки может являться нечетномерная сфера, снабженная канонической сасакиевой структурой.

Критерий сасакиевой структуры в компонентах $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения *A*-реперов выглядит следующим образом [5]:

$$C_{abc} = C_{ab}{}^c = C_{ab} = D_{ab} = D_a = 0, \quad C_a{}^b = i\delta_a^b.$$

Используя формулы (1), получим, что компоненты виртуального тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{ab}{}^c = B^{ab}{}_0 = B^{ab}{}_c = B^{a0}{}_0 = B_{a0}{}^0 = B_{ab}{}^0 = 0,$$

$$B^{a0}{}_b = -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_b^a, \quad B^{0a}{}_b = \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_b^a, \quad B_{a0}{}^b = \frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b, \quad B_{0a}{}^b = -\frac{i}{\sqrt{2}}\delta_a^b.$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{abc} = B^{abc} = B_{0ab} = B^{0ab} = B_{00a} = B^{00a} = B_{a0b} = B^{a0b} = 0. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 7. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с сасакиевой структурой на базе расслоения примитивен, а структурный тензор является тождественно нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство примитивности виртуального тензора аналогично доказательству в контактных метрических структурах, однако в сасакиевых компоненты формы Ли следует положить равными:

$$\alpha^0 = \sqrt{2}i, \quad \alpha^a = 0.$$

Используя (8), непосредственная проверка показывает, что:

$$B_{\lambda\mu\nu} = 0,$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается почти эрмитово многообразие класса W_4 , согласно классификации [5].

ТЕОРЕМА 8. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с сасакиевой структурой на базе расслоения отличается от формы связности ω на постоянный множитель, равный 2. При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ отличается от векторного поля ν из вертикального распределения на этот же постоянный множитель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. компоненты формы Ли равны: $\alpha^0 = \sqrt{2}i$, $\alpha^a = 0$, то компоненты двойственного вектора Ли будут равны: $(\alpha^\#)^0 = \sqrt{2}i$, $(\alpha^\#)^a = 0$ и формулы комплексно сопряженные. По аналогии с доказательством в контактных метрических структурах, можно разложить векторное поле Ли $\alpha^\#$ по базису:

$$\alpha^\# = (\alpha^\#)^{\hat{0}} \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} + (\alpha^\#)^0 \tilde{\varepsilon}_0,$$

а затем подставить обозначения $\tilde{\varepsilon}_0$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}$ и компонент $\alpha^\#$, и получить, что $\alpha^\# = 2\nu$, а из этого получить, что $\alpha = 2\omega$. $\square$

ТЕОРЕМА 9. *Почти эрмитова структура класса W_4 на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью над сасакиевым многообразием будет являться локально конформно келеровой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству в контактных метрических структурах. $\square$

7. Слабо косимплектическая структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *слабо косимплектической* [3], т.е.:

$$\nabla_X(\Phi)X = 0,$$

где $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Рассмотрим критерий контактной метрической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{ab}{}^c = D_a = C_a{}^b = D_a{}^b = 0, \quad 2C_{ab} = 3D_{ab}, \quad C_{[abc]} = C_{abc}.$$

Используя формулы (1), получим, что компоненты виртуального тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{ab}{}^c = B^{ab}{}_c = B^{a0}{}_0 = B_{a0}{}^0 = B^{a0}{}_b = B^{0a}{}_b = B_{a0}{}^b = B_{0a}{}^b = 0,$$

$$B^{ab}{}_0 = -\frac{\sqrt{2}}{6}C^{ab}, \quad B_{ab}{}^0 = -\frac{\sqrt{2}}{6}C_{ab}. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 10. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью со слабо косимплектической структурой на базе расслоения бесследен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (9), можно показать, что:

$$B^{\lambda\mu}{}_{\mu} = 0,$$

где $\lambda, \mu = 0 \dots n$. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается семикелерова почти эрмитова структура, согласно классификации [5].

ТЕОРЕМА 11. *Форма Ли α почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью со слабо косимплектической структурой на базе расслоения является тождественно нулевой. При этом двойственное векторное поле Ли $\alpha^\#$ также является тождественно нулевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. компоненты формы Ли выражаются через компоненты виртуального тензора следующим образом:

$$\alpha_\beta = -\frac{2}{n} B_{\gamma\beta}{}^\gamma,$$

где $\beta, \gamma = 0 \dots n$, то с помощью (9) можно показать, что они являются нулевыми, следовательно форма Ли является нулевой, а следовательно и векторное поле Ли является нулевым. $\square$

Если рассмотреть подкласс слабо косимплектических структур на базе расслоения, таких что $C_{ab} = C^{ab} = 0$, то почти эрмитова структура на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения будет являться приближенно келеровой.

8. Точнейше косимплектическая структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *точнейше косимплектической*, т.е. она слабо косимплектическая и $d\eta = 0$.

Рассмотрим критерий контактной метрической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{ab} = C_a{}^b = D_{ab} = D_a{}^b = D_a = 0; \quad C_{abc} = C_{[abc]}.$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{a0b} = B_{0ab} = B_{00a} = 0; \quad B_{[abc]} = B_{abc}. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 12. *Структурный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с точнейше косимплектической структурой на базе расслоения кососимметричен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (10), можно показать, что:

$$B_{\lambda\mu\nu} = B_{[\lambda\mu\nu]},$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$, т.е. структурный тензор является кососимметричным. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается G_1 почти эрмитова структура, согласно классификации [5].

9. Почти косимплектическая структура

Рассмотрим почти контактную метрическую структуру, которая является *почти косимплектической*, т.е. $d\eta = 0$ и $d\Omega = 0$, где $\Omega(X, Y) = g(X, \Phi Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Рассмотрим критерий контактной метрической структуры, записанный в компонентах ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ на пространстве расслоения A -реперов [5]:

$$C_{[abc]} = C_{[ab]} = C_a{}^b = D_{ab} = D_a{}^b = D_a = 0.$$

Используя формулы (2), получим, что компоненты структурного тензора почти эрмитовой структуры на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения имеют вид:

$$B_{[a|0|b]} = B_{0ab} = B_{00a} = B_{[abc]} = 0. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 13. *Структурный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1 -расслоения с фиксированной плоской связностью с почти косимплектической структурой на базе расслоения квазисимметричен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (11), можно показать, что:

$$B_{[\lambda\mu\nu]} = 0,$$

где $\lambda, \mu, \nu = 0 \dots n$, т.е. структурный тензор является квазисимметричным. $\square$

Следовательно, на тотальном пространстве получается G_2 почти эрмитова структура, согласно классификации [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галаев С. В., Шевцова Ю. В. Почти контактные метрические структуры // Изв. Саратов. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2015. Том 15, №2. С. 136–141.
2. Дондукова Н. Н. Проективный инвариант косимплектических многообразий // Вест. Бур. гос. ун-та. 2011. №9. С. 171–175.
3. Банару М. Б. О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближённо келеровых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Том 8, №2. С. 357–364.
4. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
5. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Одесса, 2013.
6. Савинов А. В. Каноническое тороидальное расслоение над нечетномерной базой // Вестник СамГУ. 2003. Том 2, №28. С. 57–79.
7. Gray A., Hervella L. M. The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants // Annali di Matematica pura ed applicata. 1980. Vol. CXXIII, №IV, С. 35–38.
8. Кириченко В. Ф. Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Том 6, №4. С. 1095–1120
9. Blair D. Contact manifolds in geometry // Lecture Notes in Math. 1976. Vol. 509. P. 1–145.
10. Kobayashi S. Principal fibre bundle with the 1-dimensional toroidal group // Tohoku Math. J. 1956. Vol.8. P. 29–45.
11. Watanabe Y. Riemannian metrics on principal circle bundles over locally symmetric Kahlerian manifolds // Kodai Math. J. 1982. Vol. 5. P. 111–121.
12. Борисовский И. П. О геометрии главных T^1 -расслоений над многообразием Ходжа // Матем. заметки. 1998. Том 64, №6. С. 824–829.
13. Игнаточкина Л. А. Обобщение преобразований, индуцированных на T^1 -расслоениях конформными преобразованиями их базы // Матем. сб. 2011. Том 202, №5. С. 45–62.
14. Игнаточкина Л. А. Анализ на многообразиях. Москва, 2016, МПГУ.
15. Игнаточкина Л. А. Краткое руководство к действию по главным расслоениям и методу присоединенной G -структуры. 2014. liaign.uz.ru/Glavn_rassl_Gstr.pdf.

REFERENCES

1. Galaev, S. V. & Shevchova, Y. V. 2015, "Almost contact metric structures *Izv. Sarat. un-ta*, vol. 15, no. 2, pp. 136–141.
2. Dondukova, N. N. 2011, "Projective invariant of cosymplectic manifolds *Vest. Bur. gos. un-ta*, no. 9, pp. 171–175.
3. Banaru, M. B. 2002, "On the typical number of weakly cosymplectic hypersurfaces of approximately Kahler manifolds *Fundament. i prikl. matem.*, vol. 8, no. 2, pp. 357–364.
4. Vinberg, E. B. & Onishchik, A. L. 1988, "Seminar on Lee's groups and algebraic groups Moscow. Nauka.
5. Kirichenko, V. F. 2013, "Differential geometric structure on manifolds Odessa.
6. Savinov, A. V. 2003, "Canonical toroidal fibre bundle under an odd-dimensional base *Vestnik SamGU*, vol. 2, no. 28, pp. 57–79.
7. Gray, A. & Hervella, L. M. 1980, "The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants *Annali di Matematica pura ed applicata*, vol. CXXIII, no. IV, pp. 35–58.
8. Kirichenko, V. F. 2000, "Differential geometry of principal toroidal fiber bundles, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* vol. 6, no. 4, pp. 1095–1120.
9. Blair, D. 1976, "Contact manifolds in geometry *Lecture Notes in Math.*, vol. 509, pp. 1–145.
10. Kobayashi, S. 1956, "Principal fibre bundle with the 1-dimensional toroidal group *Tohoku Math. J.*, vol. 8, pp. 29–45.
11. Watanabe, Y. 1982, "Riemannian metrics on principal circle bundles over locally symmetric Kahlerian manifolds *Kodai Math. J.*, vol. 5, pp. 111–121.
12. Borisovskii, I. P. 1998, "On the geometry of principal T1-bundles over Hodge manifolds *Math. Notes*, vol. 64, no. 6, pp. 714–718.
13. Ignatovichkina, L. A. 2011, "Generalization for transformations of T1-bundle which induced by conformal transformations of their base *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 665–682.
14. Ignatovichkina, L. A. 2016, "Analysis on the manifolds Moscow, MPSU.
15. Ignatovichkina, L. A. 2014, "A short guide to the action on principal fiber bundles and the method of the associated G -structure Moscow, liaign.ucoz.ru/Glavn_rassl_Gstr.pdf.

Получено 04.02.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 512.554.36

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-195-204

**О ГОМОЛОГИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ РАДИКАЛА
ДЖЕКОБСОНА ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ И ЛОКАЛЬНО
НИЛЬПОТЕНТНОГО РАДИКАЛА
ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБР ЛИ****С. А. Пихтильков**, О. А. Пихтилькова, А. А. Горелик, Л.Б. Усова, (г. Оренбург)**Аннотация**

Один из способов изучения свойств колец, алгебр, алгебр Ли, а также их идеалов предполагает сведение их описания через свойства модулей над этими кольцами, алгебрами, алгебрами Ли. В статье рассматриваются вопросы исследования радикалов алгебр Ли, обсуждаются возможности гомологического описания радикала Джекобсона алгебры Ли и нильпотентного радикала специальной алгебры Ли.

В первом разделе работы вводятся основные понятия исследуемых в дальнейшем радикалов и алгебр Ли.

Второй раздел посвящен радикалу Джекобсона для алгебр Ли. Доказано, что пересечение аннуляторов всех неприводимых модулей над произвольной алгеброй Ли L совпадает с пересечением алгебры Ли L и радикала Джекобсона универсальной обертывающей алгебры.

Приведены примеры алгебр Ли, подтверждающие данный факт, а также позволяющие доказать равенство нильпотентного радикала PI -неприводимо представленному радикалу конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль. Рассмотрены соотношения локально нильпотентного радикала и естественных, гомологически заданных радикалов: неприводимо представленного, PI -неприводимо представленного и конечно неприводимо представленного.

В третьем разделе работы показано, что для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль имеет место включение локально нильпотентного радикала в PI -неприводимо представленный, причем в общем случае это включение строгое. Сопоставление первичного радикала с PI -неприводимо представленным позволяет сделать вывод, что ни одно из возможных включений не выполняется и PI -неприводимо представленный радикал не является локально разрешимым в общем случае.

Приведен пример специальной алгебры Ли L над полем F , $\text{char} F \neq 2$, в которой, при условии ненулевого неприводимо представленного радикала, локально нильпотентный радикал равен нулю.

Ключевые слова: алгебра Ли, специальная алгебра Ли, радикал Джекобсона алгебр Ли, локально нильпотентный радикал специальной алгебры Ли

Библиография: 15 названий.

**ON THE HOMOLOGICAL DESCRIPTION
OF THE JACOBSON RADICAL FOR LIE ALGEBRAS
AND THE LOCALLY NILPOTENT RADICAL
FOR SPECIAL LIE ALGEBRAS****S. A. Pikhtilov**, O. A. Pikhtilkova, A. A. Gorelik, L. B. Usova, (Orenburg)

Abstract

One way to study the properties of rings, algebras, Lie algebras and their ideals presupposes their description via the properties of modules over these rings, algebras, Lie algebras. This article deals with the study of radicals of Lie algebras. We discuss the possibility of homological descriptions of the Jacobson radical of Lie algebras and nilpotent radical of the special Lie algebra.

The first section introduces the concepts of radicals of Lie algebras.

The second section is devoted to the Jacobson radical of Lie algebras. It is proved that the intersection of all annihilators of irreducible modules over an arbitrary Lie algebra L coincides with the intersection of the Lie algebras L and the Jacobson radical of the universal enveloping algebra. This section contains examples that prove this fact. This examples allows to prove the equality of the nilpotent radical of PI -irreducible represented radical of finite-dimensional Lie algebra over a field of characteristic zero. We find the correlation between the locally nilpotent radical and others radicals of Lie algebras such that the irreducible represented radical, the PI -irreducible represented radical and the finitely irreducible represented radical.

In the third section it is shown that the locally nilpotent radical is included in the PI -irreducible represented radical for an arbitrary special Lie algebra L over a field F of characteristics zero. We have proved that the prime radical is not included in the PI -irreducible represented radical. The reverse inclusion for these radicals does not hold. The PI -irreducible represented radical is not locally solvable in the general case. Shows an example of a special Lie algebra L over a field F with the locally nilpotent radical, which has is equal to zero.

Keywords: Lie algebra, special Lie algebra, the Jacobson radical of Lie algebras, the locally nilpotent radical of special Lie algebras.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

К основным инструментам построения структурной теории алгебраических систем относится радикал [1]. Изучение свойств различных радикалов бесконечномерных алгебр Ли является одним из актуальных направлений исследований в современной алгебре.

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008), Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли. Под гомологическим описанием идеалов колец, алгебр, алгебр Ли понимается их задание через модули [2].

В данной работе обсуждается вопрос о возможности гомологического описания радикала Джекобсона алгебр Ли и локально нильпотентного радикала специальных алгебр Ли.

Далее в работе нам понадобится ряд определений.

В 1963 г. В. Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [3], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI -алгебра Ли, если существует ассоциированная PI -алгебра A , такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем PI -представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L , для которого ассоциированная алгебра представления $A(L)$ является PI -алгеброй.

Следующее определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L , если их нет.

Приведем определения естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли, которые в дальнейшем нам понадобятся для сопоставления с радикалом Джекобсона [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Обозначим через $\text{Irr}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L , если их нет и назовем неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Обозначим через $\text{IrrPI}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет и назовем PI -неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Обозначим через $\text{IrrFin}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет и назовем конечно неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. По аналогии с конечномерными алгебрами назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности представления. Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F .

Кроме того, в работе используется понятие первичного радикала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Назовем алгебру Ли L первичной, если для любых двух ее идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

Идеал P алгебры Ли L является первичным, если фактор-алгебра L/P — первична.

Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех ее первичных идеалов.

2. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли

Напомним, что радикалом Джекобсона алгебры Ли L называется пересечение максимальных идеалов и сама алгебра L , если их нет [4].

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [4].

Для бесконечномерных алгебр Ли свойства радикала Джекобсона исследовал F. Kubo [6].

Известно, что существует специальная алгебра Ли, локально нильпотентный радикал которой строго содержится в радикале Джекобсона [7, пример 1].

Пусть M — неприводимый L -модуль. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную элементами алгебры L в алгебре $\text{End}(M)$.

Ю. А. Бахтурин использовал пересечение аннуляторов конечномерных неприводимых представлений для доказательства теоремы Леви-Мальцева для конечномерных алгебр Ли [8]. Известно, что для конечномерных алгебр Ли пересечение аннуляторов конечномерных представлений совпадает с нильпотентным радикалом [9] и, следовательно, с радикалом Джекобсона для поля нулевой характеристики [4].

Л. А. Симонян рассмотрел пары $L \subseteq A^{(-)}$, где L — алгебра Ли над полем F характеристики нуль, A — локально конечная ассоциативная алгебра [10]. Он ввел обозначение $J_A(L) = L \cap J(A)$.

В [10] доказано:

1. Всякий идеал алгебры Ли L , состоящий из нильпотентных в A элементов, лежит в $J_A(L)$;
2. Если R — локально разрешимый идеал L , то $[R, L] \subseteq J_A(L)$.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть L — произвольная алгебра Ли. Тогда

$$\text{Irr}(L) = L \cap J(U(L)),$$

где $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть M — произвольный неприводимый $U(L)$ -модуль. Тогда M также является неприводимым L -модулем.

Имеет место включение $\text{Irr}(L)$ содержится в аннуляторе $U(L)$ модуля M .

Так как радикал Джекобсона $J(U(L))$ ассоциативной алгебры $U(L)$ совпадает с пересечением аннуляторов всех неприводимых $U(L)$ -модулей, получим $\text{Irr}(L) \subseteq J(U(L))$.

Пусть $x \in L \cap J(U(L))$ — произвольный, M — произвольный неприводимый L -модуль, $A(L)$ — ассоциированная с представлением L ассоциативная алгебра и $\alpha : L \rightarrow A(L)^{(-)}$ — гомоморфизм алгебр Ли, задающий L -модуль M .

Тогда существует его продолжение $\bar{\alpha} : U(L) \rightarrow A(L)$, где $\bar{\alpha}$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр и $\bar{\alpha}(l) = \alpha(l)$ для всех $l \in L$.

Следовательно, M также является $U(L)$ -модулем.

Модуль M неприводим над $U(L)$ тогда и только тогда, когда неприводимым является L -модуль M .

Следовательно, x содержится в аннуляторе модуля M и $x \in \text{Irr}(L)$.

Включение $J(U(L)) \subseteq \text{Irr}(L)$ завершает доказательство теоремы.

ПРИМЕР 3. Пусть $L = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in F\}$ — двумерная абелева алгебра Ли над полем F . Ее универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ изоморфна кольцу многочленов $F[x, y]$ от коммутирующих переменных x и y .

Как известно, $J(F[x, y]) = 0$.

Следовательно, $\text{Irr}(L) = 0$.

Этот пример не противоречит нашим представлениям о радикалах конечномерных алгебр Ли. Нильпотентный радикал $N(L)$ алгебры Ли L также равен нулю.

ПРИМЕР 4. Дадим новую интерпретацию следующего известного примера.

Пусть F — поле характеристики нуль, $F[x]$ — кольцо многочленов.

Зададим для произвольного $f(x) \in F[x]$ три отображения:

$$a(f(x)) = f'(x), \quad b(f(x)) = x \cdot f(x), \quad e(f(x)) = f(x).$$

Легко проверить, что тождественное отображение e коммутирует с a и b , $[a, b] = e$.

Мы получили представление трехмерной разрешимой алгебры Ли

$$L = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \in F\}$$

в алгебре эндоморфизмов $\text{End}(F[x])$.

Легко проверить, что векторное пространство $F[x]$ является неприводимым L -модулем. Следовательно, $\text{Irr}(L) = 0$.

Алгебре $U(L)$ соответствует градуированная алгебра, которая является алгеброй многочленов от трех коммутирующих переменных [9].

Легко проверить, что круговая композиция $u \circ v = u + v - uv$ не может быть равна нулю для элементов $u, v \in U(L)$ не совпадающих со свободным членом.

Как известно, радикалом Джекобсона ассоциативной алгебры является наибольший правый правоквазирегулярный идеал [11], который в алгебре $U(L)$ равен нулю.

Следовательно, $J(U(L)) = 0$.

Согласно [9], $N(L) = \{\alpha e \mid \alpha \in F\}$.

Покажем, что не существует неприводимого L -модуля задающего PI -представление алгебры L .

Пусть M — такой модуль.

Тогда алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L .

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI -алгеброй. Согласно теореме Капланского [11], она простая, конечномерная над своим центром Z .

Тогда алгебра $A(L)$ имеет точное неприводимое представление в некотором модуле V размерности n над Z .

Пусть $\bar{Z}$ алгебраическое замыкание Z .

Конечномерная алгебра $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ над $\bar{Z}$ имеет конечномерное представление в модуле $\bar{Z} \otimes_Z V$, которое может не быть неприводимым.

Рассмотрим композиционный ряд $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ -модулей:

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = \bar{Z} \otimes_Z V,$$

в котором каждый фактор M_k/M_{k-1} ($k = 2, \dots, n$) — неприводим.

Согласно теореме Ли [12, стр. 62], разрешимая алгебра $\bar{Z} \otimes_Z \bar{L}$ представима треугольными матрицами в некотором базисе модуля M_k/M_{k-1} , а, следовательно, и порожденная ей алгебра $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$.

Из неприводимости модуля M_k/M_{k-1} над $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ следует $\dim_{\bar{Z}} M_k/M_{k-1} = 1$.

Алгебра $\bar{Z} \otimes_Z \bar{L}$ имеет треугольное представление в некотором базисе модуля $\bar{Z} \otimes_Z V$. Следовательно, алгебры $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ и $A(L)$ также имеют треугольное представление, что противоречит простоте алгебры $A(L)$.

Алгебра Ли L является разрешимой ступени 2. Получим, $P(L) = L$ (первичный радикал совпадает с разрешимым для конечномерных алгебр [13]).

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из примера 3, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Тогда $\text{Irr}PI(L) = N(L)$, где $N(L)$ — нильпотентный радикал алгебры Ли L .

ТЕОРЕМА 3. Пусть основное поле имеет нулевую характеристику. Тогда следующие включения в общем случае строгие:

$$\text{Irr}(L) \subset \text{Irr}PI(L) \subset \text{Irr}Fin(L). \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строгость первого включения следует из примера 3.

Докажем строгость второго включения.

Пусть $F \subseteq K$ — расширение поля F , которое не является конечномерным. Таким, например, будет поле рациональных функций с коэффициентами из F .

Алгебра sl_2K является простой алгеброй Ли над K . Несложно проверить, что sl_2K является простым кольцом Ли и, следовательно, простой алгеброй Ли над F .

Алгебра sl_2K имеет точное PI -представление над двумерным арифметическим векторным пространством K^2 .

Следовательно, $\text{Irr}PI(sl_2K) = 0$.

В силу бесконечномерности над полем F и простоты алгебра sl_2K не может иметь конечномерных неприводимых представлений над F .

Следовательно, $IrrFin(sl_2K) = sl_2K$.

Предлагаем считать радикалом Джекобсона алгебры Ли L пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет. Из теоремы 2 и результата Маршалла следует, что $IrrPI(L) = J(L)$ для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

3. О гомологическом описании локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли

Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли является обобщением нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли [7, 9]. В работе [7] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. ([7]) Пусть алгебра Ли L имеет PI -представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M . Тогда:

- i) Все идеалы J алгебры L , такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in L$, содержатся в одном из них, например U .
- ii) Образ $\bar{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $End(M)$.
- iii) Идеал U является множеством элементов $x \in L$, таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L .

Исследуем соотношения локально нильпотентного радикала и радикалов $Irr(L)$, $IrrPI(L)$, $IrrFin(L)$.

Далее будет показана строгость этих включений в общем случае и приведен пример конечномерной алгебры Ли L , для которой включение

$$Irr(L) \subset N(L) \quad (2)$$

строгое.

ТЕОРЕМА 5. Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль имеет место включение $N(L) \subset IrrPI(L)$, причем в общем случае это включение строгое.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть алгебра Ли L над полем F характеристики нуль имеет PI -представление в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над F , такое, что L — модуль M неприводим. Пусть I — некоторый локально разрешимый идеал алгебры Ли L . Тогда образ $\bar{I}$ идеала в алгебре $End(M)^{(-)}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — неприводимый $A(L)$ -модуль, алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $(\bar{L})$ алгебры Ли L .

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI -алгеброй. Согласно теореме Капланского [11] она простая, конечномерная над своим центром Z , изоморфна алгебре матриц над телом $A(L) \cong \Delta_m, m \in N$.

Тогда алгебра $A(L)$ имеет точное неприводимое представление в некотором модуле V размерности n над Z .

Пусть Z алгебраическое замыкание.

Конечномерная алгебра $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ над $\bar{Z}$ имеет конечномерное представление в модуле $\bar{Z} \otimes_Z V$, которое может не быть неприводимым.

Рассмотрим композиционный ряд $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ - модулей:

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = \bar{Z} \otimes_Z V,$$

в котором каждый фактор M_k/M_{k-1} ($k = 2, \dots, n$) - неприводим.

Согласно теореме Ли [6] разрешимая алгебра $\bar{Z} \otimes_Z \bar{L}$ представима треугольными матрицами в некотором базисе модуля M_k/M_{k-1} , а следовательно, и порожденная ей алгебра $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$.

Из неприводимости модуля M_k/M_{k-1} над $\bar{Z} \otimes_Z A(L)$ следует $\dim_Z M_k/M_{k-1} = 1$.

Алгебра $\bar{Z} \otimes_Z \bar{L}$ имеет треугольное представление в некотором базисе модуля $\bar{Z} \otimes_Z V$.

Рассуждая так же, как выше, получим $\dim_Z V = 1$.

Следовательно, $A(L) = \Delta$, где Δ тело, конечномерное над Z . Модуль V , неприводимый над телом, одномерен над Δ и конечномерен над Z .

Применим теорию конечномерных алгебр Ли к алгебре $Z \otimes_Z A(L)$.

Образ локально разрешимого идеала $\bar{I}$ является разрешимым идеалом. Если алгебра действует на конечномерное векторное пространство неприводимым образом, то ее разрешимый идеал лежит в центре.

Следовательно, идеал $\bar{I}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Локально нильпотентный идеал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным [7].

Пусть алгебра Ли L имеет неприводимое PI - представление в алгебре эндоморфизмов $\phi : L \rightarrow \text{End}(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F .

Тогда согласно лемме 1 $\phi(N(L)) \supseteq Z(\phi(L))$.

Алгебра Ли $\phi(L)$ порождает ассоциативную алгебру $A(L)$. Ее центр $Z(\phi(L))$ лежит в центроиде неприводимого L - модуля M .

Согласно лемме Шура [11] центроид неприводимого модуля является телом.

Следовательно, ненулевые элементы $\phi(N(L))$ не лежат в наибольшем идеале локальной нильпотентности модуля M . Получили $\phi(N(L)) = 0$.

Из произвольности неприводимого PI - представления M следует включение

$$N(L) \subseteq \text{Irr} PI(L).$$

Строгость включения следует из примера.

ПРИМЕР 5. Пример специальной алгебры Ли L над полем F , $\text{char} F \neq 2$, такой, что $\text{Irr}(L) \neq 0$, локально нильпотентный радикал которой равен нулю.

В частности, $\text{Irr}(L)$ радикальная специальная алгебра Ли. Для алгебры Ли L справедливо строгое включение

$$N(L) \subset \text{Irr}(L). \quad (3)$$

Обозначим через B коммутативную алгебру над полем F формальных степенных рядов со свободным членом от одной коммутирующей переменной.

Идеал рядов без свободного члена R - это известный пример коммутативной радикальной алгебры Ли [14].

Рассмотрим алгебру матриц второго порядка B_2 с элементами из B . Известно, что ее радикал Джекобсона $J(B_2)$ равен R_2 [11], [14].

В частности, при гомоморфном отображении ϕ алгебры B_2 в алгебру эндоморфизмов неприводимого B_2 - модуля M справедливо $\phi(R_2) = 0$.

Рассмотрим алгебру Ли $L = B \otimes_F sl_2(F)$, где $sl_2(F)$ - алгебра Ли матриц второго порядка над F со следом нуль. Обозначим через H идеал $H = R \otimes_F sl_2(F)$.

Алгебра L вложена в PI - алгебру B_2 и, следовательно, является специальной.

Пусть $\phi : L \rightarrow End(M)^{(-)}$ - неприводимое PI - представление алгебры L .

Покажем, что тогда модуль M является B - модулем.

Из неприводимости M следует, что любой его элемент представим в виде линейной комбинации элементов $l_1(l_2(\dots(l_n(m))\dots))$, где $l_1, l_2, \dots, l_n \in L, m \in M, n > 0$.

Элемент l_1 является линейной комбинацией элементов

$$a_1 e_{12} + a_2 e_{21} + a_3 (e_{11} - e_{22}), a_1, a_2, a_3 \in B.$$

Каждый из элементов $e_{12}, e_{21}, e_{11} - e_{22}$ представим в виде коммутатора элементов алгебры Ли L .

Можно считать, что любой из элементов M представим в виде линейной комбинации элементов $[l'_1, l''_2](l_2(\dots(l_n(m))\dots))$, где $l_1, l_2, \dots, l_n \in L, m \in M$.

Пусть $b \in B$ - произвольный. Определим $b([l'_1, l''_2](l_2(\dots(l_n(m))\dots))) = [l'_1, bl''_2](l_2(\dots(l_n(m))\dots))$.

Можно проверить, что по отношению к определенному умножению M является B -модулем.

Множество RM является подмодулем M .

Предположим, что $RM \neq 0$. Тогда существует $m \in M, m \neq 0$, такой, что $Rm \neq 0$.

Множество Rm является ненулевым подмодулем M . Следовательно, $Rm = M$.

Существует элемент $r \in R$, такой, что $rm = m$. Элемент r имеет правый квазиобратный $t \in B$. Тогда $r + t - rt = 0$.

Получим $0 = (r + t - rt)m = rm + tm - rtm = m + tm - tm = m$. Противоречие с предположением $m \neq 0$.

Мы доказали, что $RM = 0$. Следовательно, $HM = 0, H \subseteq Irr(L)$.

Естественный гомоморфизм алгебры L в алгебру $L/H = sl_2(F)$ имеет неприводимое представление.

Мы доказали, что $Irr(L) = IrrPI(L) = IrrFin(L) = H$.

Пусть K - кольцо частных алгебры B . Тогда $L \subseteq K_2^{(-)}$, которая имеет точное представление в K^2 .

Легко проверить, что наибольший идеал нильпотентности такого представления алгебры L равен нулю.

Следовательно, $N(L) = 0$.

Строгое включение $0 \subset H$ завершает обоснование примера.

Далее будет рассмотрен вопрос о соотношении между $IrrPI(L)$ и $P(L)$ для произвольной алгебры Ли L .

Следующий вопрос также является естественным: является ли радикал $IrrPI(L)$ локально нильпотентным или локально разрешимым для специальной алгебры Ли?

Теорема 6 дает ответы на эти вопросы.

ТЕОРЕМА 6. 1. Ни одно из включений $IrrPI(L) \subseteq P(L)$ и $P(L) \subseteq IrrPI(L)$ не выполнено в общем случае.

2. В общем случае $IrrPI(L)$ не является локально разрешимым даже для специальных алгебр Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Строгое включения $IrrPI(L) \subseteq P(L)$ имеет место даже для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Для таких алгебр L справедливо $Irr(L) = N(L)$ [10].

Пусть $L = F_n, n \geq 1$.

Тогда $\text{IrrPI}(L) = 0$, $P(L) = \{\sigma E \mid \sigma \in F, E - \text{единичная матрица порядка } n\}$.

Для доказательства строгости включения $P(L) \subseteq \text{IrrPI}(L)$ воспользуемся примером. В примере построена специальная алгебра L , такая, что $\text{IrrPI}(L) \neq 0$.

Покажем, что $P(L) = 0$. Первичный радикал специальной алгебры Ли локально разрешим. Покажем, что алгебра L не содержит ненулевых локально разрешимых идеалов.

Пусть K - кольцо частных коммутативной алгебры формальных степенных рядов B .

Тогда алгебра $K \otimes_F L$ является простой, конечномерной над K алгеброй Ли. В частности, она не содержит ненулевых локально разрешимых идеалов.

Делаем вывод, что $P(K \otimes_F L) = 0$, но тогда $P(L) = 0$. Мы также доказали вторую часть теоремы. Идеал $\text{IrrPI}(L) \neq 0$.

В силу простоты алгебры $K \otimes_F L$ идеал $K \otimes_F \text{IrrPI}(L) = K \otimes_F L$.

Следовательно, идеал $\text{IrrPI}(L)$ не является локально разрешимым.

4. Заключение

Таким образом, установлено, что нельзя дать естественное гомологическое описание радикала Джекобсона.

Аналогично утверждение и относительно локально нильпотентного радикала. Включения (1), (2) и (3) показывают, что нельзя дать характеристику локально нильпотентного радикала в виде пересечения ядер неприводимых представлений некоторых естественных типов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. 496 с.
2. Михалев А.В., Скорняков Л.А. Гомологическая классификация колец // Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Сов. энциклопедия, 1977-1985. Т. 1: А - Г. С. 1052.
3. Латышев В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями // Сиб. мат. журнал. 1963. Т. 4. N 4. С. 821-829.
4. Marshall E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra. J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 416-422.
5. Пихтильков С.А. Структурная теория специальных алгебр Ли. Оренбург: Оренбургский гос. ун-т, 2013. 171 с.
6. Kubo F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. 1991. V. 38. P. 23-30.
7. Пихтильков С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. Вып. 3. С. 769-782.
8. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 448 с.
9. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III). М.: Мир, 1976.
10. Симонян Л. А. О радикале Джекобсона алгебры Ли // Латвийский математический ежегодник. 1993. Вып. 34. С. 230-234.

11. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972. 190 с.
12. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 356 с.
13. Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. Вып. 3. С. 643-648.
14. Джекобсон Н. Строение колец. М.: Изд-во иност. литературы, 1961. 392 с.
15. Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы. М.: Мир, 1974. 152 с.

REFERENCES

1. Andrunakievich, V. A., & Ryabukhin, Y. M. 1979, *Radicals of algebras and structure theory*, Nauka, Moscow.
2. Mikhalev, A.V., & Skornjakov S.A. 1977-1985. "Homological classification of rings" *Mathematical encyclopedia*, vol. 1, p. 1052.
3. Latyshev V. N. 1963, "On Lie algebras with identical relations", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 4, pp. 821-829.
4. Marshall, E. I. 1967, "The Frattini subalgebras of a Lie algebra", *J. London Math. Soc.*, vol. 42, pp. 416-422.
5. Pikhtilov, S.A. 2013, *Structural theory of special Lie algebras*, Orenburg State University, Orenburg.
6. Kubo, F. 1991, "Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical", *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat.Sci.*, vol. 38, pp. 23-30.
7. Pikhtilov, S.A. 2002, "On locally nilpotent radical of special Lie algebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 8, no. 3, pp. 769-782.
8. Bakhturin, Yu. A. 1985, *The identities in Lie algebras*, Nauka, Moscow.
9. Burbaki, N. 1976, *Lie groups and algebras (chapter I-III)*, Mir, Moscow.
10. Simonyan L. A. 1993, "On the Jacobson radical of the Lie algebra" *Latvian Math. Yearbook*, vol. 34, pp. 230-234.
11. Herstein, I. 1972, *Noncommutative Rings*, Mir, Moscow.
12. Jacobson, N. 1964, *Lie Algebras*, Mir, Moscow.
13. Beidar, K. I. & Pikhtilov, S. A. 2000, "The prime radical of the special Lie algebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 6, no. 3, pp. 643-648.
14. Jacobson, N. 1961, *Structure of Rings*, Izd. IL, Moscow.
15. Kaplansky, I. 1974, *Lie Algebras and Locally Compact Groups*, Mir, Moscow.

Оренбургский государственный университет

Получено 25.12.2016 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 517.581

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-205-221

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ГАММА-ФУНКЦИИ
НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

А. Ю. Попов (г. Москва)

Аннотация

В статье получены новые двусторонние оценки гамма-функции на действительной полуоси. Эти результаты дают в качестве следствия двусторонние оценки факториала, более сильные, нежели известные ранее. Найденные двойные неравенства для $n!$ верны при всех $n \geq 1$. Для $\Gamma(x+1)$ выведен ряд оценок; одни из них верны при всех $x > 0$, другие – при всех $x \geq 1/2$, а некоторые – при всех $x \geq 1$. Основные из полученных оценок связаны с понятием обвёртывания функции её асимптотическим рядом (если этот ряд является знакопеременным) в усиленном смысле, однако такая усиленная обвёртываемость пока доказана только для нескольких первых частичных сумм асимптотического ряда. Высказана гипотеза о том, что асимптотический ряд для логарифма гамма-функции обвёртывает его в усиленном смысле. В этом же духе получены новые неравенства для чисел сочетаний из $2n$ по n . Эти рассуждения свидетельствуют о перспективности дальнейших исследований в данном направлении и дают метод получения новых двойных неравенств для функций, чей асимптотический ряд является знакопеременным.

Ключевые слова: гамма-функция, двусторонние оценки, асимптотическая формула.

Библиография: 15 названий.

TWO-SIDED ESTIMATES OF GAMMA-FUNCTION
ON THE REAL SEMIAXIS

A. Yu. Popov (Moscow)

Abstract

In this paper we present new two-sided estimates of gamma-function $\Gamma(x+1)$ on the real semiaxis $x > 0$. Based on this result, we improve well-known estimates for the factorial $n!$, which hold for all $n \geq 1$. Some of obtained estimates of gamma-function $\Gamma(x+1)$ hold only for $x \geq 1/2$ and some only for $x \geq 1$. The main estimates are connected to the notion of alternation round of a function by asymptotic series in the strong sense. However such a strong alternation is proved only for several partial sums. We have a conjecture that the asymptotic series alternates round a logarithm of gamma-function in strong sense. Similary we propose new inequalities for the number of n -combination from $2n$. These considerations indicate that next investigation is promissing and give a method for construction of new two-sided estimates for functions having alternating asymptotic series.

Keywords: gamma-function, two-sided estimates, asymptotic behavior.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Во многих учебниках по математическому анализу доказывается асимптотическая формула Стирлинга

$$\Gamma(x+1) \sim S(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \text{где} \quad S(x) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x},$$

и следующее её «неасимптотическое» уточнение:

$$S(x) < \Gamma(x+1) < S(x) \exp\left(\frac{1}{12x}\right) \quad \forall x > 0. \quad (1)$$

Статья посвящена дальнейшим уточнениям двойного неравенства (1).

В книге [1, гл. 12] доказано, что разность

$$\varphi(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln S(x) \quad (2)$$

при $x \rightarrow +\infty$ имеет асимптотический ряд

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} x^{1-2k}. \quad (3)$$

Через B_{2k} обозначены числа Бернулли [2] (гл. 4, §2), [3] (гл. 4, §3). Они образуют знакопеременную последовательность: $B_{2k} = (-1)^{k-1} |B_{2k}|$; поэтому асимптотический ряд (3) является знакопеременным. Там же в [1] доказано, что значение функции $\varphi(x)$ при любом $x > 0$ всегда лежит между суммой m и суммой $m+1$ членов ряда, каково бы ни было натуральное число m . Обозначим

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} |B_{2k}|}{2k(2k-1)} x^{1-2k}.$$

Цитированный результат влечёт за собой справедливость двойных неравенств

$$S(x) \exp(\sigma_{2N}(x)) < \Gamma(x+1) < S(x) \exp(\sigma_{2N+1}(x)) \quad (4)$$

при любых $x > 0$ и $N \in \mathbb{N}$. Таким образом неравенство (1) можно рассматривать как вырожденный случай (4), соответствующий значению $N = 0$. В случае $N = 1$ неравенство (4) принимает вид

$$S(x) \exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3}\right) < \Gamma(x+1) < S(x) \exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5}\right) \quad \forall x > 0. \quad (5)$$

Это неравенство недавно было переоткрыто Ю. Мачисом [4]. Оно было доказано им только при $x \in \mathbb{N}$ (тем самым, речь шла о двусторонней оценке факториала), но совершенно иным способом, нежели в [1].

В середине 20-го века Г. Роббинс [5] вывел оценку снизу для факториала

$$S(n) \exp\left(\frac{1}{12n+1}\right) < n! \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Неравенство (6) слабее левого неравенства (5), поскольку при положительных значениях x имеем

$$\frac{1}{12x+1} < \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} \Leftrightarrow x > \frac{6 + \sqrt{66}}{30} = 0.4708 \dots$$

Но если бы в левой части (6) вместо $n \in \mathbb{N}$ стояла бы переменная $x > 0$, а в правой части – обобщение факториала $\Gamma(x+1)$, то получился бы новый результат, поскольку он усиливал бы оценку Сонины [6,7]

$$S(x) \exp\left(\frac{1}{12x+6}\right) < \Gamma(x+1) \quad \forall x > 0, \quad (7)$$

которая, несмотря на её давность, даже в 70-е годы 20-го века не была перекрыта (естественно при малых x) и приводилась в математической энциклопедии [8].

В статье усилено двойное неравенство (5). Доказано, что при всех $x > 0$ верна двусторонняя оценка

$$S(x) \exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3 + 12x}\right) < \Gamma(x+1) < S(x) \exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 360x^3}\right). \quad (8)$$

Заметим, что справедливы тождества

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3 + 12x} = \frac{1}{12x + 0.4x^{-1}}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 360x^3} = \frac{1}{12x + 0.4x^{-1} - \frac{106x^{-1}}{1050x^2 + 265}}. \quad (10)$$

Из тождества (9) и левого неравенства (5) получается оценка снизу

$$S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + 0.4x^{-1}}\right) < \Gamma(x+1) \quad \forall x > 0.$$

Как видно, она нуждается в усилении при малых x . В связи с этим доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Положим $a(x) = 0.4x^{-1}$ при $x \geq 0.5$, $a(x) = 0.8$ при $0 < x < 0.5$. Тогда при любом $x > 0$ верно неравенство*

$$S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + a(x)}\right) < \Gamma(x+1). \quad (11)$$

Из (5) также видно, что если рассмотреть функцию $S(x) \exp\left(\frac{1}{12x+b/x}\right)$, взяв $b \in (0, 0.4)$, то она при всех достаточно больших значениях x даёт оценку $\Gamma(x+1)$ сверху. Если же положить $b = 0.336$, то оценка сверху будет выполняться при любом $x \geq 1$.

ТЕОРЕМА 2. *При любом $x \geq 1$ верно неравенство*

$$\Gamma(x+1) < S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + a_0(x)}\right), \quad \text{где } a_0(x) = \frac{0.336}{x}. \quad (12)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *При любом $x \geq 1$ справедливо двойное неравенство*

$$S(x) \exp\left(\frac{x}{12x^2 + 2/5}\right) < \Gamma(x+1) < S(x) \exp\left(\frac{x}{12x^2 + 1/3}\right).$$

Принципиальную роль в доказательстве теоремы 2 сыграло небольшое усиление оценки (8) при $x \geq 1$ (см. §2).

Неравенства (11) и (12), как и каждый результат подобного рода, допускают дальнейшее уточнение.

ТЕОРЕМА 3. *Выполняется двойное неравенство*

$$S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + a_1(x)}\right) < \Gamma(x+1) < S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + a_2(x)}\right), \quad (13)$$

в котором

$$a_1(x) = \frac{0.4 - 0.1(x+0.5)^{-2}}{x}, \quad a_2(x) = \frac{0.4 - (53/525)x^{-2}}{x}. \quad (14)$$

Левое неравенство верно по крайней мере при $x \geq 0.5$, а правое – при любом $x > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из тождества (10) и правого неравенства (5) получается оценка сверху

$$\Gamma(x+1) < S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + 0.4x^{-1} - \frac{106x^{-1}}{1050x^2 + 265}}\right). \quad (15)$$

Видно, что оценка сверху (13) является огрублением (15). Тем не менее постоянная $53/525$ в выражении (14) для функции a_2 является точной: её нельзя заменить меньшей. Это следует из асимптотики (см. выше (3),(4))

$$\ln \Gamma(x+1) = \ln S(x) + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} + O\left(\frac{1}{x^7}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (16)$$

которую можно переписать в виде

$$\ln \Gamma(x+1) = \ln S(x) + \frac{1}{12x + 0.4x^{-1} - (53/525)x^{-3} + O(x^{-5})}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (17)$$

2. Усиление оценки сверху гамма-функции

ТЕОРЕМА 4. *Рассмотрим три пары чисел (x_0, c) :*

$$(x_0 = 0, c = 360), \quad (x_0 = 1/2, c = 567), \quad (x_0 = 1, c = 711). \quad (18)$$

При любом $x > x_0$ справедливо неравенство

$$\Gamma(x+1) < S(x) \exp\left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + cx^3}\right), \quad (19)$$

где (x_0, c) – любая из пар (18). Для второй и третьей пары (x_0, c) неравенство (19) верно также при $x = x_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Асимптотика (16) показывает, что усиление неравенства (19) возможно только за счёт увеличения c ; другие константы в этом неравенстве точные.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим функцию

$$F_c(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln S(x) - \frac{1}{12x} + \frac{1}{360x^3} - \frac{1}{1260x^5 + cx^3}.$$

Неравенство (19) равносильно отрицательности $F_c(x)$ на луче $x_0 < x < +\infty$. А так как согласно (16) имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_c(x) = 0$, то достаточно доказать неравенство

$$F_c(x) < F_c(x+1) \quad \forall x > x_0. \quad (20)$$

Действительно, из (20) сразу же следует, что ситуация $(\exists \xi > x_0 : F_c(\xi) \geq 0)$ невозможна, поскольку тогда $\{F_c(\xi + n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ окажется возрастающей последовательностью положительных чисел, а это противоречит стремлению к нулю $F_c(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Согласно определению функции F_c и тождествам

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x+2) - \ln \Gamma(x+1) &= \ln(x+1) \\ \ln S(x+1) - \ln S(x) &= \ln(x+1) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1, \end{aligned} \quad (21)$$

неравенство (20) равносильно следующему

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 &< \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - \\ &- \frac{1}{360} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) + \frac{1}{1260} \left(\frac{1}{x^5 + \lambda x^3} - \frac{1}{(x+1)^5 + \lambda(x+1)^3}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\lambda = c/1260, \quad x > x_0. \quad (23)$$

Обозначим $x + 1/2 = y$. Тогда неравенство (22) принимает вид

$$\begin{aligned} y \ln\left(\frac{y+1/2}{y-1/2}\right) - 1 &< \frac{1}{12(y^2 - 1/4)} - \frac{3y^2 + 1/4}{360(y^2 - 1/4)^3} + \\ &+ \frac{5y^4 + 5y^2/2 + 1/16 + \lambda(3y^2 + 1/4)}{1260(y^2 - 1/4)^3 ((y^2 - 1/4)^2 + \lambda(2y^2 + 1/2) + \lambda^2)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$y \in (x_0 + 1/2, +\infty)$. Положим $t = (2y)^{-1}$ (тогда переменная t пробегает интервал $0 < t < (1 + 2x_0)^{-1}$) и разложим левую часть неравенства (24) в степенной ряд:

$$y \ln\left(\frac{y+1/2}{y-1/2}\right) - 1 = \frac{1}{2t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}. \quad (25)$$

Правая же часть неравенства (24) окажется равна

$$\begin{aligned} \frac{y^{-2}}{12\left(1 - \frac{1}{4y^2}\right)} - \frac{3y^{-4} + y^{-6}/4}{360\left(1 - \frac{1}{4y^2}\right)^3} + \frac{5y^{-6} + 5y^{-8}/2 + y^{-10}/16 + \lambda(3y^{-8} + y^{-10}/4)}{1260\left(1 - \frac{1}{4y^2}\right)^3 \left(\left(1 - \frac{1}{4y^2}\right)^2 + \lambda(2y^{-2} + y^{-4}/2) + \lambda^2 y^{-4}\right)} = \\ = \frac{t^2}{3(1-t^2)} - \frac{2(3t^4 + t^6)}{45(1-t^2)^3} + \frac{16(5t^6 + 10t^8 + t^{10} + \lambda(12t^8 + 4t^{10}))}{315(1-t^2)^3((1-t^2)^2 + 8\lambda(t^2 + t^4) + 16\lambda^2 t^4)}. \end{aligned}$$

В результате этих преобразований, разделив обе части (24) на $t^2 = u$ и обозначив $4\lambda = \mu$, придём к задаче доказательства неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{2n+1} &< \frac{1}{3(1-u)} - \frac{2(3u + u^2)}{45(1-u)^3} + \\ &+ \frac{16(5u^2 + 10u^3 + u^4 + \mu(3u^3 + u^4))}{315(1-u)^3((1-u)^2 + 2\mu(u + u^2) + \mu^2 u^2)}, \quad 0 < u < \frac{1}{(1 + 2x_0)^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Умножим обе части (26) на $1 - u > 0$ и воспользуемся формулой

$$(1-u) \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^{n-1} = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) u^k.$$

Получим, что требуется доказать неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+1} \right) u^k &< \frac{16(5u^2 + 10u^3 + u^4 + \mu(3u^3 + u^4))}{315(1-u)^2((1-u)^2 + 2\mu(u+u^2) + \mu^2u^2)} - \frac{2(3u+u^2)}{45(1-u)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7 \frac{3+u}{(1-u)^2} < 8 \frac{5u+10u^2+u^3+\mu(3u^2+u^3)}{(1-u)^2((1-u)^2 + 2\mu(u+u^2) + \mu^2u^2)} + 315 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{(2k+1)(2k+3)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Докажем неравенство более сильное, чем (27), а именно получающееся в результате замены ряда в правой части (27) его первыми четырьмя слагаемыми:

$$\begin{aligned} 7 \frac{3+u}{(1-u)^2} &< 8 \frac{5u+10u^2+u^3+\mu(3u^2+u^3)}{(1-u)^2((1-u)^2 + 2\mu(u+u^2) + \mu^2u^2)} + 21 + 9u + 5u^2 + \frac{35}{11}u^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7(3+u) < \frac{40u+80u^2+8u^3+8\mu(3u^2+u^3)}{(1-u)^2 + 2\mu(u+u^2) + \mu^2u^2} + \left(21 + 9u + 5u^2 + \frac{35}{11}u^3 \right) (1-u)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 40 < \frac{40+80u+8u^2+8\mu(3u+u^2)}{(1-u)^2 + 2\mu(u+u^2) + \mu^2u^2} + 8u + \frac{24u^2-15u^3+35u^4}{11}. \end{aligned}$$

После умножения последнего неравенства на положительную функцию

$$(1-u)^2 + 2\mu(u+u^2) + \mu^2u^2 \equiv 1 + (2\mu-2)u + (1+\mu)^2u^2,$$

раскрытия скобок, перенесения всех слагаемых в правую часть, записи её в виде многочлена по степеням переменной u , а затем деления его на $u > 0$ приходим к задаче доказательства неравенства

$$0 < P(u, \mu), \quad 0 < u < (1+2x_0)^{-2}, \quad \text{где} \quad P(u, \mu) = \sum_{k=0}^5 b_k(\mu)u^k, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} b_0(\mu) &= 168 - 56\mu, \quad b_1(\mu) = -40\mu^2 - 56\mu - 45\frac{9}{11}, \quad b_2(\mu) = 8\mu^2 + 20\frac{4}{11}\mu + \frac{25}{11}, \\ b_3(\mu) &= \frac{24\mu^2 + 18\mu + 89}{11}, \quad b_4(\mu) = \frac{-15\mu^2 + 40\mu - 85}{11}, \quad b_5(\mu) = 35(1+\mu)^2/11. \end{aligned}$$

Покажем, что многочлен $P(u, \mu)$ является на отрезке $0 \leq u \leq 1$ выпуклой функцией переменной u при любом значении параметра $\mu \geq 0.4$. Действительно, имеем

$$P_{uu}(u, \mu) = 2b_2(\mu) + 6b_3(\mu)u + 12b_4(\mu)u^2 + 20b_5(\mu)u^3.$$

Поскольку коэффициенты b_2, b_3, b_5 положительны при любом $\mu > 0$, $b_4(\mu) < 0$, то при любом $u \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$P_{uu}(u, \mu) \geq (2b_2(\mu) + 6b_3(\mu) + 12b_4(\mu))u^2 = 4u^2(35\mu^2 + 259\mu - 109)/11.$$

Нетрудно проверить, что $35\mu^2 + 259\mu - 109 > 0$, если $\mu \geq 0.4$. Отсюда заключаем, что $P_{uu}(u, \mu) > 0$ ($\forall u \in [0, 1] \quad \forall \mu \geq 0.4$).

Рассмотрим первую из пар (18): $x_0 = 0$, $c = 360$. Из (23) находим $\mu = 4\lambda = 4c/1260 = 8/7$, и согласно (28) требуется доказать неравенство

$$0 < P(u, 8/7), \quad \text{при} \quad 0 < u < 1. \quad (29)$$

Непосредственным вычислением выводятся тождества

$$P(1, \mu) = \sum_{k=0}^5 b_k(\mu) = 128 - 80\mu - 28\mu^2, \quad P_u(1, \mu) = \sum_{k=0}^5 k b_k(\mu) = -7\mu^2 + 36\mu - 32,$$

которые влекут за собой равенства

$$P(1, 8/7) = 0, \quad P_u(1, 8/7) = 0. \quad (30)$$

Из (30) и выпуклости функции $P(u, 8/7)$ на отрезке $0 \leq u \leq 1$ следует, что $\min \{P(u, 8/7) \mid 0 \leq u \leq 1\} = P(1, 8/7) = 0$, и неравенство (29) выполняется.

При рассмотрении второй и третьей пар (18) достаточны более грубые оценки. Поскольку $b_5(\mu) > 0$, $b_4(\mu) < 0$, $b_3(\mu) > 0$, то при $u \in (0, 1)$ имеем

$$b_3(\mu)u^3 + b_4(\mu)u^4 + b_5(\mu)u^5 > b_3(\mu)u^3 + b_4(\mu)u^4 > (b_3(\mu) + b_4(\mu))u^3 = (9\mu + 58\mu + 4)u^3/11 > 0.$$

Следовательно,

$$Q(u, \mu) \equiv b_0(\mu) + b_1(\mu)u + b_2(\mu)u^2 < P(u, \mu) \quad \forall u \in (0, 1),$$

и мы вправе заменить (28) более сильным, но более простым неравенством

$$0 < Q(u, \mu), \quad 0 < u \leq u_0 = (1 + 2x_0)^{-2}, \quad (31)$$

и доказывать именно его. Сначала проверим справедливость неравенства (31) при $u = u_0$.

Возьмём вторую из пар (18) $x_0 = 1/2$, $c = 567$. Тогда $u_0 = 1/4$, $\mu = 1.8$,

$$Q(u_0, \mu) = Q\left(\frac{1}{4}, 1.8\right) = b_0(1.8) + \frac{b_1(1.8)}{4} + \frac{b_2(1.8)}{16} = -1.9 + \frac{5}{110} + \frac{b_2(1.8)}{16}. \quad (32)$$

А так как $b_2(\mu) > 8\mu^2 + 20\mu$, то $b_2(\mu)/16 > 0.5\mu^2 + \mu$,

$$\frac{b_2(1.8)}{16} > \frac{1.8^2}{2} + 1.8 = 3.42. \quad (33)$$

Из (32), (33) видно, что для второй пары (18) неравенство (31) при $u = u_0$ выполняется. Для третьей пары $x_0 = 1$, $c = 711$ имеем $u_0 = 1/9$, $\mu = 79/35$,

$$Q(u_0, \mu) = Q\left(\frac{1}{9}, \frac{79}{35}\right) = b_0\left(\frac{79}{35}\right) + \frac{1}{9}b_1\left(\frac{79}{35}\right) + \frac{1}{81}b_2\left(\frac{79}{35}\right) = -\frac{193}{2205} - \frac{1}{11} + \frac{1}{81}b_2\left(\frac{79}{35}\right). \quad (34)$$

А так как функция b_2 возрастает и $b_2(\mu) > 8\mu^2 + 20\mu$, то

$$b_2\left(\frac{79}{35}\right) > b_2(2) > 32 + 40 = 72. \quad (35)$$

Из (34), (35) видно, что неравенство (31) при $u = u_0$ выполняется для третьей пары (18).

Для доказательства (31) при всех $u \in (0, u_0)$ осталось заметить, что функция $Q(u, \mu)$ убывает на интервале $0 < u < 1$, каково бы ни было $\mu > 0$. Действительно, ввиду положительности $b_2(\mu)$ и включения $u \in (0, 1)$ имеем

$$Q_u(u, \mu) = b_1(\mu) + 2ub_2(\mu) < b_1(\mu) + 2b_2(\mu) = -24\mu^2 - 15\frac{3}{11}\mu - 41\frac{3}{11} < 0.$$

Таким образом неравенство (28) доказано для всех трёх пар (18), причём для второй и третьей пары также и при $u = (1 + 2x_0)^{-2}$. Согласно проведённым выше рассуждениям этим установлена справедливость неравенства (20), причём для второй и третьей пары также и при $x = x_0$. Теорема 4 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Согласно теореме 4 при любом $x \geq 1$ верно неравенство

$$\Gamma(x+1) < S(x) \exp \left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 711x^3} \right).$$

Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно вывести оценку

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 711x^3} < \frac{1}{12x + kx^{-1}} \quad \forall x \geq 1, \quad \text{где } k = 0.336. \quad (36)$$

Перепишем соотношение (36) в эквивалентной форме

$$\frac{1}{12x} - \frac{x}{12x^2 + k} < \frac{1}{360x^3} - \frac{1}{1260x^5 + 711x^3} \Leftrightarrow \frac{k}{12x^2 + k} < \frac{1}{30x^2} - \frac{1}{105x^4 + 59.25x^2}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $30x^2$ и обозначив $x^2 = v$, получим равносильные (36) неравенства

$$\frac{21v}{25v + 0.7} < 1 - \frac{1}{3.5v + 1.975} \Leftrightarrow \frac{1}{3.5v + 1.975} < \frac{4v + 0.7}{25v + 0.7} \Leftrightarrow 25v + 0.7 < (3.5v + 1.975)(4v + 0.7),$$

которые требуется доказать при $v \geq 1$. Последнее неравенство после раскрытия скобок, переноса всех слагаемых в одну часть и приведения подобных принимает вид

$$p(v) \equiv 14v^2 - 14.65v + 0.6825 > 0.$$

Оно действительно выполняется при любом $v \geq 1$, поскольку $p(1) = 0.0325 > 0$ и многочлен p возрастает на луче $[1, +\infty)$. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln S(x) - \frac{1}{12x + a(x)}. \quad (37)$$

Неравенство (11) означает положительность функции F . Доказательство положительности $F(x)$ начнём со значений $x \geq 0.5$.

Убедимся в том, что неравенство

$$F(x+1) < F(x) \quad \forall x \geq 0.5 \quad (38)$$

влечёт за собой положительность функции F на луче $[0.5, +\infty)$. Действительно, если бы существовала точка $\xi \in [0.5, +\infty)$, в которой $F(\xi) \leq 0$, то вследствие (38) $\{F(\xi + n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ оказалась бы убывающей последовательностью отрицательных чисел, а это противоречило бы предельному соотношению $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ (см. (1)).

Из (37) и определения функции $a(x) = 0.4/x$ при $x \geq 0.5$ заключаем, что неравенство (38) равносильно такому

$$\ln \Gamma(x+2) - \ln S(x+1) - \frac{x+1}{12(x+1)^2 + 0.4} < \ln \Gamma(x+1) - \ln S(x) - \frac{x}{12x^2 + 0.4}, \quad x \geq 0.5. \quad (39)$$

С помощью тождеств (21) перепишем неравенство (39) в следующей эквивалентной форме

$$\frac{x}{12x^2 + 0.4} - \frac{x+1}{12(x+1)^2 + 0.4} < \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{x+1}{x}\right) - 1. \quad (40)$$

Покажем, что неравенство (40) выполняется на самом деле при любом $x > 0$. Перейдём к переменной $y = x + 0.5$, а после – к переменной $t = (2y)^{-1} = (2x+1)^{-1}$, как это было сделано в §2. Левая часть неравенства (40) равна

$$\begin{aligned} & \frac{12(x+1)^2 + 0.4x - 12x^2(x+1) - 0.4(x+1)}{(12x^2 + 0.4)(12(x+1)^2 + 0.4)} = \frac{12y^2 - 3.4}{144y^4 - 62.4y^2 + 11.56} = \\ & = \frac{12y^{-2} - 3.4y^{-4}}{144 - 62.4y^{-2} + 11.56y^{-4}} = \frac{48t^2 - 54.4t^4}{144 - 249.6t^2 + 184.96t^4} = \frac{3t^2 - 3.4t^4}{9 - 15.6t^2 + 11.56t^4}. \end{aligned}$$

Правая часть неравенства (40) разложена в степенной ряд (25). Поэтому приходим к задаче доказательства неравенства

$$\frac{3t^2 - 3.4t^4}{9 - 15.6t^2 + 11.56t^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} \quad \forall t \in (0, 1). \quad (41)$$

Разделим обе части (41) на t^2 и докажем более сильное неравенство, получающееся в результате замены степенного ряда в правой части (41) его первыми двумя слагаемыми:

$$\frac{3 - 3.4t^2}{9 - 15.6t^2 + 11.56t^4} < \frac{1}{3} + \frac{t^2}{5} \Leftrightarrow \frac{5.4t^2 - 11.56t^4}{3(9 - 15.6t^2 + 11.56t^4)} < \frac{t^2}{5} \Leftrightarrow \frac{27 - 57.8t^2}{27 - 46.8t^2 + 34.68t^4} < 1.$$

Последнее неравенство верно при любом $t \in (0, 1)$, поскольку знаменатель дроби, стоящей в его левой части, положителен, а числитель меньше знаменателя. Доказательство неравенства (38) завершено.

Теперь докажем неравенство (11) при $0 < x < 0.5$. В этом случае

$$F(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln S(x) - (12x + 0.8)^{-1}, \quad (42)$$

и требуется проверить положительность $F(x)$ на интервале $0 < x < 0.5$. Это будет сделано с помощью разложения функции $F(x)$ в ряд

$$F(x) = F(0.5) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1-2x)^n, \quad 0 < x < 1. \quad (43)$$

(Разложение возможно ввиду голоморфности F в правой полуплоскости.) Поскольку ряд (43) является рядом Тейлора функции F с центром разложения 0.5 (записанным в несколько иной форме), то его коэффициенты находятся по формулам

$$a_n = \frac{(-1)^n F^{(n)}(0.5)}{2^n n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (44)$$

Для их вычисления найдём производные функции F всех порядков, используя стандартное обозначение $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ и тождество [9] (стр. 775) $\Psi^{(m)}(z) = (-1)^{m-1} m! \sum_{k=0}^{\infty} (k+z)^{-m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Имеем

$$F'(x) = \Psi(x+1) - \ln x - 0.5/x + (x+1/15)^{-2}/12, \quad (45)$$

$$F''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+x)^{-2} - 1/x + 0.5x^{-2} - (x+1/15)^{-3}/6, \quad (46)$$

$$\frac{(-1)^n F^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (k+x)^{-n} - \frac{x^{1-n}}{n(n-1)} + \frac{x^{-n}}{2n} - \frac{1}{12} \left(x + \frac{1}{15}\right)^{-n-1}, \quad n \geq 2. \quad (47)$$

Из (42) находим

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{17} - \frac{\ln 2}{2} > 0.006. \quad (48)$$

Из (45) и равенств $\Psi(1/2) = -\gamma - \ln 4$, $\Psi(x+1) = \Psi(x) + 1/x$ [9] (стр. 774) находим

$$F'(0.5) = 364/289 - \gamma - \ln 2 < -0.01 \quad (49)$$

($\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n\right) = -\Psi(1) = 0.577215 \dots$ – постоянная Эйлера-Маскерони). На основании (44) и (47) при $n \geq 2$ получаем следующую формулу для коэффициентов ряда (43):

$$a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)^{-n} + b_n, \quad \text{где} \quad b_n = \frac{n-2}{2n(n-1)} - \frac{1}{6} \left(\frac{15}{17}\right)^{n+1}. \quad (50)$$

Докажем положительность чисел a_n при всех $n \geq 9$. Рассмотрим функцию

$$c(x) = \frac{3(x-2)}{x-1} - x \left(\frac{15}{17}\right)^{x+1}.$$

Имеем $c'(x) = 3(x-1)^{-2} + (\alpha x - 1)(15/17)^{x+1}$, где $\alpha = \ln(17/15) > 1/8$. Отсюда видно, что $c'(x) > 0$ ($\forall x \geq 8$) и функция c возрастает на луче $[8, +\infty)$. А так как $c(9) > 0$, то $c(x) > 0$ на луче $9 \leq x < +\infty$. Осталось заметить, что $a_n > b_n = c(n)/(6n)$. Поэтому все слагаемые ряда (43) с номерами $n \geq 9$ положительны на интервале $0 < x < 0.5$ и верно неравенство

$$F(x) > F(0.5) + \sum_{n=1}^8 a_n (1-2x)^n, \quad 0 < x < 0.5. \quad (51)$$

Оценим снизу числа a_n при $3 \leq n \leq 8$. Непосредственные вычисления дают следующий результат

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{12} - \frac{15^4}{6 \cdot 17^4} = \frac{-17729}{12 \cdot 17^4} > -\frac{2}{113}, \quad b_4 = \frac{1}{12} - \frac{15^5}{6 \cdot 17^5} = \frac{-98893}{12 \cdot 17^5} > -\frac{2}{172}, \\ b_5 &= \frac{3}{40} - \frac{15^6}{6 \cdot 17^6} = \frac{-3524793}{40 \cdot 17^6} > -\frac{2}{547}, \quad b_6 = \frac{1}{15} - \frac{15^7}{6 \cdot 17^7} = \frac{-33619529}{30 \cdot 17^7} > -\frac{1}{366}, \\ b_7 &= \frac{5}{84} - \frac{15^8}{6 \cdot 17^8} = \frac{-1001681545}{84 \cdot 17^8} > -\frac{1}{584}, \\ b_8 &= \frac{3}{56} - \frac{15^9}{6 \cdot 17^9} = \frac{-3041058009}{56 \cdot 17^9} > -\frac{1}{2160}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (50) находим

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)^{-3} + b_3 > \frac{1}{3} \sum_{k=1}^7 (2k+1)^{-3} + b_3 = \\ &= \frac{4645519862131}{274195945398375} + b_3 > \frac{2}{119} - \frac{2}{113} = \frac{-12}{13447} > \frac{-1}{1120}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)^{-4} + b_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^4}{96} - 1 \right) + b_4 > \frac{1}{273} + b_4 > \frac{1}{273} - \frac{1}{172} = \frac{-101}{46956} > \frac{-1}{464}, \\
 a_5 &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)^{-5} + b_5 > \frac{1}{5} \sum_{k=1}^3 (2k+1)^{-5} + b_5 = \\
 &= \frac{57365351}{63814078125} + b_5 > \frac{1}{1113} - \frac{2}{547} = \frac{-1679}{608811} > \frac{-1}{360}, \\
 a_6 &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)^{-6} + b_6 = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi^6}{960} - 1 \right) + b_6 > \frac{1}{4156} + b_6 > \frac{1}{4156} - \frac{1}{366} = \frac{-1895}{760548} > \frac{-1}{400}, \\
 a_7 &= \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)^{-7} + b_7 > \frac{1}{7 \cdot 3^7} + b_7 > \frac{1}{15309} - \frac{1}{584} = \frac{-14725}{8940456} > \frac{-1}{600}, \\
 \sum_{n=3}^8 a_n &> -\frac{1}{1120} - \frac{1}{460} - \frac{1}{360} - \frac{1}{400} - \frac{1}{600} - \frac{1}{2160} = -\frac{1457}{139104} > -\frac{1}{95}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\sum_{n=3}^8 a_n z^n > -z^3/95 \quad \forall z \in (0, 1). \quad (52)$$

Из (51), (52), положив $z = 1 - 2x$, находим

$$F(x) > F(0.5) + a_1 z + a_2 z^2 - z^3/95, \quad 0 < x < 0.5. \quad (53)$$

А так как согласно (44) имеем $a_1 = -F'(0.5)/2$, $a_2 = F''(0.5)/8$, то из (53), (48), (49) выводим неравенство

$$F(x) > 0.006 + 0.005z + F''(0.5)z^2/8 - z^3/95, \quad z = 1 - 2x, \quad 0 < x < 0.5.$$

Полученное неравенство показывает, что для доказательства положительности $F(x)$ на интервале $0 < x < 0.5$ достаточно проверить положительность числа $F''(0.5)$. Из (46) находим

$$F''(0.5) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)^{-2} - \frac{4500}{4913} = \frac{\pi^2 - 8}{2} - \frac{4500}{4913} > \frac{3.14^2 - 8}{2} - \frac{45}{49} = 0.9298 - \frac{45}{49} > 0.$$

Доказательство положительности функции (42) на интервале $(0, 0.5)$ завершено, и этим теорема 1 полностью доказана.

5. Доказательство теоремы 3.

Начнём с вывода оценки сверху (13). По теореме 4 при любом $x > 0$ верно неравенство

$$\Gamma(x+1) < S(x) \exp \left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 360x^3} \right), \quad (54)$$

Из (54) и тождества

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5 + 360x^3} = \frac{1}{12x + 0.4x^{-1} - \frac{106x^{-1}}{1050x^2 + 265}}, \quad x > 0,$$

следует неравенство

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &< S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + 0.4x^{-1} - \frac{106x^{-1}}{1050x^2 + 265}}\right) < \\ &< S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + 0.4x^{-1} - \frac{106x^{-1}}{1050x^2}}\right) = S(x) \exp\left(\frac{1}{12x + a_2(x)}\right).\end{aligned}$$

Выведем оценку снизу (13). Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln S(x) - (12x + a_1(x))^{-1}, \quad (55)$$

Оценка снизу (13) означает положительность этой функции. И если доказать неравенство

$$\Phi(x+1) < \Phi(x) \quad \forall x \geq 0.5, \quad (56)$$

то вследствие стремления $\Phi(x)$ к нулю при $x \rightarrow +\infty$ положительность $\Phi(x)$ на луче $0.5 \leq x < +\infty$ будет доказана. Ввиду (55) неравенство (56) принимает вид

$$\ln \Gamma(x+2) - \ln S(x+1) - \frac{1}{12(x+1) + a_1(x+1)} < \ln \Gamma(x+1) - \ln S(x) - \frac{1}{12x + a_1(x)}. \quad (57)$$

Воспользовавшись тождествами (21), перепишем неравенство (57) в следующей равносильной форме:

$$\frac{1}{12x + a_1(x)} - \frac{1}{12(x+1) + a_1(x+1)} < \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{x+1}{x}\right) - 1, \quad x \geq 0.5. \quad (58)$$

Обозначим $b(x) = xa_1(x) = 0.4 - 0.1(x + 0.5)^{-2}$ и преобразуем левую часть неравенства (58), сделав последовательно замены переменной $x + 0.5 = y$, $t = (2y)^{-1}$ (если $0.5 \leq x < +\infty$, то $0 < t \leq 0.5$). Получим тождества

$$\begin{aligned}\frac{1}{12x + a_1(x)} - \frac{1}{12(x+1) + a_1(x+1)} &= \frac{x}{12x^2 + b(x)} - \frac{x+1}{12(x+1)^2 + b(x+1)} = \\ &= \frac{12x(x+1) + x(b(x+1) - b(x)) - b(x)}{144x^2(x+1)^2 + 12x^2b(x+1) + 12(x+1)^2b(x) + b(x)b(x+1)} = \\ &= \frac{12y^6 + 24y^5 + 8.6y^4 - 6.8y^3 - 3.1y^2 + 0.2y + 0.05}{144y^8 + 288y^7 + 81.6y^6 - 124.8y^5 - 53.24y^4 + 20.72y^3 + 7.28y^2 - 1.88y - 0.33} = \\ &= \frac{3t^2 + 12t^3 + 8.6t^4 - 13.6t^5 - 12.4t^6 + 1.6t^7 + 0.8t^8}{9 + 36t + 20.4t^2 - 62.4t^3 - 53.24t^4 + 41.44t^5 + 29.12t^6 - 15.04t^7 - 5.28t^8}.\end{aligned}$$

Теперь увеличим последнюю дробь, немного упростив её. Нетрудно проверить, что числитель и знаменатель этой дроби положительны на полуинтервале $0 < t \leq 0.5$, поэтому, уменьшив знаменатель дроби (оставляя его положительным), мы увеличим саму дробь. Поскольку

$$29.12t^6 - 15.04t^7 - 5.28t^8 \geq 29.12t^6 - (15.04/2)t^6 - (5.28/4)t^6 = 20.28t^6 \quad \text{при } t \in (0, 0.5],$$

то верна следующая оценка сверху левой части неравенства (58):

$$\frac{1}{12x + a_1(x)} - \frac{1}{12(x+1) + a_1(x+1)} < \frac{3t^2 + 12t^3 + 8.6t^4 - 13.6t^5 - 12.4t^6 + 1.6t^7 + 0.8t^8}{9 + 36t + 20.4t^2 - 62.4t^3 - 53.25t^4 + 41.4t^5 + 20.28t^6}, \quad (59)$$

в которой $x \in [0.5, +\infty)$, $t = (2x + 1)^{-1} \in (0, 0.5]$. Правая же часть неравенства (58), как было показано в (25), равна сумме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n}/(2n+1)$. Поэтому после деления обеих частей (58) на t^2 и применения оценки (59) получаем, что достаточно доказать неравенство

$$\frac{3 + 12t + 8.6t^2 - 13.6t^3 - 12.4t^4 + 1.6t^5 + 0.8t^6}{9 + 36t + 20.4t^2 - 62.4t^3 - 53.25t^4 + 41.4t^5 + 20.28t^6} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-2}}{2n+1}, \quad 0 < t \leq 0.5. \quad (60)$$

Вычтя из обеих частей (60) $1/3$ и разделив получившееся неравенство на t^2 , придём к равносильному (60) неравенству

$$\frac{1.8 + 7.2t + 5.35t^2 - 12.2t^3 - 5.96t^4}{9 + 36t + 20.4t^2 - 62.4t^3 - 53.25t^4 + 41.4t^5 + 20.28t^6} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{2n-4}}{2n+1}, \quad 0 < t \leq 0.5. \quad (61)$$

Вычтя из обеих частей (61) $1/5$ и разделив получившееся неравенство на t^2 , придём к задаче доказательства неравенства

$$\frac{6.35 + 1.4t + 23.45t^2 - 41.4t^3 - 20.28t^4}{45 + 180t + 102t^2 - 312t^3 - 266.25t^4 + 207t^5 + 101.4t^6} < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{t^{2n-6}}{2n+1}, \quad 0 < t \leq 0.5. \quad (62)$$

Сумма ряда, стоящего в правой части (62) превосходит его первое слагаемое, равное $1/7$. Знаменатель и числитель дроби, стоящей в левой части (62) положительны, причём знаменатель остаётся положительным даже после его уменьшения – удаления двух последних слагаемых. Следовательно, удалив два последних слагаемых из знаменателя дроби, стоящей в левой части (62), мы увеличим дробь, и таким образом достаточно доказать неравенство

$$\frac{6.35 + 1.4t + 23.45t^2 - 41.4t^3 - 20.28t^4}{45 + 180t + 102t^2 - 312t^3 - 266.25t^4} < \frac{1}{7}, \quad 0 < t \leq 0.5. \quad (63)$$

Ввиду положительности знаменателей дробей в (63) данное неравенство равносильно такому:

$$\begin{aligned} 7(6.35 + 1.4t + 23.45t^2 - 41.4t^3 - 20.28t^4) &< 45 + 180t + 102t^2 - 312t^3 - 266.25t^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &< 0.55 + 170.2t - 62.15t^2 - 22.2t^3 - 124.29t^4 \quad 0 < t \leq 0.5. \end{aligned} \quad (64)$$

При $t \in (0, 0.5]$ имеем

$$\begin{aligned} 170.2t - 62.15t^2 - 22.2t^3 - 124.29t^4 &> 170t - 64t^2 - 24t^3 - 128t^4 \geq \\ &\geq 170t - (64/2)t - (24/4)t - (128/8)t = 116t > 0. \end{aligned}$$

Отсюда сразу же следует, что неравенство (64) выполняется. Доказательство теоремы 3 завершено.

6. Заключение. Обвёртывание функции асимптотическим рядом в усиленном смысле

Напомним одно определение из теории асимптотических рядов [10], [11] (гл. 13), [12] (отдел I, глава 4). Пусть на луче $(0, +\infty)$ заданы действительная функция f и система положительных функций $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_{k+1}(x)/f_k(x)) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$. Предположим, что f имеет знакопеременный асимптотический ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} f_k(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (65)$$

то есть при любом $N \in \mathbb{N}$ верно соотношение

$$f(x) - \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} f_k(x) = o(f_N(x)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция f обвёртывается рядом (65) на луче $(x_0, +\infty)$, если при любом $m \in \mathbb{N}_0$ и любом $x > x_0$ верно двойное неравенство

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} f_k(x) < f(x) < \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^{k-1} f_k(x). \quad (66)$$

При $m = 0$ двойное неравенство (66) принимает вид

$$0 < f(x) < f_1(x) \quad \forall x > x_0. \quad (67)$$

При $m = 1$ имеем

$$f_1(x) - f_2(x) < f(x) < f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) \quad \forall x > x_0. \quad (68)$$

Заметим, что неравенства (68) сильнее (67) лишь при «достаточно больших» значениях x , а при «небольших» значениях x сравнение этих неравенств зависит от специфики поведения функций f_1, f_2, f_3 .

Положим $g_k(x) = 1/f_k(x)$ и обозначим $\sigma_N(x) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1}/g_k(x)$ N -ю частичную сумму ряда (65). Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что ряд (65) усиленно обвёртывает функцию f на луче $(x_0, +\infty)$, если при любом $m \in \mathbb{N}$ и любом $x > x_0$ верно двойное неравенство

$$\sigma_{2m-1}(x) - \frac{1}{g_{2m}(x) + g_{2m-1}(x)} < f(x) < \sigma_{2m}(x) + \frac{1}{g_{2m}(x) + g_{2m+1}(x)}. \quad (69)$$

Неравенство (69) является одновременным усилением двух двойных неравенств

$$\sigma_{2m}(x) < f(x) < \sigma_{2m+1}(x), \quad \sigma_{2m-2}(x) < f(x) < \sigma_{2m-1}(x).$$

Например, при $m = 1$ имеем

$$\frac{1}{g_1(x)} - \frac{1}{g_2(x) + g_1(x)} < f(x) < \frac{1}{g_1(x)} - \frac{1}{g_2(x)} + \frac{1}{g_2(x) + g_3(x)}. \quad (70)$$

Нетрудно убедиться в том, что неравенство (70) одновременно усиливает (67) и (68).

В отношении асимптотического ряда (2) для функции φ автором доказано неравенство (70), которое в данном конкретном случае есть неравенство (8). Это – усиленная обвёртываемость (69) при $m = 1$. Возникла гипотеза, что асимптотический ряд (2) не только обвёртывает функцию φ (это давно известно), но и усиленно обвёртывает её на луче $(0, +\infty)$. Доказать её пока не удалось.

Тем не менее, идея проверить, верны ли равенства (70), усиливающие одновременно (67) и (68) оказалась плодотворной и в другой актуальной задаче – двусторонней оценке центрального биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$. Ввиду справедливости асимптотики

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

удобно рассматривать последовательность

$$c_n = 4^{-n} \binom{2n}{n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n} dt.$$

Последовательность c_n встречается в ряде классических формул математического анализа. Приведём только два примера [13] (гл. 5):

$$(1-q)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1-q^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 q^{2n}, \quad |q| < 1.$$

Часто возникает потребность дать достаточно точную двустороннюю оценку c_n (см., например, недавние публикации [14], [15]). Очевидно, c_n является значением в натуральной точке n функции

$$C(x) = 4^{-x} \Gamma(2x+1) \Gamma^{-2}(x+1).$$

Из (2) нетрудно вывести представление $\ln C(x) = -0.5 \ln(\pi x) + \varphi(2x) - 2\varphi(x)$, которое вместе с (16) даёт асимптотику

$$\ln C(x) = -\frac{1}{2} \ln(\pi x) - \frac{1}{8x} + \frac{1}{192x^3} - \frac{1}{640x^5} + O\left(\frac{1}{x^7}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Выяснилось, что неравенство вида (70) для функции

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} \ln(\pi x) + \ln C(x) \equiv \varphi(2x) - 2\varphi(x)$$

справедливо, а именно

$$-\frac{1}{8x} + \frac{1}{192x^3} - \frac{1}{640x^5 + 192x^3} < \varphi_1(x) < -\frac{1}{8x} + \frac{1}{192x^3 + 8x} \quad \forall x > 0. \quad (71)$$

Метод доказательства двойного неравенства (71) в точности такой же, как и двойного неравенства (8). Двойное неравенство (71) после несложных преобразований даёт двусторонние оценки

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\frac{1}{8n + \frac{1}{3n+1/n}}\right) < c_n < \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\frac{1}{8n + \frac{1}{3n}}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Проведенное исследование показывает, что когда какая-либо функция имеет знакопеременный асимптотический ряд, то проверка её усиленной обвёртываемости этим рядом может дать новые более сильные двусторонние оценки этой функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, part 2, 1927. 616 pp.
2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 432 с.
3. Lang S. Elliptic functions. London. Amsterdam. Dod Mills. Ontario. Sydney. Tokio, Addison-Wesley publishing company, Inc, 1973. 326 pp.
4. Мачис Ю. Ю. О формуле Стирлинга. // Liet. Matem. Rink., 2007, V. 47, spec.nr., p. 526-530.

5. Robbins H. A remark on Stirling's formula // The American mathematical monthly, 1955, V. 62, № 1(Jan), p. 26-29.
6. Sonin N. Sur les termes complementaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling // Annales de l'Ecol norm., 1889, ser 3., t.6, p. 257-262.
7. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: ГИТТЛ, 1954. 244 с.
8. Купцов Л. П. Гамма-функция // Математическая энциклопедия, Т.1, С. 866-870. М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1977.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды, т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
10. Федорюк М. В. Обвёртывающий ряд. Математическая энциклопедия, Т.3., С. 1096. М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1982.
11. Hardy G. H. Divergent Series. Oxford Univ. Pr, Oxford, 1949. 396 pp.
12. Polya G., Szego G. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Reihen. Integralrechnung. Funktionentheorie [Texte imprime], Berlin : Springer , 1925. 338 s.
13. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. Изд. 2-е, перераб., М.: Наука, Гл. ред. физ. -мат. литературы, 1970. 304 с.
14. Белов А. С. Оценка остаточного члена в асимптотическом решении одной экстремальной задачи, связанной с неотрицательными тригонометрическими полиномами // Матем. заметки. 2016. Т. 100, Вып. 2. С. 303–307.
15. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум Ч. 1. Исследования по математическому анализу, Т. 8, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, 2014. С.126–175.

REFERENCES

1. Whittaker, E. T. & Watson, G. N. 1927, *A Course of Modern Analysis.*, 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press, part 2, 616 pp.
2. Gelfond, A. O. 1967, *Ischislenie konechnykh raznostej [Calculus of Finite Differences]*., Nauka, Moscow, 432 pp.
3. Lang, S 1973, *Elliptic functions*. Addison-Wesley publishing company Inc., London. Amsterdam. Dod Mills. Ontario. Sydney. Tokio, 326 pp.
4. Machis, Yu. Yu. 2007, "About Stirling's formula", *Liet. Matem. Rink.*, vol. 47, spec.nr., pp. 526-530.
5. Robbins, H 1955, "A remark on Stirling's formula", *The American mathematical monthly*, vol. 62, no 1(Jan), pp. 26-29.
6. Sonin, N 1889, "Sur les termes complementaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling", *Annales de l'Ecol norm.*, ser. 3., t. 6, pp. 257-262.
7. Sonin N. Ya. 1954, *Issledovaniya o cilindricheskih funkciyah i specialnyh polinomah [Investigations of cylinder functions and special polynomials]*., GITTL, Moscow, 244 pp.

8. Kupcov L. P. 1977, “Gamma-function”, *Matematicheskaya-ehnciklopediya, Sovetskaya ehnciklopediya*, Moscow, vol. 1, 866-870 pp.
9. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev, O. I. 1981, *Integraly-i-ryady [Integrals and series]*, Nauka, Moscow, vol. 1, 800 pp.
10. Fedoryuk, M. V. 1982, “Wrapping series”, *Matematicheskaya-ehnciklopediya, Sovetskaya ehnciklopediya*, Moscow, vol.3, 1096 p.
11. Hardy, G. H. 1949, *Divergent Series*, Oxford Univ. Pr, Oxford, 396 pp.
12. Polya, G. & Szego, G. 1925, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, Reihen. Integralrechnung. Funktionentheorie [Texte imprime], Springer, Berlin, 338 s.
13. Ahiezer, N. I. 1970. *Ehlementy-teorii-ehllipticheskikh-funkcij [Elements of the theory of elliptic functions]*. 2nd ed., Nauka, Moscow, 304 pp.
14. Belov, A. S. 2016, “An estimate of the remainder term in the asymptotic solution of an extremal problem connected with nonnegative trigonometric polynomials”, *Mat. notes.*, vol. 100, no. 2, 303–307 pp.
15. Tihonov, I. V., Sherstyukov, V. B. & Petrosova, M. A. “Bernstein polynomials: old and new” *Matematicheskij forum ch.1 Issledovaniya po matematicheskomu analizu(Mathematical forum Ch. 1. Studies in mathematical analysis)*, Vladikavkaz, 2014. vol. 8, pp.126–175.

Получено 10.03.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 519.21

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-222-234

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПОТОКА СОБЫТИЙ К
ПУАССОНОВСКОМУ

Ларкин Е.В., Горбачев Д.В., Привалов А.Н. (г. Тула)

Аннотация

При моделировании обширного класса технических систем широко применяется математический аппарат систем массового обслуживания (СМО). Примером такой системы является вычислительная сеть, где генерируются и выполняются заявки на выполнение вычислительных работ. Заявки генерируются обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый случайный поток заявок (требований). Обслуживание заявок, также продолжается какое-то случайное время. Одним из центральных вопросов организации систем массового обслуживания является выяснение закономерностей, которым подчиняются моменты поступления в систему требований на обслуживание.

В статье исследуются потоки событий в технических системах различного назначения. На основании того факта, что при пуассоновском характере потока математическое моделирование систем существенно упрощается, поставлена задача получения простого критерия для определения степени приближения потока событий к пуассоновскому. Исследованы критерий Пирсона, регрессионный, корреляционный и параметрический критерии. Вновь получен критерий, основанный на расчете функции ожидания. На примере исследования системы с «соревнованиями» показано, что поток событий генерируемых системой, стремится к пуассоновскому при бесконечном увеличении количества «состязующихся» субъектов.

Ключевые слова: Поток событий, пуассоновский поток, полумарковский процесс, критерий Пирсона, корреляция, регрессия, функция ожидания, равномерный закон.

Библиография: 14 названий.

ON THE APPROXIMATION OF THE FLOW OF EVENTS FOR
A POISSON

Larkin E. V., Gorbachev D. V., Privalov A. N. (Tula)

Abstract

When modeling an extensive class of technical systems, the mathematical apparatus of queuing systems (QMS) is widely used. An example of such a system is the computer network, where computer applications are generated and executed. Applications are generated usually not regularly, but by accident, forming the so-called random order of applications (requirements). Service requests, it also continues some random time. One of the central issues in the organization of mass-service systems is the elucidation of the regularities that subordinate the moments when system requirements for service are submitted.

The article explores the flow of events in technical systems of various purposes. On the basis of the fact that under the Poisson character of the flow mathematical modeling of the systems is greatly simplified, the problem of obtaining a simple criterion for determining the degree of approximation of the flow of events to a Poisson one is posed. Pearson's criterion, regression, correlation and parametric criteria were investigated. A criterion based on the calculation of the waiting function was obtained again. On the example of the study of the system with

"competitions" it is shown that the flow of events generated by the system tends to Poisson with an infinite increase in the number of "competing" subjects.

Keywords: Event flow, Poisson flow, semi-Markov process, Pearson's criterion, correlation, regression, expectation function, uniform law.

Bibliography: 14 titles.

1. Введение

Существует обширный класс систем, состояние которых характеризуются потоком событий. Примером такого рода систем является вычислительная сеть, где генерируются и выполняются заявки на выполнение вычислительных работ. Заявки генерируются обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый случайный поток заявок (требований). Обслуживание заявок, также продолжается какое-то случайное время. В качестве показателей эффективности СМО используются: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т.п. В качестве событий могут рассматриваться поступление заявок на обслуживание [1, 2], завершение интерпретации программы [3, 4], поток транзакций при дистанционном управлении [5, 6] и т.п. События происходят в физическом времени, а интервал между событиями, для внешнего наблюдателя, является случайной величиной. Одной из разновидностей потока является стационарный пуассоновский поток, который обладает следующими свойствами: стационарностью, отсутствием последствия, ординарностью [7]. Использование абстракции «пуассоновский поток» позволяет существенно упростить выкладки в ряде приложений, в частности в теории массового обслуживания, поэтому при исследовании систем подобного класса возникает вопрос о степени приближения плотности распределения времени между событиями $g(t)$ к плотности распределения интервалов в простейшем потоке, которая определяется экспоненциальным законом распределения.

2. Регрессионный критерий и критерий Пирсона

Интервалы времени между событиями в пуассоновском потоке характеризуется экспоненциальным законом распределения [7]

$$f(t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \quad (1)$$

где T - математическое ожидание экспоненциального закона;

Регрессионный критерий основан на оценке интеграла квадрата разности между анализируемым $g(t)$ и экспоненциальным (1) законами [8]:

$$\varepsilon_r = \int_0^{\infty} [g(t) - f(t)]^2 dt. \quad (2)$$

Очевидно, что если $g(t) \rightarrow f(t)$, то $\varepsilon_r \rightarrow 0$.

Пусть $g(t) = \delta(t - T)$, где $\delta(t - T)$ - смещенная δ -функция Дирака, для которой

$$\delta(t - T) = \begin{cases} 0 & \text{when } t \neq T; \\ \infty & \text{when } t = T; \end{cases} \quad \int_0^{\infty} \delta(t - T) dt = 1. \quad (3)$$

Тогда

$$\varepsilon_r = \int_0^{\infty} [\delta(t - T) - f(t)]^2 dt = \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon_{r1} = \int_0^{\infty} \delta^2(t - T) dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{T-a}^{T+a} \left(\frac{1}{2a}\right)^2 dt = \infty;$$

$$\varepsilon_{r2} = -2 \int_0^{\infty} \delta(t - T_g) \cdot \frac{1}{T_f} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) dt = -\frac{2}{eT};$$

$$\varepsilon_{r3} = \int_0^{\infty} \frac{1}{T^2} \exp\left(-\frac{2t}{T}\right) dt = \frac{1}{2T}.$$

Таким образом, критерий изменяется от 0 (поток без последствий) до ∞ (поток с жесткой детерминированной связью между событиями).

В том случае, если временные интервалы между событиями определяются экспериментально, и плотность распределения $g(t)$ представляет собой статистический ряд вида

$$g(t) = \begin{pmatrix} t_0 \leq t < t_1 & \dots & t_{i-1} \leq t < t_i & \dots & t_{J-1} \leq t < t_J \\ n_1 & & n_i & & n_J \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где n_i - количество результатов измерения, лежащих в интервале $t_{i-1} \leq t < t_i$, то для оценки близости плотности (3) и гистограммы (6) может быть использован критерий Пирсона [9], который в данном случае принимает вид

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^J \frac{\left\{ T n_j - \left[\exp\left(-\frac{t_{j-1}}{T}\right) - \exp\left(-\frac{t_j}{T}\right) \right] \cdot \sum_{i=1}^J n_i \right\}^2}{T \left[\exp\left(-\frac{t_{j-1}}{T}\right) - \exp\left(-\frac{t_j}{T}\right) \right] \cdot \sum_{k=1}^K n_k}. \quad (6)$$

Критерий (7) достаточно громоздок и применим в ограниченном количестве случаев.

3. Корреляционный критерий

Корреляционный критерий имеет вид [10]

$$\varepsilon_c = \int_0^{\infty} g(t) \cdot \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) dt. \quad (7)$$

Определим значение второго критерия для случаев $g(t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$ и $g(t) = \delta(t - T)$. В первом случае критерий достигает максимума:

$$\varepsilon_{c1} = \int_0^{\infty} \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \cdot \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{2T}.$$

Во втором случае критерий достигает минимума

$$\varepsilon_{c2} = \int_0^{\infty} \delta(t - T) \exp\left(-\frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{eT}.$$

Однако, если критерий - это индикатор отсутствия последствия, он должен быть безразмерным и укладываться в интервал $0 \leq \tilde{\varepsilon}_c \leq 1$. Нуль должен достигаться в первом случае (отсутствие последствия), единица должна достигаться во втором случае (детерминированная связь между событиями). Это происходит, если значение ε_c , рассчитанное как корреляция по зависимости (8), будет пересчитано по формуле

$$\tilde{\varepsilon}_c = \frac{e(1 - 2T\varepsilon_A)}{e - 2}. \quad (8)$$

Критерий $\tilde{\varepsilon}_c$ изменяется в интервале $0 \leq \tilde{\varepsilon}_c \leq 1$.

4. Параметрические критерии

Простейший вариант параметрического критерия основан на следующем свойстве экспоненциальной плотности распределения [11]:

$$T = \sqrt{D}, \quad (9)$$

где D - дисперсия, определяемая по зависимости

$$D = \int_0^{\infty} \frac{(t - T)^2}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) dt.$$

Очевидно, что подобными свойствами обладают многие плотности распределения, например, взвешенная пара вырожденных законов, $g(t) = 0,5\delta(t - \tau_1) + 0,5\delta(t - \tau_2)$, если $\tau_1 = 0$, $\tau_2 > 0$. Это затрудняет практическое использование зависимости (9).

Для установления более сложного критерия рассмотрим процесс генерации событий, как «соревнование», в котором участвуют два субъекта: внешний наблюдатель и генератор. Если в момент старта одновременно запускаются случайные процессы, характеризующие ременные интервалы между стартом и наблюдением и между двумя событиями, то «соревнование» может быть описано с помощью 2-параллельного полумарковского процесса [12, 13]

$$M = [A, h(t)], \quad (10)$$

где $A = \{a_{w1}, a_{w2}, a_{g1}, a_{g2}\}$ - множество состояний; a_{w1}, a_{g1} - стартовые состояния; a_{w2}, a_{g2} - поглощающие состояния; $h(t)$ - полумарковская матрица;

$$h(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & w(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & g(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}; 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Рассмотрим ситуацию, когда первый субъект выигрывает «соревнование» в момент времени τ и ожидает, когда второй субъект достигнет финиша. Для определения времени ожидания по полумарковскому процессу (10) (рис. 1 а) может быть построен ординарный полумарковский процесс (рис. 1 б) вида

$$M' = [A', h'(t)], \quad (12)$$

где $A' = A \cup B$ - множество состояний; $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ - подмножество состояний, моделирующее начало и окончания блужданий по полумарковскому процессу; α_1 - стартовое состояние; α_2 - поглощающее состояние, моделирующее выигрыш второго субъекта; α_3 - поглощающее состояние, моделирующее окончание ожидания первым субъектом финиширования второго,

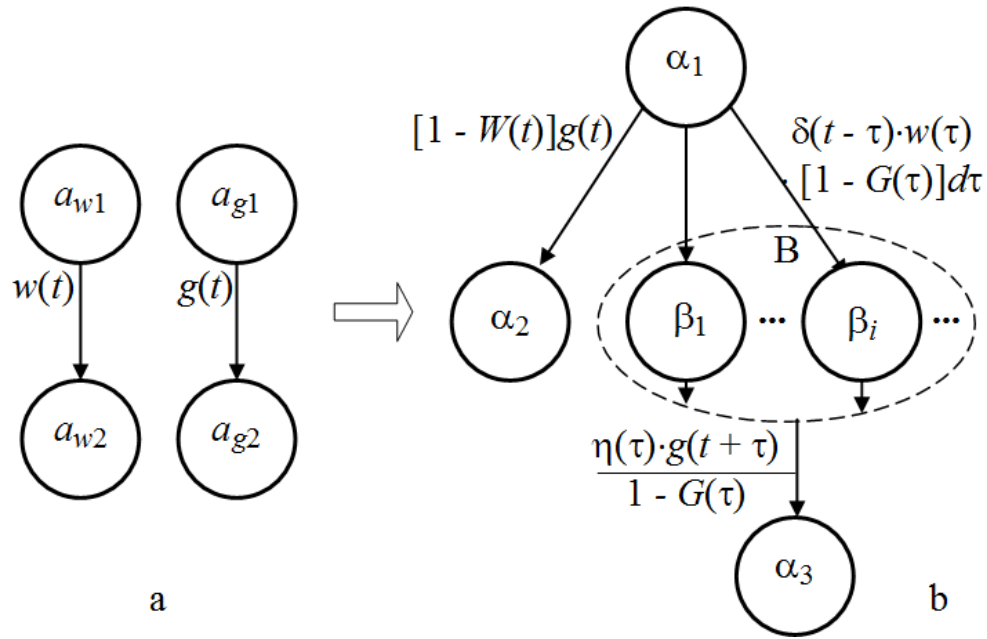


Рис. 29: К расчету времени ожидания

проигравшего субъекта; $B = \{\beta_1, \dots, \beta_i, \dots\}$ - бесконечное множество состояний, задающих временные интервалы для различных ситуаций завершения дистанции вторым, проигравшим, субъектом; $h'(t) = \{h'_{m,n}(t)\}$ - полумарковская матрица, задающая временные интервалы процесса.

Элементы $h'_{m,n}(t)$ определяются следующим образом:

$h'_{1,2}(t)$ определяется как взвешенная плотность распределения времени финиширования второго субъекта, если он является «победителем» «соревнования»,

$$h'_{12}(t) = g(t) [1 - W(t)], \quad (13)$$

где $W(t) = \int_0^t w(\theta) d\theta$ - функция распределения; θ - вспомогательная переменная;

$h'_{1,2+i}(t)$, $i = 1, 2, \dots$, определяются как взвешенные плотности распределения времени финиширования первого субъекта в точности во время τ , если он является «победителем» «соревнования» и ожидает второго субъекта;

$$h'_{1,2+i}(t) = \delta(t - \tau) \cdot w(\tau) [1 - G(\tau)] d\tau, \quad (14)$$

где $\delta(t - \tau)$ - вырожденный закон распределения, определяющий время τ , финиширования второго субъекта; $G(t) = \int_0^t g(\theta) d\theta$; $w(\tau) [1 - G(\tau)] d\tau$ - вероятность финиширования первого субъекта в точности во время τ , если он является «победителем» «соревнования»;

$$\frac{\eta(t) \cdot g(t + \tau)}{1 - G(\tau)},$$

где $\eta(t)$ - единичная функция Хевисайда - плотность распределения времени пребывания полумарковского процесса (12) в состоянии B , которая получается путем отсечения от смещенной плотности $g(t + \tau)$ значений с отрицательным аргументом.

Таким образом, вероятность попадания процесса в подмножество B равна

$$p_{\alpha_0\beta} = \int_0^{\infty} [1 - G(\tau)] w(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} W(t) g(t) dt.$$

Взвешенная плотность распределения времени ожидания первым субъектом финиширования второго субъекта равна

$$h_{w \rightarrow g}(t) = \eta(t) \int_0^{\infty} w(\tau) g(t + \tau) d\tau.$$

Чистая плотность распределения определяется следующим образом

$$f_{w \rightarrow g}(t) = \frac{\eta(t) \int_0^{\infty} w(\tau) g(t + \tau) d\tau}{\int_0^{\infty} W(t) dG(t)}. \quad (15)$$

Следует отметить, что операция (15) не является коммутативной, т.е. в общем случае

$$f_{g \rightarrow w}(t) = \frac{\eta(t) \int_0^{\infty} g(\tau) w(t + \tau) d\tau}{\int_0^{\infty} G(t) dW(t)} \neq f_{w \rightarrow g}(t).$$

Рассмотрим поведение $f_{w \rightarrow g}(t)$ для двух видов функции $g(t)$: когда указанная функция описывает поток событий без последствия, т.е. $g(t) = \frac{1}{T} \exp(-\frac{t}{T})$, и когда поток событий является строго детерминированным, т.е. $g(t) = \delta(t - T)$.

Выражение (15) для первого случая принимает вид:

$$f_{w \rightarrow g}(t) = \frac{\eta(t) \int_0^{\infty} w(\tau) \frac{1}{T} \exp[-\frac{t+\tau}{T}] d\tau}{1 - \int_{t=0}^{\infty} [1 - \exp(-\frac{t}{T})] dW(t)} = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right). \quad (16)$$

Таким образом, плотность $f_{w \rightarrow g}(t)$ отражает свойство отсутствия последствия в строго марковских процессах с непрерывным временем, которое может быть сформулировано следующим образом. Если плотность распределения времени между любыми двумя событиями в системе распределена по экспоненциальному закону, то для внешнего наблюдателя время, оставшееся до наступления очередного события, будет также распределено по экспоненциальному закону, независимо от момента начала наблюдения.

Выражение (15) для второго случая принимает вид:

$$f_{w \rightarrow g}(t) = \frac{\eta(t) w(T_w - t)}{W(T_w)}. \quad (17)$$

Пусть $w(t)$ имеет область определения $T_{w \min} \leq \arg w(t) \leq T_{w \max}$ и математическое ожидание $T_{w \min} \leq T_w \leq T_{w \max}$. В зависимости от местоположения $w(t)$ и $g(t)$ на оси времени, возможны следующие ситуации:

а) $T < T_{w \min}$. В этой ситуации выражение (5) не имеет смысла.

б) $T_{w \min} \leq T \leq T_{w \max}$. В этой ситуации плотность распределения выражается зависимостью (17), область определения $f_{w \rightarrow g}(t)$ определяется как $0 \leq \arg[f_{w \rightarrow g}(t)] \leq T - T_{w \min}$, и $\int_0^{\infty} t f_{w \rightarrow g}(t) dt \leq T$.

с) $T > T_{w \max}$. В этой ситуации $f_{w \rightarrow g}(t) = w(T - t)$, $T - T_{w \max} \leq \arg[f_{w \rightarrow g}(t)] \leq T - T_{w \min}$,
и $\int_0^{\infty} t f_{w \rightarrow g}(t) dt \leq T$.

Таким образом, математическое ожидание функции $f_{w \rightarrow g}(t)$ для пуассоновского потока событий остается неизменным, а для детерминированного потока событий уменьшается, и это уменьшение определяется видом функции $w(\tau)$. Это обстоятельство позволяет определить вид простого критерия, основанного на использовании математического ожидания плотности распределения ожидания.

Пусть плотность распределения времени наблюдения определяется вырожденным законом распределения с математическим ожиданием, равным T , т.е. $w(t) = \delta(t - T)$ (соответствует детерминированному потоку событий). Для этого случая плотность распределения времени ожидания δ -функцией Дирака события, когда завершится событие $g(t)$, определяется по зависимости

$$f_{\delta \rightarrow g}(t) = \frac{\eta(t) \cdot g(t + T)}{\int_T^{\infty} g(t) dt}. \quad (18)$$

Математическое ожидание (18) имеет вид

$$T_{\delta \rightarrow g} = \int_0^{\infty} t \frac{g(t + T)}{\int_T^{\infty} g(t) dt} dt. \quad (19)$$

Критерий, основанный на определении времени ожидания, имеет вид

$$\varepsilon_w = \left(\frac{T - T_{\delta \rightarrow g}}{T} \right)^2, \quad (20)$$

где T - математическое ожидание анализируемой плотности распределения времени между соседними событиями; $T_{\delta \rightarrow g}$ - математическое ожидание плотности распределения $f_{\delta \rightarrow g}(t)$, рассчитываемое по зависимости (18).

Для экспоненциального закона

$$\varepsilon_w = \left(\frac{T - T_{\delta \rightarrow g}}{T} \right)^2 = \left(\frac{T - T}{T} \right)^2 = 0. \quad (21)$$

Это означает отсутствие последствия. Для строго детерминированной связи между событиями, выражаемой δ -функцией Дирака $g(t) = \delta(t - T)$

$$f_{\delta \rightarrow g}(t) = \delta(t), \text{ и } \varepsilon_w = \left(\frac{T - 0}{T} \right)^2 = 1. \quad (22)$$

Это означает детерминированную связь между событиями, или «абсолютное последствие».

Исследуем поведение критерия $\sqrt{\varepsilon_w}$ функции. Для этого определим математическое ожидание функции $g(t)$ в виде (рис. 2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t g(t) dt &= \int_0^T t g(t) dt + \int_0^{\infty} t g(t + T) dt T + T \int_0^{\infty} g(t + T) dt = \\ &= p_{1g} T_{1g} + p_{2g} T_{\delta \rightarrow g} + p_{2g} T = T, \end{aligned} \quad (23)$$

где $p_{1g} = \int_0^T g(t) dt$; $p_{2g} = \int_T^{\infty} g(t) dt$.

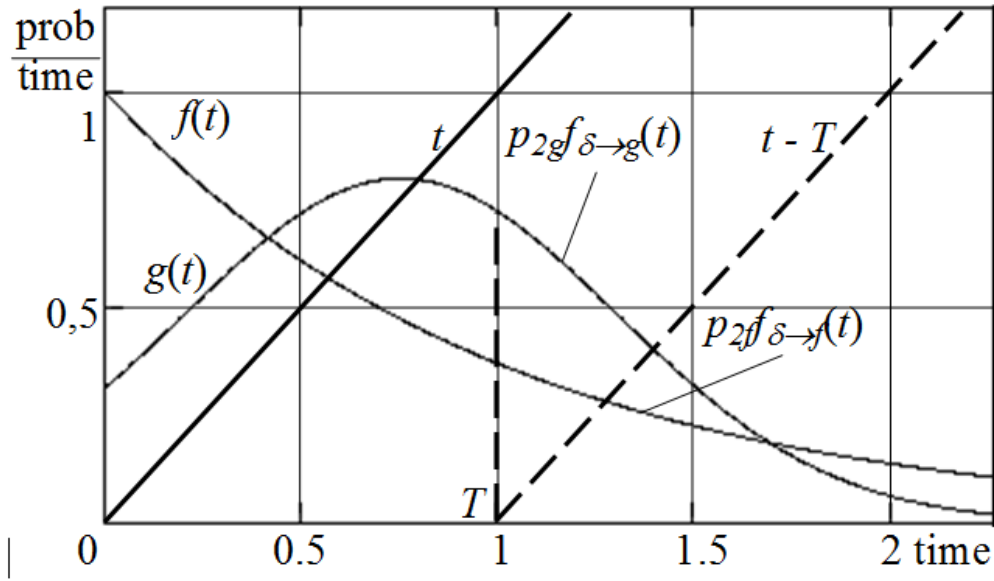


Рис. 30: К расчету математического ожидания

Очевидно, что в (23) $T_2 = T_{\delta \rightarrow g}$.

Если $g(t) = f(t)$, то из уравнения

$$p_{1f}T_{1f} + p_{2f}T_{\delta \rightarrow f} + p_{2f}T = T, \quad (24)$$

где $p_{1f} = \frac{e-1}{e}$; $p_{2f} = \frac{1}{e}$; $T_{1f} = T \frac{e-2}{e-1}$,
следует, что

$$T_{\delta \rightarrow f} = T. \quad (25)$$

Равенство (25) подтверждает справедливость зависимостей (16) и (21).

При $g(t) \neq f(t)$ из (23) следует

$$T_{\delta \rightarrow g} = \frac{p_{1g}(T - T_{1g})}{1 - p_{1g}}. \quad (26)$$

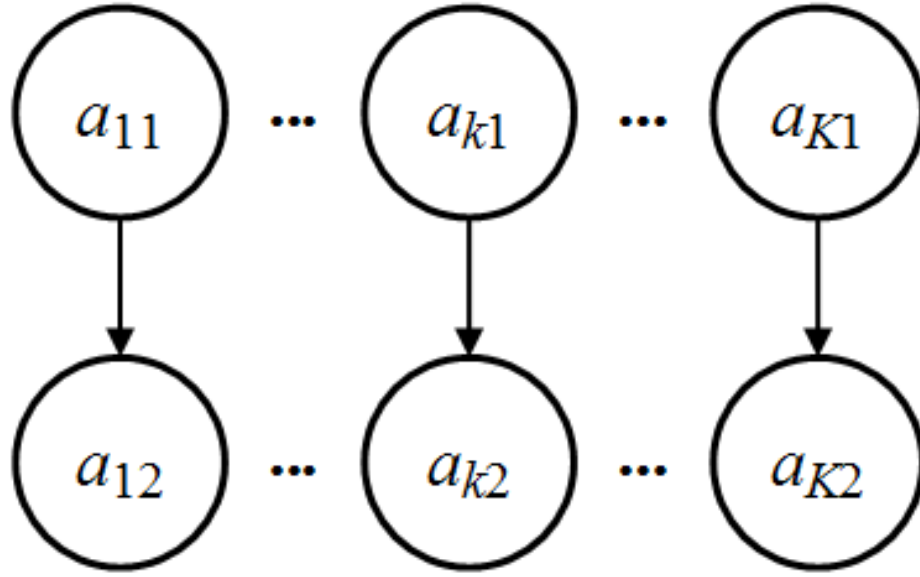
Значение $T_{\delta \rightarrow g}$, в зависимости от соотношения значений T_{1g} и p_{1g} может быть как $T_{\delta \rightarrow g} > T$, так и $T_{\delta \rightarrow g} < T$ (случай $T_{\delta \rightarrow g} = T$ представлен зависимостями (24), (25)). Очевидно, что первые два случая означают, что поток не является Пуассоновским

5. Пример

В качестве примера рассмотрим случай, когда поток событий формируется в результате «соревнования» K субъектов с равновероятными и одинаковыми законами распределения (рис. 2). Модель формирования потока может быть представлена в виде K -параллельного полумарковского процесса, показанного на рис. 2 [11],

$$M^K = [A^K, h^K(t)], \quad (27)$$

где $A^K = \{a_{11}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{K1}, a_{12}, \dots, a_{k2}, \dots, a_{K2}\}$ - множество состояний; $a_{11}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{K1}$ - подмножество стартовых состояний; $a_{12}, \dots, a_{k2}, \dots, a_{K2}$ - подмножество поглощающих состояний; $h^K(t)$ - полумарковская матрица;

Рис. 31: Формирование потока событий в результате «соревнования» k субъектов

$$h^K(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & v_1(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \begin{bmatrix} 0 & v_k(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \dots \\ 0 & \dots & \begin{bmatrix} 0 & v_K(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \quad (28)$$

$$v_1(t) = \dots = v_k(t) = \dots v_K(t) = v(t) = \begin{cases} 1, & \text{when } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{in all other cases.} \end{cases} \quad (29)$$

K -параллельный процесс запускается из всех состояний подмножества $a_{11}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{K1}$ одновременно. Событие генерируется, когда один из ординарных процессов, например k -й, достигает своего поглощающего состояния, a_{k1} , $1 \leq k \leq K$. В соответствии с теоремой Б. Григелиониса, при $K \rightarrow \infty$ поток событий, генерируемых параллельно независимыми генераторами, стремится к пуассоновскому.

Плотность распределения интервала времени между началом процесса и достижением хотя бы одним процессом поглощающего состояния, для данного конкретного случая, определяется зависимостью

$$g_K(t) = \frac{d \left\{ 1 - [1 - V(t)]^K \right\}}{dt}, \quad (30)$$

где

$$V(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \begin{cases} 2t, & \text{when } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{in all other cases.} \end{cases}$$

Для случая (29)

$$g_K = \begin{cases} K(1-t)^{K-1}, & \text{when } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{in all other cases.} \end{cases} \quad (31)$$

Математическое ожидание для (31) определяется по зависимости

$$T_K = \int_0^1 tK(1-t)^{K-1} dt = \frac{1}{K+1} [\text{time}] \quad (32)$$

Экспоненциальный закон, определяющий Пуассоновский поток событий, имеет вид:

$$f_K(t) = (K+1) \exp[-(K+1)t] \left[\frac{\text{prob}}{\text{time}} \right], \quad (33)$$

Для усеченного закона

$$\tilde{T}_K = \frac{K}{(K+1)^2} [\text{time}]. \quad (34)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \varepsilon_{lg}^K = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{T_K - \tilde{T}_K}{T_K} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K+1} = 0, \quad (35)$$

т.е. с увеличением K закон приближается к экспоненциальному, что соответствует теореме Б. Григелиониса [14], и подтверждается введенным критерием, основанном на вычислении функции ожидания.

Вид плотностей распределения приведен на рис. 3. Уже при $K = 8$ критерий равен 11,1, что можно считать хорошим приближением к экспоненциальному закону.

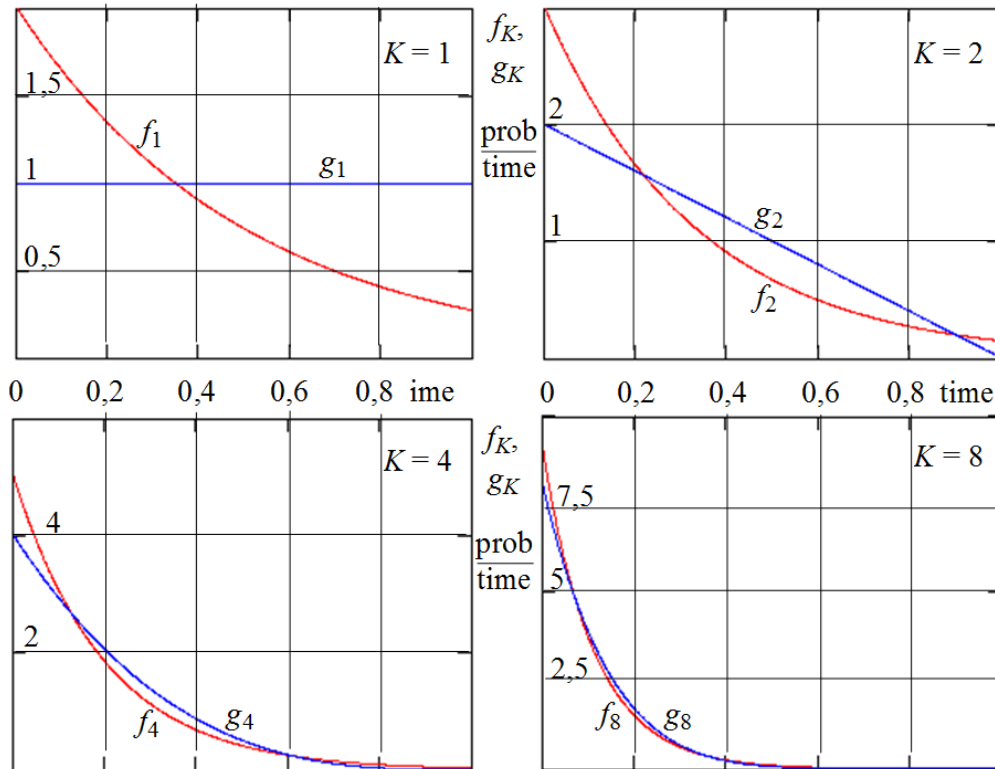


Рис. 32: Вид плотностей распределения

6. Заключение

Таким образом, исследованы критерии, по которым может быть оценена степень приближения потока событий к пуассоновскому потоку. Из всех существующих может быть выделен

критерий, основанный на оценке времени ожидания, использование которого позволяет существенно сократить вычислительную сложность алгоритмов оценки.

Дальнейшие исследования в этом направлении могут быть связаны с практическим использованием критерия для оценки свойств потоков событий и оценкой ошибок, к которым приводит замена непуассоновских потоков пуассоновскими при моделировании систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации на выполняемый в рамках государственного задания на проект "Параллельные полумарковские процессы в системах управления мобильными роботами" № 2.3121.2017/ПЧ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сундарапандиан В. Вероятность, статистика и теория массового обслуживания. - Нью-Дели. 2009.
2. Гросс Д., Харрис К.М. Основы теории очередей. Изд. Джон Вилей и сыновья, 1974.
3. Ларкин Е.В., Ивутин А.Н. Диспетчеризация во встроенных системах // 2016 5-я Средиземноморская конференция по встроенным вычислительным системам (MECO). - 12-16 июня 2016 года, Бар, Черногория - IEEE, 2016. - Стр. 215 - 217.
4. Ларкин Е., Ивутин А.Н., Есиков Д. Д. Рекурсивный подход для оценки временных интервалов между транзакциями в процедуре опроса // 8-я Между-народная конференция по компьютерной и автоматизации (ICSAE 2016). - 3-4 марта 2016 года - Мельбурн, Австралия - Сеть конференций МАТЕС, 56 (2016) 01004
5. Ларкин Е.В., Ивутин А.Н., Котов В.В., Привалов А.Н. Интерактивный генератор команд // 7-я Международная конференция ICSI-2016. Бали, Индонезия, 25-30 июня. Труды. Часть 2. Лекционные заметки в области компьютерных наук. LNCS Sublibrary: SL1 - Теоретическая информатика и общие вопросы Springer, 2016. С. 601 - 609.
6. Ларкин Е.В., Привалов А.Н. Моделирование режимов диалога управления дистанционными роботами // Труды 5-го Международного семинара по математическим моделям и их приложениям Красноярск, Россия, 7-9 ноября 2016 г. – С. 92 - 103.
7. Марков А.А. Расширение закона больших чисел на зависимые кванты, Изв. физ.-матем. Казанский унив., (2-й сер.), - 1906, С. 135-156.
8. Боос Д.Д. Стефански Л. А. Эссенциальный статистический вывод. Теория и методы. - N.Y., Springer Verlag. 2013. - 568 (XVII) Стр.
9. Драпер Н.Р., Смит Н. Приложения регрессионного анализа Изд. Джон Вилей и сыновья, 1998 - 736 с.
10. Рейтинг М.К. Корреляционные методы. - опубликовано Чарльзом Гриффином и Компани, Лондон, - 1955. - 196 с.
11. Вентцель Е.С. Теория вероятности. - М.: Мир Издательство, 1986. 86 с.
12. Ивутин А.Н., Ларкин Е.В. Моделирование параллельных игр // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование, программирование и компьютерное программное обеспечение. - Челябинск, 2015 г. - т. 8, №2. - С. 43 – 54.

13. Ларкин Е.В., Ивутин А.Н., Котов В.В., Привалов А.Н. Моделирование ретрансляций // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математическое моделирование, программирование и компьютерное программное обеспечение. - 2016. с. 117- 128.
14. Глушков В.М., Амосов Н.М., Артеменко И.А. Энциклопедия кибернетики. Том 2. Киев, 1974.
15. Григелионис Б. О сходимости сумм случайных ступенчатых процессов к пуассоновскому процессу. Теория вероятности, С. 177 - 182., 1963.

REFERENCES

1. Sundarapandian V. Queueing Theory: Probability, Statistics and Queueing Theory. - PHI Learning. New Delhi. 2009.
2. Gross D., Harris C.M. Fundamentals of Queue Theory. John Wiley & Sons N.Y/ 1974..
3. Larkin E.V., Ivutin A.N. Dispatching in Embedded Systems //2016 5th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO). – 12-16 June 2016, Bar, Montenegro – IEEE, 2016. – Pp. 215 - 217.
4. Larkin, E., Ivutin, A., Esikov, D. Recursive Approach for Evaluation of Time Intervals between Transactions in Polling Procedure // 8-th International Conference on Computer and Automation Engineering (ICCAE 2016). – March 3-4, 2016 – Melbourne, Australia – MATEC Web of Conferences, 56 (2016) 01004
5. Larkin E.V., Ivutin A.N., Kotov V.V., Privalov A.N. Interactive generator of commands // 7-th International Conference ICSI-2016. Bali, Indonesia, June 25 - 30. Proceedings. Part 2. Lecture Notes in Computer Science. LNCS Sublibrary: SL1 – Theoretical Computer Science and General Issues Springer, 2016. Pp. 601 - 609.
6. Larkin E.V., Privalov A.N. Modeling of dialogue regimes of distance robot control // Proceedings of 5th International Workshop on Mathematical Models and their Applications Krasnoyarsk, Russia, November 7-9, 2016. - Pp/ 92 - 103.
7. Markov A.A. Extension of the law of large numbers to dependent quantities, Izvestiia Fiz.-Matem. Obsch. Kazan Univ., (2-nd Ser.), - 1906, - Pp. 135–156
8. Boos D.D. Stefanski L.A. Essential Statistical Inference. Theory and methods. - N.Y., Springer Verlag. 2013. - 568 (XVII) Pp.
9. Draper N.R., Smith H. Applied Regression Analysis 1998 by John Wiley & sons, Inc. - 736 Pp.
10. Rank M.K. Correlation Methods. - Published by Charles Griffin & Company, London, - 1955. - 196 Pp.
11. Ventsel E.S. Probability theory. - M.: Mir Publisher, 1986. - 86 Pp.
12. Ivutin A.N., Larkin E.V. Simulation of Concurrent Games // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – Chelyabinsk, 2015. – Vol. 8, №2. – P. 43 - 54. DOI: 10.14529/mmp150204

13. Larkin E.V., Ivutin A.N., Kotov V.V., Privalov A.N. Simulation of Relay-races // Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. - 2016. - Vol. 9. - No 4. - Pp. 117 - 128.
14. Glushkov V. M, Amosov N. M, Artemenko I. A. Encyclopedia of Cybernetics. Vol-ume 2. Kiev, 1974.
15. Grigelionis B. On the convergence of sums of random step processes to a Poisson process. Theory Probab. Appl. 1963. Pp. 177 - 182.

Получено 20.02.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК УДК 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-235-244

E-КОЛЬЦА МАЛЫХ РАНГОВ

А. В. Царев (г. Москва)

Аннотация

Ассоциативное кольцо R называется E -кольцом, если все эндоморфизмы его аддитивной группы R^+ являются левыми умножениями, то есть для любого $\alpha \in \text{End } R^+$ найдется $r \in R$, такой что $\alpha(x) = x \cdot r$ для всех $x \in R$. E -кольца были введены в 1973 году Ф. Шульцем. Им посвящено большое количество работ, однако, в большинстве из них рассматриваются E -кольца без кручения. В данной работе рассматриваются E -кольца, в том числе и смешанные, ранги которых не превосходят 2. Хорошо известно, что E -кольца ранга 0 — это в точности кольца классов вычетов. Доказано, что E -кольца ранга 1 совпадают с бесконечными T -кольцами (с кольцами R_χ). Основным результатом статьи является описание E -колец ранга 2. А именно, доказано, что E -кольцо R ранга 2 либо раскладывается в прямую сумму E -колец ранга 1, либо имеет вид $\mathbb{Z}_m \oplus J$, где J — m -делимое E -кольцо без кручения, либо кольцо R S -сервантно вкладывается в кольцо $\prod_{p \in S} t_p(R)$. Кроме того, получены некоторые результаты о нильрадикале смешанного E -кольца.

Ключевые слова: E -кольцо, E -группа, абелева группа, T -кольцо, факторно делимая группа.

Библиография: 15 названий.

E-RINGS OF LOW RANKS

A. V. Tsarev (Moscow)

Abstract

An associative ring R is called an E -ring if all endomorphisms of its additive group R^+ are left multiplications, that is, for any $\alpha \in \text{End } R^+$ there is $r \in R$ such that $\alpha(x) = x \cdot r$ for all $x \in R$. E -rings were introduced in 1973 by P. Schultz. A lot of articles are devoted to E -rings. But most of them are considered torsion free E -rings. In this work we consider E -rings (including mixed rings) whose ranks do not exceed 2. It is well known that an E -ring of rank 0 is exactly a ring classes of residues. It is proved that E -rings of rank 1 coincide with infinite T -ring (with rings R_χ). The main result of the paper is the description of E -rings of rank 2. Namely, it is proved that an E -ring R of rank 2 or decomposes into a direct sum of E -rings of rank 1, or $R = \mathbb{Z}_m \oplus J$, where J is an m -divisible torsion free E -ring, or ring R is S -pure embedded in the ring $\prod_{p \in S} t_p(R)$. In addition, we obtain some results about nilradical of a mixed E -ring.

Keywords: E -ring, E -group, abelian group, T -ring, quotient divisible group.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Понятие E -кольца появилось в работах Шульцца [1, 2] в связи с рассмотрением проблемы 45 из книги Фукса [3]. Эта проблема формулируется следующим образом: «*Описать кольца R , для которых имеет место изоморфизм $R \cong E(R^+)$* ». Здесь R^+ — аддитивная группа кольца R , а $E(R^+)$ — ее кольцо эндоморфизмов. Шульцц обратил внимание на то, что изучение таких колец разбивается на два принципиально разных случая, в зависимости от того — коммутативны они или нет. Коммутативные кольца с условием $R \cong E(R^+)$ Шульцц назвал E -кольцами и их систематическому исследованию посвятил работы [2, 4]. Отметим, что вопрос о существовании некоммутативных колец с условием $R \cong E(R^+)$ оставался открытым в течение 30 лет. Лишь в 2003 г. примеры таких колец были построены Гёбелем, Шелахом и Штрюнгманном в [5].

Коммутативность кольца R и условие $R \cong E(R^+)$ равносильны тому, что имеет место канонический изоморфизм $R \rightarrow E(R^+)$, действующий по правилу $a \mapsto \lambda_a$, где λ_a — оператор левого умножения на a ($\lambda_a(x) = ax$ для любого $x \in R$). В связи с этим, для определения E -колец можно использовать функциональное уравнение Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (*)$$

Если рассматривать функциональное уравнение $(*)$ над произвольным кольцом R , то множество его решений над R — это в точности множество $E(R^+)$. Следовательно, кольцо R является E -кольцом в том и только том случае, когда уравнение $(*)$ имеет над R только линейные однородные решения. Еще Коши знал, что всякое решение уравнения $(*)$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ или над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ имеет вид $f(x) = f(1)x$, т. е. $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются E -кольцами.

E -кольца не попали в классическую монографию Фукса [6] (второй том которой вышел в 1973 г.), однако, почти во всех более поздних книгах по теории абелевых групп E -кольцам посвящены параграфы или главы. Кроме того, в 2002 г. Винсонхалер опубликовал солидный обзор по E -кольцам и близким к ним алгебраическим структурам [7].

Тривиально описываются периодические и делимые E -кольца. Первые — это в точности кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_m$. Ко вторым относится только поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Кроме того, Боушелом и Шульццем в [4] с помощью структурных теорем Бьюмонта–Пирса описаны E -кольца без кручения конечного ранга. Там же выделены и рассмотрены два интересных класса E -колец — T -кольца и E -кольца с редуцированными копериодическими аддитивными группами.

В нашей работе продолжается изучение E -колец методами, разработанными Шульццем и Боушелом в [2, 4] с привлечением техники, предложенной Селе и Сендреем в [8] для изучения абелевых групп с коммутативными кольцами эндоморфизмов. Нас прежде всего будут интересовать E -кольца малых рангов (≤ 2). Описание таких колец у нас сводится к случаю E -колец без кручения или к случаю S -сервантных подколец колец $\mathbb{Z}_\chi$ (о кольцах $\mathbb{Z}_\chi$ см. ниже).

Всюду далее под кольцом мы будем понимать ассоциативное кольцо, а под группой — абелеву группу, записанную аддитивно. Групповая терминология, применяемая в работе к кольцам, относится к их аддитивным группам. Так, например, фразу « T — сервантное подкольцо факторно делимого кольца R », следует понимать как « T — подкольцо кольца R и группа T^+ является сервантной подгруппой факторно делимой группы R^+ ». Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел, а через P — множество всех простых чисел. Если S — подмножество R -модуля M , то через $\langle S \rangle$ и $\langle S \rangle_R$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S , а через $\langle S \rangle_*$ — сервантную оболочку множества S , состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S \rangle$ при некотором натуральном n . Элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ группы A будем называть линейно независимыми (над $\mathbb{Z}$), если равенство

$m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_na_n = 0$ влечет $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$. Бесконечное множество называется линейно независимым, если линейно независимо любое его конечное подмножество. Рангом группы A называется мощность максимального линейно независимого подмножества в A (обозначается $r(A)$). p -рангом группы A называется размерность $\mathbb{Z}_p$ -пространства A/pA (обозначается $r_p(A)$). Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать периодическую и p -примарную части группы A . Кольцо и группу эндоморфизмов группы A будем обозначать $E(A)$ и $\text{End } A$ соответственно. Если R — кольцо, то через R^+ будем обозначать его аддитивную группу.

Другие используемые определения и понятия стандартны и соответствуют монографии [6].

2. Основные результаты о E -кольцах

Познакомимся с основными техническими результатами теории E -колец. При этом, мы в основном, будем следовать работе [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кольцо с единицей R называется E -кольцом, если всякий эндоморфизм ее аддитивной группы является левым умножением, т.е. для любого $\varphi \in E(R^+)$ существует $a \in R$, такой что $\varphi(x) = \lambda_a(x) = ax$ для всех $x \in R$.

ЛЕММА 1. Любое E -кольцо коммутативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R — E -кольцо. Для произвольного элемента $a \in R$ рассмотрим эндоморфизм $\rho_a \in E(R^+)$, являющийся правым умножением на a , т.е. $\rho_a(x) = xa$ для каждого $x \in R$. Тогда из определения E -кольца следует, что существует элемент $b \in R$, такой что $\rho_a = \lambda_b$. Отсюда $\rho_a(1) = \lambda_b(1)$, т.е. $a = b$. Таким образом, $\rho_a = \lambda_a$ для любого $a \in R$. Тогда получаем

$$xy = \lambda_x(y) = \rho_x(y) = yx$$

для любых $x, y \in R$, т.е. R — коммутативное кольцо. □

ЛЕММА 2. Для кольца R следующие утверждения равносильны:

1. R — E -кольцо;
2. $E(R^+)$ — коммутативное кольцо;
3. Если $\varphi \in E(R^+)$ и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1 \Rightarrow 2$ — очевидно.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $\varphi(1) = 0$, тогда $\varphi(a) = \varphi(\lambda_a(1)) = \lambda_a(\varphi(1)) = 0$ для любого $a \in R$, т.е. $\varphi = 0$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $\varphi \in E(R^+)$ и $\varphi(1) = a$. Рассмотрим эндоморфизм $(\varphi - \lambda_a) \in E(R^+)$. Поскольку $(\varphi - \lambda_a)(1) = 0$, то $\varphi - \lambda_a = 0$ и $\varphi = \lambda_a$. Таким образом, R — E -кольцо. □

ЛЕММА 3. Если для аддитивной группы E -кольца R имеет место разложение $R^+ = A \oplus B$, то $\text{Hom}(A, B) = 0$ и $\text{Hom}(B, A) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предыдущей лемме группа R^+ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов. Тогда все ее прямые слагаемые вполне характеристичны, а значит, $\text{Hom}(A, B) = 0$ и $\text{Hom}(B, A) = 0$. □

Напомним, что группы без кручения A и B называются *квазиравными*, если $tA \subseteq B$ и $tB \subseteq A$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Если A и B квазиравны, то будем писать $A \doteq B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Справедливы следующие утверждения:

1. Если K — кольцо с единицей, являющееся подкольцом конечного индекса E -кольца R , то K — E -кольцо;

2. Если R и K — квазиравные ассоциативные кольца без кручения с единицей и R — E -кольцо, то K — тоже E -кольцо;
3. Нильрадикал E -кольца без кручения конечного ранга равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Во-первых, заметим, что если $t_p(R) \neq 0$, то

$$R = t_p(R) \oplus R'_p, \text{ где } t_p(R) \cong \mathbb{Z}_{p^{k_p}} \text{ и } pR'_p = R'_p.$$

Это вытекает из коммутативности кольца $E(R^+)$ (подробнее см., например, в [9, § 19]). Пусть $lR \subseteq K$, $l \in \mathbb{N}$, и $l = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$ — каноническое разложение числа l . Рассмотрим разложение $K = t_{p_1}(K) \oplus t_{p_2}(K) \oplus \dots \oplus t_{p_n}(K) \oplus L$. Здесь L — кольцо с единицей (возможно $1_L \neq 1_R$). Пусть $p_i^{k_i} = |t_{p_i}(R)|$, $r_i = \max\{n_i, k_i\}$ для каждого $i = 1, 2, \dots, s$ и $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$. Тогда l делит m и $mR \subseteq L$.

Рассмотрим произвольный эндоморфизм $\varphi \in E(L^+)$ и построим эндоморфизм $\alpha = \varphi - \lambda_{\varphi(1_L)}$, тогда $\alpha(1_L) = 0$. С другой стороны $m\varphi \in E(R^+)$, следовательно, $m\varphi = \lambda_k$, где $k = m\varphi(1_L) \in L$. Отсюда $m\alpha = m\varphi - m\lambda_{\varphi(1_L)} = \lambda_k - m\lambda_{\varphi(1_L)} = 0$. Так как L не имеет m -кручения, то и $E(L^+)$ не имеет m -кручения. Тогда из $m\alpha = 0$ вытекает, что $\alpha = 0$ и $\varphi = \lambda_{\varphi(1_L)}$. Таким образом, L — E -кольцо, а значит, и K — E -кольцо.

2. Является следствием утверждения из п. 1.

3. Пусть R — E -кольцо без кручения конечного ранга. Тогда по первой теореме Бьюмонта–Пирса $K \doteq S \oplus N$, где S — полупервичное кольцо, а N — нильрадикал кольца R . По доказанному выше, $T = S \oplus N$ тоже является E -кольцом. Предположим, что $N \neq 0$. Так как группа T^+ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов, то всякое ее прямое слагаемое является вполне характеристической подгруппой. Следовательно, S является идеалом кольца T , а значит, T/S — нильпотентное кольцо с единицей. Получили противоречие. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа A называется E -группой, если на A можно задать умножение, превращающее ее в E -кольцо.

E -группы — это аддитивные группы E -колец. Следовательно, для произвольной E -группы A имеет место изоморфизм $A \cong \text{End } A$ и, при этом, кольцо $E(A)$ коммутативное.

ТЕОРЕМА 5. Пусть A — произвольная E -группа, тогда

1. Если $(A, \cdot)$ — ассоциативное кольцо с единицей, то для всякого умножения $*$ $\in \text{Mult } A$ найдется элемент $a \in A$, такой что $x * y = a \cdot x \cdot y$ для всех $x, y \in A$;
2. На группе A существует единственное (с точностью до изоморфизма) ассоциативное кольцо с единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть 1 — единица кольца $(A, \cdot)$ и $1 * 1 = a$, тогда

$$\begin{aligned} x * y &= \lambda_x^*(\rho_y(1)) = \rho_y(\lambda_x^*(1)) = (x * 1)y = (\rho_1^*(\rho_x(1)))y = \\ &= (\rho_x(\rho_1^*(1)))y = (1 * 1)xy = axy. \end{aligned}$$

2. Пусть изоморфизм $A \cong \text{End } A$ индуцирует на группе A структуру ассоциативного кольца с единицей $(A, \cdot)$. Тогда из леммы 1.3 следует, что $(A, \cdot)$ — коммутативное кольцо. Рассмотрим на группе A произвольную мультипликативную операцию $*$ такую, что $(A, *)$ — ассоциативное кольцо с единицей. В соответствии с п. 1, найдется элемент $a \in A$, такой что $x * y = a \cdot x \cdot y$ для всех $x, y \in A$. Обозначим через 1 и $1'$ единицы колец $(A, \cdot)$ и $(A, *)$ соответственно. Тогда из равенства $1' * 1 = 1$ вытекает равенство $a \cdot 1' \cdot 1 = a \cdot 1' = 1$, а значит, элемент a обратим в кольце

$(A, \cdot)$. Покажем, что отображение $f: (A, \cdot) \rightarrow (A, *)$, действующее по закону $f(x) = a^{-1} \cdot x$, является изоморфизмом колец:

$$f(x + y) = a^{-1}(x + y) = a^{-1}x + a^{-1}y = f(x) + f(y),$$

$$f(x) * f(y) = (a^{-1}x) * (a^{-1}y) = a \cdot a^{-1} \cdot x \cdot a^{-1} \cdot y = a^{-1}(x \cdot y) = f(x \cdot y).$$

Наконец, поскольку $a^{-1} * x = a \cdot a^{-1} \cdot x = x$ для любого $x \in A$, то $a^{-1} = 1'$, и следовательно, $f(1) = a^{-1} = 1'$. $\square$

В заключении параграфа отметим интересный факт об эндоморфных образах E -групп.

ЛЕММА 6. *Эндоморфный образ E -группы является E -группой, в частности прямое слагаемое E -группы является E -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — E -группа и $(A, \cdot)$ — E -кольцо. Тогда эндоморфный образ группы A имеет вид aA . Определим умножение $*$ на группе aA по закону $ax * ay = axy$. Тогда $(aA, *)$ — коммутативное кольцо с единицей a . Если $\varphi \in \mathbf{E}(aA)$, то $\lambda_a \varphi \in \mathbf{E}(A)$, и значит, для любого $ax \in aA$

$$\varphi(ax) = (\lambda_a \varphi)(x) = \lambda_{(\lambda_a \varphi)(1)}(x) = \varphi(a)x = ayx,$$

где $ay = \varphi(a) \in aA$. Следовательно, $\varphi(ax) = ay * ax$, т. е. φ является умножением на элемент ay . Таким образом, $(aA, *)$ — E -кольцо и, значит, aA — E -группа. $\square$

3. Смешанные E -кольца

При работе со смешанными E -кольцами мы воспользуемся техникой, разработанной еще Селе и Сендреем [8] для изучения групп с коммутативными кольцами эндоморфизмов.

Множество $\text{supp}(A) = \{p \in P \mid t_p(A) \neq 0\}$ называется *носителем* группы A . Пусть R — произвольное E -кольцо и $S = \text{supp}(R)$, тогда из коммутативности кольца $\mathbf{E}(R^+)$ для любого $p \in S$ получаем разложение $R^+ = t_p(R) \oplus R'_p$, где $t_p(R) \cong \mathbb{Z}_p^{k_p}$ и R'_p — p -делимая группа без p -кручения (подробнее об этом см., например, в [9, § 19]). Группы $t_p(R)$ и R'_p очевидно, являются идеалами кольца R , т. е. приведенное выше групповое разложение является кольцевым. Для произвольного элемента $a \in R$ и всякого $p \in S$ рассмотрим равенство $a = a_p + a'_p$, где $a_p \in t_p(R)$ и $a'_p \in R'_p$. Построим отображение $\xi: R \rightarrow \prod_{p \in S} t_p(R)$, действующее по закону $\xi(a) = (a_p)_{p \in S}$.

Отображение ξ , очевидно, является гомоморфизмом колец, причем

$$\ker \xi = \bigcap_{p \in S} R'_p = \{a \in R \mid h_p(a) = \infty \text{ при всех } p \in S\},$$

здесь $h_p(a)$ — p -высота элемента a . Обозначим идеал $\ker \xi$ через J . Нетрудно видеть, что J — кольцо без кручения, более того оно p -делимо при любом $p \in S$. Множество J будем далее рассматривать и как идеал, и как кольцо (возможно без единицы).

Идеал J содержит единицу кольца R в том и только том случае, когда $J = R$ — кольцо без кручения. Кольцо J содержит единичный элемент в том и только том случае, если J выделяется в R прямым слагаемым. В [4] показано, что последнее равносильно тому, что J само является E -кольцом. Далее рассмотрим нильрадикал $\mathbf{N}(J)$ кольца J .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть R — E -кольцо конечного ранга и $J = \bigcap_{p \in S} R'_p$, тогда $(\mathbf{N}(J))^2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \mathbf{N}(J)$. Рассмотрим идеал aR кольца R . Поскольку a — нильпотентный элемент, то aR — нильпотентный идеал кольца R .

Группа aR является эпиморфным образом группы R^+ , следовательно, aR — E -группа (см. лемму 6). Пусть $(aR, *)$ — E -кольцо, тогда по теореме 5 существует элемент $r \in aR$, такой что $xy = r * x * y$ для любых $x, y \in aR$. Так как aR — нильпотентный идеал кольца R , то для любого элемента $x \in aR$ найдется число $s \in \mathbb{N}$, такое что

$$0 = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{s \text{ раз}} = r^{s-1} * \underbrace{x * x * \dots * x}_{s \text{ раз}}.$$

Тогда $\underbrace{(r * x) * (r * x) * \dots * (r * x)}_{s \text{ раз}} = 0$ и, значит, $(r * x) \in N(aR, *)$. Но $aR \subseteq J$, следовательно,

$(aR, *)$ — E -кольцо без кручения конечного ранга. Тогда по предложению 4 получаем, что $N(aR, *) = 0$ и $r * x = 0$. Таким образом, $r * aR = 0$, откуда $r = 0$. Следовательно, для любых $x, y \in aR$ верно равенство $xy = r * x * y = 0$, в частности, $a^2 = aa = 0$.

Наконец, пусть a, b — произвольные элементы из $N(J)$. Тогда по доказанному выше $a^2 = 0$, $b^2 = 0$ и $(a + b)^2 = 0$. Отсюда $a^2 + 2ab + b^2 = 0$ и, значит, $ab = 0$. Таким образом, $(N(J))^2 = 0$. $\square$

ПРИМЕР. Нильрадикал E -кольца R в общем случае отличен от $N(J)$, хотя бы потому, что $N(R)$ может содержать еще и нильпотентные элементы конечного порядка, т. е. имеет место включение

$$N(J) \oplus \bigoplus_{p \in S} p(t_p(R)) \subseteq N(R).$$

Обратного включения может и не быть. Проиллюстрируем это на следующем примере. Напомним, что характеристика $\chi = (m_p)$ — это некоторая последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞ , занумерованная простыми индексами. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$, где $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ при $m_p \neq \infty$ и $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p -адических чисел при $m_p = \infty$. Хорошо известно, что все кольца $\mathbb{Z}_\chi$ и все их сервантные подкольца с единицей являются E -кольцами. Рассмотрим характеристику $\chi = (2, 2, 2, \dots)$. Обозначим через ε_p единицу кольца $\mathbb{Z}_{p^2}$ (и ее образ при естественном вложении $\mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_\chi$). Разобьем множество простых чисел на два бесконечных подмножества $P = P_1 \cup P_2$. Рассмотрим элемент $\alpha \in \mathbb{Z}_\chi$, такой что

$$\alpha_p = \begin{cases} \varepsilon_p, & p \in P_1 \\ p\varepsilon_p + \varepsilon_p, & p \in P_2, \end{cases}$$

и построим группу $R = \langle \alpha^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. Нетрудно видеть, что R — подкольцо кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Далее, поскольку $(\alpha - 1)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$, то $1 = 2\alpha - \alpha^2 \in R$ и $R = \langle 1, \alpha \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. Таким образом, R — сервантное подкольцо с единицей ранга 2 кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Следовательно, R — E -кольцо. В силу построения $J = 0$, но $N(R) \neq \bigoplus_{p \in S} p(t_p(R)) = \bigoplus_{p \in P} p\mathbb{Z}_{p^2}$, поскольку $\alpha - 1 \in N(R)$ и $o(\alpha - 1) = \infty$.

Далее естественно рассмотреть случай, когда $J = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если R — E -кольцо, такое что $J = \bigcap_{p \in S} R'_p = 0$, то R вкладывается S -сервантно в кольцо $\prod_{p \in S} t_p(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $J = 0$, то гомоморфизм $\xi: R \rightarrow \prod_{p \in S} t_p(R)$ является вложением. Учитывая, что все группы R'_p ($p \in S$) p -делимые и принимая во внимание изоморфизмы

$$R/t(R) \cong [R/t_p(R)]/[t(R)/t_p(R)] \cong R'_p/[t(R)/t_p(R)],$$

получаем, что факторгруппа $R/t(R)$ p -делима при любом $p \in S$. Из этого следует, что $\text{im } \xi$ — p -сервантная подгруппа в $\prod_{p \in S} t_p(R)$ для любого $p \in S$. Действительно, отождествим группы R^+ и $\text{im } \xi$ и рассмотрим равенство $a = p^m b$, где $a \in R$, $b \in \prod_{p \in S} t_p(R)$, $p \in S$ и $m \in \mathbb{N}$. В силу p -делимости группы $R/t(R)$ имеем $a = p^m c + t$, где $c \in R$ и $t \in t(R)$. Откуда $p^m b = p^m c + t$ и $p^m(b - c) = t \in t(R)$. Отсюда следует, что $b - c$ лежит в $t(R)$, а элемент b лежит в R . $\square$

Отметим, что доказанное предложение фактически является следствием известной теоремы Селе–Сендрей [8, теорема 2] (см. также [9, теорема 19.4]). Далее рассмотрим еще один крайний случай, когда $r(J) = r(R) < \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть A — смешанная группа конечного ранга с коммутативным кольцом эндоморфизмов, у которой подгруппа

$$J = \{a \in R \mid h_p(a) = \infty \text{ при всех } p \in S\}$$

имеет такой же ранг, что и A . Тогда группа A расщепляется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу коммутативности кольца $E(A)$ для любого $p \in S = \text{supp}(A)$ имеет место разложение $A = t_p(A) \oplus A'_p$, где $t_p(A) \cong \mathbb{Z}_p^{k_p}$ и A'_p — p -делимая группа без p -кручения. Для произвольных $a \in A$ и $p \in S$ рассмотрим равенство $a = a_p + a'_p$, где $a_p \in t_p(A)$ и $a'_p \in A'_p$. Тогда отображение $\xi: A \rightarrow \prod_{p \in S} t_p(A)$, действующее по закону $\xi(a) = (a_p)_{p \in S}$ является гомоморфизмом, причем, очевидно, $\ker \xi = J$. Поскольку $r(A) = r(J)$, то $\text{im } \xi = \bigoplus_{p \in S} t_p(A)$ — прямая сумма циклических групп.

Убедимся, что J — сервантная подгруппа в A . Так как A/J вкладывается в группу $\prod_{p \in S} t_p(A)$, то A/J не имеет элементов порядка p при любом $p \notin S$. Следовательно, J — p -сервантная подгруппа в A при любом простом $p \notin S$. Кроме того, J — p -делимая группа при любом $p \in S$, а значит, J — p -сервантная подгруппа в A и при любом простом $p \in S$. Таким образом, J сервантна в группе A .

Наконец, поскольку J сервантна в A и $A/J = \bigoplus_{p \in S} t_p(A)$ — прямая сумма циклических групп, то J выделяется в A прямым слагаемым (см. [6, теорема 28.2]), т. е. группа A расщепляется. $\square$

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика. Если χ содержит символы ∞ или содержит бесконечно много ненулевых элементов, то в кольце $\mathbb{Z}_\chi$ рассмотрим подкольцо R_χ , сервантно порожденное единицей кольца, $R_\chi = \langle 1 \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. Если характеристика χ содержит лишь конечное число конечных элементов, то $\mathbb{Z}_\chi = \mathbb{Z}_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. В этом случае постояним кольцо $R_\chi = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$. Кольца R_χ — это в точности факторно делимые кольца ранга 1 (см. [10], [11] и [12]). Отметим также, что в [13] и [14] показано, что факторно делимые кольца ранга 1 совпадают с бесконечными T -кольцами.

В силу построения все кольца R_χ являются E -кольцами ранга 1. Оказывается, что верно и обратное, кольцами R_χ исчерпываются все E -кольца ранга 1.

ТЕОРЕМА 10. Если R — E -кольцо ранга 1, то $R \cong R_\chi$ при некоторой χ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим короткую сервантно точную последовательность

$$0 \rightarrow t(R) \rightarrow R \rightarrow R/t(R) \rightarrow 0.$$

Она индуцирует короткую последовательность

$$0 \rightarrow \widehat{t(R)} \rightarrow \widehat{R} \rightarrow \widehat{R/t(R)} \rightarrow 0,$$

где $\widehat{}$ — функтор взятия $\mathbb{Z}$ -адического пополнения. Хорошо известно (см., например, [6, теорема 39.8]), что вторая последовательность точна и расщепляется, т. е. $\widehat{R} \cong \widehat{t(R)} \oplus \widehat{R/t(R)}$. При этом, $\widehat{t(R)} \cong \prod_{p \in S} t_p(R)$, а поскольку $R/t(R)$ — кольцо без кручения ранга 1, то $\widehat{R/t(R)} \cong \prod_{p \in T} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, где $T = \{p \in P \mid p(R/t(R)) \neq R/t(R)\}$. Учитывая, что кольцо $R/t(R)$ p -делимо при любом $p \in S$, получаем, что $S \cap T = \emptyset$ и, значит, $\widehat{R} = \mathbb{Z}_\chi$ для некоторой характеристики χ .

Пусть $\mu: R \rightarrow \widehat{R}$ — естественный гомоморфизм, тогда $\mu(R)$ — сервантная подгруппа в $\widehat{R} = \mathbb{Z}_\chi$, причем $\ker \mu = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} nR$. Если $\ker \mu \neq 0$, то $\ker \mu$ — делимое кольцо без кручения ранга 1, т. е. $\ker \mu \cong \mathbb{Q}$. А тогда $\operatorname{im} \mu = \mathbb{Z}_m$ и, таким образом, $R \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$. Если же $\ker \mu = 0$, то R сервантно вкладывается в $\mathbb{Z}_\chi$, причем, отождествляя R с $\operatorname{im} \mu$, можно считать, что $1_{\mathbb{Z}_\chi} = 1_R$ и $t(\mathbb{Z}_\chi) = t(R)$. Следовательно, R совпадает с группой $R_\chi = \langle 1 \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. $\square$

Отметим еще, что E -кольца ранга 0 — это в точности периодические E -кольца, т. е. кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_m$. Рассмотрим теперь ситуацию с E -кольцами ранга 2. Для доказательства основной теоремы нам понадобится теорема Бьюмонта–Пирса.

ТЕОРЕМА 11 [15]. Пусть R — кольцо без кручения конечного ранга, $S = \mathbb{Q} \otimes R$ — конечномерная $\mathbb{Q}$ -алгебра. Запишем $S = P \oplus N$, где P — полупрimitивная алгебра и N — радикал алгебры S . Положим $T = P \cap R$, тогда T — полупервичное кольцо, $N(R) = N \cap R$ и $T \oplus N(R)$ — подкольцо в R конечного индекса.

Заметим, что если R — кольцо с единицей, то $T \oplus N(R)$ — подкольцо с 1 в R .

ТЕОРЕМА 12. Пусть R — E -кольцо ранга 2 и $J = \bigcap_{p \in S} R'_p$, тогда

1. Если $r(J) = 2$, то $R \cong \mathbb{Z}_m \oplus J$ и J — m -делимое E -кольцо без кручения;
2. Если $r(J) = 0$, то R вкладывается S -сервантно в кольцо $\prod_{p \in S} t_p(R)$;
3. Если $r(J) = 1$, то $R \cong R_\chi \oplus R_\kappa$, где характеристики χ и κ не сравнимы и $\chi_p < \infty$, $\kappa_p < \infty$ влечет $\chi_p \kappa_p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если $r(R) = r(J) = 2$, то образ гомоморфизма $\xi: R \rightarrow \prod_{p \in S} t_p(R)$ является периодическим кольцом с единицей. Следовательно, $t_p(R) = 0$ почти при всех простых p . Поэтому $\operatorname{im} \xi \cong t(R) \cong \mathbb{Z}_m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, $R \cong \mathbb{Z}_m \oplus J$, причем J — E -кольцо, как прямое слагаемое E -кольца, и $mJ = J$ по лемме 3.

2. Вытекает из предложения 8.

3. Так как $r(J) = 1$, то J — кольцо без кручения ранга 1. Хорошо известно, что в этом случае группа J^+ либо является E -группой (когда тип группы J идемпотентен), либо J^+ допускает только структуру кольца с нулевым умножением.

1-й случай: J^+ — E -группа. Тогда гомоморфизм ξ расщепляется (доказано Шульцем — [2, теорема 6]) и $R \cong \operatorname{im} \xi \oplus \ker \xi$, при этом $\operatorname{im} \xi$ и $\ker \xi$ — E -кольца ранга 1. Следовательно, $\operatorname{im} \xi \cong R_\chi$ и $\ker \xi \cong R_\kappa$ (по теореме 10). Дополнительные условия п. 3 на характеристики χ и κ вытекают из леммы 3.

2-й случай: $J^2 = 0$. Рассмотрим факторкольцо $\overline{R} = R/t(R)$. По теореме Бьюмонта–Пирса кольцо $R/t(R)$ содержит подкольцо конечного индекса $\overline{T} \oplus \overline{N}$, где $\overline{T}$ — полупервичное кольцо, а $\overline{N} = N(\overline{R})$ — нильрадикал кольца $\overline{R}$. Так как $J^2 = 0$ и $r(J) = 1$, то $r(\overline{N}) \geq 1$. При $r(\overline{N}) = 2$ получаем, что $\overline{R} = \overline{N}$ — нильпотентное кольцо с 1. Следовательно, $r(\overline{N}) = r(\overline{T}) = 1$.

Далее, пусть T и N — прообразы $\overline{T}$ и $\overline{N}$ при естественном гомоморфизме $R \rightarrow R/t(R)$. Тогда $T + N$ — подкольцо с единицей конечного индекса в кольце R . По предложению 4 кольцо

$T + N$ является E -кольцом. Нетрудно видеть, что $J \subseteq N$. Заметим, что J — сервантная подгруппа группы R^+ , а значит, и группы N^+ (по построению J — пересечение прямых слагаемых группы R^+). Так как $r(N) = r(\bar{N}) = 1 = r(J)$, то для любого $a \in N$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $b \in J$, такие что $ma = b$. Поскольку J сервантна в N , то найдется элемент $b' \in J$, такой что $mb' = b$. Тогда $m(a - b') = 0$ и $a - b' = t \in t(R)$. Таким образом, $a = b' + t$, а значит, $N = J + t(R)$. По построению J не имеет ненулевых элементов конечного порядка, следовательно, $N = J \oplus t(R)$. Учитывая также, что $T \cap N = t(R)$, получаем равенство $T + N = T \oplus J$. Тогда J — E -кольцо, как прямое слагаемое E -кольца. Но группа J допускает только нулевое умножение. Получили противоречие, следовательно, данный случай невозможен. $\square$

4. Заключение

Заметим в заключении, что для известных примеров смешанных E -колец рассмотренный выше гомоморфизм $\xi: R \rightarrow \prod_{p \in S} t_p(R)$ расщепляется или квазирасщепляется. Шульцем в [4] сформулирована проблема о существовании смешанных E -колец, для которых гомоморфизм ξ не квазирасщепляется. Из доказанных выше утверждений следует, что для случая E -колец ранга ≤ 2 эта проблема решается отрицательно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schultz P. Periodic homomorphism sequences of abelian groups // Arch. Math. 1970. Vol. 21. P. 132-135.
2. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. 1973. Vol. 15. P. 60-69.
3. Fuchs L. Abelian groups. Publ. House of the Hungar. Acad. Sci. Budapest, 1958.
4. Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. Vol. 228, №3. P. 197-214.
5. Göbel R., Shelah S., Strüngmann L. Generalized E -Rings // arxiv.org. 2003.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. I, II. М.: Мир, 1973, 1977.
7. Vinsonhaler C., E -rings and related structures. In: Non-noetherian commutative ring theory. Math. Apl. Kluwer, Dordrecht. 2002. Vol. 520. P. 387-402.
8. Szele T., Szendrei J. On abelian groups with commutative endomorphism ring // Acta Mathematica Hungarica. 1951. Vol. 2, №3. P. 309-324.
9. Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.
10. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Том 17, №8. С. 153-167.
11. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Том 20, №5. С. 157-196.
12. Давыдова О. И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Том 13, №3. С. 25–33.

13. Царев А. В. T -кольца и факторно делимые группы ранга 1 // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2013. №4(24). С. 50–53.
14. Царев А. В. T -кольца // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Том 20, №5. С. 203–207.
15. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Ill. J. Math. 1961. Vol. 5. P. 6-98.

REFERENCES

1. Schultz, P. 1970, "Periodic homomorphism sequences of abelian groups *Arch. Math.*, vol. 21, pp. 132-135.
2. Schultz, P. 1973, "The endomorphism ring of the additive group of a ring *J. Austral. Math. Soc.*, vol. 15., pp. 60-69.
3. Fuchs, L. 1958, "Abelian groups Publ. House of the Hungar. Acad. Sci. Budapest.
4. Bowshell, R. A. & Schultz, P. 1977, "Unital rings whose additive endomorphisms commute *Math. Ann.*, vol. 228, no. 3, pp. 197-214.
5. Göbel, R., Shelah, S. & Strüngmann, L. 2003, "Generalized E -Rings arxiv.org. 2003.
6. Fuchs, L. 1970, 1973, "Infinite abelian groups vol. 1, 2, Academic press.
7. Vinsonhaler, C. 2002, " E -rings and related structures *Math. Apl.*, vol. 520, pp. 387-402.
8. Szele, T., Szendrei, J. 1951, "On abelian groups with commutative endomorphism ring *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 2, no. 3, pp. 309-324.
9. Krylov, P. A., Mikhalev, A. V. & Tuganbaev, A. A. 2013, "Endomorphism rings of Abelian groups vol. 2, Springer Science & Business Media.
10. Fomin, A. A. 2014, "To Quotient Divisible Group Theory. I *Journal of Mathematical Sciences* (New York), vol. 197, no. 5, pp. 688–697
11. Fomin, A. A. 2015, "To Quotient Divisible Group Theory. II *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* (russian translation), vol. 20, no. 5, pp. 157-196.
12. Davydova O. I. 2008, "Rank-1 quotient divisible groups *J. Math. Sci.*, vol. 154, no. 3, pp. 295-300.
13. Tsarev, A. V. 2013, " T -rings and rank-1 quotient divisible groups *Vestnik TGU* (russian translation), no. 4(24), pp. 50–53.
14. Tsarev, A. V. 2015, " T -rings *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* (russian translation), vol. 20, no. 5, pp. 203–207.
15. Beaumont, R., Pierce, R. 1961, "Torsion free rings *Ill. J. Math.*, vol. 5, pp. 6-98.

Московский педагогический государственный университет

Получено 14.03.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-245-255

О КОЛЬЦАХ КВАЗИЭНДОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ
СИЛЬНО НЕРАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП
БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 4

А. В. Чередникова (г. Кострома)

Аннотация

Кольцом квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ абелевой группы G без кручения конечного ранга называется делимая оболочка кольца эндоморфизмов этой группы. Элементы кольца $\mathcal{E}(G)$ называются квазиэндоморфизмами группы G . Таким образом, квазиэндоморфизмы группы G — это обычные эндоморфизмы, формально поделенные на ненулевые целые числа.

В статье рассматриваются кольца квазиэндоморфизмов класса сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с одним τ -адическим соотношением, псевдоцокль которых имеет ранг 1. При этом используется описание групп этого класса с точностью до квазиизоморфизма в терминах четырехмерных над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ подпространств алгебры $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} K_p$, где P — множество простых чисел, (m_p) — занумерованные простыми индексами p неотрицательное целое число и символ ∞ , $\tau = [(m_p)]$ — фиксированный тип, $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} в случае $m_p < \infty$, и K_p — кольцо целых p -адических чисел при $m_p = \infty$. Существующая связь между квазиэндоморфизмами группы G рассматриваемого класса и эндоморфизмами соответствующего ей подпространства U алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ позволяет представить квазиэндоморфизмы этой группы в виде матриц порядка 4 над полем рациональных чисел.

В работе получена классификация колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4, с одним τ -адическим соотношением, псевдоцокль которых имеет ранг 1. Доказано, что с точностью до изоморфизма существует 2 алгебры и 1 бесконечная серия алгебр с рациональным параметром, которые реализуются в качестве колец квазиэндоморфизмов рассматриваемого класса групп.

Ключевые слова: кольцо квазиэндоморфизмов, абелева группа, группа без кручения конечного ранга, сильно неразложимая группа.

Библиография: 17 названий.

ON QUASI-ENDOMORPHISM RINGS OF SOME STRONGLY
INDECOMPOSABLE TORSION-FREE
ABELIAN GROUPS OF RANK 4

A. V. Cherednikova (Kostroma)

Abstract

By the quasi-endomorphism ring $\mathcal{E}(G)$ of a torsion-free Abelian group G of finite rank we mean divisible hull of the endomorphism ring of the group. The elements of $\mathcal{E}(G)$ is called quasi-endomorphisms of G . Thus the quasi-endomorphisms of the group G is normal endomorphisms, which formally divided by non-zero integers.

In the paper it is considered quasi-endomorphism rings of class of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with one τ -adic relation, whose pseudo-socles have rank 1. Let $\tau = [(m_p)]$ be a fixed type, where m_p is a non-negative integer or the symbol ∞ , indexed by

elements of P , the set of primes numbers. Denote by $K_p = \mathbb{Z}_p^{m_p}$ the residue class ring modulo p^{m_p} in the case $m_p < \infty$ and ring of p -adic integers if $m_p = \infty$. We use the description of the groups from the above class up to quasi-isomorphism in terms of four-dimension over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ subspaces of algebra $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} K_p$. The existing relationship between the quasi-endomorphisms of a group G of this class and endomorphisms of the corresponding of this group subspace U of the algebra $\mathbb{Q}(\tau)$ allows us to represent the quasi-endomorphisms of the group G in the form of a matrices of order 4 over the field of rational numbers.

In this paper, a classification of the quasi-endomorphism rings of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with one τ -adic relation, whose pseudo-socles have rank 1, is obtained. It is proved that, up to isomorphism, there exist two algebras and one infinite series of algebras with rational parameter, which are realized as quasi-endomorphism rings of groups of this class.

Keywords: quasi-endomorphism ring, Abelian group, torsion-free group of finite rank, strongly indecomposable group.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Всюду в статье слово «группа» будет означать абелеву группу без кручения конечного ранга, записанную аддитивно.

Задача классификации колец квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения малых рангов возникла в 1961 году в связи с введением Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в совместной работе [1] понятия «кольца квазиэндоморфизмов группы» — минимальной рациональной алгебры, содержащей кольцо эндоморфизмов этой группы. В этой же работе они указали с точностью до изоморфизма все алгебры, реализующиеся в качестве колец квазиэндоморфизмов групп ранга 2. Понятия и конструкции, разработанные Дж. Рейдом в работе [2] позволили использовать кольца квазиэндоморфизмов группы как при изучении самой группы, так и ее кольца эндоморфизмов. Классификация колец квазиэндоморфизмов групп ранга 3 была получена автором в конце 1990-х годов [3, 4, 5].

Задача классификации колец квазиэндоморфизмов групп ранга 4 в настоящее время не является полностью решенной. На пути ее решения автором получен ряд результатов. В частности, классификационная задача полностью решена для почти вполне разложимых групп ранга 4 [6, 7].

В рамках рассматриваемой проблемы наибольший интерес представляет случай сильно неразложимых групп. В монографии Т. Фатикони [8, теорема 4.4.9] представлено решение классификационной задачи для сильно неразложимых групп ранга 4, совпадающих со своими псевдоцоклями. Изучению колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 4, отличных от своих псевдоцоклей, посвящены работы автора [9] и [10].

Настоящая работа посвящена задаче классификации алгебр квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 4 с одним τ -адическим соотношением, псевдоцокль которых имеет ранг 1.

2. Предварительные сведения

2.1. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и G — произвольная группа. Тогда $\mathbb{Q} \otimes G$ является ее делимой оболочкой, которую можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{Q}$, аддитивная группа которого содержит G в качестве подгруппы. Пусть группа H содержится в делимой оболочке $\mathbb{Q} \otimes G$ группы G .

Говорят, что группы G и H квазиравны и пишут $G \doteq H$, если существуют натуральные числа n и m такие, что $nG \subseteq H$ и $mH \subseteq G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство ненулевых подгрупп G_i ($i \in I$, где I — конечное множество) делимой оболочки $\mathbb{Q} \otimes G$ группы G называется квазиразложением группы G , если $G \doteq \bigoplus_{i \in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется квазислагаемым группы G . Группа G называется сильно неразложимой, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кольцом квазиэндоморфизмов группы G называется кольцо всех линейных преобразований f пространства $\mathbb{Q} \otimes G$ таких, что $nf(G) \subseteq G$ для некоторых ненулевых целых чисел n . Обозначим его через $\mathcal{E}(G)$. Элементы из $\mathcal{E}(G)$ называются квазиэндоморфизмами группы G .

Таким образом, кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ представляет собой $\mathbb{Q}$ -алгебру, порожденную кольцом $E(G)$ в кольце всех линейных преобразований пространства $\mathbb{Q} \otimes G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Псевдоцоклем $\text{Soc } G$ группы G называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами.

Псевдоцокль группы имеет важное значение при исследовании колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимой группы. Это связано со следующим результатом, который мы будем использовать в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (Reid [2]). Пусть P — некоторая (равносильно любая) минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G и $J(\mathcal{E}(G))$ — радикал Джекобсона кольца квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G . Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/J(\mathcal{E}(G))) = r(P),$$

где $r(P)$ — ранг подгруппы P .

В статье, кроме отмеченных в тексте, используются следующие обозначения: P — множество простых чисел; если $p \in P$, то $Z(p^m)$ — циклическая группа порядка p^m при целом неотрицательном m , либо квазициклическая группа в случае $m = \infty$; $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{Q}}$ — подпространство векторного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденное векторами $u_1, u_2, \dots, u_n$; м. л. н. с. — максимальная линейно-независимая система.

Отсутствующие в работе определения, факты и обозначения общеприняты и соответствуют [11, 12].

2.2. τ -адические числа

Характеристикой называется последовательность (m_p) неотрицательных целых чисел и символов ∞ , занумерованная простыми индексами. Две характеристики эквивалентны, если они различаются не более чем в конечном числе конечных p -компонент. Класс эквивалентности характеристики (m_p) называется *типом* и обозначается через $\tau = [(m_p)]$.

Пусть фиксирован тип τ . Положим $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} , если $m_p < \infty$, и $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p -адических чисел в случае $m_p = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Алгебра над полем рациональных чисел

$$\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} K_p$$

называется алгеброй τ -адических чисел, а ее элементы — τ -адическими числами.

Заметим, что алгебра τ -адических чисел, введенная Фоминым [13], представляет собой обобщение поля p -адических чисел и кольца универсальных чисел Куликова [14].

Любое τ -адическое число α представляется в виде $\alpha = r \otimes (\alpha_p)$, где $r \in \mathbb{Q}$, $(\alpha_p) \in \prod_{p \in P} K_p$. Причем это представление не является однозначным.

Наибольший показатель h_p степени простого числа p , для которого p^{h_p} делит $\alpha_p \in K_p$ называется p -высотой элемента α_p в кольце K_p . При этом, если $\alpha_p = 0$, то $h_p = m_p$. Типом τ -адического числа $\alpha = r \otimes (\alpha_p)$ называется набор p -высот (h_p) элементов $\alpha_p \in K_p$ по всем простым числам p . Тип τ -адического числа α не зависит от выбора представления числа α и меньше либо равен τ . Свойства τ -адических чисел изложены в [15, 16].

2.3. Группы с одним τ -адическим соотношением

Класс $\mathfrak{F}$ групп с одним τ -адическим соотношением был выделен А. А. Фоминым [15] при решении задачи построения инвариантов, описывающих абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квайзизоморфизма, в духе работы Бьюмонта–Пирса [1].

Пусть G — группа конечного ранга и τ — некоторый фиксированный тип. Положим $G(p) = G/p^{m_p}G$, если $m_p < \infty$, и $G(p) = \hat{G}_p$ — p -адическое пополнение группы G в случае $m_p = \infty$. Тогда $G_\tau = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} G(p)$ не зависит от выбора характеристики типа τ , и называется τ -адическим пополнением группы G [15]. Отметим, что G_τ является модулем над кольцом $\mathbb{Q}(\tau)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 ([15]). Группа G с м. л. н. с. $x_1, x_2, \dots, x_n$, для которой в τ -адическом пополнении группы G_τ выполнено равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (1)$$

со взаимно простыми в совокупности τ -адическими коэффициентами, называется группой с одним τ -адическим соотношением.

Соотношение (1) называется порождающим соотношением группы G . Любое другое порождающее соотношение группы G получается домножением соотношения (1) на обратимые τ -адические числа.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть F — свободная подгруппа ранга n группы G ранга n . Известно, что

$$A/F \cong \bigoplus_{p \in P} (Z(p^{i_{1p}}) \oplus \dots \oplus Z(p^{i_{np}})),$$

где $0 \leq i_{1p} \leq \dots \leq i_{np} \leq \infty$ — целые неотрицательные числа или символы ∞ . Положим $\tau_1 = [(i_{1p})], \dots, \tau_n = [(i_{np})]$. Набор типов $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_n$ не зависит от выбора подгруппы F и называется *типом Ричмена группы G* [17]. Класс $\mathfrak{F}$ групп с одним τ -адическим соотношением совпадает с классом групп, имеющих тип Ричмена $0, 0, \dots, \tau$ ([16], глава II, § 7).

Рассмотрим краткое описание инвариантов коредуцированных (т. е. не содержащих свободных прямых слагаемых) групп класса $\mathfrak{F}$.

Говорят, что подпространство $U = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{\mathbb{Q}}$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ имеет *нулевой тип*, если τ -адические числа в совокупности взаимно просты. Конечномерные над $\mathbb{Q}$ подпространства U и V нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ называются *эквивалентными*, если существует обратимое τ -адическое число α такое, что $U = \alpha V$.

Пусть G — коредуцированная группа класса $\mathfrak{F}$ ранга $n > 1$. В этом случае τ -адические коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ порождающего соотношения (1) в совокупности взаимно просты и образуют базис подпространства $U = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{\mathbb{Q}}$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. Класс эквивалентности $[U]$ подпространства U нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ размерности n над $\mathbb{Q}$ является инвариантом группы G , который называется τ -адическим инвариантом размерности n .

Пусть U — конечномерное над $\mathbb{Q}$ подпространство алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. Тогда $U : U = \{\alpha \in \mathbb{Q}(\tau) \mid \alpha U \subset U\}$ замкнуто относительно умножения, содержит единицу и является конечномерной над $\mathbb{Q}$ подалгеброй алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([16]; теорема III.4.1). Пусть коредуцированной группе G конечного ранга соответствует пространство нулевого типа U , $U \subset \mathbb{Q}(\tau)$. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфна конечномерной над $\mathbb{Q}$ подалгебре $U : U$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. В частности, $\mathcal{E}(G)$ — коммутативное кольцо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([16]; теорема III.4.9). Пусть G — коредуцированная группа конечного ранга класса F с τ -адическим инвариантом $[U]$. Группа G сильно неразложима тогда и только тогда, когда в $U : U$ отсутствуют нетривиальные идемпотенты.

3. Основной результат

СОГЛАШЕНИЕ В нижеследующей теореме нижний индекс $\mathbf{i}$ в обозначении алгебры $\mathbf{A}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{j})}$ есть ее размерность над $\mathbb{Q}$, верхний индекс $\mathbf{j}$ — порядковый номер алгебры. Кроме этого, в обозначении алгебр $\mathbf{A}_4^{(2)}(\mathbf{n})$, $\mathbf{B}_4(\mathbf{k}, \mathbf{n})$, а также в записях представляющих их матриц, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ — рациональные параметры.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 4 с одним τ -адическим соотношением и $\text{Soc } G$ имеет ранг 1. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G , $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_4^{(1)} &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}, \\ \mathbf{A}_4^{(2)}(\mathbf{n}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & \mathbf{n}z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}, \\ \mathbf{A}_4^{(3)} &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию теоремы и $[U]$ — ее τ -адический инвариант, где U является подпространством нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. Очевидно, что G является коредуцированной группой. Согласно предложению 2 кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G коммутативно и изоморфно подалгебре $U : U$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. При этом $U : U \cong U$ и $\dim_{\mathbb{Q}}(U : U) = \dim_{\mathbb{Q}}(U) = 4$ (см. [15, следствия 4.2 и 5.4]). Так как $\text{Soc } G$ имеет ранг 1, то на основании предложения 1 имеем $\dim_{\mathbb{Q}}(U/J(U)) = 1$, где $J(U)$ — радикал Джекобсона кольца U . Согласно предложению 3 в кольце U отсутствуют нетривиальные идемпотенты. Следовательно, в качестве базиса пространства U можно выбрать систему τ -адических чисел $1, \alpha, \beta, \gamma$, где 1 — единица кольца $\mathbb{Q}(\tau)$, а α, β, γ являются необратимыми линейно независимыми τ -адическими числами. Значит, для некоторой м. л. н. с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы G в ее τ -адическом пополнении G_τ выполняется равенство $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4 = 0$.

Пусть φ — произвольный элемент $U : U$, через f_φ обозначим соответствующий φ квази-эндоморфизм группы G при изоморфизме $\mathcal{E}(G)$ и $U : U$ (см. предложение 2). Отметим, что между квазиэндоморфизмами группы G и элементами алгебры $U : U$, представляющими собой домножения на τ -адические числа, которые переводят U в U , имеет место следующее соответствие (см. [16, глава III, §4]):

$$\begin{pmatrix} f_\varphi(x_1) \\ f_\varphi(x_2) \\ f_\varphi(x_3) \\ f_\varphi(x_4) \end{pmatrix} = T_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где T_φ — матрица эндоморфизма $\varphi \in U : U$. Обозначим через T_{f_φ} матрицу, j -й столбец которой есть координатный столбец элемента $f_\varphi(x_j)$ относительно

м. л. н. с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы G , и назовем ее матрицей квазиэндоморфизма f_φ . Тогда из равенства (2) следует, что

$$T_{f_\varphi} = (T_\varphi)^t, \quad (3)$$

где $(T_\varphi)^t$ — матрица, транспонированная к T_φ .

Известно [10], что кольцо квазиэндоморфизмов сильно неразложимой группы ранга 4, псевдоцокль которой имеет ранг 1, является с точностью до изоморфизма подалгеброй следующей алгебры:

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & u & v \\ 0 & 0 & x & w \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Так как $\mathcal{E}(G) \subset \mathbf{A}$, то, в силу равенства (3), координатный столбец элемента $\varphi 1$ является первой строкой матрицы $T_{f_\varphi} \in \mathcal{E}(G)$. Отсюда и ввиду того, что $\dim_{\mathbb{Q}}(U) = 4$, элементы первой строки произвольной матрицы алгебры $\mathcal{E}(G)$ должны быть линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Пусть K — коммутативное подкольцо кольца $\mathbf{A}$, элементы первой строки произвольной матрицы которого линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $J(K)$ — его радикал Джекобсона.

Непосредственные вычисления показывают следующее:

$$1) \text{ если } J(K)^2 = 0, \text{ то } \mathbf{K} \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_4^{(1)};$$

2) если $J(K)^2 \neq 0$ и $J(K)^3 = 0$, то K изоморфно алгебре

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & \mathbf{k}y \\ 0 & 0 & x & \mathbf{n}z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{B}_4(\mathbf{k}, \mathbf{n});$$

$$3) \text{ если } J(K)^3 \neq 0, \text{ то } \mathbf{K} \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_4^{(3)}.$$

Покажем, что каждая из алгебр $\mathbf{A}_4^{(1)}$, $\mathbf{B}_4(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ и $\mathbf{A}_4^{(3)}$ реализуются в качестве кольца квазиэндоморфизмов некоторой сильно неразложимой группы ранга 4 класса с псевдоцоклем ранга 1.

Рассмотрим в подпространстве $U = \langle 1, \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{Q}}$ нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$, где $[U]$ — τ -адический инвариант группы G , эндоморфизм домножения на $\varphi \in U$. Эндоморфизм φ представляется с рациональными коэффициентами r_1, r_2, r_3, r_4 в виде $\varphi = r_1 1 + r_2 \alpha + r_3 \beta + r_4 \gamma$ и на базисных элементах действует следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi 1 &= r_1 1 + r_2 \alpha + r_3 \beta + r_4 \gamma, \\ \varphi \alpha &= r_1 \alpha + r_2 \alpha^2 + r_3 \beta \alpha + r_4 \gamma \alpha, \\ \varphi \beta &= r_1 \beta + r_2 \alpha \beta + r_3 \beta^2 + r_4 \gamma \beta, \\ \varphi \gamma &= r_1 \gamma + r_2 \alpha \gamma + r_3 \beta \gamma + r_4 \gamma^2.\end{aligned}\tag{4}$$

Пусть $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_4^{(1)}$. Согласно равенству (3) матрица T_φ эндоморфизма φ имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ t & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.\tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что для базисных элементов α, β, γ радикала Джекобсона $J(U)$ алгебры U выполняются следующие соотношения:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = 0.\tag{6}$$

Таким образом, алгебра $\mathbf{A}_4^{(1)}$ реализуется в качестве кольца квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G тогда и только тогда, когда необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям (6).

Предположим, что $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{B}_4(\mathbf{k}, \mathbf{n})$. В этом случае матрица T_φ эндоморфизма φ имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ t & \mathbf{k}y & \mathbf{n}z & x \end{pmatrix}.\tag{7}$$

Тогда, учитывая (4) и (7), получаем, что базисные элементы α, β, γ радикала Джекобсона $J(U)$ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha^2 = \mathbf{k}\gamma, \beta^2 = \mathbf{n}\gamma, \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = \gamma^2 = 0.$$

Возьмем в качестве базиса пространства U элементы $1, \alpha, \beta, \gamma'$, где $\gamma' = \mathbf{k}\gamma$. Тогда в новом базисе матрица T_φ эндоморфизма φ имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ t & y & \mathbf{n}z & x \end{pmatrix}.\tag{8}$$

Отсюда на основании (3) матрица квазиэндоморфизма $f \in \mathcal{E}(G)$, соответствующего эндоморфизму φ , имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & \mathbf{n}z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.\tag{9}$$

Следовательно, если необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям

$$\alpha^2 = \gamma, \beta^2 = \mathbf{n}\gamma, \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = \gamma^2 = 0, \quad (10)$$

то $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_4^2(\mathbf{n})$. Очевидно, верно и обратное.

ЗАМЕЧАНИЕ Легко видеть, что алгебры, отвечающие двум различным значениям параметра, изоморфны тогда и только тогда, когда отношение параметров является квадратом.

Допустим теперь, что $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_4^{(3)}$. В этом случае матрица T_φ эндоморфизма φ имеет вид

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ z & y & x & 0 \\ t & z & y & x \end{pmatrix}. \quad (11)$$

На основании (4) и (11) для базисных элементов α, β, γ радикала Джекобсона $J(U)$ имеем

$$\alpha^2 = \beta, \alpha\beta = \gamma, \beta^2 = \alpha\gamma = \beta\gamma = \gamma^2 = 0. \quad (12)$$

Получили, что алгебра $\mathbf{A}_4^{(3)}$ реализуется в качестве кольца квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G тогда и только тогда, когда необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям (12).

ПРИМЕР 6. Пусть тип $\tau = [(6, 6, \dots)]$. Тогда $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^6}$. Зафиксируем τ -адические числа $\alpha = 1 \otimes (p^3)$, $\beta = 1 \otimes (p^4)$ и $\gamma = 1 \otimes (p^5)$. Рассмотрим подпространство $U = \langle 1, \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{Q}}$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$. Пространство U имеет нулевой тип, так как τ -адические числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ взаимно просты в совокупности.

Имеем тип $\alpha = [(3, 3, \dots)]$, тип $\beta = [(4, 4, \dots)]$ и тип $\gamma = [(5, 5, \dots)]$. Следовательно, необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям (6). Значит, $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_4^{(1)}$.

ПРИМЕР 7. Пусть тип $\tau = [(6, 6, \dots)]$ и $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^6}$. Рассмотрим τ -адические числа $\alpha = 1 \otimes (p^2)$, $\beta = 1 \otimes (p^5)$, $\gamma = 1 \otimes (p^4)$. Подпространство $U = \langle 1, \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{Q}}$ алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$ имеет нулевой тип, тип $\alpha = [(2, 2, \dots)]$, тип $\gamma = [(5, 5, \dots)]$ и тип $\beta = [(4, 4, \dots)]$. Тогда

$$\alpha^2 = \gamma, \beta^2 = 0, \alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = \gamma^2 = 0.$$

Следовательно, для необратимых элементов α, β, γ пространства U выполняются соотношения (10) для случая $n = 0$. Отсюда $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_4^2(\mathbf{0})$.

ПРИМЕР 8. Пусть тип $\tau = [(4, 4, \dots)]$ и $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^4}$. Рассмотрим сильно неразложимую группу G ранга 4 из ([16], пример 4.11). Соответствующее ей подпространство U нулевого типа алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$, где $[U]$ — τ -адический инвариант группы G , имеет следующий базис: $1, \alpha = 1 \otimes (p), \alpha^2, \alpha^3$. Легко видеть, что необратимые элементы α, β, γ пространства U удовлетворяют соотношениям (12). Следовательно, $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_4^{(3)}$.

4. Заключение

В работе получена классификация колец квазиэндоморфизмов класса сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с одним τ -адическим соотношением, псевдоцокль которых имеет ранга 1.

Доказано, что с точностью до изоморфизма существует 2 алгебры и 1 бесконечная серия алгебр с рациональным параметром, которые реализуются в качестве колец квазиэндоморфизмов групп рассматриваемого класса. При этом серийные алгебры, отвечающие двум различным значениям параметра, изоморфны тогда и только тогда, когда отношение параметров является квадратом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. 1961. V. 38. P. 1–41.
2. Reid J. D. On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group // Topics in Abelian Groups. 1963. P. 51–68.
3. Чередникова А. В. Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга // Абелевы группы и модули. 1996. № 13–14. С. 237–242.
4. Чередникова А. В. Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули. 1996. № 13–14. С. 224–236.
5. Cherednikova A. V. Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable torsion-free abelian groups // Math. Notes. 1998. V. 63. № 5–6. P. 670–678.
6. Cherednikova A. V. Quasi-endomorphism rings of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with zero Jacobson radical // J. Math. Sci. 2014. V. 197. № 5. P. 698–702.
7. Cherednikova A. V. Quasi-endomorphism of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 that do not coincide with their pseudo-socles // Math. Notes. 2015. V. 97. № 3–4. P. 621–631.
8. Faticoni T. G. Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups. Boca Raton–London–New York: CRC Press, 2007. 338 pp.
9. Cherednikova A. V. Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable torsion-free abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 3 // J. Math. Sci. 2011. V. 177. № 6. P. 942–946.
10. Cherednikova A. V. Quasi-endomorphism rings of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 1 // J. Math. Sci. 2014. V. 197. № 5. P. 703–707.
11. Fuchs L. Infinite Abelian groups, Vol. 1. New York–London: Academic Press, 1970. 290 pp.
12. Fuchs L. Infinite Abelian groups, Vol. 2. New York–London: Academic Press, 1973. 363 pp.
13. Фомин А. А. Сервантно свободные группы // Абелевы группы и модули. 1986. Т. 6. С. 145–164.
14. Куликов Л. Я. Группы расширений абелевых групп // Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда (Ленинград, 1961). Т. 2. Л. 1964. С. 9–11.
15. Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ -адическим соотношением // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 1. С. 83–104.

16. Фомин А. А. Абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квазиэндо-морфизма. Дис. ... д.ф.-м.н., МПГУ, М., 1992. 260 с.
17. Richman F. A Class of Rank-2 Torsion Free Groups. *Studies on Abelian Groups*, Berlin, Springer, 1968, 327–333.

REFERENCES

1. Beaumont, R. A., Pierce, R.S. 1961, “Torsion free groups of rank two”, *Mem. Amer. Math.*, vol. 38, pp. 1–41.
2. Reid, J. D. 1963, “On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group”, *Topics in Abelian Groups*, pp. 51–68.
3. Cherednikova, A. V. 1996, “Quasi-endomorphism rings of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 3”, *Abelian Groups and Modules*, no. 13–14, pp. 237–242.
4. Cherednikova, A. V. 1996, “Quasi-endomorphism rings of decomposable torsion-free Abelian groups of rank 3”, *Abelian Groups and Modules*, no. 13–14, pp. 224–236.
5. Cherednikova, A. V. 1998, “Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable torsion-free abelian groups”, *Math. Notes*, vol. 63, no. 5–6, pp. 670–678.
6. Cherednikova, A. V. 2014, “Quasi-endomorphism rings of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with zero Jacobson radical”, *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 698–702.
7. Cherednikova A. V. “Quasi-endomorphism rings of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 that do not coincide with their pseudo-socles”, *Math. Notes*, vol. 97, no. 3–4, pp. 621–631.
8. Faticoni, T. G. 2007, “Direct Sum Decompositions of Tortion-Free Finite Rank Groups”, *CRC Press*, Boca Raton-London-New York. 338 pp.
9. Cherednikova, A. V. 2011, “Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable tortion-free abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 3”, *J. Math. Sci.*, vol. 177, no. 6, pp. 42–946.
10. Cherednikova, A. V. 2014 “Quasi-endomorphism rings of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 1”, *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 703–707.
11. Fuchs, L. 1970. “Infinite Abelian grops”, *Academic Press*, vol. 1, New York–London. 290 pp.
12. Fuchs, L. 1973. “Infinite Abelian grops”, *Academic Press*, vol. 2, New York–London. 363 pp.
13. Fomin, A. A. 1986, “Pure free groups”, *Abelian Groups and Modules*, vol. 6, pp. 145–164. (Russian)
14. Kulikov, L. Y. 1964, “Groups of extensions of Abelian groups”, *Proc. of the 4th All-Union Math. Conf. (Leningrad, 1961)*, vol. 2, Leningrad, pp. 9–11. (Russian)
15. Fomin, A. A. 1989, “Abelian groups with one tau-adic relation”, *Algebra and Logic*, vol. 28, no 1, pp. 83–104. (Russian)

-
16. Fomin, A. A. 1992, "Finite Rank Torsion-Free Abelian Groups up to Quasi-Isomorphism", Doctorate thesis in the physico-mathematical sciences, *Mosc. ped. gos. univ.*, Moscow. 260 pp. (Russian)
 17. Richman, F. 1968, "A Class of Rank-2 Torsion Free Groups", *Studies on Abelian Groups*, pp. 327–333.

Костромской государственный технологический университет

Получено 31.06.2016

Получено 4.01.2017 г.

Принято в печать 12.03.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 512.552+512.553+512.715

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-256-266

ОДНОРОДНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ

Д. С. Чистяков (г. Нижний Новгород)

Аннотация

В данной работе изучаются смешанные модули, обладающие следующим свойством: каждая однородная функция нескольких переменных данного модуля является аддитивной. Под однородной функцией понимается всякое отображение прямой суммы конечного числа копий некоторого модуля в сам модуль, перестановочное с эндоморфизмами данного модуля. В универсальной алгебре алгебраическая структура называется эндопримальной, если все ее терм-функции коммутируют с эндоморфизмами. Известно, что каждая эндодуализуемая конечная алгебра эндопримальна. Ряд авторов исследовал эндопримальные алгебры в многообразиях векторных пространств, полурешеток, булевых алгебр, алгебр Стоуна, алгебр Гейтинга и абелевых групп. В данной статье продолжается исследование связи эндопримальности и свойств мультипликативной полугруппы кольца эндоморфизмов модуля, начатое автором ранее. Рассмотрены классы смешанных нередуцированных расщепляющихся модулей и редуцированных нерасщепляющихся модулей над коммутативным дедекиндовым кольцом. Показана взаимосвязь указанной проблемы со свойством однозначности сложения в кольце эндоморфизмов модуля.

Ключевые слова: дедекиндово кольцо, делимый модуль, редуцированный модуль, смешанный модуль, однородное отображение, терм-функция, эндофункция.

Библиография: 26 названий.

ON HOMOGENEOUS MAPPINGS OF MIXED MODULES

D. S. Chistyakov (Nizhny Novgorod)

Abstract

In this paper we study mixed modules, with the following property: every homogeneous function of several variables of a module is additive. By a homogeneous function we mean any mapping of the direct sum of a finite number of copies of a module into the module itself that commutes with the endomorphisms of the given module. In the universal algebra, the algebraic structure is said to be endoprimal if all its term-functions commute with endomorphisms. It is well-known that each endodualizable finite algebra is endoprimal. Some authors have studied endoprimal algebras in varieties of vector spaces, semilattices, Boolean algebras, Stone algebras, Heyting algebras, and Abelian groups. In this article, the links between endoprimality and the properties of the multiplicative semigroup of the endomorphism ring of a module, which the author started earlier. Classes of mixed non-reduced splitting modules and reduced modules over commutative Dedekind ring have been investigated. Links between this problem and the property of unique additivity has been shown.

Keywords: Dedekind ring, divisible module, reduced module, mixed module, homogeneous map, term-function, endofunction.

Bibliography: 26 titles.

1. Основные определения и постановка задачи

Пусть R — коммутативная дедекиндова область и M — левый R -модуль. n -арная эндо-функция модуля M — это отображение $f: M^n \rightarrow M$ такое, что

$$f(\varphi x_1, \dots, \varphi x_n) = \varphi f(x_1, \dots, x_n)$$

для всех $\varphi \in \text{End}_R(M)$. Отображение $f: M^n \rightarrow M$ такое, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = \psi_1 x_1 + \dots + \psi_n x_n,$$

где $\psi_1, \dots, \psi_n$ — центральные эндоморфизмы модуля G , называется n -арной обобщенной терм-функцией. В случае, когда $\psi_1, \dots, \psi_n \in R$, отображение f называется n -арной терм-функцией. Если каждая n -арная эндофункция модуля M является n -арной терм-функцией (n -арной обобщенной терм-функцией), то модуль M называется n -эндопримальным (обобщенно n -эндопримальным). Модуль называется эндопримальным (обобщенно эндопримальным), если он n -эндопримален (обобщенно n -эндопримален) для всех $n < \omega$.

Исследованию эндопримальных и обобщенно эндопримальных групп посвящены работы [1] — [7]. Отметим, что понятие эндопримальности возникло в универсальной алгебре. В частности, алгебраическая структура называется эндопримальной, если все ее терм-функции коммутируют с эндоморфизмами. В [5] показано, что каждая эндодуализируемая конечная алгебра эндопримальна. В работе [6] авторы продолжили систематическое изучение эндопримальных алгебр в многообразиях векторных пространств, полурешеток, булевых алгебр, алгебр Стоуна, алгебр Гейтинга и абелевых групп. В статьях [7] — [10] автор указал на связь эндопримальности и свойств мультипликативной полугруппы кольца эндоморфизмов модуля. Оказывается, обобщенно эндопримальные периодические абелевы группы и сепарабельные абелевы группы без кручения имеют УА-кольцо эндоморфизмов.

Полугруппа $(R, \cdot)$ называется кольцом с однозначным сложением (или кратко УА-кольцом), если существует единственная бинарная операция $+$, превращающая $(R, \cdot, +)$ в кольцо. Отметим также, что кольцо R является УА-кольцом в том и только том случае, когда каждый полугрупповой изоморфизм $\alpha: (R, \cdot) \rightarrow (S, \cdot)$ является кольцевым для каждой полугруппы $(S, \cdot)$. Понятие УА-кольца исследовалось в работах [11] — [16]. Позднее оно было обобщено на категории ([14]), полукольца ([17]), кольца и алгебры Ли ([18]) и модули ([19], [20]). Абелевы группы с УА-кольцами эндоморфизмов рассматривалось в работах [21] — [25].

В данной работе мы исследуем взаимосвязь УА-свойства кольца эндоморфизмов и эндопримальности смешанных модулей над коммутативным дедекиндовым кольцом. Ключевым инструментом в исследовании УА-колец служит следующая теорема, которая по сути является аналогом теоремы 2.12 из [13].

ТЕОРЕМА 1. ([21, Лемма 1]) *Предположим, что кольцо R обладает системой идемпотентов $E = \{e_i \mid i \in I\}$ такой, что*

1. *для каждого $0 \neq r \in R$ существует идемпотент $e_i \in E$, удовлетворяющий условию $re_i \neq 0$;*
2. *для каждого $e_i \in E$ найдется ортогональный ему идемпотент $e_j \in E$ такой, что для $x \in R$ из равенств $e_i x e_i R e_j = 0 = e_j R e_i x e_i$ следует равенство $e_i x e_i = 0$.*

Тогда R — УА-кольцо.

В частности, с помощью данной теоремы легко доказать следующее утверждение ([7]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть M — сепарабельный модуль без кручения над коммутативным дедекиндовым кольцом R и $\text{rank}(M) > 1$. Следующие условия эквивалентны:

1. M — обобщенно эндопримальный R -модуль,
2. $\text{End}_R(M)$ — UA -кольцо,
3. M — полусвязанный R -модуль.

При исследовании обобщенно эндопримальных модулей, в основном, используется следующая теорема ([4], [7]).

ТЕОРЕМА 3. Следующие условия эквивалентны:

1. M — обобщенно эндопримальный модуль;
2. каждая эндифункция $f: M^n \rightarrow M$ аддитивна.

Далее мы переходим к изложению основных результатов работы. Для удобства зафиксируем следующие обозначения для R -модуля M над коммутативным дедекиндовым целостным кольцом R его подмодулей: $t(M)$ — периодический подмодуль, $t_P(M)$ — P -примарный подмодуль, $tf(M) = M/t(M)$ — часть без кручения модуля M , $\text{supp}(M) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid t_P(M) \neq 0\}$, $\mathcal{D}_t(M)$ — максимальный делимый периодический подмодуль, $\mathcal{D}_{tf}(M)$ — максимальный делимый подмодуль без кручения, $\mathcal{R}_t(M)$ — максимальный редуцированный периодический подмодуль, $\mathcal{R}_{tf}(M)$ — максимальный редуцированный подмодуль без кручения.

2. Однородные отображения смешанных модулей

При изложении результатов работы мы используем терминологию и обозначения из книги [26].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M = \mathcal{D}_{tf}(M) \oplus \bigoplus_{P \in \text{supp}(M)} t_P(M)$ — R -модуль такой, что

1. модуль $\mathcal{D}_{tf}(M)$ разложим;
2. $t_P(M) = R(P^n) \oplus R(P^n) \oplus M(P)$, где $P^n M(P) = 0$, или $t_P(M)$ имеет неограниченный базисный подмодуль, для всех $P \in \text{supp}(M)$.

Тогда $\text{End}_R(M)$ — UA -кольцо и M — обобщенно эндопримальный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\text{End}_R(M) \cong \text{End}_R(\mathcal{D}_{tf}(M)) \times \prod_{P \in \text{supp}(M)} \text{End}_R(t_P(M))$$

и кольцо $\text{End}_R(\mathcal{D}_{tf}(M))$ является UA -кольцом ([16]), то достаточно доказать, что кольца эндоморфизмов P -примарных компонент $t_P(M)$ модуля M обладают свойством однозначности сложения. Заметим, что каждый R -модуль $t_P(M)$ может быть рассмотрен как модуль над P -адическим пополнением $\hat{R}_P$ области R . В этой ситуации $\text{End}_R(t_P(M)) = \text{End}_{\hat{R}_P}(t_P(M))$.

Зафиксируем идеал $P \in \text{supp}(M)$. Предположим, что модуль $t_P(M)$ имеет неограниченный базисный подмодуль. Тогда имеет место прямое разложение

$$M = Rm_1 \oplus \dots \oplus Rm_n \oplus N_n$$

такое, что $N_n = Rm_{n+1} \oplus N_{n+1}$ и показатель степени порядкового идеала элемента a_n не меньше, чем k .

Пусть E — система попарно ортогональных примитивных идемпотентов. Для любого $0 \neq \varphi \in \text{End}_{\widehat{R}_P}(t_P(M))$ существует $e \in E$ такой, что $\varphi e \neq 0$. В противном случае, φ аннулирует базисный подмодуль $t_P(M)$, и, следовательно, является нулевым. Пусть $e(t_P(M)) = R(P^n)$. Существует идемпотент e' такой, что $e'(t_P(M)) = R(P^m)$, где $m \geq n$. Тогда

$$(0 : e\text{End}_{\widehat{R}_P}(t_P(M))e')_l \cap e\text{End}_{\widehat{R}_P}(t_P(M))e = 0, \text{ где}$$

$$e\text{End}_{\widehat{R}_P}(t_P(M))e' = \text{Hom}_{\widehat{R}_P}(R(P^m), R(P^n)) \text{ и } e\text{End}_{\widehat{R}_P}(t_P(M))e = \text{End}_{\widehat{R}_P}(R(P^n)).$$

По теореме 1, $\text{End}_{\widehat{R}_P}(t_P(M))$ — УА-кольцо.

Случай, когда $t_P(M) = R(P^n) \oplus R(P^n) \oplus M(P)$, где $P^n M(P) = 0$, рассматривается аналогично.

Если модуль $\mathcal{D}_{tf}(M)$ разложим, то, как известно, он изоморфен прямой сумме копий модуля Q . Тогда, по [7, Теорема 1], данный модуль обобщенно эндопримален. Обобщенная эндопримальность периодической части модуля M доказывается аналогично случаю абелевых групп (см. [4, Лемма 22, Теорема 23]). Поскольку прямая сумма обобщенно эндопримальных модулей обобщенно эндопримальна, то мы получаем второе утверждение теоремы. $\square$

Заметим, что если $t_P(M) = R(P^k) \oplus M(P)$, где $M(P) \neq 0$ и $P^k M(P) = 0$, $P \in \text{supp}(M)$ и $M(P)$ не имеет подмодуля $R(P^k)$, то можно построить нелинейную эндофункцию

$$f_P: t_P(M) \oplus t_P(M) \rightarrow t_P(M),$$

например, по правилу $f((x, y), (x', y')) = 0$, если $p^{k-1}x' = 0$, и $f((x, y), (x', y')) = p^{k-1}x$, если $p^{k-1}x' \neq 0$, где $x, x' \in R(P^k)$, $y, y' \in M(P)$ и $P = Rp$. Далее отображение f_P продолжается до нелинейной эндофункции $f: M^2 \rightarrow M$ по правилу: $f(x) = f_P(x)$, если $x \in t_P(M)$, и $f(x) = 0$, если $x \notin t_P(M)$. В то же время, если модуль $\mathcal{D}_{tf}(M)$ изоморфен Q , то он не является обобщенно эндопримальным и его кольцо эндоморфизмов не обладает свойством однозначности сложения ([7]).

Пусть $M = R(P^m) \oplus M(P)$, где $M(P) \neq 0$, $m > 2$ и $P^{m-2}M(P) = 0$. Учитывая изоморфизм

$$\text{End}_R(M) \cong \begin{pmatrix} \text{End}_R(R(P^m)) & \text{Hom}_R(M(P), R(P^m)) \\ \text{Hom}_R(R(P^m), M(P)) & \text{End}_R(M(P)) \end{pmatrix},$$

построим отображение $\alpha: \text{End}_R(M) \rightarrow \text{End}_R(M)$ по правилу

$$\alpha: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ если } d \text{ — обратим в } \text{End}_R(R(P^m)),$$

$$\alpha: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d - p^{m-2}d \end{pmatrix}, \text{ если } d \text{ — необратим в } \text{End}_R(R(P^m)), \text{ где } P = Rp.$$

Непосредственно проверяется, что построенное отображение является полугрупповым, но не кольцевым автоморфизмом. В общем случае ситуация с ограниченными модулями остается не ясной, что не позволяет получить необходимые и достаточные условия, когда периодический или смешанный модуль над коммутативным дедекиндовым кольцом имеет УА-кольцо эндоморфизмов.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $M = \left[\mathcal{R}_{tf}(M) \oplus \mathcal{D}_{tf}(M) \oplus \bigoplus_{P \notin S} t_P(M) \right] \oplus \bigoplus_{P \in S} t_P(M)$ — R -модуль такой, что

1. $\mathcal{R}_{tf}(M) \neq 0$ и $\mathcal{D}_{tf}(M) \neq 0$;
2. $S = \{P \in \text{supp}(M) \mid Ptf(M) = tf(M)\}$;
3. $t_P(M) = R(P^n) \oplus R(P^n) \oplus M(P)$, где $P^n M(P) = 0$, или $t_P(M)$ — имеет неограниченный базисный подмодуль, для всех $P \in S$.

Тогда $\text{End}_R(M)$ — UA -кольцо. Если подмодуль $tf(M)$ обобщенно эндопримален, то M — обобщенно эндопримальный R -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения:

$$M_1 = \mathcal{R}_{tf}(M) \bigoplus \mathcal{D}_{tf}(M) \oplus \bigoplus_{P \notin S} t_P(M)$$

и $M_2 = \bigoplus_{P \in S} t_P(M)$. В силу тривиальности групп $\text{Hom}_R(M_1, M_2)$ и $\text{Hom}_R(M_2, M_1)$, имеем $\text{End}_R(M) \cong \text{End}_R(M_1) \times \text{End}_R(M_2)$. По предыдущему утверждению, M_2 — обобщенно эндопримальный модуль и $\text{End}_R(M_2)$ — UA -кольцо. Покажем, что $\text{End}_R(M_1)$ — UA -кольцо.

Рассмотрим проекции

$$e_{dtf}: M_1 \rightarrow \mathcal{D}_{tf}(M), e_{rtf}: M_1 \rightarrow \mathcal{R}_{tf}(M) \text{ и } e_t: M_1 \rightarrow t(M_1).$$

Для указанной системы идемпотентов справедливо равенство

$$(0 : e_t \text{End}_R(M_1) e_{rtf})_l \bigcap e_t \text{End}_R(M_1) e_t = 0.$$

Действительно, пусть $0 \neq \varphi \in \text{End}_R(t(M_1))$. Найдется идеал $Q \notin S$ такой, что $\varphi t_Q(M_1) \neq 0$. Поскольку $\varphi t_Q(M_1) \subseteq t_Q(M_1)$, то $0 \neq \varphi_1 = \varphi \upharpoonright t_Q(M_1) \in \text{End}_R(t_Q(M_1))$. Поэтому эндоморфизм φ_1 действует на базисном подмодуле модуля $t_Q(M_1)$ не тривиально. Существует целое положительное число k такое, что $\varphi R(Q^k) \neq 0$. Гомоморфизм $Rx \rightarrow R(Q^k)$, определенный действием на образующих, может быть продолжен до гомоморфизма $\psi: \mathcal{R}_{tf}(M) \rightarrow R(Q^k)$ в силу Q -чисто инъективности модуля $R(Q^k)$. Откуда $\varphi\psi \neq 0$.

Проверим справедливость равенства

$$(0 : e_{dtf} \text{End}_R(M_1) e_{rtf})_l \bigcap e_{rtf} \text{End}_R(M_1) e_{rtf} = 0.$$

Пусть $0 \neq \varphi \in \text{End}_R(\mathcal{R}_{tf}(M))$. Существует $x \in \mathcal{R}_{tf}(M)$ такой, что $\varphi(x) \neq 0$. Поскольку мономорфизм $R\varphi(x) \rightarrow \mathcal{D}_{tf}(M)$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi: \mathcal{R}_{tf}(M) \rightarrow \mathcal{D}_{tf}(M)$, мы получаем $\psi\varphi \neq 0$.

Покажем, что

$$(0 : e_{dtf} \text{End}_R(M_1) e_{rtf})_r \bigcap e_{dtf} \text{End}_R(M_1) e_{dtf} = 0.$$

Пусть $0 \neq \varphi \in \text{End}_R(\mathcal{D}_{tf}(M))$. Существует $x \in \mathcal{D}_{tf}(M)$ такой, что $\varphi(x) \neq 0$. Поскольку для $y \in \mathcal{R}_{tf}(M)$ мономорфизм $Ry \rightarrow Rx$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi: \mathcal{R}_{tf}(M) \rightarrow \mathcal{D}_{tf}(M)$, снова получаем $\varphi\psi \neq 0$.

Докажем, что модуль M_1 обобщенно эндопримален. Заметим, что каждая эндифункция $f: M_1 \rightarrow M_1$ аддитивна. Действительно, каждый периодический модуль над дедекиндовой областью является дистрибутивным модулем над своим кольцом эндоморфизмов. В работе [8] доказано, что каждая унарная эндифункция дистрибутивного модуля аддитивна. По условию подмодуль $tf(M)$ обобщенно эндопримален, поэтому для $a, a' \in tf(M)$ и $b, b' \in t(M_1)$ имеем

$$f(a + b + a' + b') = (e_{tf} + e_t)f(a + b + a' + b') = e_{tf}f(a + b + a' + b') + e_tf(a + b + a' + b') =$$

$$= f(a + a') + f(b + b') = f(a) + f(a') + f(b) + f(b'),$$

где $e_{tf}: M_1 \rightarrow tf(M)$ и $e_t: M_1 \rightarrow t(M_1)$ — проекции. Аналогично,

$$f(a + b) + f(a' + b') = f(a) + f(a') + f(b) + f(b').$$

Предположим теперь, что каждая k -арная эндифункция модуля M_1 аддитивна и пусть $f: M_1^{k+1} \rightarrow M_1$ — произвольная эндифункция. Докажем, что

$$f(x_1 + y_1, \dots, x_{k+1} + y_{k+1}) = f(x_1, \dots, x_{k+1}) + f(y_1, \dots, y_{k+1})$$

для всех $x_1, y_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+1} \in M_1$.

Поскольку модуль M_1 расщепляется, элементы x_i и y_i представимы в виде

$$x_i = x_i(tf(M)) + x_i(t(M_1)), y_i = y_i(tf(M)) + y_i(t(M_1)),$$

где

$$x_i(tf(M)), y_i(tf(M)) \in tf(M) \text{ и } x_i(t(M_1)), y_i(t(M_1)) \in t(M_1)$$

для всех индексов $i \in \{1, \dots, k\}$. Введем обозначения:

- $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{k+1})$,
- $\overline{tf(x)} = (x_1(tf(M)), \dots, x_{k+1}(tf(M)))$,
- $\overline{t(x)} = (x_1(t(M_1)), \dots, x_{k+1}(t(M_1)))$,
- $\overline{t_P(x)} = (x_1(t_P(M_1)), \dots, x_{k+1}(t_P(M_1)))$.

Для элементов y_i будем использовать аналогичные обозначения.

Пусть $e_{tf}: M_1 \rightarrow tf(M)$ и $e_t: M_1 \rightarrow t(M_1)$ — проекции. Тогда

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \bar{y}) &= f((e_{tf} + e_t)(\bar{x} + \bar{y})) = (e_{tf} + e_t)f(\bar{x} + \bar{y}) = \\ &= f(e_{tf}(\bar{x} + \bar{y})) + f(e_t(\bar{x} + \bar{y})) = f(\overline{tf(x)} + \overline{tf(y)}) + f(\overline{t(x)} + \overline{t(y)}). \end{aligned}$$

По условию теоремы, модуль $tf(M)$ обобщенно эндопримален. Отсюда следует, что

$$f(\overline{tf(x)} + \overline{tf(y)}) = f(\overline{tf(x)}) + f(\overline{tf(y)}).$$

Рассматриваем далее второе слагаемое.

Существует подмножество $S_t \subseteq \text{supp}(M) \setminus S$ такое, что $x_i(t(M_1)), y_i(t(M_1)) \in \sum_{P \in S_t} t_P(M_1)$

для всех $i \in \{1, \dots, k+1\}$. Как и выше, используя проекции $e_P: M \rightarrow t_P(M_1)$, мы получаем $f(\overline{t(x)} + \overline{t(y)}) = \sum_{P \in S_t} f(\overline{t_P(x)} + \overline{t_P(y)})$.

Для каждого $P \in S_t$ можно считать, что элементы $x_1(t_P(M_1)), y_1(t_P(M_1))$ принадлежат некоторому слагаемому $R(P^{m_P})$ модуля M_1 , где $m_P < \omega$. Пусть $x_1(t_P(M_1)) = r_P t_P$ и $y_1(t_P(M_1)) = s_P t_P$, где $r_P, s_P \in R$ и $t_P \in R(P^{m_P})$. Существуют эндоморфизмы $\varphi_P \in \text{End}_R(M_1)$ такие, что $\varphi_P t_P f(M) = R(P^{m_P})$, $\varphi_P \upharpoonright t(M_1) = \text{id}$ и $\varphi_P a_P = t_P$ для $a_P \in tf(M)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} f(\overline{t_P(x)} + \overline{t_P(y)}) &= f(r_P t_P + s_P t_P, \dots, \varphi_P x_{k+1}(t_P(M_1)) + \varphi_P y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ &= f(\varphi_P r_P r_P a_P + \varphi_P s_P r_P a_P, \dots, \varphi_P x_{k+1}(t_P(M_1)) + \varphi_P y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ &= \varphi_P f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ &= \varphi_P (e_{tf} + e_t) f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ &= \varphi_P e_{tf} f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) + \\ &\quad + \varphi_P e_t f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ &= \varphi_P f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, 0) + \varphi_P f(0, \dots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))) = \\ &= f(x_1(t_P(M_1)) + y_1(t_P(M_1)), \dots, 0) + f(0, \dots, x_{k+1}(t_P(M_1)) + y_{k+1}(t_P(M_1))). \end{aligned}$$

По предположению каждая k -арная эндифункция аддитивна, поэтому эндифункция f аддитивна. $\square$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $M = tf(M) \oplus \mathcal{R}_t(M) \oplus \mathcal{D}_t(M)$ — R -модуль такой, что $tf(M) \neq 0$, $\mathcal{D}_t(M) \neq 0$ и $\text{supp}(\mathcal{R}_t(M)) \subseteq \text{supp}(\mathcal{D}_t(M))$. Тогда $\text{End}_R(M)$ — UA -кольцо. Если модуль $tf(M)$ обобщенно эндопримален, то M — обобщенно эндопримальный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проекции $e_{tf}: M \rightarrow tf(M)$, $e_{rt}: M \rightarrow \mathcal{R}_t(M)$ и $e_{dt}: M \rightarrow \mathcal{D}_t(M)$.

Покажем, что

$$(0 : e_{dt}\text{End}_R(M)e_{tf})_r \bigcap e_{tf}\text{End}_R(M)e_{tf} = 0.$$

Пусть $\varphi \in e_{tf}\text{End}_R(M)e_{tf}$ и $\varphi(x) \neq 0$ для некоторого $x \in tf(M)$. Поскольку R -модуль $\mathcal{D}_t(M)$ инъективен, то ненулевой гомоморфизм $R\varphi(x) \rightarrow \mathcal{D}_t(M)$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi: tf(M) \rightarrow \mathcal{D}_t(M)$. Отсюда $\psi\varphi \neq 0$.

Проверим справедливость равенства

$$(0 : e_{dt}\text{End}_R(M)e_{tf})_l \bigcap e_{dt}\text{End}_R(M)e_{dt} = 0.$$

Пусть $0 \neq \varphi \in e_{dt}\text{End}_R(M)e_{dt}$. Поскольку модуль $\mathcal{D}_t(M)$ является прямой суммой модулей типа P^∞ , имеем $\varphi(R(Q^k)) \neq 0$ для некоторого подмодуля $R(Q^k)$. Если $0 \neq x \in tf(M)$, то ненулевой гомоморфизм $Rx \rightarrow R(Q^k)$ может быть продолжен до гомоморфизма $\psi: tf(M) \rightarrow \mathcal{D}_t(M)$ и $\varphi\psi \neq 0$.

Равенство

$$(0 : e_{dt}\text{End}_R(M)e_{rt}) \bigcap e_{rt}\text{End}_R(M)e_{rt} = 0,$$

следует из того, что естественное вложение $R(P^n) \rightarrow R(P^\infty)$ может быть продолжено до гомоморфизма $\psi: \mathcal{R}_t(M) \rightarrow \mathcal{D}_t(M)$ для $P \in \text{supp}(\mathcal{R}_t(M))$.

Докажем обобщенную эндопримальность модуля M . Как и в предыдущем утверждении, каждая эндифункция $f: M \rightarrow M$ является обобщенной терм-функцией. Пусть каждая k -арная эндифункция модуля M аддитивна и пусть $f: M^{k+1} \rightarrow M$ — произвольная эндифункция. Докажем, что

$$f(x_1 + y_1, \dots, x_{k+1} + y_{k+1}) = f(x_1, \dots, x_{k+1}) + f(y_1, \dots, y_{k+1})$$

для всех $x_1, y_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+1} \in M$.

Поскольку модуль M расщепляется, элементы x_i и y_i представимы в виде

$$x_i = x_i(tf(M)) + x_i(rt(M)) + x_i(dt(M)), \quad y_i = y_i(tf(M)) + y_i(rt(M)) + y_i(dt(M)),$$

где $x_i(tf(M)), y_i(tf(M)) \in tf(M)$, $x_i(rt(M)), y_i(rt(M)) \in \mathcal{R}_t(M)$ и, наконец, справедливо $x_i(dt(M)), y_i(dt(M)) \in \mathcal{D}_t(M)$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Помимо ранее введенных, мы будем использовать следующие обозначения:

- $\overline{rt_P(x)} = (x_1(rt_P(M)), \dots, x_{k+1}(rt_P(M))) \in t_P(\mathcal{R}_t(M))^{k+1}$,
- $\overline{dt_P(x)} = (x_1(dt_P(M)), \dots, x_{k+1}(dt_P(M))) \in t_P(\mathcal{D}_t(M))^{k+1}$.

Аналогично, как в предыдущем утверждении,

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\overline{tf(x)}) + f(\overline{tf(y)}) + \sum_{P \in S_t} f(\overline{rt_P(x)} + \overline{rt_P(y)}) + \sum_{P \in S_t} f(\overline{dt_P(x)} + \overline{dt_P(y)}),$$

где $S_t \subseteq \text{supp}(M)$ и $x_i(t(M)), y_i(t(M)) \in \sum_{P \in S_t} t_P(M)$ для всех $i \in \{1, \dots, k+1\}$.

Для каждого $P \in S_t$ можно считать, что элементы $x_1(dt_P(M)), y_1(dt_P(M))$ принадлежат некоторому подмодулю $R(P^{m_P})$, где $m_P < \omega$. Пусть $x_1(dt_P(M)) = r_P t_P$ и $y_1(dt_P(M)) = s_P t_P$, где $r_P, s_P \in R$ и $t_P \in R(P^{m_P})$. Существуют эндоморфизмы $\varphi_P \in \text{End}_R(M)$ такие, что $\varphi_P t_P(\mathcal{R}_t(M)) = R(P^{m_P})$, $\varphi_P \upharpoonright \mathcal{D}_t(M) = \text{id}$ и $\varphi_P a_P = t_P$ для некоторых $a_P \in t_P(\mathcal{R}_t(M))$. Таким образом,

$$\begin{aligned} f(\overline{dt_P(x)} + \overline{dt_P(y)}) &= f(r_P t_P + s_P t_P, \dots, \varphi_P x_{k+1}(dt_P(M)) + \varphi_P y_{k+1}(dt_P(M))) = \\ &= f(\varphi_P r_P a_P + \varphi_P s_P a_P, \dots, \varphi_P x_{k+1}(dt_P(M)) + \varphi_P y_{k+1}(dt_P(M))) = \\ &= \varphi_P f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) = \\ &= \varphi_P (e_{rt} + e_{dt}) f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) = \\ &= \varphi_P e_{rt} f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) + \\ &\quad + \varphi_P e_{dt} f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) = \\ &= \varphi_P f(r_P a_P + s_P a_P, \dots, 0) + \varphi_P f(0, \dots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))) = \\ &= f(x_1(dt_P(M)) + y_1(dt_P(M)), \dots, 0) + f(0, \dots, x_{k+1}(dt_P(M)) + y_{k+1}(dt_P(M))). \end{aligned}$$

По предположению каждая k -арная эндофункция аддитивна, поэтому эндофункция f аддитивна.

Существует вложение $\varphi: \mathcal{R}_t(M) \rightarrow \mathcal{D}_t(M)$, которое можно отождествить с некоторым эндоморфизмом модуля M . Поскольку эндофункция $f: M^{k+1} \rightarrow M$ аддитивна на $\mathcal{D}_t(M)$, мы получаем

$$\begin{aligned} \varphi \sum_{P \in S_t} f(\overline{rt_P(x)} + \overline{rt_P(y)}) &= \sum_{P \in S_t} f(\overline{\varphi rt_P(x)} + \overline{\varphi rt_P(y)}) = \\ &= \sum_{P \in S_t} f(\overline{\varphi rt_P(x)}) + \sum_{P \in S_t} f(\overline{\varphi rt_P(y)}) = \varphi \sum_{P \in S_t} f(\overline{rt_P(x)}) + \varphi \sum_{P \in S_t} f(\overline{rt_P(y)}). \end{aligned}$$

Учитывая, что φ — мономорфизм, заключаем, что эндофункция f аддитивна на $\mathcal{R}_t(M)$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Kaarli, L. Marki. Endoprimal Abelian groups // Jour. Austral. Math. Soc. 1999. V. 67. 412 – 428.
2. K. Kaarli, L. Marki. Endoprimal Abelian groups of torsion-free rank 1 // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2004. V. 112. 117 – 130.
3. R. Gobel, K. Kaarli, L. Marki, S. Wallutis. Endoprimal torsion-free separable groups // Jour. of Alg. and Its Appl. 2004. V. 3. 61 – 73.
4. U. Albrecht, S. Breaz, W. Wickless. Generalized endoprimal abelian groups // Jour. of Alg. and Its Appl. 2006. V. 5. 1 – 17.
5. B.A. Davey. Dualisability in general and endodualisability in particular // Logic and Algebra, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 1996. V. 180. 437 – 455.
6. B.A. Davey, J.G. Pitkethly. Endoprimal algebras // Algebra Universalis. 1997. V. 38. 266 – 288.
7. Д.С. Чистяков. Сепарабельные модули без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2015. Т. 6. 53 – 59.
8. Д.С. Чистяков. Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов // Матем. заметки. 2012. Т. 91. 878 – 884.

9. О.В. Любимцев, Д.С. Чистяков. Об абелевых группах без кручения с UA -кольцом эндоморфизмов // Вестник томского гос. универ. 2011. Т. 14. 55 – 58.
10. О.В. Любимцев, Д.С. Чистяков. UA -свойства модулей над коммутативными нетеровыми кольцами // Изв. вузов. Матем. 2016. Т. 11. 42 – 52.
11. R.E. Johnson. Rings with unique addition // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. 55 – 61.
12. W.S. Martindale, III. When are multiplicative mappings additive? // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. 695 – 698.
13. A.V. Mikhalev. The multiplicative classification of associative rings // Math. Sb. 1988. V. 135(177). 210 – 224.
14. Chr.-F. Neliuss. Ringe mit eindentiger Addition. Paderborn. 1974.
15. C.E. Rickart. One-to-one mappings of rings and lattices // Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. 758 – 764.
16. W. Stephenson. Unique addition rings // Can. J. Math. 1969. V. 21(6). 1455 – 1461.
17. I.I. Artamonova. On uniqueness of addition in semirings // Fundam. Prikl. Mat. 1997. V. 3. 1093 – 1100 (in Russian).
18. I.V. Arzhantsev. Uniqueness of addition in semisimple Lie algebras // Russian Math. Surveys. 2001. V. 56. 569 – 571.
19. A.B. van der Merwe. Unique addition modules // Comm. in Alg. 1999. V. 27. 4103 – 4115.
20. О.В. Любимцев, Д.С. Чистяков. Модули без кручения с UA -кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. 2015. Т. 98. 898 – 906.
21. О.В. Любимцев. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA -кольцами эндоморфизмов // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4. 1419 – 1422.
22. О.В. Любимцев. Периодические абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. 2001. Т. 70. 736 – 741.
23. О.В. Любимцев. Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. 2015. Т. 98. 125 – 133.
24. О.В. Любимцев. Алгебраически компактные абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов // Фунд. и прикл. математика. 2015. Т. 20. 121 – 129.
25. О.В. Любимцев, Д.С. Чистяков. Смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов // Матем. заметки. 2015. Т. 97. 556–565.
26. П.А. Крылов, А.А. Туганбаев. Модули над областями дискретного нормирования. М.: Факториал Пресс. 2007.

REFERENCES

1. Kaarli K., Marki L. 1999, "Endoprimal Abelian groups" , *Jour. Austral. Math. Soc.*, vol. 67, pp. 412-428.
2. Kaarli K., Marki L. 2004, "Endoprimal Abelian groups of torsion-free rank 1", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, vol. 112, pp. 117-130.
3. Gobel R., Kaarli K., Marki L., Wallutis S. 2004, "Endoprimal torsion-free separable groups", *Jour. of Alg. and Its Appl.*, vol. 3, pp. 61-73.
4. Albrecht U., Breaz S., Wickless W. 2006, "Generalized endoprimal abelian groups", *Jour. of Alg. and Its Appl.*, vol. 5, pp. 1-17.
5. Davey B.A. 1996, "Dualisability in general and endodualisability in particular", *Logic and Algebra, Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, vol. 180, pp. 437-455.
6. Davey B.A., Pitkethly J.G. 1997, "Endoprimal algebras", *Algebra Universalis*, vol. 38, pp. 266-288.
7. Чистяков Д.С. 2015, "Сепарабельные модули без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов", *Изв. вузов. Математика*, т. 6, с. 53-59.
8. Чистяков Д.С. 2012, "Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов *Матем. заметки* т. 91, с. 878-884.
9. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. 2011, "Об абелевых группах без кручения с UA-кольцом эндоморфизмов" *Вестник томского гос. универ.*, т. 14, с. 55-58.
10. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. 2016, "UA-свойства модулей над коммутативными нетеровыми кольцами", *Изв. вузов. Матем.*, т. 11. 42-52.
11. Johnson R.E. 1958, "Rings with unique addition *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 9, pp. 55-61.
12. Martindale W.S. 1969, "When are multiplicative mappings additive?", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 21, pp. 695-698.
13. Mikhalev A.V. 1988, "The multiplicative classification of associative rings", *Math. Sb.*, vol. 135, pp. 210-224.
14. Nelius Chr.-F. 1974, "Ringe mit eindentiger Addition", Paderborn.
15. Rickart C.E. 1948, "One-to-one mappings of rings and lattices", *Amer. Math. Soc.*, vol. 54, pp. 758-764.
16. Stephenson W. 1969, "Unique addition rings", *Can. J. Math.*, vol. 21, pp. 1455-1461.
17. Artamonova I.I. 1997, "On uniqueness of addition in semirings", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 3, pp. 1093-1100.
18. Arzhantsev I.V. 2001, "Uniqueness of addition in semisimple Lie algebras", *Russian Math. Surveys*, vol. 56, pp. 569-571.
19. van der Merwe A.B. 1999, "Unique addition modules", *Comm. in Alg.*, vol. 27, pp. 4103-4115.
20. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. 2015, "Модули без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов", *Матем. заметки*, т. 98, с. 898-906.

21. Любимцев О.В. 1998, "Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA -кольцами эндоморфизмов", *Фунд. и прикл. математика*, т. 4, с. 1419-1422.
22. Любимцев О.В. 2001, "Периодические абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов", *Матем. заметки*, т. 70, с. 736-741.
23. Любимцев О.В. 2015, "Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов", *Матем. заметки*, т. 98, с. 125 – 133.
24. Любимцев О.В. 2015, "Алгебраически компактные абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов", *Фунд. и прикл. математика*, т. 20, с. 121-129.
25. Любимцев О.В, Чистяков Д.С. 2015, "Смешанные абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов", *Матем. заметки*, т. 97, с. 556-565.
26. Крылов П.А., Туганбаев А.А. 2007, "Модули над областями дискретного нормирования", М.: Факториал Пресс.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Получено 21.03.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 511.321

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-267-274

СУММЫ ХАРАКТЕРОВ НА СДВИНУТЫХ СТЕПЕНЯХ¹

Ю. Н. Штейников (г. Москва)

Аннотация

Мы изучаем суммы характеров на множестве сдвинутых степеней по модулю простого числа p . Такие суммы могут рассматриваться как обобщение сумм характеров от сдвинутой подгруппы. Случай, когда подгруппа имеет размер меньше $\sqrt{p}$, вопрос о нетривиальных по порядку верхних оценок таких сумм остается открытым и на сегодня является нерешенным. Он был предложен Ж. Бургейном и М. Ч. Чанг в обзоре 2010 года. Тем не менее, некоторых промежуточных результатов добился профессор К. Гонг, установивший нетривиальные оценки таких сумм в случае когда подгруппа имеет размер существенно больше $\sqrt{p}$. В данной работе получены некоторые новые результаты на верхнюю оценку абсолютного значения обобщения таких сумм, которые являются неполными суммами характеров от сдвинутых подгрупп. Дано два доказательства основного утверждения. Первое из них основано на сведении указанной суммы к известной оценке А. Вейля и приеме сглаживания сумм. Применяется также прием оценки неполной суммы через полную. Используется также один результат М. З. Гараева. Второе доказательство основано на оригинальной идее И. М. Виноградова. Этот подход был предложен для уточнения известного неравенства Пойа-Виноградова и использует в своей сути некоторые геометрические и комбинаторные идеи. Второе доказательство приведено не в полной мере. Мы лишь доказываем некоторое ключевое утверждение и за остальными выкладками отсылаем читателя к самой работе И. М. Виноградова.

Ключевые слова: конечные поле, степени, суммы.

Библиография: 15 названий.

CHARACTER SUMS OVER SHIFTED POWERS

Yu. N. Shteinikov (Moscow)

Abstract

We study character sums over shifted powers modulo a prime p . Such sums can be viewed as generalizations of character sums over shifted multiplicative subgroups. We obtain some new results on upper estimates for absolute value of these sums. The case when the cardinality of subgroup is less than $\sqrt{p}$, it is a question of non-trivial upper bounds for such sums that remains open and is unsolved today. It was proposed by J. Burgain and M. Ch. Chang in the review of 2010. Nevertheless, some intermediate results were achieved by Professor K. Gong, who established non-trivial estimates of such sums in the case when the subgroup is much larger than $\sqrt{p}$. In this paper, we obtain some new results on the upper bound for the absolute value of the generalization of such sums, which are incomplete sums of character sums over shifted subgroups. Two proofs of the main result are given. The first one is based on reduction of this sum to the well-known estimate of A. Weil and the method of smoothing such sums. The method of estimating the incomplete sum through the full one is also applied. One result of M. Z. Garaev is also used. The second proof is based on the original idea of I. M. Vinogradov. This approach was proposed to refine the known inequality of Poya-Vinogradov and uses in its

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00433).

essence some geometric and combinatorial ideas. The second proof is not fully presented. We only prove a key statement, and for the rest of the calculations we refer the reader to the initial work of I. M. Vinogradov.

Keywords: finite field, powers, sums.

Bibliography: 15 titles.

1. Introduction

Throughout the paper n - is positive integer and p - is an odd large prime number, $\mathbb{Z}_n$ be the n - element residue ring and $\mathbb{Z}_n^*$ - multiplicative group of $\mathbb{Z}_n$. Let χ is some multiplicative character modulo n , $\gcd(a, n) = 1$, and $l \in \mathbb{Z}_n^*$, with $\text{ord}(l) = L$, that means L is the minimal positive integer n that $l^n \equiv 1 \pmod{n}$. For $1 \leq K \leq L$

denote

$$S(\chi, a, l, K) := \sum_{1 \leq k \leq K} \chi(a + l^k), \quad (a, n) = 1.$$

Hong Bing Yu obtained [1] non-trivial upper estimates for $S(\chi, a, l, K)$. We formulate his result below.

THEOREM 1. *Let $n \geq 2$ and χ - is a primitive Dirichlet character modulo n . The following estimate holds*

$$|S(\chi, a, l, K)| < \sqrt{n} \left(\frac{2}{\pi} \log n + \frac{7}{5} \right).$$

Let $G \subset \mathbb{Z}_n^*$ - multiplicative subgroup and

$$S(\chi, a, G) := \sum_{x \in G} \chi(a + x).$$

It is an opened question to obtain nontrivial upper estimates for $|S(\chi, a, G)|$ when $G \subset \mathbb{Z}_p^*$ and $G \sim p^{\frac{1}{2}}$. Jean Bourgain posed this problem (see M.-C. Chang's 2010 survey). The exact formulation of it is the following.

Problem (J. Bourgain) Let G - subgroup, $G \subset \mathbb{Z}_p^*$, $|G| \sim p^{\frac{1}{2}}$, $p \rightarrow \infty$, χ - nontrivial character modulo p , $\gcd(a, p) = 1$. Obtain nontrivial upper estimate in the following form

$$|S(\chi, a, G)| = o(|G|), p \rightarrow \infty.$$

In this paper we consider upper estimates for $|S(\chi, a, l, K)|$ in the case of prime modulo p . (χ - is a multiplicative character modulo p .)

The main aim of this paper is to give a nontrivial bound for absolute value of $S(\chi, a, l, K)$ when K is sufficiently large than $p^{\frac{1}{2}}$. The main result is contained in the following theorem.

THEOREM 2. *Let $K \geq p^{\frac{1}{2}}$, χ - is a multiplicative character modulo p . Then the following estimate holds*

$$|S(\chi, a, l, K)| \ll \sqrt{p} \left(\log \frac{K}{\sqrt{p}} + 1 \right).$$

In the case of prime modulo the quantities $S(\chi, a, l, K)$ can be considered as generalizations of $S(\chi, a, G)$. Indeed, any subgroup $G \subset \mathbb{Z}_p^*$ is cyclic, that means $G = \{l^k\}_{1 \leq k \leq |G|}$ for some $l \in \mathbb{Z}_p^*$. Estimates of character sums for different variants were considered in numerous papers, let us note the works [6], [3], [9], [10], [11], [12], [7], [8].

We recall that the notations $A(n) = O(B(n))$, $A(n) \ll B(n)$ are equivalent to the statement that there exists an absolute constant c that inequality $|A(n)| \leq cB(n)$ holds for all n .

2. Preliminary results

In this section we collect some facts and lemmas which we will use in the proof of main results. But we shall start with upper estimates for $|S(\chi, a, G)|$ which were obtained by Ke Gong.

PROPOSITION 1. *Let $G \subset \mathbb{Z}_p^*$ -is any multiplicative subgroup, than we have*

$$|S(\chi, a, G)| \leq p^{1/2}.$$

In the proof we use I. M. Vinogradov's lemma, (see it in [13]) which is given below.

LEMMA 1. *Let*

$$S := \sum_{0 \leq x \leq p-1} \sum_{0 \leq y \leq p-1} \alpha(x) \beta(y) \chi(xy + a),$$

with

$$\sum_{0 \leq x \leq p-1} |\alpha(x)|^2 \leq X, \quad \sum_{0 \leq y \leq p-1} |\alpha(y)|^2 \leq Y$$

Then we have

$$|S| \leq (pXY)^{\frac{1}{2}}.$$

Now we are ready to prove proposition 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Let $G(x)-$ be the indicator of G . We have

$$\sum_{x \in G} \chi(x + a) = \frac{1}{|G|} \sum_{x, y \in G} \chi(xy + a) = \frac{1}{|G|} \sum_{0 \leq x \leq p-1} \sum_{0 \leq y \leq p-1} G(x) G(y) \chi(xy + a).$$

Applying Vinogradov's lemma to the last sum we obtain the desired estimate. Thus, proposition 3 is proved. $\square$

Let function $f: \mathbb{Z}_L \rightarrow \mathbb{C}$. We recall tha Fourier transform $\hat{f}(\xi)$ is defined as

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{L} \sum_{x=1}^L f(x) e^{-2\pi i \frac{\xi x}{L}},$$

and

$$f(x) = \sum_{\xi=1}^L \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \frac{\xi x}{L}}.$$

We will use the well known Weil estimate of character sums.

LEMMA 2. *Let $\chi-$ is a multiplicative character of $\mathbb{Z}_p^*$ of order $m > 1$ and $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ - is a polynomial with positive degree and with d distinct zeros in $\overline{\mathbb{Z}_p}$ and which is not a m -th power of another polynomial. Then we have following estimate*

$$|\sum_{x \in \mathbb{Z}_p} \chi(f(x))| \leq dp^{\frac{1}{2}}.$$

The next result belongs to M. Garaev[2] and we will use it.

LEMMA 3. *Let L_1, L_2, A, B and L be any integers, $1 \leq A, B \leq L$. Then*

$$W := \sum_{a=0}^{L-1} \left| \sum_{x=L_1+1}^{L_1+A} e^{2\pi i ax/L} \right| \left| \sum_{y=L_2+1}^{L_2+B} e^{2\pi i ay/L} \right| \ll LA \log(BA^{-1} + 2)$$

Let us denote

$$f(k) := \chi(a + l^k).$$

In the next lemma we get estimates on $\hat{f}(\xi)$.

LEMMA 4. *For any ξ the following estimate holds*

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\sqrt{p}}{L}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. We have $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \chi(a + l^k) e^{-2\pi i \frac{\xi k}{L}}$. Let $d := \frac{p-1}{L}$. For some primitive root g modulo p we have $l = g^d$, and we have

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \chi(a + g^{dk}) e^{-2\pi i \frac{\xi k}{L}}.$$

Denoting $x = g^k$ and so $k = \text{ind}_g x$, we get

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} \chi(a + x^d) e^{-2\pi i \frac{\xi(\text{ind}_g x)}{L}}.$$

We see that the function $e^{-2\pi i \frac{\xi(\text{ind}_g x)}{L}}$ as the function of x is some multiplicative character $\chi_\xi(x)$. Therefore

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} \chi(a + x^d) \chi_\xi(x).$$

Each of the characters χ, χ_ξ is a power of some fixed multiplicative character χ_1 ,

$$\chi = \chi_1^{m_1}, \chi_\xi = \chi_1^{m_2}.$$

so

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} \chi_1((a + x^d)^{m_1} x^{m_2}).$$

Next, we use Weil estimate, – lemma 5 and get the desired estimate. With that we finish the proof. $\square$

3. The proof of the main results.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. For the proof of theorem 2 we need to estimate $|\sum_{n=A+1}^{A+K} f(n)|$, and we can assume that $\sqrt{p} < K < p^{0.99}$. Let us denote

$$g(n) := \sum_{k=n}^{n+\lfloor \sqrt{p} \rfloor - 1} f(k).$$

Consider the following sum

$$\sigma := \sum_{n=A-\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 2}^{A+K} g(n).$$

It is easy to see that

$$\sigma = \lfloor \sqrt{p} \rfloor \left(\sum_{n=A+1}^{A+K} f(n) \right) + O(p).$$

So we will get upper estimate for $|\sigma|$.

We define $I := [A - [\sqrt{p}] + 2, A + K]$. We have

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k \in I} g(k) = \sum_{k=0}^{L-1} g(k) \sum_{k' \in I} \frac{1}{L} \sum_{a=0}^{L-1} e^{2\pi i \frac{a(k'-k)}{L}} = \frac{1}{L} \sum_{a=0}^{L-1} \left(\sum_{k=0}^{L-1} g(k) e^{2\pi i \frac{-ak}{L}} \right) \left(\sum_{k' \in I} e^{2\pi i \frac{ak'}{L}} \right) = \\ &= \sum_{a=0}^{L-1} \hat{g}(a) \sum_{k' \in I} e^{2\pi i \frac{ak'}{L}}\end{aligned}$$

For $\hat{g}(a)$ we have –

$$\begin{aligned}\hat{g}(a) &= \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{[\sqrt{p}]-1} f(x+k) e^{-2\pi i \frac{ax}{L}} = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{L-1} f(x) \left(\sum_{k=0}^{[\sqrt{p}]-1} e^{-2\pi i \frac{a(x-k)}{L}} \right) = \\ &= \hat{f}(a) \sum_{k=0}^{[\sqrt{p}]-1} e^{2\pi i \frac{ak}{L}}.\end{aligned}$$

So, inserting this to the expression for σ we obtain

$$\sigma := \sum_{a=0}^{L-1} \hat{f}(a) \sum_{k''=0}^{[\sqrt{p}]-1} e^{2\pi i \frac{ak''}{L}} \sum_{k' \in I} e^{2\pi i \frac{ak'}{L}}.$$

Recalling estimates for $|\hat{f}(a)|$ in lemma 7

$$|\sigma| \leq \frac{[\sqrt{p}]}{L} \sum_{a=0}^{L-1} \left| \sum_{k''=0}^{[\sqrt{p}]-1} e^{2\pi i \frac{ak''}{L}} \right| \left| \sum_{k' \in I} e^{2\pi i \frac{ak'}{L}} \right|.$$

Using lemma 6 we easily derive the desired estimate for σ and so for initial sum. With that we finish the proof of theorem 2. $\square$

4. Final Remarks

There is another way to prove theorem 2.

Professor Ke Gong pointed me on it so I include it here.

It can be done using approach of I. M. Vinogradov [10], where he considered upper bounds for $|\sum_{m \leq k \leq M+q} \chi(k)|$. We are only going give a sketch of this proof. Denoting

$$f(k) := \chi(a + l^k),$$

so we need to obtain upper bound for $|\sum_{1 \leq k \leq K} f(k)|$. Following the proof as in [10], we need to establish the following key lemma.

LEMMA 5. Let $P, M_1, \dots, M_m \in \mathbb{N}, P < \frac{L}{2}$ and

$$M_1 + P \leq M_2, \dots, M_{m-1} + P \leq M_m \leq M_1 + L$$

Then we have

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{M_i+1 \leq x \leq M_i+P} \sum_{0 \leq z \leq P-1} f(x+z) \right| \ll (mp)^{\frac{1}{2}} P.$$

Let W is the following set

$$W := \{x \in \mathbb{Z}_p : \exists i \in [1, m], \exists k \in [M_i + 1, M_i + P], x \equiv l^k \pmod{p}\}$$

and $W(x)$ is indicator function of set W . So we have

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{M_i+1 \leq x \leq M_i+P} \sum_{0 \leq z \leq P-1} f(x+z) \right| \ll \sum_{0 \leq x \leq p-1} W(x) \left| \sum_{0 \leq z \leq P-1} \chi(a + xl^z) \right|.$$

Next, we use Cauchy-Schwartz inequality and after we should obtain estimate for

$$\sum_{0 \leq x \leq p-1} \left| \sum_{0 \leq z \leq P-1} \chi(a + xl^z) \right|^2.$$

Taking the square of inner sum and changing the order of summation one can easily get the desired estimate. This is the way of proving lemma 8.

The final arguments for the proof of theorem 2 can be found in [10]. There are some kind of geometrical and approximation arguments in the proof.

Acknowledgements

The work is supported by the Russian Science Foundation under grant 14-11-00433. I want to thank professor Jia Chaohua for invitation on the Chinese-Russian workshop on exponential sums and sumsets in Beijing in november 2015, for its hospitality and excellent working conditions. The task of this paper appeared while being on that workshop. I also want to thank professors Ke Gong and Sergei Konyagin for valuable advices.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hong Bing Yu, *Estimates of character sums with exponential function* // Acta Arithmetica. 2001. Vol. 97, №3, P. 211-218.
2. M. Z. Garaev, *On the logarithmic factor in error term estimates in certain additive congruence problems* // Acta Arith. 2006. Vol 124, P. 27-39.
3. L. Goldmakher, *Multiplicative mimicry and improvements of the Pólya-Vinogradov inequality* // Algebra and Number Theory 2012. Vol. 6, No. 1, P. 123-163.
4. C. Dartyge and A. Sárközy, *On additive decompositions of the set of primitive roots modulo p* // Monatsh. Math. 2013. Vol 169, P 317-328.
5. K. Gong, C. Jia, M.A. Korolev, *Shifted character sums with multiplicative coefficients, II* // J. Number Theory, 2017, Vol 178, P.31-39.
6. D.A. Frolenkov *A numerically explicit version of the Pólya-Vinogradov inequality* // Moscow journal of Combinatorics and Number Theory, 2011, Vol 1, № 3, P. 25-41.
7. D. A. Frolenkov, K. Soundararajan *A generalization of the Pólya-Vinogradov inequality* // Ramanujan J., 2013 Vol 31, № 3, P. 271-279.
8. C. Pomerance *Remarks on the Pólya-Vinogradov inequality* // IMRN, 2011, Vol 151, P. 30-41.

9. E. Dobrowolski, K. S. Williams *An upper bound for the sum $\sum_{n=a+1}^{a+H} f(n)$ for a certain class of functions f* // Proceedings of the American Mathematical Society, 1992, Vol 114, № 1, P. 29–35.
10. I. M. Vinogradov *A new improvement of the method of estimation of double sums (Russian)* // Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S), 1950, Vol 73, P. 635–638.
11. A. Granville, K. Soundararajan *Large character sums: pretentious characters and the Polya-Vinogradov theorem* // J. Amer. Math. Soc. (N.S), 2007, Vol.20, P. 357–384.
12. G. Bachman, L. Rachakonda *On a problem of Dobrowolski and Williams and the Polya-Vinogradov inequality* // Ramanujan J., 2001, Vol 5, P. 65–71.
13. I. M. Vinogradov *Basics of number theory* // Gostechizdat (1952), 1–180.
14. A. A. Karatsuba *Basics of analytic number theory*. URSS (2004), 1–182.
15. T. Tao, V. Vu *Additive combinatorics*. Cambridge University Press 2006, P. 1-530.

REFERENCES

1. Hong Bing Yu, *Estimates of character sums with exponential function* // Acta Arithmetica 2001. vol. 97, no. 3, pp. 211–218.
2. M. Z. Garaev, *On the logarithmic factor in error term estimates in certain additive congruence problems* Acta Arith 2006. Vol 124, pp. 27–39.
3. L. Goldmakher, *Multiplicative mimicry and improvements of the Polya-Vinogradov inequality* Algebra and Number Theory 2012. vol. 6, no. 1, pp. 123–163.
4. C. Dartyge and A. Sárközy, *On additive decompositions of the set of primitive roots modulo p* Monatsh. Math. 2013. vol 169, pp. 317–328.
5. K. Gong, C. Jia, M.A. Korolev, *Shifted character sums with multiplicative coefficients, II* J. Number Theory 2017, vol 178, pp. 31–39.
6. D.A. Frolenkov *A numerically explicit version of the Polya-Vinogradov inequality* Moscow journal of Combinatorics and Number Theory 2011, vol 1, no. 3, pp. 25–41.
7. D. A. Frolenkov, K. Soundararajan *A generalization of the Polya-Vinogradov inequality* Ramanujan J. 2013. vol 31, no 3, pp. 271–279.
8. C. Pomerance *Remarks on the Polya-Vinogradov inequality* IMRN 2011, vol 151, pp. 30–41.
9. E. Dobrowolski K. S. Williams *An upper bound for the sum $\sum_{n=a+1}^{a+H} f(n)$ for a certain class of functions f* Proceedings of the American Mathematical Society, 1992, vol 114, no 1, pp. 29–35.
10. I. M. Vinogradov *A new improvement of the method of estimation of double sums (Russian)* Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S) 1950, vol 73, pp. 635–638.
11. A. Granville, K. Soundararajan *Large character sums: pretentious characters and the Polya-Vinogradov theorem* J. Amer. Math. Soc. (N.S) 2007, vol.20, pp. 357–384.
12. G. Bachman, L. Rachakonda *On a problem of Dobrowolski and Williams and the Polya-Vinogradov inequality* Ramanujan J. 2001, vol 5, pp. 65–71.
13. I. M. Vinogradov *Basics of number theory* // Gostechizdat (1952), pp. 1–180.

14. A. A. Karatsuba *Basics of analytic number theory*. URSS (2004), pp. 1–182.
15. T. Tao , V. Vu *Additive combinatorics*. Cambridge University Press 2006, pp. 1-530.

Математический институт имени В. А. Стеклова

ФГУ ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук

Получено 17.03.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-275-278

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНЕЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В. Г. Чирский (г. Москва)

Аннотация

Рассматривается задача, относящаяся к общей проблеме построения последовательности псевдослучайных чисел. Одним из важных свойств псевдослучайных последовательностей хорошего качества является их непериодичность. Но бесконечная непериодическая последовательность может иметь начальные отрезки, вид которых далёк от желаемого. Например, отрезок десятичного разложения лиувиллева числа

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$$

имеет лишь небольшое количество единиц, а подавляющее большинство остальных цифр равны нулю.

При рассмотрении конечных отрезков разложений чисел возникает, таким образом, необходимость определения понятий периодичности и достаточной непериодичности конечной последовательности чисел, что и сделано в работе.

Рассматриваются разложения действительных чисел и исследуется вопрос о связи арифметических свойств разлагаемого числа с достаточной непериодичностью отрезков его разложения.

Обсуждаются способы построения чисел, имеющих последовательности достаточно непериодических разложений. Описаны некоторые результаты в этом направлении и их возможное развитие.

Вкратце изложены задачи, связанные с представлениями полиадических чисел. Эти представления удобны тем, что в них не используется операция деления чисел, что значительно упрощает процесс получения искомого разложения. Описаны полученные результаты и сформулированы задачи.

Ключевые слова: конечная непериодичность, арифметические свойства чисел.

Библиография: 11 названий.

Известно, что позиционное разложение иррационального числа является непериодическим. Однако его конечные отрезки могут содержать как, например, десятичное разложение числа

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$$

лишь небольшое количество единиц и подавляющее большинство нулей.

Представляется целесообразным ввести некоторые характеристики конечных последовательностей цифр, которые являются начальными отрезками позиционных разложений с базой b действительных (и не только) чисел.

Назовём конечный набор цифр чисто периодическим, если он состоит из нескольких (очевидно, не менее двух) повторяющихся групп цифр.

Рассмотрим бесконечную последовательность цифр

$$a_1, a_2, a_3, \dots \tag{1}$$

и её конечный отрезок

$$a_1, a_2, \dots, a_N. \quad (2)$$

Предположим, что для этого значения N набор цифр (2) содержит начальную непериодическую часть $a_1, \dots, a_l$ и k периодов длины T :

$$\begin{aligned} & a_{l+1}, \dots, a_{l+T}, \dots, a_{l+(k-1)T+1}, \dots, a_{l+kT}, \\ & a_{l+mT+i} = a_{l+i}, \quad i = 1, \dots, T, \quad m = 0, \dots, k. \end{aligned} \quad (3)$$

Положим

$$\delta(N) = \frac{kT}{N}.$$

Чем больше число $\delta(N)$, тем больше относительная величина чисто периодической части, а чем больше число k , тем короче период T (и, следовательно, тем проще его структура).

Назовём набор (2) $(\delta(N), k(N))$ -периодическим. Задав величины $0 < \delta_0 < 1$ и $k_0 \geq 2$, назовём набор (2) достаточно непериодическим, если $\delta(N) \leq \delta_0$ и $k(N) \geq k_0$.

Предлагаемые определения далеки от совершенства. Например, набор цифр, в котором часто встречается одна и та же комбинация цифр «слегка разбавленная» другими цифрами, будет считаться достаточно непериодическим.

Следуя этому замечанию, возможно было бы рассмотреть более естественные с вычислительной точки зрения определение достаточной непериодичности последовательности: *при её архивировании длина получившейся последовательности не уменьшается значительно*.

Однако предложенное выше определение тесно связано с арифметическими свойствами рассматриваемого числа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (1) представляет собой последовательность цифр, например, десятичного разложения иррационального числа α .

Пусть существуют $C(\alpha) > 0, \beta \geq q$ такие, что для всех $p, q \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C(\alpha)}{q^\beta}. \quad (4)$$

Если

$$\beta < \frac{k_0}{k_0(1 - \delta_0) + \delta_0}, \quad (5)$$

то при $N \geq N_0$ набор (2) является достаточно непериодическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Дадим схему доказательства этой простой теоремы.] Число $\alpha = 0, a_1 a_2 \dots$ соответствует последовательности (1). Пусть при некоторых $N, k \geq k_0$ и соответствующих l и T набор (2) имеет вид

$$a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, \dots, a_{l+T}, \dots, a_{l+(k-1)T+1}, \dots, a_{l+kT},$$

и выполнены равенства (3). Тогда этот набор можно рассматривать как начальный отрезок рационального числа

$$0, a_1 \dots a_l \overline{a_{l+1} \dots a_{l+T}}. \quad (6)$$

Обозначим это число $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$. Тогда

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < 10^{-l-kT}.$$

Знаменатель q дроби (6) не превосходит величины 10^{l+T} . Поэтому, если выполняется неравенство

$$10^{-l-kT} < \frac{C(\alpha)}{10^{(l+T)\beta}}, \quad (7)$$

получается противоречие с условием (4) теоремы.

Неравенство (7) следует из (5) при достаточно большом N . $\square$

Эта теорема утверждает вполне очевидное свойство: *достаточная непериодичность конечных отрезков разложения действительного числа следует из плохой приближаемости его рациональными числами.*

Можно применить эту теорему к числам вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!},$$

где a_n — периодическая последовательность целых чисел (см. [1]).

Отметим, что в другом очевидном примере — использовании непрерывной дроби с ограниченными неполными частными многократно используется операция деления, что усложняет выкладки.

В работах [2]–[9] исследованы арифметические свойства чисел вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$$

Это — так называемые полиадические числа. В работах [10], [11] установлено, что цифры разложений подобного типа обладают неплохими статистическими характеристиками.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г., Нестеренко А. Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискретная математика, том 27, №4, с. 150-157, 2015.
2. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика, том 439, №6, с. 677-679, 2014.
3. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, том 78, №6, с. 193-210, 2014.
4. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, том 81, выпуск 2, с. 215-232, 2017.
5. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник, том 17, №3, с. 180-185, 2016.
6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник, том 16 №1, с. 254-264, 2015.
7. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse – V.XIII, №2. 2004. pp. 241-260.
8. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета, Серия 1: Математика. Механика. №1, с. 59-61, 2015.

9. Чирский В.Г., Матвеев В.Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник, том 14, вып. 2, с. 164-172, 2013.
10. Чирский В.Г., Матвеев В.Ю. О представлении натуральных чисел // Чебышевский сборник, том 14, вып. 1, с. 92-101, 2013.
11. Чирский В.Г., Матвеев В.Ю. О представлении натуральных чисел // Вестник МГУ, сер. 1 матем., механ., №6, с. 57-59, 2013.

REFERENCES

1. Chirskii V. G., Nesterenko A. Yu. An approach to the transformation of periodic sequences // Discrete Mathematics and Applications. vol. 27. №1 p. 1-6.
2. Chirskii V. G. Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients // Doklady Mathematics. vol. 90. №3. p. 766-768.
3. Chirskii V. G. On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters // Izvestiya Mathematics. №6. p. 1244-1260.
4. Chirskii V. G. Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients // Izvestiya Mathematics. vol. 81. №2. p. 444-461.
5. Chirskii V. G. An approach to the transformation of periodic sequences // Chebushevskii sb. vol. 17, №3, p. 180-185, 2016.
6. Chirskii V. G. Arithmetic properties of polyadic numbers // Chebushevskii sb. vol. 16. №1. p. 254-264, 2015.
7. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse – V.XIII, №2. 2004. pp. 241-260, 2015.
8. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Euler series // Moscow University Mathematics Bulletin. vol. 70. №1. p. 41-43. 2015.
9. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. On some properties of polyadic expansions // Chebushevskii sb. vol. 14. №2. p. 164-172. 2013.
10. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. On the representation of natural numbers // Chebushevskii sb. vol. 14. №1. p. 192-101. 2013.
11. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. On the representation of natural numbers // MSU Bulletin. vol 6. p. 57-59. 2013.

Получено 11.05.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 519.4

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-279-297

**70-ЛЕТИЕ ПРОФЕССОРА
ВАЛЕРИЯ ГЕОРГИЕВИЧА ДУРНЕВА**

В. Н. Безверхний (г. Москва), А. Е. Устьян (г. Тула), И. В. Добрынина (г. Тула)

Аннотация

В статье рассматривается деятельность выдающегося специалиста в области алгоритмических вопросов алгебры и математической логики, профессора, доктора физико-математических наук, заведующего кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова Валерия Георгиевича Дурнева. Дается краткий обзор его основных научных результатов, приводятся достижения в педагогической, организационной деятельности, излагаются биографические сведения.

Ключевые слова: уравнения в полугруппах и группах, позитивные теории.

Библиография: 51 название.

**THE 70TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR
VALERY GEORGIEVICH DURNEV**

V. N. Bezverkhniy (Moscow), A. E. Ustyan (Tula), I. V. Dobrynina (Tula)

Abstract

This article considers activities of an outstanding expert in the field of algorithmic issues of algebra and mathematical logic Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing of the P.G. Demidov Yaroslavl State University Valeriy Georgievich Durnev. It provides a brief overview of his main scientific results, touches upon achievements in pedagogical and organizational activities, and includes biographical information.

Keywords: equations in semigroups and groups, positive theory.

Bibliography: 51 titles.

1. Введение

Валерий Георгиевич Дурнев — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова, выдающийся ученый в области алгоритмических вопросов алгебры и математической логики. Десять лет возглавлял диссертационный совет по специальностям "01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел" и "01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика", член редколлегии журнала "Чебышевский сборник".



2. Биография

Валерий Георгиевич Дурнев родился 22 октября 1946 года в поселке ИТР, пригороде г. Алексин, Тульской области. Учился в поселковой 7-летней школе. В начале 60-ых годов, переехав в центральную часть г. Алексин, перевелся в АСШ № 13. Окончил школу в 1965 году и поступил на математический факультет Тульского государственного педагогического института (ТГПИ) имени Л. Н. Толстого.

С первых же дней обучения в ТГПИ проявил незаурядные математические способности, стремление к самостоятельному получению знаний. Постоянное чтение дополнительной математической литературы для Валерия Георгиевича стало каждодневной необходимостью. Результатом упорного труда над программными материалами и большой самостоятельной работы в последствии стало получение в 1969 году диплома с отличием.

С 05.05.1970 служил в рядах Советской Армии.

С 23.06.1971 по 3.08.1971 — ассистент кафедры алгебры ТГПИ.

С 1.09.1971 — аспирант кафедры алгебры ТГПИ, научный руководитель М. Д. Гриндлингер.

До окончания аспирантуры защитил (февраль 1974) диссертацию "Позитивные теории свободных полугрупп" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности "01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел" в диссертационном совете при математическом факультете МГПИ им. В. И. Ленина.

С 16.02.1974 по 31.08.1975 — ассистент кафедры алгебры ТГПИ.

С 01.09.1975 года по настоящее время работает в Ярославском государственном университете (в настоящее время носит имя П. Г. Демидова):

с 01.09.1975 по 11.03.1980 — старший преподаватель кафедры алгебры и теории функций;

с 02.02.1980 по 08.09.1986 — заместитель декана математического факультета;

с 11.03.1980 по 15.09.1998 — доцент кафедры алгебры;

с 15.09. 1998 по 16.06.2003 — профессор кафедры алгебры и математической логики;

с 16.06. 2003 — заведующий кафедрой теоретической кибернетики, преобразованной позже в кафедру компьютерной безопасности и математических методов обработки информации.

10.11.1988 избран на должность декана математического факультета, на которой проработал 20 лет.

В 1998 году в диссертационном совете при механико-математическом факультете МГУ защитил диссертацию "Исследование некоторых алгоритмических проблем для свободных

групп и полугрупп" на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности "01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел".

3. Преподавательская, организационная деятельность

Валерий Георгиевич прочитал немало общих и специальных курсов для студентов специальностей "Математика", "Математика и компьютерные науки", "Компьютерная безопасность". Вот основные из них: "Алгебра", "Общая алгебра", "Элементы теории множеств и математической логики", "Дискретная математика", "Математическая логика и приложения в компьютерных науках", "Математическая логика и теория алгоритмов", "Теория алгоритмов", "Сложность вычислений", "Алгоритмически неразрешимые проблемы", "10-ая проблема Д. Гильберта", "Криптографические методы защиты информации", "Теоретические основы компьютерной безопасности", "Модели безопасности компьютерных систем".

В. Г. Дурнев обеспечивает преподаваемые курсы учебными пособиями. Им опубликованы следующие пособия:

1. В. Г. Дурнев. Элементы теории множеств и математической логики. Ярославль, ЯрГУ. 1977. 5, 5 п.л.

2. В. Г. Дурнев. Неразрешимые фрагменты элементарных теорий свободных полугрупп. Ярославль, ЯрГУ. 2001. 4,95 п.л. (Гриф НМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).

3. В. Г. Дурнев. Введение в математическую логику. Ярославль, ЯрГУ. 2005. 21,85 п.л. (Гриф НМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).

4. В. Г. Дурнев. Элементы математической логики. Ярославль, ЯрГУ. 2006. 28,36 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).

5. В. Г. Дурнев. Элементы теории алгоритмов. Ярославль, ЯрГУ. 2008. 28,82 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).

6. В. Г. Дурнев. Элементы теории множеств и математической логики. Ярославль, ЯрГУ. 2009. 47,87 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).

7. В. Г. Дурнев, М. А. Башкин, О. П. Якимова. Элементы дискретной математики. Часть I. Ярославль, ЯрГУ. 2007. 20,46 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).

8. В. Г. Дурнев, М. А. Башкин, О. П. Якимова. Элементы дискретной математики. Часть II. Ярославль, ЯрГУ. 2007. 20,46 п.л. (Гриф УМС по математике и механике Учебно-методического объединения университетов РФ).

За годы деканства ему удалось открыть:

1) новую специальность "Компьютерная безопасность";
2) докторантуру по специальности "01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел";

3) диссертационный совет по специальностям "01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел" и "01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика". В. Г. Дурнев десять лет был его председателем. Сначала совет принимал к защите только кандидатские диссертации, потом и докторские диссертации. В совете защищались соискатели из Архангельска, Вологды, Иваново, Майкопа, Москвы, Перми, Ростова на Дону, Санкт-Петербурга, Саратова, Таганрога, Твери, Тулы и Ярославля.

4. Научная деятельность

На становление Валерия Георгиевича как ученого большое влияние оказали Мартин Давидович Гриндлингер, Сергей Иванович Адян и Олег Борисович Лупанов.

Следуя работе [51], приведем основные результаты научной работы В. Г. Дурнева.

4.1. Алгоритмическая неразрешимость простых фрагментов элементарных теорий свободных полугрупп

А. Тарским была поставлена проблема, опубликованная М. И. Каргаполовым в "Коуровской тетради" в 1965 году: разрешима ли элементарная теория свободной группы?

В 2005 году О. Г. Харлампович и А. Г. Мясниковым данная проблема положительно решена.

А. Г. Маканиным в 1984 году доказана разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы.

Обозначим через Π_n свободную полугруппу ранга n со свободными образующими $a_1, \dots, a_n$. Как обычно в случае $n = 2, 3$ вместо a_1, a_2 и a_3 пишем a, b и c соответственно.

Исследование элементарной теории свободной полугруппы было начато В. Куайном, который в 1946 г. доказал, что при $n \geq 2$ *элементарная теория свободной полугруппы Π_n алгоритмически неразрешима*.

После этого был почти 30-летний перерыв и лишь с начала 70-ых годов появились работы, в которых основное внимание уделялось исследованию вопроса об алгоритмической разрешимости фрагментов элементарных теорий свободных полугрупп.

В 1973 г. в работах [3], [4] В. Г. Дурневым доказана неразрешимость фрагмента элементарной теории свободной полугруппы Π_n при $n \geq 2$, состоящего из позитивных формул, т. е. формул без отрицания, с кванторной приставкой типа $\exists \forall \exists^3$. С. С. Марченков доказал неразрешимость позитивной $\forall \exists^4$ - теории свободной полугруппы, это улучшает результат работы [3] с точки зрения числа кванторных блоков в рассматриваемых формулах, но при этом общее число используемых кванторов в работах С. С. Марченкова и В. Г. Дурнева одно и то же. В работе [6] доказана *алгоритмическая неразрешимость позитивной $\forall \exists^3$ - теории свободной полугруппы Π_n при $n \geq 2$* , что усиливает результаты перечисленных работ.

В описанных выше исследованиях основное внимание уделялось лишь кванторным приставкам рассматриваемых формул. При этом бескванторная часть формул из работ [3] и [4] была достаточно простой, сами формулы имели вид

$$(\forall x)(\exists y_1) \dots (\exists y_t) \bigvee_{i=1}^m w_i(x, y_1, \dots, y_t, a, b) = u_i(x, y_1, \dots, y_t, a, b),$$

где $w_i(x, y_1, \dots, y_t, a, b)$ и $u_i(x, y_1, \dots, y_t, a, b)$ ($1 \leq i \leq m$) — слова в алфавите $\{x, y_1, \dots, y_t, a, b\}$, $t = 4$ в работе С. С. Марченкова, а в работе [6] $t = 3$. Однако в обеих этих работах m достаточно большое.

В последнее время В. Г. Дурневу удалось получить дальнейшее продвижение в исследовании этого вопроса с точки зрения упрощения бескванторной части доказав, что

невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной позитивной формуле вида

$$(\forall x)(\exists y_1) \dots (\exists y_5) w(x, y_1, \dots, y_5, a, b) = u(x, y_1, \dots, y_5, a, b),$$

где $w(x, y_1, \dots, y_5, a, b)$ и $u(x, y_1, \dots, y_5, a, b)$ — слова в алфавите $\{x, y_1, \dots, y_5, a, b\}$, *определить, истинна ли она на свободной полугруппе Π_2* .

Во всех указанных выше работах авторы придерживались фактически "классического" понимания кванторов общности $\forall$ и существования $\exists$. Попытка "конструктивного" понимания кванторов привела к доказательству следующего утверждения.

Определим на словах в произвольном алфавите Σ два отношения $<$ и $\subset$:

$$\begin{aligned} U < V &\iff \text{слово } U \text{ — начало слова } V, \\ U \subset V &\iff \text{слово } U \text{ — подслово слова } V. \end{aligned}$$

Можно построить такую формулу $\Phi(w)$ с одной свободной переменной w , имеющую вид

$$(\exists v)(\forall x)_{x < t} (\exists x_1)_{x_1 \subset t_1} \dots (\exists x_9)_{x_9 \subset t_9} U = V,$$

где $t, t_1, \dots, t_9, U$ и V — слова в алфавите

$$\{w, v, x, x_1, \dots, x_9, a, b, c\},$$

что не существует алгоритма, позволяющего по произвольному элементу W полугруппы Π_2 определить истинна ли на полугруппе Π_3 формула $\Phi(W)$.

В работе [7] установлена алгоритмическая неразрешимость простого фрагмента позитивной теории с одной константой свободной полугруппы ранга 2.

Рассмотрим далее результаты по группам.

В работе Ю. И. Мерзлякова было доказано, что позитивные теории любых двух свободных нециклических групп совпадают.

В работе [1] установлено, если все группы многообразия групп U являются разрешимыми, то позитивные теории любых двух свободных групп этого многообразия U различных конечных рангов различны.

Этот результат позже усиливался и уточнялся в работе [34] и работах некоторых других авторов.

Близкие вопросы исследованы в работах Sacerdote G. S.

На основе полученных Л. С. Казариным [35] результатов о связи порядков элементов симметрических групп $S(n)$ и $S(n+1)$, линейных групп $GL(n, Z)$ и $GL(n+1, Z)$, $SL(n, Z)$ и $SL(n+1, Z)$ в работе [35] исследован вопрос об универсальной эквивалентности этих групп. Эти результаты можно рассматривать как некоторое уточнение результатов А. И. Мальцева об элементарных теориях линейных групп. В работах [36] и [37] установлена алгоритмическая неразрешимость некоторых ограниченных теорий групп $SL(n, Z)$ и $GL(n, Z)$ при $n \geq 3$.

4.2. Уравнения в свободных полугруппах

Первые результаты в исследовании систем уравнений в свободных полугруппах, получивших названия *уравнения в словах* были получены А. А. Марковым и Ю. И. Хмелевским в конце 60-х годов.

В эти же годы было начато изучение систем уравнений в словах и длинах, т. е. систем вида

$$\bigwedge_{i=1}^k w_i = u_i \ \& \ \bigwedge_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j|,$$

где через $|x| = |y|$ обозначен предикат “длина слов x и y равны”.

Первые результаты в исследовании систем уравнений в словах и длинах были получены в начале 70-х годов в работах Ю. В. Матиясевича и Н. К. Косовского.

В 1972-73 годах В. Г. Дурнев начал рассматривать системы уравнений в словах и длинах с дополнительным предикатом $|x|_a = |y|_a$ — “проекция слов x и y на выделенную букву a равны”. В работе [8], вышедшей из печати в 1974 году, в частности, доказано, что

можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений в свободной полугруппе Π_2 ,

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \dots, x_n, a, b) \& \bigwedge_{\{i,j\} \in A} (|x_i| = |x_j| \& |x_i|_a = |x_j|_a)$$

с неизвестными $x_1, \dots, x_n$, с константами a и b и с параметром x , где A — некоторое подмножество множества $M(n) = \{\{t, s\} \mid 1 \leq t, s \leq n\}$ всех неупорядоченных пар натуральных чисел, не превосходящих n , что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа n определить, имеет ли решение уравнение

$$w(a^m, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(a^m, x_1, \dots, x_n, a, b) \& \bigwedge_{\{i,j\} \in A} (|x_i| = |x_j| \& |x_i|_a = |x_j|_a).$$

В этой же работе отмечалось, что аналогичный результат остается верным, если предикат $|x| = |y| \& |x|_a = |y|_a$ заменить предикатом $|x|_b = |y|_b \& |x|_a = |y|_a$.

Аналогичный результат содержался в опубликованной в 1988 году работе J. R. Buchi и S. Senger.

В 1976 году Г. С. Маканин получил в теории уравнений в словах фундаментальный результат, который был опубликован в 1977 году, — он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной полугруппе Π_m определить, имеет ли она решение. Несколько позже Г. С. Маканин построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение.

После фундаментальных результатов Г. С. Маканина особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных полугруппах и группах с различными “не слишком сложными” и “достаточно естественными” ограничениями на решения.

В серии работ [10], [11], [12], [13] и [14] рассматривались ограничения на решения типа $x \in L$, где L — некоторый “не слишком сложный” и “достаточно естественный” язык. В качестве таких языков рассматривались, прежде всего, язык L_1 , состоящий из всех таких слов в алфавите $\{a, b\}$, в которых число вхождений буквы a равно числу вхождений буквы b , и язык L_2 , состоящий из всех таких слов в алфавите $\{a, b\}$, в которых число вхождений буквы a в два раза больше числа вхождений буквы b .

Были доказаны, в частности, следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_2 ,*

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \dots, x_n, a, b) \& \bigwedge_{i=3}^p (x_i \in L_1) \& |x_1| = |x_2|$$

с неизвестными $x_1, \dots, x_n$, с константами a и b и с параметром x , что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа n определить, имеет ли решение уравнение

$$w(a^m, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(a^m, x_1, \dots, x_n, a, b) \& \bigwedge_{i=3}^p (x_i \in L_1) \& |x_1| = |x_2|.$$

ТЕОРЕМА 2. Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_2 ,

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \dots, x_n, a, b) \& \bigwedge_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \&$$

$$x_1 \in L_1$$

с неизвестными $x_1, \dots, x_n$, с константами a и b и с параметром x , где A — некоторое подмножество множества $M(n) = \{\{t, s\} \mid 1 \leq t, s \leq n\}$ всех неупорядоченных пар натуральных чисел, не превосходящих n , что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа n определить, имеет ли решение уравнение

$$w(a^n, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(a^n, x_1, \dots, x_n, a, b) \& \bigwedge_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \&$$

$$x_1 \in L_1.$$

ТЕОРЕМА 3. Можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_2 ,

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \dots, x_n, a, b) \&$$

$$\bigwedge_{i=2}^t (x_i \in L_1) \&$$

$$x_1 \in L_2$$

с неизвестными $x_1, \dots, x_n$, с константами a и b и с параметром x , что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа n определить, имеет ли решение система уравнений

$$w(a^n, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(a^n, x_1, \dots, x_n, a, b) \&$$

$$\bigwedge_{i=2}^t (x_i \in L_1) \&$$

$$x_1 \in L_2.$$

Введем в рассмотрение язык $L \subseteq \Pi_3$: $L = (L_1 c)^p (L_2 c)^q$.

ТЕОРЕМА 4. Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободной полугруппе Π_3 ,

$$W(x, x_1, \dots, x_{n+1}, a, b, c) = V(x, x_1, \dots, x_{n+1}, a, b, c) \&$$

$$\& x_{n+1} \in L.$$

с неизвестными $x_1, \dots, x_{n+1}$, с константами a, b и c и с параметром x , что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа n определить, имеет ли решение уравнение

$$W(a^n, x_1, \dots, x_{n+1}, a, b, c) = V(a^n, x_1, \dots, x_{n+1}, a, b, c) \&$$

$$\& x_{n+1} \in L.$$

В работе [48] доказывается алгоритмическая неразрешимость проблемы совместности для систем уравнений и неравенств в словах и длинах на свободной нециклической полугруппе Π_m .

В серии работ [15], [16] и [17] рассматривались системы уравнений в свободных полугруппах с эндоморфизмами и автоморфизмами. Эта тематика ведет свое начало от работ Уайтхэда по проблеме автоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы. В этих работах установлена алгоритмическая неразрешимость ряда проблем для систем уравнений в свободных полугруппах в словах, длинах и с эндоморфизмами и автоморфизмами.

В работе [10] установлена NP-полнота проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободной полугруппы счетного ранга.

4.3. Уравнения и их системы в группах

Изучение уравнений и их систем в свободных группах было начато в середине прошлого века прежде всего американскими математиками в связи с исследованиями по проблеме А. Тарского относительно элементарных теорий свободных групп. Важные результаты в этой области были получены Ю. И. Хмелевским.

В 1982 году Г. С. Маканин получил в теории уравнений в свободных группах фундаментальный результат – он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение. А. А. Разборов построил описание множества всех решений для произвольного разрешимого в свободной группе уравнения.

После фундаментальных результатов Г. С. Маканина особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных группах с различными “не слишком сложными” и “достаточно естественными” ограничениями на решения.

В серии работ [8], [19], [20], [21], [22] и [23] рассматривались ограничения на решения типа $x \in F_n^{(m)}$, где $F_n^{(m)}$ — m -ый коммутант свободной группы F_n .

Были доказаны, в частности, следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение*

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = 1$$

с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$, константами a и b и параметром x , что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(a^k, x_1, \dots, x_n, a, b) = 1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(1)}, \dots, x_t \in F_2^{(1)},$$

где t — некоторое фиксированное число между 1 и n .

ТЕОРЕМА 6. *В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое уравнение*

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = 1$$

с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$, константами a и b и параметром x , что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(a^k, x_1, \dots, x_n, a, b) = 1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(2)}.$$

ТЕОРЕМА 7. В свободной группе F_3 со свободными образующими a, b и c можно построить такое уравнение

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b, c) = 1$$

с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$, константами a, b и c и параметром x , что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(a^k, x_1, \dots, x_n, a, b, c) = 1,$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in P_3,$$

P_3 — подгруппа чистых или гладких элементов группы F_3 .

По аналогии с группами кос элемент свободной группы F_n мы называем *чистым* или *гладким* элементом, если при удалении из его записи любого образующего элемента группы F_n он обращается в единицу. Множество P_n всех гладких элементов свободной группы F_n является ее нормальной подгруппой, но бесконечного индекса. В связи с рассматриваемым вопросом интересны результаты, полученные А. Ш. Малхасяном.

В ряде работ рассматривались уравнения в свободных группах, разрешенные относительно неизвестных, т.е. уравнения вида $w(x_1, \dots, x_m) = g(a_1, \dots, a_n)$. При этом считалось, что проблема разрешимости для таких уравнений “проще”, чем проблема разрешимости для произвольных уравнений. Однако в [24] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. По произвольному уравнению

$$w(x_1, \dots, x_n, a, b) = 1 \tag{1}$$

в свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое разрешенное относительно неизвестных уравнение

$$u(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = [a, b], \tag{2}$$

где $u(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ — групповое слово в алфавите неизвестных $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$, а $[a, b]$ — коммутатор элементов a и b , т.е. $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, что уравнение (1) имеет решение в свободной группе F_2 тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение (2).

Это позволило доказать следующие теоремы [25], [26].

ТЕОРЕМА 9. В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое семейство разрешенных относительно неизвестных уравнений

$$w(x, x_1, \dots, x_n) = [a, b],$$

где $w(x, x_1, \dots, x_n)$ — групповое слово в алфавите неизвестных $x, x_1, x_2, \dots, x_n$, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(x^k, x_1, \dots, x_n) = [a, b],$$

удовлетворяющее условию

$$x_1 \in F_2^{(1)}, \dots, x_t \in F_2^{(1)},$$

где t — некоторое фиксированное число между 1 и n .

ТЕОРЕМА 10. *Невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению вида*

$$w(x_1, \dots, x_n) = [a, b]$$

в свободной группе F_2 определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \dots, g_n$, что

$$g_1 \in F_2^{(2)}.$$

ТЕОРЕМА 11. *Проблема разрешимости в свободной группе F_2 для уравнений вида $w(x_1, \dots, x_n) = [a, b]$, где $w(x_1, \dots, x_n)$ — слово в алфавите неизвестных, а $[a, b]$ — коммутатор свободных образующих a и b группы F_2 является NP -трудной.*

Используя предыдущие результаты, в работе [28] показывается, что коммутант свободной нециклической группы не является формульной подгруппой, что дает ответ на один вопрос А. И. Мальцева из "Коуровской тетради".

ТЕОРЕМА 12. *При любом $m \geq 2$ невозможно построить формулу $CF_m(x)$ языка первого порядка с равенством групповой сигнатуры, содержащей обозначения для групповой операции $\cdot$, обращения $^{-1}$ и константные символы для свободных образующих $a_1, \dots, a_m$, с одной свободной переменной x такую, что для произвольного элемента g свободной группы F_m справедлива эквивалентность:*

формула $CF_m(g)$ истинна на группе F_m тогда и только тогда, когда элемент g принадлежит коммутанту $F_m^{(1)}$ группы F_m .

Далее отметим еще один результат.

В работе Coulbois установлена финитная неаппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости произвольных уравнений. Ранее была известна финитная аппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости уравнений вида $x^n = g$, $[x, y] = g$ и $x^{-1}hx = g$, где g и h — элементы свободной группы, а x и y — неизвестные.

В работе [27] построено уравнение вида

$$w(x_1, \dots, x_6) = [a, b],$$

где a и b — свободные образующие свободной группы F_2 , которое не имеет решения в этой группе, но имеет решение в любой ее конечной факторгруппе.

В работе [29] установлена неразрешимость позитивной $\exists$ -теории произвольной нециклической свободной нильпотентной группы, в частности, свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и ранга 2. Этот результат можно рассматривать как уточнение известного результата А. И. Мальцева о неразрешимости элементарной теории произвольной нециклической свободной нильпотентной группы и как некоторое дополнение к результатам В. А. Романькова, установившего, в частности, алгоритмическую неразрешимость проблемы существования решения для уравнений, разрешенных относительно неизвестных, в свободных нильпотентных группах ступени нильпотентности ≥ 9 и достаточно большого ранга. В работе Н. Н. Репина установлена, в частности, алгоритмическая неразрешимость проблемы существования решения для уравнений в свободных нильпотентных группах ступени нильпотентности 5 и ранга 2. В то же время в работе [29] доказана алгоритмическая разрешимость проблемы существования решения для уравнений в свободной нильпотентной группе ступени нильпотентности 2 и ранга 2 и алгоритмическая неразрешимость проблемы существования решения для систем уравнений в этой группе. Эта группа может быть задана двумя образующими элементами и двумя определяющими соотношениями. Базируясь на результатах работы [29], Н. Н. Репин построил группу с тремя образующими элементами и двумя определяющими соотношениями,

для которой алгоритмически неразрешима проблема существования решения для уравнений. Дальнейшее продвижение в этих исследованиях в статье В. Э. Шпильрайна.

В работе [30] установлена алгоритмическая неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и достаточно большого ранга и алгоритмическая разрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 и ранга 2. Эти результаты можно рассматривать в качестве дополнения к результатам В. А. Романькова об алгоритмической неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободных нильпотентных групп ступени нильпотентности ≥ 9 и достаточно большого ранга.

Дальнейшее развитие этой тематики происходит в работе [31].

В [32] исследовано на свободной метабелевой группе ранга 2 уравнение

$$zxux^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$$

из работы А. И. Мальцева, рассматривавшего это уравнение на свободной группе ранга 2. В. Г. Дурнев называет это уравнение уравнением Мальцева–Нильсена. Показано, что для свободной метабелевой группы ранга 2 справедлива теорема, аналогичная теореме А. И. Мальцева для свободной группы:

элементы x и y свободной метабелевой группы со свободными образующими a и b являются ее свободными образующими тогда и только тогда разрешимо относительно z одно из уравнений $zxux^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ или $zxux^{-1}y^{-1}z^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$.

Это позволило В. Г. Дурневу в работе [33] доказать алгоритмическую неразрешимость позитивной $\exists$ -теории с одной константой $[a, b]$ свободной разрешимой группы, а значит и неразрешимость позитивной $\forall^2\exists^m$ -теории этой группы. Эти результаты можно рассматривать как уточнение известного результата А. И. Мальцева о неразрешимости элементарной теории свободной разрешимой неабелевой группы. Они дополняют результат В. А. Романьков об алгоритмической неразрешимости вопроса о существовании решений для уравнений в свободной метабелевой группе ранга 2, разрешенных относительно неизвестных.

4.4. Другие результаты

В монографии Р. Линдона и П. Шуппа дано описание абелевых подгрупп произвольных F -групп.

В работе [38] дано описание строения подгрупп с тождествами F -групп. А в работе [39] в качестве уточнения этого описания доказаны теоремы:

ТЕОРЕМА 13. *Для подгрупп фуксовых групп выполняется усиленный вариант альтернативы Титса:*

произвольная подгруппа H фуксовой группы либо является разрешимой ступени ≤ 3 или знакопеременной группой $A(5)$, либо H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.

ТЕОРЕМА 14. *На подгруппе H произвольной фуксовой группы G не выполняется нетривиальное тождество тогда и только тогда, когда H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.*

Дж. фон Нейман в связи с изучением парадокса Банаха–Тарского установил, что любая локально разрешимая группа аменабельна, а любая свободная нециклическая группа неаменабельна. Так как подгруппа аменабельной группы сама аменабельна, то любая группа, в которую вложима свободная группа ранга 2, неаменабельна. К этой работе Дж. фон Неймана

восходит гипотеза о справедливости обратного утверждения, т.е. об аменабельности любой группы, в которую не вложима свободная группа ранга 2.

Это приводит к понятию альтернатива фон Неймана для аменабельности для класса групп C : для класса групп C выполняется альтернатива фон Неймана для аменабельности, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение либо группа G аменабельна, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Первоначальная гипотеза Дж. фон Неймана может рассматриваться как альтернатива фон Неймана для аменабельности для класса всех групп. Альтернатива фон Неймана для аменабельности справедлива для класса всех подгрупп групп с одним определяющим соотношением и для класса всех подгрупп групп с условием малого сокращения.

В работе [42] устанавливается справедливость альтернативы фон Неймана для аменабельности для подгрупп F -групп: для произвольной подгруппы G любой F -группы справедливо утверждение: либо группа G аменабельна, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Н. Н. Репин показал, что в группах кос B_3 и B_4 , в отличие от симметрических групп, произведение двух коммутаторов может не быть коммутатором.

В работе [40] установлено, что коммутанты групп кос B_3 и B_4 , как и любая вербальная подгруппа этих групп имеют бесконечную ширину. При этом использовались работы Sacerdote G. S.

В. Г. Бардаков совершенно другими методами доказал бесконечность ширины любой вербальной подгруппы любой группы кос $B(n)$.

В ряде работ рассматривался вопрос о разложимости групп кос $B(n)$ в свободное произведение с объединением. В работе [41] нами исследован вопрос о разложимости в свободное произведение факторгрупп групп кос $B(n)$ и линейных групп $SL(n, Z)$ и $GL(n, Z)$.

В работах [42] и [43] установлена алгоритмическая неразрешимость некоторых, в том числе позитивных, фрагментов элементарной теории свободной нециклической группы в сигнатуре, расширенной функцией длины. Эти результаты усиливают результаты работы Huber-Dyson V. о неразрешимости элементарной теории свободной нециклической группы в сигнатуре, расширенной функцией длины и связаны с тематикой работы А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова.

5. Заключение

Валерий Георгиевич продолжает исследования алгоритмических вопросов алгебры и математической логики в Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова. Кроме того, его интересует применение алгебраических методов в криптографии (например, см. [50]). В настоящее время готовит к изданию учебное пособие "Методы комбинаторной теории групп в современной криптографии", включающее основной материал по комбинаторной теории групп, которая в настоящее время находит применение при разработке новых криптоалгоритмов и криптопротоколов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дурнев В. Г. О позитивных формулах на группах // Ученые записки матем. кафедр Тульского гос. пед. ин-та. Геометрия и алгебра. 1970. № 2. С. 215–241.
2. Дурнев В. Г. О позитивной теории свободной полугруппы // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула. 1972. С. 122–172.

3. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Т. 211, № 4. С. 772–774.
4. Дурнев В. Г. О позитивных формулах на свободных полугруппах // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 25, № 5. С. 1131–1137.
5. Дурнев В. Г. Позитивные теории свободных полугрупп: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГПИ. 1973.
6. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$ -теории свободной полугруппы // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36. № 5. С. 1067 – 1080.
7. Дурнев В. Г. Неразрешимость простого фрагмента позитивной теории с одной константой свободной полугруппы ранга 2 // Мат. заметки. 2000. Том 67, № 2. С. 191 – 200.
8. Дурнев В. Г. Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Мат. заметки. 1974. Т.16, № 5. С. 717–724.
9. Дурнев В. Г. К вопросу об уравнениях на свободных полугруппах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб. ЯрГУ. Ярославль. 1977. С. 57–59.
10. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободных полугруппах с ограничениями на решения // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.
11. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с языковыми ограничениями на решения в свободных моноидах // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции, посвященной памяти профессора А. Ю. Левина. ЯрГУ. Ярославль. 2008. С. 93–99.
12. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с ограничениями на решения в свободных полугруппах // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 358. С. 120–129.
13. Durnev V. G., Zetkina O. V. On equations in free semigroups with certain constraints tj their solutions // Journal of Mathematical Sciences. 2008. V. 158, № 5. Pp. 671–676.
14. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с подполугрупповыми ограничениями на решения в свободных полугруппах // Чебышевский сборник. 2010. Т. XI, вып. 3(35). С. 78–87.
15. Дурнев В. Г. Об уравнениях с эндоморфизмами в свободных полугруппах и группах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1991. С. 30–35.
16. Дурнев В. Г. Об уравнениях с эндоморфизмами в свободных полугруппах // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 2. С. 136–141.
17. Дурнев В. Г. Об уравнениях в словах и длинах с эндоморфизмами // Изв. ВУЗ'ов. Математика. 1992. № 8. С. 30–34.
18. Дурнев В. Г. NP-полнота проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободной полугруппы счетного ранга // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.
19. Дурнев В. Г. Об одном обобщении задачи 9.25 из “Коуровской тетради” // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 2. С. 15–19.

20. Дурнев В. Г. Об уравнениях с ограничениями на решения в свободных группах // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 1. С. 36–40.
21. Дурнев В. Г. Об уравнениях с подгрупповыми ограничениями на решения в свободных группах // Дискретная математика. 1995. Т. 7, № 4. С. 60–67.
22. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с подгрупповыми ограничениями на решения в свободных группах // Математика в Ярославском университете: сб. обзорных статей. К 30-летию математического факультета. ЯрГУ. Ярославль. 2006. С. 181–200.
23. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободной группе с ограничениями на решения // Чебышевский сборник. 2010. Т. XI, вып. 3(35). С. 88–97.
24. Дурнев В. Г. К проблеме разрешимости для уравнений с одним коэффициентом. // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 832–845.
25. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободных группах, разрешенных относительно неизвестных, с ограничениями на решения // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 63–80.
26. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. NP-трудность проблемы разрешимости для уравнений с простой правой частью в свободной группе // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 46–53.
27. Дурнев В. Г. Об уравнениях в свободных группах // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 59–62.
28. Дурнев В. Г. Об одном вопросе А. И. Мальцева из “Коуровской тетради” // Чебышевский сборник. 2012. Т. XIII, вып. 1(41). С. 54–58.
29. Дурнев В. Г. О системах уравнений на свободных нильпотентных группах // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1981. С. 66–69.
30. Дурнев В. Г. Неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1988. С. 56–63.
31. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О фрагментах элементарных теорий свободных нильпотентных групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 2003.
32. Дурнев В. Г. Об уравнении Мальцева–Нильсена на свободной метабелевой группе ранга 2 // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 57–60.
33. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\exists$ -теории с одной константой свободной разрешимой группы // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1992. С. 30–35.
34. Дурнев В. Г. О проблеме Тарского для свободных групп некоторых многообразий // Сб. “Вопросы теории групп и гомологической алгебры”. ЯрГУ. Ярославль. 1990. С. 25–35.
35. Дурнев В. Г., Казарин Л. С. Об универсальных теориях некоторых групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.

-
36. Дурнев В. Г. Неразрешимость некоторых ограниченных теорий групп $SL(n, Z)$ и $GL(n, Z)$ ($n \geq 3$) // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.
37. Дурнев В. Г. Об элементарных теориях целочисленных линейных групп // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1995. Т. 59, № 5. С. 41–58.
38. Дурнев В. Г. Подгруппы с тождествами некоторых F -групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1998.
39. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. Об альтернативе Титса для подгрупп F -групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. XV, вып. 1(49).
40. Дурнев В. Г. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4 // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция: тезисы докладов. Львов. 1987.
41. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О факторгруппах групп кос $B(n)$ и линейных групп $SL(n, Z)$ и $GL(n, Z)$ // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.
42. Дурнев В. Г. О формулах с функцией длины на свободной группе // Десятая Всесоюзная конференция по матем. логике: тезисы докладов. Ленинград. 1988. С. 56.
43. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. О позитивной теории свободной группы в сигнатуре, расширенной функцией длины // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1991. С. 25–29.
44. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Алгоритмически неразрешимые проблемы для диофантовых множеств в Π_2 // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб.. ЯрГУ. Ярославль. 1994.
45. Durnev V. Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups // Lecture Notes in Computer Science. 1997. Vol. 1234. Pp. 88–101.
46. Дурнев В. Г. Исследование некоторых алгоритмических проблем для свободных групп и полугрупп: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ. 1997.
47. Адян С. И., Дурнев В. Г. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 2. С. 3–94.
48. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. Об уравнениях и неравенствах в словах и длинах // Чебышевский сборник. 2016. Т. XVII, вып. 2(58). С. 137–145.
49. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И. Об аменабельных подгруппах F -групп // Чебышевский сборник. 2016. Т. XVII, вып. 2(50). С. 128–136.
50. Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И., Мурин Д. М. О coNP -полноте задачи "Инъективный рюкзак" // Прикладная дискретная математика. 2016. № 3(33). С. 85–92.
51. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Некоторые результаты, полученные в Ярославском отделении алгебраической школы М. Д. Гриндлингера // Чебышевский сборник. 2014. Т. XV, вып. 4(44). С. 5–31.

REFERENCES

1. Durnev, V. G. 1970, "On positive formulas on groups", *Proc. of Math. Dept. of Tula State Pedagogical Inst., Ser. Geometry and Algebra*. [Uchtnye Zapiski Matematicheskoy Kafedry Tul'skogo Pedagogicheskogo Instituta], no. 2. pp. 215–241. (Russian)
2. Durnev, V. G. 1972, "On positive theory of free semigroup", *Groups and semigroups, Tula*, pp. 122–172 (Russian).
3. Durnev, V. G. 1973, "Positive theory of free semigroup", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 211, no. 4. pp. 772–774. (Russian)
4. Durnev, V. G. 1974, "Positive formulas in free semigroups", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 15, issue 5, pp. 796–800 (Translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, vol. 15, no. 5, pp. 1131–1137) [doi: 10.1007/BF00966439]
5. Durnev, V. G. 1973, "Positive theories of free semigroups", Ph D. Thesis, *Moscow State Pedagogical Institution*. (Russian)
6. Durnev, V. G. 1995, "Undecidability of the positive $\forall\exists^3$ -theory of a free semigroup", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 36, no. 5. pp. 917–929 (Translated from: Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, vol. 36, no. 5, pp. 1067–1080)
7. Durnev, V. G. 2000, "Undecidability of a simple fragment of a positive theory with a single constant for a free semigroup of rank two", *Mathematical Notes*, vol. 67, no. 2, pp. 191–200. (Russian)
8. Durnev, V. G. 1974, "On equations in free semigroups and groups", *Mathematical Notes*, vol. 16, no. 5. pp. 717–724. (Russian)
9. Durnev, V. G. 1977, "On some equations on free semigroups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. pp. 57–59. (Russian)
10. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2003, "On equations in free semigroups with certain constraints on their solutions", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. (Russian)
11. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "Equations with language constraints to their solutions in free monoids", *Mathematics, cybernetics, informatics — Prof. A. Yu. Levin Memorial Conference. Yaroslavl' State University.*, pp. 93–99. (Russian)
12. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "On equations in free semigroups with certain constraints on their solutions", *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI (Proc. of St.-Petersburg branch of V. A. Steklov Math. Inst.), St.-Petersburg.*, vol. 358, pp. 120–129. (Russian)
13. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "On equations in free semigroups with certain constraints to their solutions", *Journal of Mathematical Sciences.*, vol. 158, no. 5, pp. 671–676. (Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Vol. 358, 2008, pp. 120–129)
14. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2010, "Equations with subsemigroup constraints to their solutions in free semigroups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XI, issue 3(35), pp. 78–87. (Russian)
15. Durnev, V. G. 1991, "On equations with endomorphisms in free semigroups and groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*, pp. 30–35. (Russian)

16. Durnev, V. G. 1992, "Equations with endomorphisms in free semigroups", *Diskret. Mat.*, vol. 4, no. 2, pp. 136–141. (Russian)
17. Durnev, V. G. 1992, "On equations in words and lengths with endomorphisms", *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, vol. 36, no. 8, pp. 26–30. (Russian)
18. Durnev, V. G. 2003, "NP-completeness of the problem of endomorphic reducibility for elements of a free semigroup of an countable rank", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. (Russian)
19. Durnev, V. G. 1990, "On one generalization of the Problem 9.25 from the "Kourovka notebook"", *Mathematical Notes.*, vol. 47, no. 2, pp. 117–121. (Translated from Matematicheskie Zametki. 1990. Vol. 47, no. 2. P. 15–19.)
20. Durnev, V. G. 1993, "Equations with constraints on the solution in free groups", *Mathematical Notes.*, vol. 53, no. 1, pp. 26–29. (Translated from Matematicheskie Zametki. Vol. 53, no. 1. P. 36–40.)
21. Durnev, V. G. 1995, "On equations with subgroup constraints on solutions in free groups", *Discrete Math. Appl.*, vol. 5, no. 6, pp. 567–575. (Translated from: Diskret. Mat. 1995. Vol. 7. no. 4, 60–67.)
22. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2006, "On equations with subgroup constraints on solutions in free groups", *Mathematics in Yaroslavl' University (30th anniversary of Math. Faculty). Yaroslavl'*, pp. 181–200. (Russian)
23. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2010, "On some equations with with constraints to their solutions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XI, issue 3(35), pp. 88–97. (Russian)
24. Durnev, V. G. 1996, "On the solvability problem for equations with a single coefficient", *Mathematical Notes.*, vol. 59, no. 6, pp. 601–610. (Translated from Matematicheskie Zametki, 1996. Vol. 59. no. 6. P. 832–845).
25. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2012, "On the equations resolved with respect to variables in free groups with constraints to the solutions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 63–80. (Russian)
26. Durnev V. G. & Zetkina, O. V. 2012, "NP-complexity of the decidability problem for the equations with right-hand-side in a free group", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 46–53. (Russian)
27. Durnev, V. G. 2012, "On equations in free groups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 59–62. (Russian)
28. Durnev, V. G. 2012, "On one A. I. Mal'cev's question from the "Kourovka notebook"", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XIII, issue 1(41), pp. 54–58. (Russian)
29. Durnev, V. G. 1981, "On systems of equations on free nilpotent groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*, pp. 66–69. (Russian)
30. Durnev, V. G. 1988, "Undecidability of endomorphic reducibility problem for sets of elements of a free nilpotent group", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*, pp. 56–63. (Russian)

31. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2003, "On fragments of elementary theories of free nilpotent groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. (Russian)
32. Durnev, V. G. 1989, "The Mal'tsev-Nielsen equation in a free metabelian group of rank two", *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.*, vol. 46, Issue 6, pp. 927–929. (Translated from *Matematicheskie Zametki*, vol. 46, No. 6, pp. 57–60, December, 1989)
33. Durnev, V. G. 1992, "Undecidability of a positive $\exists$ -theory with one constant for a free solvable group", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*, pp. 30–35. (Russian)
34. Durnev, V. G. 1990, "On Tarski problem for free groups of some manifolds", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*, pp. 25–35. (Russian)
35. Durnev, V. G. & Kazarin, L. S. 1994, "On universal theories of some groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. (Russian)
36. Durnev, V. G. 1994, "Undecidability of some bounded theories of групп $SL(n, Z)$ and $GL(n, Z)$ ($n \geq 3$) groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. (Russian)
37. Durnev, V. G. 1995, "On elementary theories of integer linear groups", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 59, no. 5, pp. 919–934.
38. Durnev, V. G. 1998, "Semigroups with identities of some F -groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. (Russian)
39. Durnev, V. G., Zetkina, O. V. & Zetkina, A. I. 2014, "On the Tits' alternative for subgroups of F -groups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, issue 1(49), pp. 110–120. (Russian)
40. Durnev, V. G. 1987, "On width of the commutant of B_3 и B_4 braid groups", *XIX USSR algebraic conference. Book of abstracts. L'vov*. (Russian)
41. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1994, "On factor-groups of $B(n)$ braids and linear $SL(n, Z)$ and $GL(n, Z)$ groups", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. (Russian)
42. Durnev, V. G. 1988, "On formulae with a length function on a free group", *10th USSR Conference on math. logics. Book of abstracts. Leningrad.*, pp. 56 (Russian)
43. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1991, "On a positive theory of a free group in a signature extended by a length function", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*, pp. 25–29. (Russian)
44. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 1994, "Algorithmically undecidable problems for Diophantine sets in Π_2 ", *Group Theory & Homological Algebra, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'*. (Russian)
45. Durnev, V. 1997, "Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups", *Lecture Notes in Computer Science.*, vol. 1234, pp. 88–101. (Russian)
46. Durnev, V. G. 1997, "Studying Algorithmic Problems for Free Semigroups and Groups": Dr. Sci. Thesis, *Moscow State University*. (Russian)

47. Adian, S. I. & Durnev, V. G. 2000, "Decision problems for groups and semigroups", *Russian Mathematical Surveys.*, vol. 55, no. 2, pp. 207. [doi: 10.1070/ RM2000v055n02ABEH000267]
48. Durnev, V. G., Zetkina, O. V. & Zetkina, A. I. 2016, "On equations and inequalities in words and word lengths", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XVII, issue 2(58), pp. 137–145. (Russian)
49. Durnev, V. G., Zetkina, O. V. & Zetkina, A. I. 2016, "On amenable subgroups of F -groups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XVII, issue 2(58), pp. 128–136. (Russian)
50. Durnev, V. G., Zetkina, O. V., Zetkina, A. I. & Murin, D. M. 2016, "About the coNP-complete "Injective knapsack" problem", *Prikl. Diskr. Mat.*, no. 3(33), pp. 85–92. (Russian)
51. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2014, "Some of the results obtained in the Yaroslavl branch algebraic school of M. D. Grindlinger", *Chebyshevskii Sb.*, vol. XV, issue 4(50), pp. 5–31. (Russian)

Получено 28.05.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 519.4

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-298-304

**80-ЛЕТИЕ ПРОФЕССОРА
ВЛАДИМИРА КОНСТАНТИНОВИЧА КАРТАШОВА**

В. А. Артамонов, И. Б. Кожухов, В. Н. Чубариков (г. Москва), Н. М. Добровольский,
Н. Н. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

Эта статья посвящена 80-летию видного специалиста по универсальной алгебре — Владимиру Константиновичу Карташову.

Дан обзор основных этапов профессионального становления и роста В. К. Карташова.

Проанализированы основные направления его фундаментальных математических и прикладных исследований.

Представлен список основных научных публикаций В. К. Карташова и тематика диссертаций, по которым В. К. Карташов был научным руководителем.

Ключевые слова: универсальные алгебры, теория унаров, Волгоградская школа универсальных алгебр.

Библиография: 32 названия.

**THE 80TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR
VLADIMIR KONSTANTINOVICH KARTASHOV**

V. A. Artamonov, I. B. Kozhukhov, V. N. Chubarikov (Moscow), N. M. Dobrovolsky,
N. N. Dobrovolsky (Tula)

Abstract

This article is dedicated to the 80th anniversary of a prominent specialist in universal algebra — Vladimir Konstantinovich Kartashov.

An overview of the main stages of professional formation and growth V. K. Kartashov.

Analyzed the main directions of fundamental and applied mathematical research.

The list of the main scientific publications of V. K. Kartashov and topics of theses, which V. K. Kartashov was the supervisor.

Keywords: universal algebra, the theory of monounary algebras, Volgograd school of universal algebras.

Bibliography: 32 titles.

1. Введение

7 июля 2017 г. исполняется 80 лет члену редакции «Чебышевский сборник», заведующему кафедрой алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского социально-педагогического университета, профессору Владимиру Константиновичу Карташову.

Карташов В. К. родился в Сталинградской области. В 1960 г. закончил физико-математический факультет Сталинградского педагогического института. Служил в Советской Армии



Рис. 33: В. К. Карташов

в авиационных частях. После окончания аспирантуры в 1965г. начал работать ассистентом, а затем старшим преподавателем на вновь созданной кафедре алгебры и геометрии. В 1980 году под руководством Л. А. Скорнякова (МГУ) и Д. М. Смирнова (Новосибирск) защитил кандидатскую диссертацию. В 1983г. получил звание доцента, а в 1999г. Карташов В. К. избран членом-корреспондентом Международной академии наук педагогического образования. В 2000г. ему присвоено ученое звание профессора.

В 1981 году В. К. Карташов возглавил кафедру алгебры и геометрии, в настоящее время — кафедра алгебры, геометрии и математического анализа.

В течение нескольких лет работал проректором Волгоградского педагогического университета.

Карташов В. К. является автором более 58 научных и методических работ в российских и зарубежных изданиях, в том числе 3 учебных пособия с грифом УМО. Им подготовлено несколько кандидатов наук. Среди его учеников заведующие кафедрами Волгоградского социально-педагогического университета.

2. Научная деятельность В. К. Карташова

Круг научных интересов В. К. Карташова связан с важным разделом универсальной алгебры — теорией унаров, то есть алгебр с одной унарной операцией. В кандидатской диссертации им получен замечательный результат о базисах квазитожеств квазимногообразий унаров. В дальнейшем им получены важные результаты о строении унаров и классов унаров с заданными свойствами решеток конгруэнций, а также конструкция мальцевских унаров.

Основные результаты относятся к теории квазимногообразий унаров. Доказано, что любой конечнопорожденный унар имеет независимый базис квазитожеств. При этом этот базис конечен тогда и только тогда, когда унар конечен.

Построен алгоритм нахождения независимого базиса квазитожеств любого конечнопорожденного унара. Установлено существование континуума квазимногообразий унаров, не имеющих независимого базиса квазитожеств. Описаны все атомы решетки $L(1)$ всех квазимногообразий унаров. Показано, что в решетку $L(1)$ вложима свободная алгебра счетного ранга.

Найдены критерии для того, чтобы решетка $L(M)$ всех квазимногообразий произвольного квазимногообразия M была дистрибутивной, полудистрибутивной, булевой, с дополнениями, с псевдодополнениями либо стоуновой. Доказано, что множество всех квазимногообразий унаров относительно умножения по правилу Мальцева является полугруппой. Описан центр этой полугруппы и найден базис тождеств с одной переменной, истинных на ней.

В дальнейшем им получены другие результаты о классах унарных алгебр с заданными



Рис. 34: В. К. Карташов на лекции

свойствами решеток конгруенций и строении алгебр, связанных с унарными алгебрами.

Среди них:

- теорема о конечной базисуемости любого многообразия коммутативных унарных алгебр конечной сигнатуры. Этот результат продолжает результат Г. Биркгофа о том, что любая конечная унарная алгебра имеет конечный базис тождеств;
- несколько необходимых условий дистрибутивности и модулярности решеток конгруенций унарных алгебр;
- доказано, что решетка всех подмножеств любого множества изоморфна решетке конгруенций некоторой связной коммутативной унарной алгебры.

В последнее время были получены интересные результаты об алгебрах многообразия $\mathbf{B}_{1,1}$. Это многообразие всех алгебр с двумя унарными операциями f, g определяемое тождеством,

$$fg(x) = x.$$

Ранее свойства конгруенций алгебр этого многообразия изучал его ученик А. П. Бощенко. В. К. Карташовым доказаны следующие теоремы:

1. Для любой сильно связной алгебры многообразия $\mathbf{B}_{1,1}$ имеет место равенство

$$\text{End } A = \text{Aut } A$$

(то есть каждый эндоморфизм алгебры A является автоморфизмом).

2. Многообразие $\mathbf{B}_{1,1}$ является покрытием многообразия $\mathbf{A}_{1,1}$ в решетке всех многообразий унарных алгебр с двумя унарными операциями.

Через $\mathbf{A}_{1,1}$ обозначается многообразие алгебр с двумя унарными операциями f, g , определяемое тождествами

$$fg(x) = x \quad \text{и} \quad gf(x) = x.$$

В работе [23] вводится понятие независимого множества элементов унарной алгебры как подмножества ее носителя, в котором каждый из любых двух элементов не принадлежит подалгебре, порожденной другим. Установлено, что любые две независимые системы порождающих унарной алгебры имеют одну и ту же мощность. С использованием этого утверждения доказано, что любая конечно порожденная унарная алгебра с коммутирующими между собой операциями обладает свойством Хопфа: каждый ее эпиморфизм является автоморфизмом.

3. Научно-организационная деятельность

В. К. Карташов проводит большую научно-организационную деятельность. Кафедра, возглавляемая В. К. Карташовым, имеет постоянные контакты с учеными МГУ имени М. В. Ломоносова, Института математики СО РАН, Саратовского государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого и других ведущих научных центров России. На кафедре длительное время работает научно-



Рис. 35: В. К. Карташов на научном семинаре

исследовательский семинар по проблеме «Алгебраические системы, связанные с унарными алгебрами». Семинар был основан Л. А. Скорняковым. В настоящее время им руководят В. А. Артамонов и В. К. Карташов. На этом семинаре неоднократно выступали такие известные математики, как Д. М. Смирнов, А. В. Михалев, В. Н. Латышев, В. Н. Чубариков, З. И. Борович, Л. Н. Шеврин, В. А. Горбунов, В. А. Молчанов и др.

Шесть участников семинара защитили кандидатские диссертации. На базе Волгоградского социально-педагогического университета совместно с кафедрой высшей алгебры МГУ имени М. В. Ломоносова проведены три международных семинара и две Международные конференции по направлению «Универсальная алгебра, теория чисел и их приложения».

4. Темы кандидатских диссертаций, защищенных участниками семинара «Алгебраические системы, связанные с унарными алгебрами»

1. Н. А. Щучкин защитил в 1992г. диссертацию по теме: "Условия конечности для нильпотентных алгебр." Научный руководитель — проф. В. А. Артамонов.

2. А. П. Бощенко защитил в 1998г. диссертацию по теме: "Решетки конгруэнций унарных алгебр." Научный руководитель — проф. В. К. Карташов.
3. А. В. Карташова защитила в 2001г. диссертацию по теме: "Решетки топологий унаров." Научный руководитель — проф. В. А. Артамонов.
4. П. Б. Жданович защитил в 2004г. диссертацию по теме: "Свободные абелевы расширения p -перестановочных алгебр." Научный руководитель — проф. В. А. Артамонов.
5. В. Л. Усольцев защитил в 2009г. диссертацию по теме: "Унары с тернарной мальцевской операцией." Научные руководители — проф. В. А. Артамонов, проф. В. К. Карташов.
6. А. Л. Расстригин защитил в 2014г. диссертацию по теме: "Формации унаров." Научный руководитель — проф. В. К. Карташов.

5. Заключение

Заслуги Владимира Константиновича в области образования высоко оценены руководством страны. Он награжден:

- Нагрудным значком «За отличные успехи в работе» (за заслуги в области высшего образования СССР) Министерство высшего и среднего специального образования СССР;
- Нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования России» № 1728 (Приказ № 16-47 от 07.07.98г.);
- Орден Дружбы за № 6702 (удостоверение за № 389214). Указ Президента Российской Федерации за № 623 от 19.06.2002г.

Волгоградский педагогический университет, в котором юбиляр работает уже более 50 лет, отметил заслуги в области высшего образования Знаком ВГСПУ «За заслуги» II и III степени, многими грамотами. Кроме того, решением Ученого совета ему присвоено звание «Почетный профессор ВГСПУ».

Волгоградская областная и городская Администрации неоднократно награждали Владимира Константиновича Почетными грамотами.

Необходимо отметить, что Владимир Константинович воспитал свою дочь Анну Владимировну, которая стала известным математиком, успешно защитила кандидатскую и работает доцентом в университете, продолжая дело отца.

Поздравляем Владимира Константиновича Карташова с днем рождения, желаем ему здоровья и успехов!

Список основных публикаций В. К. Карташова

- [1] Карташов В. К. О конечности базиса квазитождеств конечного унара // Вестник МГУ, серия Математика-механика, 1978. №4. С. 120.
- [2] Карташов В. К. О решетках квазимногообразий унаров // Вестник МГУ, серия Математика-механика, 1979. №4. С. 120.
- [3] Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Матем. заметки, 1980. Т. 27, №1. С. 7–20.
- [4] Карташов В. К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика, 1980. Т. 19, №2. С. 173–193.

- [5] Карташов В. К. Дополнения и псевдодополнения в решетках квазимногообразий унаров. // IV Всесоюзный колоквиум по теории колец, алгебра и модулей. Тезисы сообщений Кишинев, 17–19. -9. 1980. С. 45–46.
- [6] Карташов В. К. О полугруппе квазимногообразий унаров // Вестник МГУ, серия Математика-механика, 1981. №6. С. 106.
- [7] Карташов В. К. Полугруппа квазимногообразий унаров // Тезисы XVI Всесоюзной Алгебраической конференции, Ленинград, 1981, ч.2. С. 69–70.
- [8] Карташов В. К., Егорова Д. П., Скорняков Л. А. О многообразии гетерогенных унаров // В сборнике Алгебраические системы. ИвГУ, 1981. С. 122–133.
- [9] Карташов В. К. Строение решеток квазимногообразий унаров // Вестник МГУ, серия Математика-механика, 1984. №2. С. 93.
- [10] Карташов В. К. О решетках квазимногообразий унаров // Сибирский математический журнал, 1985. Т. 26, №3. С. 49–62.
- [11] Карташов В. К. Полугруппы квазимногообразий унаров // Тезисы международной Конференции по алгебре. Новосибирск, 1989. С. 62.
- [12] Карташов В. К. Характеризация решетки квазимногообразий алгебр // В межвузовском сборнике “Алгебраические системы”, Волгоград, 1989. С. 37–45.
- [13] Карташов В. К., Макаронов С. Н. Квазимногообразия унаров с нулем // В межвузовском сборнике “Алгебраические системы”, Волгоград, 1989. С. 139–145.
- [14] Карташов В. К. Некоторые результаты исследований квазимногообразий унаров // Сборник статей “Сближение культур”, Волгоград, Перемена, 1997. С. 139–145.
- [15] Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Тезисы докладов Международного семинара, посвященного памяти Л. А. Скорнякова, Волгоград, Перемена, 1999. С. 31–32.
- [16] Карташов В. К. Строение дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров // Сб. трудов междунар. алгебраич. семинара, посвящ. памяти Л. А. Скорнякова “Универсальная алгебра и ее приложения”, 2000. С. 90–99.
- [17] Карташов В. К. О группоидах квазимногообразий унарных алгебр // Сб. трудов междунар. алгебраич. семинара, посвящ. памяти Л. А. Скорнякова “Универсальная алгебра и ее приложения”, 2000. С. 100–113.
- [18] Карташов В. К. О конечности базиса тождеств любого многообразия коммутативных унарных алгебр // Сборник тезисов Алгебраической конференции памяти З. И. Боревица. Санкт-Петербург, 2002.
- [19] Карташов В. К. Лемма о замене и свойство Хопфа для унарных алгебр // Международная конференция, посвященная 250-летию МГУ. Тезисы докладов. Изд. МГУ, 2004. С. 64–65.
- [20] Карташов В. К. О базисах тождеств и квазитожеств коммутативных унарных алгебр // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша Тезисы докладов. Москва, 2008. С. 119.
- [21] Карташов В. К. Некоторые результаты и открытые вопросы в теории унарных алгебр // Соврем. проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Тезисы докладов Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В. В. Вагнера. Саратов, Россия, 5–7 ноября 2008 года. Изд-во Саратовского университета. С. 111–112.
- [22] Карташов В. К. Independent systems of generators and the Hopf property for unary algebras // Discrete Mathematics and Applications, Volume 18, Issue 6. P. 625–630.
- [23] Карташов В. К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр // Дискрет. матем., 2008. Т. 20, вып. 4. С. 79–84.

- [24] Карташов В. К. О конечной базирюемости многообразий коммутативных унарных алгебр // *Фундамент. и прикладная математика*, 2008. Т. 14, вып. 6. С. 85–89.
- [25] Карташов В. К. О некоторых результатах и нерешенных задачах теории унарных алгебр // *Чебышевский сборник*. 2011. Т. XII, вып. 2(38). С. 18–27.
- [26] Карташов В. К., Карташова А. В. Об универсальных хорновых классах унарных алгебр // *Журнал «Ученые записки» Орловского государственн. университета*, 2012. № 6, часть II. С. 99–106.
- [27] Карташов В. К. Карташова А. В. Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр // *Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13, вып. 4, часть 2. С. 52–57.
- [28] Карташов В. К. Тожества и квазитожества унарных алгебр // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения». Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. (Тула, 25–30 мая 2015г.). РФФИ, Тула. С. 114–116.
- [29] Kartashov V. K. On Algebras of the Variety $B1,1$ // *Lobachevski Journal of Mathematics*, 2017. Vol. p8, № 4. P. 660–663.
- [30] Карташов В. К., Меркулов А. М. Линейные неравенства и линейное программирование (учебное пособие для студентов пединститутов) // ВГПИ, 1978. 78с.
- [31] Карташов В. К. Линейные неравенства и линейное программирование (учебное пособие для студентов пединститутов, издание второе) // Волгоград, «Перемена», 1997. 125с.
- [32] Карташов В. К. Вводный курс математики (учебное пособие для студентов пединститутов) // Волгоград, «Перемена», 1999. 130с.

Редакция журнала Чебышевский сборник,

Кафедра высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Получено 14.05.2017 г.

Принято в печать 14.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-305-314

**О математических исследованиях В. Н. Кузнецова
(к 70-летию со дня рождения)**

В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский (г. Москва), Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва,
Н. Н. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

Эта статья посвящена 70-летию видного специалиста по аналитической теории чисел — Валентину Николаевичу Кузнецову.

Дан обзор основных этапов профессионального становления и роста В. Н. Кузнецова.

Проанализированы основные направления его фундаментальных математических и прикладных исследований.

Представлен список основных научных публикаций В. Н. Кузнецова и тематика диссертаций, по которым В. Н. Кузнецов был научным руководителем.

Ключевые слова: В. Н. Кузнецов, аналитическая теория чисел, ряды Дирихле, L -функции Дирихле, ряды Дирихле с конечнозначными коэффициентами.

Библиография: 59 названий.

**On mathematical research V. N. Kuznetsova
(On the occasion of his 70th birthday)**

V. N. Chubarikov, V. G. Chirskii (Moscow), N. M. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova,
N. N. Dobrovolsky (Tula)

Abstract

This article is dedicated to the 70th anniversary of a prominent specialist in the analytic theory of numbers — Valentin Nikolaevich Kuznetsov.

An overview of the main stages of professional formation and growth V. N. Kuznetsova.

Analyzed the main directions of fundamental and applied mathematical research.

The list of the main scientific publications of V. N. Kuznetsova and topics of theses, for which V. N. Kuznetsov was the supervisor.

Keywords: V. N. Kuznetsov, nanalytic number theory, Dirichlet series, L -functions of Dirichlet, Dirichlet series with coefficients konechnostei

Bibliography: 59 titles.

1. Введение

Кузнецов Валентин Николаевич родился 1 июня 1947 года в селе Росташа Саратовской области. В 1949 году семья переехала в Саратов. Его любовь к точным наукам, а особенно к математике, проявилась в школе достаточно рано. Он участвует в работе математического



Рис. 36: В. Н. Кузнецов

кружка при механико-математическом факультете СГУ, побеждает в областных математических олимпиадах. В 1961 году он, ученик 7-ого класса, поступает в Юношескую математическую школу при СГУ, где на протяжении трех лет юных слушателей знакомят с актуальными проблемами и направлениями математики ведущие ученые и преподаватели мех-мата.

В 1965 году Валентин Николаевич окончил среднюю школу и поступил на механико-математический факультет Саратовского университета.

В студенческие годы, выбрав специализацию по кафедре алгебры и теории чисел, Валентин становится активным участником кафедрального научного семинара, много времени уделяет самостоятельному изучению математической литературы.

Окончив университет в 1970 году, Валентин Николаевич поступает в аспирантуру при кафедре алгебры и теории чисел. Его самостоятельные исследования непосредственно связаны с гипотезой А. Вейля о нулях дзета-функций неособых проективных многообразий над конечными полями. Применение аппарата теории характеров и теории пучков в полях алгебраических функций позволило ему получить значимые результаты, связанные с построением дзета-функции Артин-Шрайеровых накрытий и оценками кратных тригонометрических сумм над конечными полями. Но в 1975 году французский математик П. Делинь получает окончательное решение гипотезы А. Вейля, и для Валентина Николаевича это подводит итог в исследованиях в данном направлении.

После аспирантуры В. Н. Кузнецов был распределен в Саратовский политехнический институт (позднее переименован в Саратовский государственный технический университет) на кафедру высшей математики.

2. В. Н. Кузнецов ученик Н. Г. Чудакова

С 1975 года Валентин Николаевич начинает исследования в области аналитической теории чисел. На такой выбор научной тематики решающее влияние оказала серия докладов

о современных проблемах аналитической теории чисел, сделанных Николаем Григорьевичем Чудаковым на научном семинаре кафедры алгебры и теории чисел СГУ в период 1974 – 75 гг. К этому времени Николай Григорьевич Чудаков — ученый, которому принадлежит ряд выдающихся результатов в аналитической теории чисел, основатель Саратовской школы теории чисел — окончательно переехал в Саратов и возглавил кафедру алгебры и теории чисел СГУ.

Валентин Николаевич начинает заниматься вопросами аналитического продолжения рядов Дирихле с целью найти аналитические свойства L -функций Дирихле, характерные только для L -функций Дирихле в классе эйлеровых произведений с конечнозначными коэффициентами.

Полученная Валентином Николаевичем в конце 70-х годов такая аналитическая характеристика L -функций Дирихле определила совершенно новый подход к решению известной проблемы Н. Г. Чудакова об обобщенных характерах. Было показано, что в классе эйлеровых произведений с конечнозначными коэффициентами L -функции Дирихле определяются как мероморфные функции с единственным возможным простым полюсом в точке единица, модули которых удовлетворяют определенным условиям роста.

В основе доказательства лежит изучение взаимосвязи возможности аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами и поведением соответствующего степенного ряда при подходе к единице вдоль вещественной оси. В дальнейшем эти идеи получили свое развитие.

Николай Григорьевич Чудаков заинтересовался этими результатами и предложил Валентину Николаевичу положить их в основу кандидатской диссертации. В 1983 году в институте математики АН БССР В. Н. Кузнецов защитил кандидатскую диссертацию "Об аналитических свойствах рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами".

Далее Валентин Николаевич продолжает заниматься задачей аналитического продолжения рядов Дирихле. Как развитие идей, заложенных в кандидатской диссертации, в его работах этого периода изучается взаимосвязь между возможностью аналитического продолжения рядов Дирихле и граничным поведением степенных рядов теперь уже в классе рядов Дирихле с произвольными коэффициентами. Такой метод исследования вопросов аналитического продолжения рядов Дирихле был назван методом редукции к степенным рядам.

Применяя метод редукции к степенным рядам, Валентин Николаевич получает результаты о граничном поведении степенных рядов, определяемых произведениями L -функций Дирихле с числовыми характерами, и о целостности композита двух L -функций Дирихле с взаимно простыми модулями характеров. Эти результаты оказались весьма важными, т.к. они позволили В. Н. Кузнецову определиться с основными подходами к решению таких известных задач теории L -функций, как гипотеза Н. Г. Чудакова об обобщенных характерах и задаче Ю. В. Линника о целостности скалярного произведения L -функций числовых полей.

3. Работы В. Н. Кузнецова по механике

Работая в техническом вузе, Валентин Николаевич так или иначе сталкивается с прикладными задачами в различных областях, в том числе и в строительной механике. И с 1995 года параллельно с исследованиями по теории чисел он занимается математическим обоснованием применения численных методов при расчете оболочечных конструкций, а также поиском и реализацией новых подходов к исследованию решений нелинейных моделей механики. Эту работу поддержал и считал весьма актуальной известный ученый в области строительной механики, профессор В. В. Петров. В направлении решения обозначенных задач В. Н. Кузнецовым получены следующие основные результаты:

- для геометрически нелинейных оболочек доказана сходимости в пространстве Соболева известного метода В. В. Петрова — метода последовательного возмущения параметров;

- разработан новый метод исследования решений нелинейных моделей, названный методом линейной аппроксимации по отдельным параметрам, который сводит задачи единственности и гладкости решения нелинейной модели к соответствующим задачам для решений последовательности линейных операторных уравнений определенного вида;
- получены эффективные приложения метода линейной аппроксимации по отдельным параметрам к ряду задач теории оболочек, в частности, к задаче устойчивости оболочечных конструкций.

Эти результаты явились основой докторской диссертации В. Н. Кузнецова «Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций», которую он защитил в 2000 году в диссертационном совете СГТУ по специальности «строительная механика».

Далее в этом направлении Валентин Николаевич занимается вопросами, связанными с численным расчетом строительных конструкций. Здесь им получена простая численная схема, значительно улучшающая сходимость метода последовательного возмущения параметров; разработана новая численная схема, не базирующаяся на известных численных методах, позволяющая определять «слабые» точки оболочечных конструкций при внешних воздействиях, а также критические значения параметров внешних воздействий.

4. Исследования В. Н. Кузнецова и его учеников по теории чисел

В 2001 году В. Н. Кузнецов приходит работать в СГУ заведующим кафедрой алгебры и теории чисел. Он открывает аспирантуру, на кафедру приходят молодые преподаватели.

В научном плане Валентин Николаевич продолжает заниматься такими известными задачами теории L-функций, как проблема обобщенных характеров Н. Г. Чудакова, проблема целостности скалярного произведения L-функций Дирихле числовых полей Ю. В. Линника, проблема взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана и другими задачами. Здесь в основе исследований лежат разработанные им аналитические подходы и методы. Идеи и методы В. Н. Кузнецова явились основой и диссертационных работ его учеников.

Приведем только отдельные результаты, полученные в направлении решения известных задач теории L-функций:

- доказана целостность скалярного произведения двух L-функций числовых полей в случае взаимной простоты модулей характеров и в случае разложения L-функций числовых полей в произведение классических L-функций с числовыми характерами; в основе доказательства лежит полученное обобщение известной теоремы Адамара об умножении особенностей на случай степенных рядов, определяемых произведением конечного числа классических L-функций;
- развитие метода редукции к степенным рядам позволило доказать аналитическую непродолжимость за единичный круг степенных рядов, отвечающих L-функциям Дирихле числовых полей, отличных от поля рациональных чисел, а также степенных рядов, коэффициенты которых определяются функциями Мёбиуса и Эйлера;
- показано, что функциональное уравнение римановского типа в классе рядов Дирихле с мультипликативными конечнозначными коэффициентами однозначно, с точностью до постоянного множителя, определяет L-функцию Дирихле, а без условия мультипликативности существует бесконечно много рядов Дирихле, удовлетворяющих данному функциональному уравнению;

- доказано, что при некотором ограничении на поведение сумматорной функции, связанной с функцией Мангольда, при выполнении гипотезы Римана о нулях дзета-функции нетривиальные нули L-функции Дирихле, не лежащие на критической прямой, являются нулями любой целой функции, определенной рядом Дирихле с периодическими коэффициентами;
- получено аналитическое доказательство гипотезы Н. Г. Чудакова в случае главных обобщенных характеров;
- разработан новый, так называемый аппроксимационный подход к решению задач теории L-функций; этот подход основан на приближении в критической полосе функций, определяемых рядами Дирихле, полиномами Дирихле и позволяет переносить отдельные аналитические свойства полиномов Дирихле на ряды Дирихле. Применение аппроксимационного подхода к ряду задач теории L-функций позволило получить результаты в направлении их решения:
- доказано существование для L-функций Дирихле последовательности полиномов Дирихле, приближающих L-функцию с показательной скоростью в любом прямоугольнике, лежащем в критической полосе. Это не только позволило быстро вычислять нули L-функций Дирихле, но и получать результаты о поведении L-функций в критической полосе, в частности, иначе доказать теоремы о плотности нулей;
- показано, что для рядов Дирихле, коэффициенты которых определяются обобщенными характерами, существует последовательность полиномов Дирихле, сходящаяся в критической полосе к функциям, определенным рядами Дирихле, что обеспечивает регулярность этих функций в точках мнимой оси. Показано, что этот факт уже напрямую связан с окончательным решением проблемы обобщенных характеров.

5. Заключение

В. Н. Кузнецов имеет более 90 научных публикаций. Восемь его учеников защитили кандидатские диссертации, из них шесть — по теории чисел. Валентин Николаевич явился инициатором и непосредственным участником проведения в Саратове в разные годы Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения».

В исследованиях по теории чисел В. Н. Кузнецов фактически продолжает тематику Н. Г. Чудакова, но предлагает свои подходы и методы и таким образом продолжает и развивает традиции Саратовской школы теории чисел.

Авторы от души поздравляют Валентина Николаевича Кузнецова со славным юбилеем и желают ему здоровья и дальнейших творческих успехов!

Темы диссертаций:

1. Водолазов А. М. "Аппроксимационный подход к проблеме обобщенных характеров— диссертация на соискание степени к. ф.-м.н., МПГУ, 2003.
2. Сецинская Е. В. "Граничное поведение степенных рядов, отвечающих L-функциям числовых полей— диссертация на соискание степени к. ф.-м.н., МПГУ, 2005.
3. Кривобок В. В. "Некоторые вопросы целостности L-функций числовых полей— диссертация на соискание степени к. ф.-м.н., УлГУ, 2007.

4. Коротков А. Е. "Некоторые приложения метода редукции к степенным рядам в задачах теории чисел— диссертация на соискание степени к. ф.-м.н., УлГУ, 2013.
5. Матвеева О. А. "Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле— диссертация на соискание степени к. ф.-м.н., УлГУ, 2014.
6. Матвеев В. А. "Аналитические свойства Эйлеровых произведений и некоторые задачи теории чисел— диссертация на соискание степени к. ф.-м.н., ЯрГУ, 2015.

Список основных публикаций В. Н. Кузнецова

- [1] Кузнецов В. Н. К гипотезе Бомбьери. // Исследования по теории чисел. — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1976, Вып. 6, С. 25–32
- [2] Кузнецов В. Н. К вопросу оценки двумерных тринометрических сумм. // Исследования по теории чисел. — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1975, Вып. 7, С. 92–100
- [3] Кузнецов В. Н. Об L-функциях одного класса Артин-Швайцеровых накрытий. // Исследования по современной алгебре. — Свердловск: изд-во Уральского ун-та, 1976
- [4] Кузнецов В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле. // Дифференциальные уравнения и теория функций. — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1981, С. 48–52
- [5] Кузнецов В. Н. Об аналитических свойствах рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами. // Диссертация на соискание уч. степени к. ф.-м. н. — Саратов, 1983
- [6] Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сёге для одного класса рядов Дирихле. // Математические заметки, Т. 36, Вып. 6, 1984, С. 805–813
- [7] Кузнецов В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1987, Т. 1, С. 17–23
- [8] Кузнецов В. Н. О граничных свойствах степенных рядов с конечнозначными коэффициентами // Диф. уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1987, С. 9–15
- [9] Кузнецов В. Н. К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции. // Теория функций и приближений. Труды 3-ей Сарат. зимней школы. — Саратов: Изд-во СГУ, 1988, Ч. 2, С. 29–31
- [10] Кузнецов В. Н. К одной гипотезе Ю. В. Линника. // Дифференциальные уравнения и теория функций. — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1988, С. 82–90
- [11] Кузнецов В. Н. К задаче описания одного класса рядов Дирихле, определяющих целые функции. // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1988, Ч. 1, С. 63–72
- [12] Кузнецов В. Н. Метод редукции к степенным рядам в задаче о целостности композита рядов Дирихле. // Теория функций и приближений. Труды 4-ой Сарат. зимней школы. — Саратов: Изд-во СГУ, 1989, Ч. 1, С. 147–149
- [13] Кузнецов В. Н. К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции. Дифференциальные уравнения и теория функций. Межвуз. науч. сб. — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, вып. 9, 1991, С. 23–29
- [14] Крысько В. А., Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А. Эквивалентные операторы и вопросы сходимости проекционных методов для уравнений нелинейной механики. // Труды VI Международной конференции по математическому моделированию и краевым задачам. — Самара, 1996, Ч. 1, с. 51–53

- [15] Крысько В. А., Кузнецов В. Н., Полякова С. В. Операторные методы в геометрически нелинейной задаче статической устойчивости пластин и оболочек. // Известия высш. уч. завед. Математика. 1998, №2, с. 40–46
- [16] Крысько В. А., Кузнецов В. Н., Комаров С. А., Полякова С. В. К вопросу обоснования метода В. И. Феодосьева для гибких оболочек. // Тезисы XVIII Международной конференции по теории оболочек и пластин. — Саратов, 1997, Т. 3, С. 130–135
- [17] Кузнецов В. Н. Метод последовательного возмущения параметров в приложении к задачам о гладкости решений и скорости сходимости метода Бубнова-Галёркина для нелинейных уравнений механики. // Труды международной конференции по современным проблемам механики конструкций. — Саратов, 2000. С. 27–32
- [18] Кузнецов В. Н. Метод последовательного возмущения параметров и задача устойчивости нелинейных уравнений в механике. // Труды международной конференции по современным проблемам механики конструкций. — Саратов, 2000. С. 32–36
- [19] Кузнецов В. Н. Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций. // Диссертация на соискание ученой степени доктора технич. наук. — Саратов, 2000
- [20] Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V. Methods of operators in non-linear mechanics. // Euromech colloquium. — Saratov, 2002. P. 21–22
- [21] Кузнецов В. Н. К задаче о целостности L-функций числовых полей. // Математика. Механика. Сб. науч. трудов. — Саратов, Изд-во СГУ, 2002. Вып. 4, С. 75–77
- [22] Кузнецов В. Н., Пшенов Д. А., Чумакова С. В. Аналог метода В. И. Федосеева для одного класса краевых задач. // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред. Межвуз. сб. науч. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2003. С. 16–30
- [23] Кузнецов В. Н., Водолазов А. М. К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2003. Вып. 1, С. 43–59
- [24] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В., Шабанов Л. Е. Операторный подход в задаче статической потери устойчивости оболочечных конструкций. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2003. Вып. 1, С. 59–70
- [25] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. Операторные методы в нелинейной механике. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2003. Вып. 1, С. 70–80
- [26] Кузнецов В. Н., Водолазов А. М., Сорокина Е. В. Метод редукции к степенным рядам и некоторые вопросы L-функций числовых полей. // Чебышевский сборник, Т. IV, Вып. 2(6). Труды V Междунар. конференции по алгебре и теории чисел. — Тула, изд-во Тульского гос. пед. ун-та, 2003. С. 73–79
- [27] Кузнецов В. Н., Водолазов А. М. Об одном критерии периодичности конечнозначной, вполне мультипликативной функции натурального аргумента. // Математика. Механика. Сборник научных трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2002, с. 11–13
- [28] Кузнецов В. Н., Сорокина Е. В. Продолжимость целым образом на комплексную плоскость скалярного произведения L-рядов Дирихле числовых полей. // Математика. Механика. Сборник научных трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2002, с. 48–50
- [29] Кузнецов В. Н., Водолазов А. М. Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2003. Вып. 2, С. 3–11
- [30] Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. О граничном поведении степенных

рядов, отвечающих L-функциям числовых полей. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2003. Вып. 2, С. 11–15

[31] Кузнецов В. Н., Водолазов А. М. Распределение значений обобщенных характеров и гипотеза Н. Г. Чудакова. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2003. Вып. 2, С. 56–64

[32] Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В. К задаче о разложении в произведение L-функций числовых полей. // Чебышевский сборник. Труды VI Междунар. конференции по алгебре и теории чисел. — Тула, изд-во Тульского гос. пед. ун-та, 2004. Т. 5, Вып. 3. С. 73–81

[33] Кузнецов В. Н., Водолазов А. М., Сецинская Е. В. К одной задаче В. Г. Спринджук. // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Труды VI Междунар. конференции. — Саратов, изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 36–38.

[34] Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В. О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2005. Вып. 3, С. 72–82

[35] Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. О граничных свойствах одного класса степенных рядов. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2005. Вып. 3, С. 72–82

[36] Кузнецов В. Н., Кривобок В. В., Сецинская Е. В. О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2005. Вып. 3, С. 47–58

[37] Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В. Об одном обобщении теоремы Адамара об умножении особенностей. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2007. Вып. 4, С. 60–69

[38] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Кривобок В. В., Сецинская Е. В. О рядах Дирихле, определяющих целые функции с определенным порядком роста модуля. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2007. Вып. 4, С. 69–76

[39] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Кривобок В. В. Об аналитической непродолжимости за границу сходимости степенных рядов, отвечающих L-функциям Дирихле числовых полей. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2009. Вып. 5, С. 31–36

[40] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Кривобок В. В. Об аналитических свойствах функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2009. Вып. 5, С. 36–41

[41] Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В. Обобщенные суммы Гаусса и гипотеза Н. Г. Чудакова. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2009. Вып. 5, С. 41–44

[42] Кузнецов В. Н., Коротков Д. Е., Степаненко Д. С. К вопросу о трансцендентности значений рядов Дирихле с периодическими коэффициентами, удовлетворяющих функциональному уравнению римановского типа в точках $S=2k$, $k=1,2,3,\dots$ // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2009. Вып. 5, С. 44–47

[43] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Коротков А. Е., Ермоленко А. А. Аппроксимаци-

онный подход в задаче о трансцендентности значений L-функций Дирихле в алгебраических точках на положительной полуоси. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2009. Вып. 5, С. 47–52

[44] Кузнецов В. Н., Кривобок В. В., Полякова О. А. К оценке сумматорных функций для характеров Дирихле числовых полей. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2010. Вып. 6, С. 50–54

[45] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Полякова О. А. О некоторых условиях периодичности конечнозначных мультипликативных функций. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2010. Вып. 6, С. 55–61

[46] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. О численной реализации метода последовательных нагружений при расчете геометрически нелинейных оболочек. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. — Саратов, изд-во СГУ, 2010. Вып. 6, С. 37–42

[47] Кузнецов В. Н., Полякова О. А. Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами. // Чебышевский сборник. — Тула, из-во ТПГУ, 2010. Т. XI, Вып. 1 (33), С. 188–199

[48] Кузнецов В. Н., Полякова О. А. О нулях функций, определяемых рядами Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами. // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тезисы докладов VIII Международной конференции, посвященной 190-летию П. Л. Чебышева и 120-летию И. М. Виноградова. — Саратов, изд-во СГУ, 2011, С. 38–40

[49] Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Некоторые задачи, связанные с распределением нулей целых функций, определенных рядами Дирихле с конечнозначными коэффициентами. // Чебышевский сборник. Труды VIII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной 190-летию П. Л. Чебышева и 120-летию И. М. Виноградова. — Тула, из-во ТПГУ, 2010. Т. XII, Вып. 2 (38), С. 54–60

[50] Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К вопросу описания рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана. // Известия Сарат. ун-та, Новая серия, серия: Математика. Механика. Информатика — Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 2011. Т. 11, Вып. 3, С. 21–25

[51] Кузнецов В. Н., Матвеева О. А., Кривобок В. В., Сецинская Е. В. О рядах Дирихле, определяющих мероморфные функции с определенным порядком роста модуля. // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. Саратов, изд-во СГУ, 2012. Вып. 7, С. 58–68

[53] Кузнецов В. Н., Кривобок В. В., Сецинская Е. В. Избранные вопросы теории L-функций числовых полей. // Монография. — Саратов, изд-во Сарат. ун-та, 2012

[52] Кузнецов В. Н., Кривобок В. В., Степаненко Д. С. К задаче о целостности L-функции Артина. // Известия Сарат. ун-та, Новая серия, серия: Математика. Механика. Информатика — Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 2013. Т. 13, Вып. 4, Ч. 1, С. 23–27

[54] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Матвеев В. А., Чумакова С. В. Операторный подход в задаче определения точек локальной потери устойчивости для геометрически нелинейных оболочек. // Наука: 21 век, 2015, №1, 2, С. 121–136

[55] Кузнецов В. Н., Матвеев В. А. К задаче численного определения нетривиальных нулей L-функций Дирихле числовых полей. // Чебышевский сборник. — Тула, из-во ТПГУ, 2015. Т. 16, Вып. 2, С. 144–155

[56] Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Бессонов Л. В. Ограниченные полугруппы операторов

и вопросы сходимости метода Бубнова-Галёркина для одного класса нелинейных уравнений пологих оболочек. // Чебышевский сборник. — Тула, из-во ТПГУ, 2016. Т. 17, Вып. 4, С. 110–123

[57] Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле. // Чебышевский сборник. — Тула, из-во ТПГУ, 2016. Т. 17, Вып. 2, С. 162–169

[58] Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами. // Чебышевский сборник. — Тула, из-во ТПГУ, 2016. Т. 17, Вып. 3, С. 115–124

[59] Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационный подход в некоторых задачах теории рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами. // Чебышевский сборник. — Тула, из-во ТПГУ, 2016. Т. 17, Вып. 4, С. 124–131

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Московский педагогический государственный университет

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Тульский государственный университет

Получено 20.05.2016 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-315-330

**БОРИС ВЕНИАМИНОВИЧ ЛЕВИН
К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ**

А. В. Шутов, В. Г. Журавлев, А. С. Балджи, М. Б. Хрипунова, (г. Владимир)

Аннотация

Данная работа посвящена 90-летию со дня рождения основоположника владимирской школы теории чисел доктора физико-математических наук, профессора Бориса Вениаминовича Левина. В ней приводятся биографические данные и анализ его научных работ.

*Ключевые слова:**Библиография:* 53 названия.**BORIS VENIAMINOVICH LEVIN
ON HIS 90TH ANNIVERSARY**

A. V. Shutov, V. G. Zhuravlev, A. S. Balci, M. B. Khripunova (Vladimir)

Abstract

This paper is devoted to the 90th anniversary of the founder Vladimir's school of number theory, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Boris Veniaminovich Levin. It contains some biographical information and brief analysis of his scientific works.

*Keywords:**Bibliography:* 53 titles.

1. Введение

29 апреля 2017 года исполнилось 90 лет со дня рождения замечательного математика, основателя владимирской школы теории чисел Бориса Вениаминовича Левина.

Борис Вениаминович Левин родился 29 апреля 1927 года в г. Артемовске Сталинской области УССР. Его мать Левина Эсфирь Исааковна была швеей, отец Левин Вениамин Борисович работал бухгалтером. Родители имели 4 класса образования. В семье было 2 детей: старшая сестра Сима и Борис. Сима была старше на 3 года. Когда она пошла в школу в первый класс, и Борис тоже с ней пошел, потому что он готовился с сестрой к школе и был готов. Но его не взяли в первый класс, и, по его словам, это было огромное детское разочарование. В школу он поступил в 1935 году.

В 1941 году в связи с эвакуацией семья Б. В. Левина переехала в Узбекистан, в г. Ургут Самаркандской области. Все его одноклассники в Артемовске погибли во время оккупации. Это было голодное время, Борис ходил в школу за 10 км от дома, переболел малярией, нередко падал в голодные обмороки, что в дальнейшем конечно же сказалось на его здоровье.

В 1944 году, после окончания средней школы, вступил в ряды Советской армии и до августа 45 прослужил в 4-й отдельной авиаэскадрилье в качестве курсанта. В это время война закончилась, и Левин Б. В. выбрал мирную профессию.

Он поступил на 1 курс физико-математического факультета вечернего пединститута в г. Самарканде, далее сдал экстерном все экзамены за три курса физико-математического факультета и перешел в Узбекский Государственный Университет, который закончил по специальности "Математика" в 1950 году с отличием. При этом, будучи студентом, а также год после окончания университета, Б. В. Левин работал школьным учителем в Самарканде.

2. Б. В. Левин — ученик Н. П. Романова

Во время Великой Отечественной войны в Узбекистане оказались многие выдающиеся математики, в частности из Томска переехал в Самарканд известный специалист по теории чисел Николай Павлович Романов, он руководил кафедрой в Узбекском университете города Самарканда с 1944 по 1951 г.

Николай Павлович стал не просто научным руководителем Бориса Вениаминовича, а его Учителем, которого он безмерно уважал и любил. В 1951 году Б. В. Левин вслед за своим учителем переезжает в Ташкент, поступает в аспирантуру Среднеазиатского (Ташкентского) государственного университета, которую заканчивает в 1954 году с представлением диссертации. Сама диссертация на тему "О некоторых применениях модулярных функций к вопросам квадратической арифметики" была защищена в 1956 году в МГУ.

Борис Вениаминович активно занимался педагогической деятельностью. После окончания аспирантуры он по распределению направился на работу в Каракалпакский педагогический институт, где в течение 1954–1955 учебного года работал в должности старшего преподавателя. В 1955 году был переведен Министерством просвещения УССР в Ташкентский пединститут, где работал ассистентом до сентября 1956 года.

После защиты диссертации Б. В. Левин перешел на работу на механико-математический факультет Среднеазиатского (Ташкентского) государственного университета, где работал в должности сначала ассистента, а с 1958 года – доцента кафедры алгебры и теории чисел. С 1960 года также руководил вычислительным центром университета. Также с 1958 по 1960 год Б. В. Левин преподавал в Ташкентском Высшем командном общевоинском училище.

В разное время ему приходилось читать курсы: аналитическая геометрия, высшая алгебра, линейная алгебра, математический анализ, теория чисел, теория функций комплексного переменного, аналитическая теория чисел, теория эллиптических и модулярных функций,

современная алгебра и элементы теории Галуа, элементарные методы теории чисел, метод "решета" в теории чисел, математическая логика, аддитивная теория чисел.

Математикой удавалось заниматься только ночами. При этом Борис Вениаминович не работал над докторской диссертацией, ему просто интересно было заниматься теоретико-числовыми проблемами. Однако Александр Осипович Гельфонд, познакомившись с результатами Левина, высоко оценил их и посоветовал оформить в виде докторской. Диссертация "Метод решета и его применения" была написана и защищена в 1963 году в Московском государственном университете.

3. Б. В. Левин и владимирская школа теории чисел

В 1958 году Борис Вениаминович женился на выпускнице Ташкенской консерватории Колесниковой Ирине Владимировне. В 1965 году у них родилась дочь Марина.

В 1966 году Б. В. Левин получил ученое звание профессора, под его руководством была открыта аспирантура по теории чисел. Одним из его самых любимых учеников ташкентского периода был А. С. Файнлейб. В том же году в Ташкенте произошло землетрясение, многие здания были разрушены. Кроме того, у Бориса Вениаминовича стало ухудшаться здоровье и врачи посоветовали ему сменить климат на более умеренный. Поэтому встал вопрос о перемене места жительства.

Бориса Вениаминовича приглашали работать в Москву, в "почтовый ящик", но ему было не интересно выполнять задания, присланные по почте, ни с кем не общаться, он считал, что ученый обязательно должен общаться с коллегами и учениками. Поэтому он принял другое предложение — переехать во Владимир, во Владимирский педагогический институт, ректор которого Б. Ф. Киктев предложил квартиру, работу ему и жене и детский сад для дочери. Приглашение было сделано по совету работавшего в это время во Владимире Г. А. Фреймана. В феврале 1968 года во Владимирском Педагогическом институте была создана кафедра алгебры и теории чисел, первым заведующим которой и стал Борис Вениаминович. При этом Борис Вениаминович пригласил из Ташкента ряд своих коллег и учеников (И. М. Дектярева, Н. М. Тимофеева, С. Т. Туляганова), которые и составили основу вновь созданной кафедры. Одновременно с Б. В. Левиным во Владимир собирался приехать выдающийся математик М. Б. Барбан, жизнь которого трагически прервалась.

Практически сразу была открыта аспирантура по теории чисел. Первые аспиранты приехали вместе с Б. В. Левиным из Ташкента, потом появились и владимирские ученики. 22 аспиранта Б. В. Левина стали кандидатами физико-математических наук. География аспирантов Б. В. Левина очень обширна и охватывает Узбекистан, районы Сибири, Средней Азии, Кавказа, Прибалтики и Центральной полосы России, а также Вьетнам.

4 ученика Бориса Вениаминовича (С. Т. Туляганов, М. И. Туляганова, Н. М. Тимофеев, В. Г. Журавлев) впоследствии защитили докторские диссертации. При этом М. И. Туляганова стала первой женщиной доктором физико-математических наук Узбекистана.

Позднее В. Г. Журавлев сменил Б. В. Левина на посту заведующего кафедрой алгебры и теории чисел ВГПИ (позднее ВГПУ, ВГГУ и даже ВлГУ), а Н. М. Тимофеев много лет заведовал кафедрой математического анализа.

Также Б. В. Левин открыл научный семинар по теории чисел на котором выступали многие замечательные математики и много лет был бессменным руководителем этого семинара. Кроме того, он организовал всесоюзную конференцию по теории чисел в Суздале, которую много лет вспоминали его коллеги.

Работа Б. В. Левина проходила в постоянном контакте с ленинградской, московской, литовской, венгерской, польской школами теории чисел.



Многие советские математики неоднократно бывали в гостях у Бориса Вениаминовича. С еще большим числом математиков он состоял в переписке. При этом для чтения математических работ и общения с другими математиками Б. В. Левин самостоятельно выучил английский язык. Б. В. Левина неоднократно приглашали в составе наших делегаций на конференции за рубежом, и в соцлагерь, Венгрию и Польшу, и в капиталистические страны, хотя, к сожалению, поехать на эти конференции ему разрешали далеко не всегда.

За успехи в научной и учебной работе Борис Вениаминович был награжден юбилейной медалью "За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина", значком "Отличник народного просвещения", медалью имени П. И. Лебедева-Полянского и многочисленными почетными грамотами.

Двадцать четыре года работы на физико-математическом факультете Владимирского педагогического института принесли огромные результаты: создание научной школы, известной далеко за пределами СССР, работа во Владимирском институте повышения квалификации, сотрудничество в рамках работы по хоздоговорным темам с предприятиями и организациями Владимирской области и т.д. За успехи в научной и учебно-воспитательной работе неоднократно награждался медалями, грамотами, почетными значками.

Борис Вениаминович Левин умер от тяжелой и продолжительной болезни 29 марта 1991 года, не дожив месяц до своего 64-летия. Как во Владимире, так и во многих городах России и за рубежом трудятся ученики Б. В. Левина и ученики его учеников. Сочетание высоких научных достижений с душевной щедростью — основная характеристика педагогической деятельности профессора Бориса Вениаминовича Левина. Он был искренним человеком, прекрасным семьянином, любящим отцом и прекрасным другом. Многие годы спустя, ученики, коллеги, студенты физико-математического факультета, знавшие Б. В. Левина лично, с теплотой вспоминают о том времени.

Б. В. Левин стал основателем математической династии: уже третье поколение его потомков заняты в различных областях математики и математического образования.

4. Математические исследования Б. В. Левина

Остановимся подробнее на математических исследованиях Бориса Вениаминовича Левина.

Ранние работы Левина были посвящены модулярным формам и их приложениям к арифметике квадратичных форм [1]–[4], а также исследованию мультипликативных функций методами элементарной теории чисел [7], [11].

Большой цикл исследований Б. В. Левина связан с решением аналогов ряда классических теоретико-числовых задач в почти простых числах. В теории чисел имеется огромное

количество задач, крайне простых по постановке и практически недоступных для решения. Примерами таких задач могут быть задача о бесконечности множества простых чисел p для которых число $p + 2$ также простое (задача о простых-близнецах), задача о простых числах вида $x^2 + 1$, задача о простых числах p для которых число $2N - p$ также простое (бинарная проблема Гольдбаха) и т.д.

Пусть A – некоторое множество натуральных чисел, P – множество всех простых чисел. Обычно достаточно легко получать верхние оценки вида

$$\#\{N \leq x : n \in A \cap P\} \leq N_A(x) + o(N_A(x))$$

с достаточно просто выглядящей функцией $N_A(x)$. Более того, обычно при этом имеются эмпирические аргументы, позволяющие предположить, что найденная функция $N_A(x)$ представляет собой главный член асимптотики для $\#\{N \leq x : n \in A \cap P\}$. Главной задачей является получение соответствующих нижних оценок. В настоящее время эта задача остается нерешенной для большинства осмысленных множеств A .

Поэтому часто рассматривают множества P_k , состоящие из чисел, состоящих не более, чем из k простых сомножителей. Такие числа часто называют k -почти простыми числами. При этом можно рассмотреть задачу об асимптотической формуле для $\#\{N \leq x : n \in A \cap P_k\}$. Практика показывает, что иногда удается получить нижнюю оценку вида

$$\#\{N \leq x : n \in A \cap P_k\} \geq \delta N_A(x) + o(N_A(x)). \quad (1)$$

При этом представляет интерес получения оценок типа (1) для как можно меньших значений k .

Исследования Б. В. Левина в данной области начались в работах [5], [6], в которых ему удалось получить соответствующий результат для $A = \{n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ и $k = 3$. Логика доказательства привела Б. В. Левина к более общим постановкам задач, в которых в качестве множества A берется множество значений произвольного многочлена. Данной тематике были посвящены работы [8], [10], [12]–[14], [19], [22]. Кроме того, удалось получить нижние оценки для мощностей различных множеств вида $\{n \leq x : F_1(n) \in P_{k_1}, F_2(n) \in P_{k_2}\}$, $\{n \leq x : F_1(n) \in P_{k_1}, F_2(n) \in P_{k_2}, F_1(n)F_2(n) \in P_{k_3}\}$, $\{n \leq x : n \in P, F_1(n) \in P_{k_1}\}$ и даже $\{n \leq x : n \in P, F_1(n^2) \in P_{k_1}\}$. Здесь $F_i(n)$ – неприводимые многочлены. В качестве приложения данных результатов были получены результаты о представимости любого четного числа в виде суммы чисел из P и P_4 , а также в виде суммы чисел из P_2 и P_3 . Также была доказана бесконечность множества простых чисел p для которых $p + 2 \in P_4$. На тот момент приведенные результаты были наиболее сильными имевшимися результатами в направлении бинарной проблемы Гольдбаха и проблемы близнецов. Кроме того в [14] описанные результаты были обобщены на случай, когда A является множеством значений многочлена от n переменных.

Вершиной исследований Б. В. Левина в данной области оказалась работа [16], в которой аналог формулы типа (1) был доказан для достаточно общих множеств $A = \{a_n\}$, удовлетворяющих лишь условиям, обеспечивающим равномерность распределения элементов множеств A по прогрессиям в среднем. При этом оказалось, что оптимальное значение k зависит не от глубоких арифметических характеристик множества A , а от достаточно общих свойств этого множества, таких как скорость роста его элементов и степень равномерности их распределения по прогрессиям.

При этом следует отметить, что доказательства этих результатов были основаны не только на использовании классических методов, таких как решето Сельберга, теоремы типа Виноградова-Бомбьери и оценки L -функций, но и использования принципиально новой идеи, основанной на сведении теоретико-числовых задач к изучению свойств решений дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$ty'(t) - ky(t) + ky(t-1) = 0,$$

$k \in \mathbb{N}$, $y(t) = t^k$ при $t \in (0; 1)$. При этом удалось получить результаты об асимптотической поведении решений данного уравнения, интересные и с точки зрения теории дифференциальных уравнений [12].



5. Задача о наименьшем почти простом числе в последовательности

Еще одним достижением Б. В. Левина было применение методов решета к задаче о наименьшем почти простом числе в последовательности. Данная тематика была начата Ю. В. Линником, получившим оценку для наименьшего простого числа в арифметической прогрессии. Данный результат до сих пор не удается доказать методом решета. Б. В. Левин обнаружил, однако, что аналог результата Линника легко может быть получен, если заменить множество простых чисел на множество P_2 [9]. Более того, при этом оказалось, что результаты легко обобщаются на более общие семейства. Большое число результатов данного типа было получено в работах [17], [21]. Например, было доказано, что наименьшее число из P_3 , принадлежащее множеству $\{k^2x^2 + 1\}$ не превосходит $k^{10.9578}$, а наименьшее число из P_7 , принадлежащее множеству $\{k^2p^2 + 1 : p \in P\}$ не превосходит $k^{7.6}$.

Большая часть исследований Б. В. Левина в данной области использовала метод решета Сельберга. Однако в то время активно развивались и другие варианты данного метода, например решето Бруна и решето Бухштаба. Возник естественный вопрос о сравнении различных методов решета (в общем виде нерешенный и поныне). Интересовался этим вопросом и Б. В. Левин. В работе [18] им было рассмотрено применение решет Сельберга и Бруна к модельной задаче об оценке числа членов последовательности $\{a_n\}$, не имеющих малых простых делителей, в предположении, что члены данной последовательности в среднем достаточно равномерно распределены по прогрессиям. Оказалось, что решето Сельберга и Бруна имеют различные области применимости. При этом были найдены условия при которых применение каждого из решет дает лучший результат. Сам Б. В. Левин не стал продолжать данную тему, однако его идеи и результаты продолжают использоваться при изучении различных методов решета и в настоящее время.

6. Общие результаты о мультипликативных и аддитивных функциях

В процессе исследований по методы решета, Б. В. Левину часто приходилось искать асимптотики сумм вида

$$m_f(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \quad (2)$$

для различных мультипликативных функций f , а также аналогичных сумм, в которых накладываются дополнительные ограничения на простые делители слагаемых n . В это время возникла общая задача получения асимптотики сумм (2), исходя из информации о поведении мультипликативной функции f на степенях простых чисел. В частности, многочисленные результаты в данном направлении были получены Вирзингом. Дополнительной мотивацией этих исследований была активно развивавшаяся в то время И. П. Кубилюсом вероятностная теория чисел, позволившая получать интересные общие асимптотические результаты для достаточно широкого класса аддитивных функций. Изучение общих свойств мультипликативных и аддитивных функций стало темой нового большого цикла работ Бориса Вениаминовича Левина, выполнявшихся совместно с его учениками.

Особую роль в данных исследованиях сыграла работа [28], во многом определившая направления дальнейших исследований Б. В. Левина на много лет вперед: асимптотики сумм мультипликативных функций, как в общем случае, так и с дополнительными ограничениями на слагаемые, локальные и интегральные предельные теоремы для аддитивных функций, распределение значений аддитивных функций и т.п.

Отправной точкой исследований Б. В. Левина стал результат Вирзинга о том, что если $f(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям

$$f(p^\nu) \leq \frac{\gamma_1 \gamma_2^\nu}{p^\nu}, \gamma_2 < 2, \quad (3)$$

$$\sum_{p \leq x} f(p) \ln p \sim \tau \ln x, \quad (4)$$

то имеет место асимптотическая формула

$$m_f(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\tau + 1)} \prod_p \sum_{r \geq 0} f(p^r) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\tau \ln^\tau x.$$

Идея Б. В. Левина состояла в том, чтобы улучшить результат Вирзинга, наложив более сильные условия на значения мультипликативной функции для простых чисел. В результате, вместо условия (4) было предложено более сильное условие

$$\sum_{p \leq x} f(p) \ln p \sim \tau \ln x + B + h(x),$$

где

$$h(x) = O(\ln^{-N} x) \quad (5)$$

для всех N . При этом условие (3) было заменено условием

$$\sum_{n \leq x} |f(n)| = O(\ln^A x).$$

В результате удалось существенно усилить результат Вирзинга, получив асимптотическое разложение функции $m_f(x)$ по степеням $\ln x$. Если же условие (5) выполнено для конечного числа

N , то получается выделение конечного числа членов асимптотического разложения. Отметим, что при доказательстве результатов данного типа, Б. В. Левиным был предложен новый метод, основанный на построении для исследуемой функции $m_f(x)$ интегральных уравнений вида

$$m_f(x) \ln x - (\tau + 1) \int_1^x \frac{m_f(u)}{u} du = Bm_f(x) + \sum_{n \leq x} f(n) h\left(\frac{x}{n}\right)$$

и изучении асимптотик их решений.

Другой результат Вирзинга касался поиска условий на мультипликативную функцию $f(n)$ при которых имеет место асимптотическая формула вида

$$m_f(x) \sim \frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\ln x} \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{r \geq 0} \frac{f(p^r)}{p^r} \right).$$

Б. В. Левиному удалось ослабить условия Вирзинга, а также получить нетривиальный остаточный член в данной асимптотике [27], [34], [48]. В серии работ [20], [23], [29], [32], [33], [35], [51], [52] рассматривались условия для других возможных асимптотик $m_f(x)$, а также более общие суммы, такие как $\sum_{n \leq x} f(kn + l)$, $\sum_{p \leq n} f(n - p)$ или $\sum_{n \leq x} f_1(n_1) \dots f_k(n_k)$. В последней сумме $n = n_1 \dots n_k$ и все простые делители n_i принадлежат интервалу $(x^{\beta_{i-1}}; x^{\beta_i})$. Также стоит отметить работы [46], [49], [50], в которых были найдены достаточные условия на мультипликативную функцию $f(n)$, при которых для нее имеют место оценки типа Виноградова-Бомбьери, например оценка

$$\sum_{k \leq Q(x)} \max_{(l,k)=1} \max_{y \leq x} \left| \sum_{\substack{n \leq y, n \equiv l \pmod{k}}} f(n) - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n \leq y, (n,k)=1} f(n) \right| \ll x \log^{-B} x.$$

Применимость асимптотических результатов о суммах мультипликативных функций к теории аддитивных функций основана на простом соображении: если $g(n)$ – аддитивная функция, то функция $e^{i\xi g(n)}$ – мультипликативна. Данное соображение, в сочетании с асимптотиками сумм мультипликативных функций, позволяет получать асимптотики для характеристической функции для $g(n)$ (возможно нормированной и центрированной). Далее, используя методы теории вероятностей, можно получать локальные и интегральные предельные теоремы для $g(n)$.

В локальной задаче речь идет о асимптотике величин вида

$$\#\{m \leq n : g(m) = k\}.$$

Подобные задачи изучались Сельбергом, Реньи, Кацом и Куилиусом. В работах Б. В. Левина [28], [41] был найден ряд новых локальных законов и классов аддитивных функций, для которых эти законы имеют место. Более того, удалось получить многомерные локальные законы, описывающие асимптотики величин типа

$$\#\{m \leq n : g_1(m) = k_1, \dots, g_r(m) = k_r\}$$

для целых наборов аддитивных функций.

В задаче об интегральных законах распределения речь идет о функции $F(x)$, для которой в каждой точке непрерывности выполняется соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\left\{ n \leq N : \frac{g(n) - A_N}{B_N} \right\} = F(x) \quad (6)$$

для некоторых последовательностей $\{A_N\}$ и $\{B_N\}$. Данная тематика берет начало в работах Эрдеша и Винтера и активно развивалась Кудильюсом. Б. В. Левина изначально интересовали случаи, связанные с конкретными распределениями $F(x)$. В работе [28] были выделены классы функций, при которых предельное распределение является нормальным, а также оценена скорость сходимости к нормальному распределению. В дальнейших работах [15], [24], [25], [30] интерес Б. В. Левина сместился к поиску условий, при которых существует какой-либо предельный закон распределения. Последовательное улучшение результатов привело к тому, что в [36] была полностью решена задача о предельном распределении с дополнительным условием $B_N = 1$ для всех N (этот результат одновременно с Б. В. Левиным другим методом доказали также Эллиот, Ревек и Деланж). Позднее удалось получить и дальнейшие обобщения этого результата, где условие равенства B_N единице заменялось ограничениями на скорость роста последовательности $\{B_N\}$ [39], [42]–[45], [47]. В качестве приложения была решена известная проблема Эрдеша о распределении значений аддитивной функции, заданной условием $g(p^\alpha) = (\log p^\alpha)^\rho$, а также построен первый пример предельного распределения, не являющегося безгранично делимым. Кроме того, удалось получить ряд аналогов рассмотренных результатов для предельного распределения не аддитивных, а мультипликативных функций (например, условия сходимости к одноточечному распределению) [37], [40].

Оценки сумм вида $\sum_{n \leq x} e^{i\xi g(n)}$ для аддитивных функций $g(n)$ естественным образом приводят к результатам о равномерности распределения значений аддитивных функций по модулю 1. В частности, Деланж доказал, что для иррационального θ последовательность $\theta \nu(n)$ равномерно распределена по модулю 1. Здесь $\nu(n)$ – число различных простых делителей n . Получая результаты об асимптотическом поведении сумм мультипликативных функций, Б. В. Левин часто стремился получать в качестве приложений теоремы о равномерном распределении [28], [30]. Например, было доказано, что значения вещественно аддитивной функции $g(n)$, удовлетворяющей условию $g(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ равномерно распределены по модулю один тогда и только тогда, когда ряд $\sum_p \frac{g^2(p)}{p}$ расходится. Отсюда можно вывести равномерную распределенность по модулю 1 для функций $g(n) = \sum_{p|n} \frac{1}{\{\alpha p\}}$ (α – иррационально), $g(n) = \sum_{p|n} \operatorname{ctg} p$ и т.п.

7. Заключение

Последняя работа Б. В. Левина [53] была связана с изучением одного варианта аддитивной проблемы делителей. Классическая аддитивная проблема делителей предполагает изучение множеств вида

$$\{(n_1, n_2, n_3, n_4) : n_1 n_2 \leq x, n_1 n_2 - n_3 n_4 = 1\}$$

и фактически сводится к получению асимптотической формулы для суммы

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) \tau(n-1),$$

где $\tau(n)$ – число делителей n . Вариант Б. В. Левина отличался дополнительным условием простоты числа n_4 и требовал изучения суммы

$$N(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) \omega(n-1),$$

где $\omega(n)$ – число простых делителей n . Было доказано, что

$$N(x) = x \ln x \ln \ln x + E_1 x \ln x + E_2 x \ln \ln x + E_3 + O\left(x \frac{\ln^6 \ln x}{\ln x}\right)$$

с явно вычисленными константами E_i . В работе обсуждалась программа дальнейшего обобщения данного результата. Борис Вениаминович Левин не успел реализовать ее, но данные исследования были продолжены его учеником и соавтором Николаем Михайловичем Тимофеевым.

Также ряд работ Б. В. Левина связан с описанием деятельности других математиков – специалистов в области теории чисел [26], [31], [38].

В заключение приведем список публикаций Бориса Вениаминовича Левина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. В. О представлении чисел квадратичной формой $x^2 + y^2 + pt^2 + pz^2$ // Труды института математики Узбекской ССР.
2. Левин Б. В. Об одном нелинейном дифференциальном операторе, связанном с автоморфными функциями // Труды института математики Узбекской ССР.
3. Левин Б. В. Новые сравнения для функции Рамунуджана $\tau(n)$ // Труды института математики Узбекской ССР.
4. Левин Б. В. Точные формулы для числа представлений некоторых чисел квадратичными формами $x^2 + y^2 + 5(t^2 + z^2)$ и $x^2 + y^2 + 7(t^2 + z^2)$ // Труды института математики Узбекской ССР.
5. Левин Б. В. Оценки снизу числа почти простых чисел в некоторых последовательностях общего вида // Вестник ЛГУ. Сер. мат. 1960. Вып. 2, № 7. С. 48-65.
6. Левин Б. В. Ослабленная проблема Ландау и ее обобщение // УМН. 1961. Т. 16, вып. 2 (98). С. 123-125.
7. Левин Б. В. Остаточный член в формуле Булыгина // ДАН Узбекской ССР. 1961. № 7. С. 10-13.
8. Левин Б. В. О методе "решета" // Труды ТашГУ. 1961. Т. 9, вып. 18. С. 31-36.
9. Левин Б. В. О распределении простых в арифметической прогрессии // Известия АН Узбекской ССР. Сер. физ. -матем. наук. 1961. № 5. С. 15-28.
10. Левин Б. В. Распределение почти простых чисел в целозначных полиномиальных последовательностях // ДАН Узбекской ССР. 1962. № 11. С. 7-9.
11. Левин Б. В., Романов Н. П. Классификация мультипликативных функций и мультипликативных последовательностей линейных операторов // Труды ТашГУ. 1962. Т. 208. С. 128-136.
12. Левин Б. В. Об одном классе задач теории чисел, сводящихся к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом // Труды ТашГУ. 1963. Вып. 228. С. 56-68.
13. Левин Б. В. Оценка специальных сумм и произведений, связанных с методом решета // Труды ТашГУ. 1963. Вып. 228. С. 69-79.
14. Левин Б. В. Распределение "почти простых" чисел в полиномиальных последовательностях // Математический сборник. 1963. Т. 61 (103), вып. 4. С. 389-407.

15. Барбан М. Б., Виноградов А. И., Левин Б. В. Предельные законы для функций класса H И. П. Кубилюса, заданных на множестве "сдвинутых" простых чисел // Литовский математический сборник. 1965. № 2. С. 5-8.
16. Левин Б. В. Одномерное решето // Acta Aritmetica. 1965. Т. 10, вып. 4. С. 387-397.
17. Левин Б. В. О наименьшем почти простом числе арифметической прогрессии и последовательности $k^2x^2 + 1$ // УМН. 1965. Т. 20, вып. 4 (124). С. 158-162.
18. Левин Б. В. Сравнение решет А. Сельберга и В. Бруна // УМН. 1965. Т. 20, вып. 5 (125). С. 214-220.
19. Левин Б. В., Туляганова М. И. Решето Сельберга в алгебраических числовых полях // ДАН Узбекской ССР. 1965, № 9. С. 5-7.
20. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Асимптотическое поведение сумм мультипликативных функций // ДАН Узбекской ССР. 1965. № 11. С. 5-8.
21. Левин Б. В., Максудов И. Г. Распределение почти простых чисел в полиномах от n переменных // Известия АН Узбекской ССР. Сер. физ. -матем. наук. 1966. Т. 10, № 3. С. 15-23.
22. Левин Б. В., Туляганова М. И. Решето Сельберга в алгебраических числовых полях // Литовский математический сборник. 1966. № 6. С. 59-73.
23. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Обобщенная задача о числах с малыми и большими простыми делителями и ее приложения // ДАН Узбекской ССР. 1966. № 5. С. 4-8.
24. Левин Б. В., Файнлейб А. С. О распределении значений аддитивных арифметических функций // ДАН СССР. 1966. Т. 171, № 2. С. 281-284.
25. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Распределение значений аддитивных теоретико-числовых функций // ДАН СССР. 1966. № 171. С. 281-284.
26. Барбан М. Б., Левин Б. В. Исследования по теории чисел в Узбекистане // Известия АН Узбекской ССР. Сер. физ. -матем. наук. 1967. Т. 11, № 5. С. 10-16.
27. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Об одном методе суммирования мультипликативных функций // Известия АН СССР. Серия математическая. 1967. Т. 31, вып. 3. С. 697-710.
28. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел // УМН. 1967. Т. 22, вып. 3 (135). С. 119-197.
29. Барбан М. Б., Левин Б. В. Мультипликативные функции на "сдвинутых" простых числах // ДАН СССР. 1968. Т. 181, № 4. С. 778-780.
30. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Интегральные предельные теоремы для некоторых классов аддитивных арифметических функций (к шестидесятилетию А. О. Гельфонда) // Труды Московского Математического Общества. Москва. Издательство Московского университета. 1968. № 18. С. 19-54.
31. Виноградов А. И., Левин Б. В., Малышев А. В., Романов Н. П., Чудаков Н. Г. Марк Борисович Барбан (некролог) // УМН. 1969. Т. 24, вып. 2 (146). С. 213-216.
32. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Средние значения мультипликативных функций // ДАН СССР. 1969. Т. 188. С. 517-519.

33. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. О суммах мультипликативных функций // ДАН СССР. 1970. Т. 193. С. 992-995.
34. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 1064-1109.
35. Левин Б. В. Исправление ошибки в доказательстве одной теоремы // УМН. 1971. Т. 26, вып. 5 (161). С. 277-278.
36. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Аналитический метод в вероятностной теории чисел // Ученые записки ВГПИ. Серия математики. 1971. Т. 38, вып. 2. С. 55-150.
37. Левин Б. В., Тимофеев Н. М., Туляганов С. Т. Распределение значений мультипликативных функций // Ученые записки ВГПИ. 1971. Т. 38. С. 282-288.
38. Левин Б. В., Фельдман Н. И., Шидловский А. Б. Alexander O. Gelfond // Acta Aritmetica. 1971. Т. 17. С. 315-336.
39. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Распределение значений аддитивных функций // УМН. 1973. Т. 28, вып. 1 (169). С. 243-244.
40. Левин Б. В., Тимофеев Н. М., Туляганов С. Т. Распределение значений мультипликативных функций // Литовский математический сборник. 1973. Т. 13, № 1. С. 87-100.
41. Левин Б. В., Юдин Б. В. Локальные предельные теоремы для аддитивных арифметических функций // Acta Aritmetica. 1973. Т. 22, № 2. С. 233-247.
42. Levin B. V., Timofeev N. M. On the distribution of values of additive functions // Acta Aritmetica. 1975. Т. 26, № 4. С. 333-364.
43. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Аналог закона больших чисел для аддитивных функций на редких множествах // Математические заметки. 1975. Т. 18, вып. 5. С. 687-698.
44. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Некоторые интегральные предельные теоремы для аддитивных функций // Литовский математический сборник. 1976. Т. 16, № 4. С. 133-147.
45. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Теорема сравнения для мультипликативных функций // Acta Aritmetica. 1982. Т. 42, № 1. С. 21-47.
46. Левин Б. В. Распределение арифметических функций по прогрессиям // В кн.: Тезисы Всесоюзной конференции "Теория трансцендентных чисел и диофантовы приближения Москва, 1983. С. 72-73.
47. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Исправление к работе "Теорема сравнения для мультипликативных функций Acta Aritmetica. 1982. Т. 42, № 1. С. 21-47 // Acta Aritmetica. 1983. Т. 42, № 3. С. 325.
48. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Суммы мультипликативных функций // Stud. Sci. Math. Hung. 1983. Т. 18. С. 21-41.
49. Левин Б. В. The "average" distribution of $\mu(n)$ and $\Lambda_f(n)$ in progressions // Topics in classical number theory, Colloq. Budapest 1981, Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. 1984. Т. 34. С. 995-1022.

50. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Распределение арифметических функций в среднем по прогрессиям (теоремы типа Виноградова–Бомбьери) // Математический сборник. 1984. Т. 125 (167), вып. 4 (12). С. 558-572.
51. Левин Б. В., Чариев У. Суммы мультипликативных функций по числам с простыми делителями из заданных интервалов // ДАН Таджикской ССР. 1986. Т. 29. С. 383-387.
52. Левин Б. В., Чариев У. Поведение решений некоторых интегрально-дифференциальных уравнений // ДАН Таджикской ССР. 1987. Т. 30, № 5. С. 267-272.
53. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Об одной аддитивной задаче // Математические заметки. 1989. Т. 46, вып. 4. С. 25-33.

REFERENCES

1. Levin B. V. "O predstavlenii chisel kvadratichnoy formoy $x^2 + y^2 + pt^2 + pz^2$ ", *Trudy instituta matematiki Uzbekskoj SSR*. (Russian)
2. Levin B. V. "Ob odnom nelineynom differencial'nom opereatore, svyazannom s avtomorfizmami functiyami", *Trudy instituta matematiki Uzbekskoj SSR*. (Russian)
3. Levin B. V. "Novye sravneniya dlya functii Ramanudjana $\tau(n)$ ", *Trudy instituta matematiki Uzbekskoj SSR*. (Russian)
4. Levin B. V. "Tochnye formuly dlya chisla predstavleniy nekotoryh chisel kvadratichnymi formami $x^2 + y^2 + 5(t^2 + z^2)$ i $x^2 + y^2 + 7(t^2 + z^2)$ ", *Trudy instituta matematiki Uzbekskoj SSR*. (Russian)
5. Levin B. V. 1960. "Ocenki snizu chisla pochtly prostyh chisel v nekotoryh posledovatel'nostjah obshhego vida", *Vestnik LGU. Ser. mat.*, Vol. 2, no. 7, pp. 48-65. (Russian)
6. Levin B. V. 1961. "Oslablennaja problema Landau i ee obobshhenie", *UMN*, Vol. 16, no. 2 (98), pp. 123-125. (Russian)
7. Levin B. V. 1961. "Ostatocnyj chlen v formule Bulygina", *DAN Uzbekskoj SSR*, no. 7, pp. 10-13. (Russian)
8. Levin B. V. 1961. "O metode "resheta"", *Trudy TashGU*, Vol. 9, no. 18, pp. 31-36. (Russian)
9. Levin B. V. 1961. "O raspredelenii prostyh v arifmeticheskoy progressii", *Izvestija AN Uzbekskoj SSR. Ser. fiz. -mat.*, no. 5, pp. 15-28. (Russian)
10. Levin B. V. 1962. "Raspredelenie pochtly prostyh chisel v celoznachnyh polinomial'nyh posledovatel'nostjah", *DAN Uzbekskoj SSSR*, no. 11, pp. 7-9. (Russian)
11. Levin B. V., Romanov N. P. 1962. "Klassifikacija mul'tiplikativnyh funkcij i mul'tiplikativnyh posledovatel'nostej linejnyh operatorov", *Trudy TashGU*, Vol. 208, pp. 128-136. (Russian)
12. Levin B. V. 1963. "Ob odnom klasse zadach teorii chisel, svodjashhihsja k differencial'nyh uravnenijam s zapazdyvajushhim argumentom", *Trudy TashGU*, Vol. 228, pp. 56-68. (Russian)
13. Levin B. V. 1963. "Ocenka special'nyh summ i proizvedenij, svjazannyh s metodom resheta", *Trudy TashGU*, Vol. 228, pp. 69-79. (Russian)
14. Levin B. V. 1963. "Raspredelenie "pochtly prostyh" chisel v polinomial'nyh posledovatel'nostjah", *Matematicheskij sbornik*, 1963. T. 61 (103), vyp. 4. S. 389-407. (Russian)

15. Barban M. B., Vinogradov A. I., Levin B. V. 1965. "Predel'nye zakony dlja funkcij klassa N I. P. Kubiljusa, zadannyh na mnozhestve "sdvinutyh" prostyh chisel", *Litovskij matematicheskij sbornik*, no. 2, pp. 5-8. (Russian)
16. Levin B. V. 1965. "Odnomernoe resheto", *Acta Aritmetica*, Vol. 10, no. 4, pp. 387-397.
17. Levin B. V. 1965. "O naimen'shem pochtii prostom chisle arifmeticheskoy progressii i posledovatel'nosti $k^2x^2 + 1$ ", *UMN*, Vol. 20, no. 4 (124), pp. 158-162. (Russian)
18. Levin B. V. 1965. "Sravnenie reshet A. Sel'berga i V. Bruna", *UMN*, Vol. 20, no. 5 (125), pp. 214-220. (Russian)
19. Levin B. V., Tuljaganova M. I. 1965. "Resheto Sel'berga v algebraicheskikh chislovyyh poljah", *DAN Uzbekskoj SSR*, no. 9, pp. 5-7. (Russian)
20. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1965. "Asimptoticheskoe povedenie summ mul'tiplikativnyh funkcij", *DAN Uzbekskoj SSR*, no. 11, pp. 5-8. (Russian)
21. Levin B. V., Maksudov I. G. 1966. "Raspredelenie pochtii prostyh chisel v polinomah ot n peremennyh", *Izvestija AN Uzbekskoj SSR*, Vol. 10, no. 3, pp. 15-23. (Russian)
22. Levin B. V., Tuljaganova M. I. 1966. "Resheto Sel'berga v algebraicheskikh chislovyyh poljah", *Litovskij matematicheskij sbornik*, no. 6, pp. 59-73. (Russian)
23. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1966. "Obobshhennaja zadacha o chislakh s malymi i bol'shimi prostymi delitel'jami i ee prilozhenija", *DAN Uzbekskoj SSR*, no. 5, pp. 4-8. (Russian)
24. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1966. "O raspredelenii znachenij additivnyh arifmeticheskikh funkcij", *DAN*, Vol. 171, no. 2, pp. 281-284. (Russian)
25. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1966. "Raspredelenie znachenij additivnyh teoretiko-chislovyyh funkcij", *DAN SSSR*, no. 171, pp. 281-284. (Russian)
26. Barban M. B., Levin B. V. 1967. "Issledovaniya po teorii chisel v Uzbekistane", *Izvestija AN Uzbekskoj SSR. Ser. fiz. -matem. nauk*, Vol. 11, no. 5, pp. 10-16. (Russian)
27. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1967. "Ob odnom metode summirovaniya mul'tiplikativnyh funkcij", *Izvestija AN SSSR. Seriya matematicheskaja*, Vol. 31, no. 3, pp. 697-710. (Russian)
28. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1967. "Primenenie nekotoryh integral'nyh uravnenij k voprosam teorii chisel", *UMN*, Vol. 22, no. 3 (135), pp. 119-197. (Russian)
29. Barban M. B., Levin B. V. 1968. "Mul'tiplikativnye funkicii na "sdvinutyh" prostyh chislakh", *DAN*, Vol. 181, no. 4, pp. 778-780. (Russian)
30. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1968. "Integral'nye predel'nye teoremy dlja nekotoryh klassov additivnyh arifmeticheskikh funkcij (k shestidesjatiletiju A. O. Gel'fonda)", *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshhestva. Moskva. Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta*, no. 18, pp. 19-54. (Russian)
31. Vinogradov A. I., Levin B. V., Malyshev A. V., Romanov N. P., Chudakov N. G. 1969. "Mark Borisovich Barban (nekrolog)", *UMN*, Vol. 24, no. 2 (146), pp. 213-216. (Russian)
32. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1969. "Srednie znachenija mul'tiplikativnyh funkcij", *DAN SSSR*, Vol., pp. 517-519. (Russian)

-
33. Levin B. V., Timofeev N. M. 1970. "O summah mul'tiplikativnyh funkcij", *DAN SSSR*, Vol. 193, pp. 992-995. (Russian)
 34. Levin B. V., Fajnljeb A. S. 1970. "Mul'tiplikativnye funkcii i verojatnostnaja teorija chisel", *Izvestija AN SSSR. Serija matematicheskaja*, Vol. 34, no. 5, pp. 1064-1109. (Russian)
 35. Levin B. V. 1971. "Ispravlenie oshibki v dokazatel'stve odnoj teoremy", *UMN*, Vol. 26, no. 5 (161), pp. 277-278. (Russian)
 36. Levin B. V., Timofeev N. M. 1971. "Analiticheskij metod v verojatnostnoj teorii chisel", *Uchenye zapiski VGPI. Serija matematiki*, Vol. 38, no. 2, pp. 55-150. (Russian)
 37. Levin B. V., Timofeev N. M., Tuljaganov S. T. 1971. "Raspredelenie znachenij mul'tiplikativnyh funkcij", *Uchenye zapiski VGPI*, Vol. 38, pp. 282-288. (Russian)
 38. Levin B. V., Fel'dman N. I., Shidlovskij A. B. 1971. "Alexander O. Gelfond", *Acta Aritmetica*, Vol. 17, pp. 315-336.
 39. Levin B. V., Timofeev N. M. 1973. "Raspredelenie znachenij additivnyh funkcij", *UMN*, Vol. 28, no. 1 (169), pp. 243-244. (Russian)
 40. Levin B. V., Timofeev N. M., Tuljaganov S. T. 1973. "Raspredelenie znachenij mul'tiplikativnyh funkcij", *Litovskij matematicheskij sbornik*, Vol. 13, no. 1, pp. 87-100. (Russian)
 41. Levin B. V., Judin B. V. 1973. "Lokal'nye predel'nye teoremy dlja additivnyh arifmeticheskikh funkcij", *Acta Aritmetica*, Vol. 22, no. 2, pp. 233-247.
 42. Levin B. V., Timofeev N. M. 1975. "On the distribution of values of additive functions", *Acta Aritmetica*, Vol. 26, no. 4, pp. 333-364.
 43. Levin B. V., Timofeev N. M. 1975. "Analog zakona bol'shih chisel dlja additivnyh funkcij na redkih mnozhestvah", *Matematicheskie zametki*, Vol. 18, no. 5, pp. 687-698. (Russian)
 44. Levin B. V., Timofeev N. M. 1976. "Nekotorye integral'nye predel'nye teoremy dlja additivnyh funkcij", *Litovskij matematicheskij sbornik*, Vol. 16, no. 4, pp. 133-147. (Russian)
 45. Levin B. V., Timofeev N. M. 1982. "Teorema sravnenija dlja mul'tiplikativnyh funkcij", *Acta Aritmetica*, Vol. 42, no. 1, pp. 21-47.
 46. Levin B. V. 1983. "Raspredelenie arifmeticheskikh funkcij po progressijam", *V kn.: Tezisy Vsesojuznoj konferencii "Teorija transcendentnyh chisel i diofantovy priblizhenija"*, Moskva, 1983, pp. 72-73. (Russian)
 47. Levin B. V., Timofeev N. M. 1983. "Ispravlenie k rabote "Teorema sravnenija dlja mul'tiplikativnyh funkcij", *Acta Aritmetica*. 1982. T. 42, № 1. S. 21-47", *Acta Aritmetica*, Vol. 42, no. 3, pp. 325.
 48. Levin B. V., Timofeev N. M. 1983. "Summy mul'tiplikativnyh funkcij", *Stud. Sci. Math. Hung.*, Vol. 18, pp. 21-41.
 49. Levin B. V. 1984. "The "average" distribution of $\mu(n)$ and $\Lambda_f(n)$ in progressions", *Topics in classical number theory, Colloq. Budapest 1981, Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, Vol. 34, pp. 995-1022.

- 50. Levin B. V., Timofeev N. M. 1984. "Raspredelenie arifmeticheskikh funkcij v srednem po progressijam (teoremy tipa Vinogradova–Bomb'eri)", *Matematicheskij sbornik*, Vol. 125 (167), no. 4 (12), pp. 558-572. (Russian)
- 51. Levin B. V., Chariev U. 1986. "Summy mul'tiplikativnyh funkcij po chislam s prostymi deliteljami iz zadannyh intervalov", *DAN Tadzhikskoj SSR*, Vol. 29, pp. 383-387. (Russian)
- 52. Levin B. V., Chariev U. 1987. "Povedenie reshenij nekotoryh integral'no-differencial'nyh uravnenij", *DAN Tadzhikskoj SSR*, Vol. 30, no. 5, pp. 267-272. (Russian)
- 53. Levin B. V., Timofeev N. M. 1989. "Ob odnoj additivnoj zadache", *Matematicheskie zametki*, Vol. 46, no. 4, pp. 25-33. (Russian)

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Получено 12.05.2017 г.

Принято в печать 12.06.2017 г.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Том 18 Выпуск 2

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Артемов Даниил Юрьевич — Студент математического факультета ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»
dyu.artemov@mail.ru

Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого.
e-mail: ibalaba@mail.ru

Балджи Анна Сергеевна — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
e-mail: annagremlin@gmail.com

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Академии гражданской защиты МЧС России.
e-mail: Vnbezu@rambler.ru

Буркин Игорь Михайлович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета
e-mail: i-burkin@yandex.ru

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры Тульского государственного университета прикладной математики и информатики
e-mail: dvgmail@mail.ru

Горелик Анна Александровна — старший преподаватель кафедры геометрии и компьютерных наук, Оренбургский государственный университет.
e-mail: alexandrovnanna@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tspu.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Журавлев Владимир Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.

e-mail: vzhuravlev@mail.ru

Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Игнаточкина Лия Анатольевна — кандидат физико-математических наук, б/з, доцент кафедры геометрии ФГБОУ ВО Московский педагогический государственный университет.

e-mail: ignlia@gmail.com

Кожухов Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики 1 Национального исследовательского университета «МИЭТ»

e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Ларкин Евгений Васильевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой робототехники и автоматизация производства Тульского государственного университета.

e-mail: rtiar@mail.ru

Лата Александр Николаевич — аспирант кафедры высшей алгебры, Механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

e-mail: alex.lata@yandex.ru

Матвеева Елизавета Александровна — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого»

e-mail: morozova.tspu@gmail.com

Никифорова Анна Валентиновна — кандидат физико-математических наук, б/з, доцент кафедры геометрии, Московский педагогический государственный университет.

e-mail: anik7@bk.ru

Пихтильков Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор.

Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет.

e-mail: OPikhtilkova@mail.ru

Привалов Александр Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и информационных технологий Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: privalov.61@mail.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Соболев Дмитрий Константинович — аспирант кафедры дискретной математики и информатики Московского педагогического государственного университета

e-mail: sobojib@gmail.com

Соболева Валентина Николаевна — аспирант кафедры теории чисел Московского педагогического государственного университета
e-mail: printsess@gmail.com

Усова Людмила Борисовна — кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет.
e-mail: luda_usova@bk.ru

Устьян Ашот Енофович — кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.
e-mail: ustyanyan37@mail.ru

Хрипунова Марина Борисовна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент департамента Анализа данных, принятия решений и финансовых технологий Финансового университета при Правительстве РФ.
e-mail: MBKHripunova@fa.ru

Царев Андрей Валерьевич — Доктор физико-математических наук, б/з, профессор кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет.
e-mail: an-tsarev@yandex.ru

Чередникова Алла Викторовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Костромского государственного технологического университета.
e-mail: av-cherednikova@list.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Чистяков Денис Сергеевич — доцент кафедры математических методов в радиофизике Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.
e-mail: chistyakovds@yandex.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2009@live.ru

Штейников Юрий Николаевич — Математический институт имени В. А. Стеклова, ФГУ ФНИЦ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук.
e-mail: yuriisht@yandex.ru

Штейников Юрий Николаевич — Математический институт имени В. А. Стеклова, ФГУ ФНИЦ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук.
e-mail: yuriisht@yandex.ru

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры управления и информатики в технических и экономических системах, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
e-mail: a1981@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Volume 18 Issue 2

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Artemov Daniil Yur'evich — Student of the Mathematical Department of Moscow Pedagogical State University

e-mail: dyu.artemov@mail.ru

Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physico-mathematical Sciences, assistant professor, Professor of the Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry of the Tula State Lev Tolstoy University.

e-mail: ibalaba@mail.ru

Balci Anna Sergeevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher of Vladimir State University named after Alexander G. and Nicholay G. Stoletovs.

e-mail: annngremlin@gmail.com

Bezverkhniy Vladimir Nikolaevich — doctor of physico-mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of mathematics of civil defence Academy EMERCOM of Russia.

e-mail: Vnbezu@rambler.ru

Burkin Igor Mikhailovich — doctor of physico-mathematical Sciences, assistant professor, Professor of the Department of Computational Mechanics and Mathematics of Tula State University

e-mail: i-burkin@yandex.ru

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University, Department of Applied Mathematics and Computer Science.

e-mail: dvgmail@mail.ru

Gorelik Anna Alexandrovna — Senior lecturer of the Department of Geometry and Computer Science, Orenburg State University.

e-mail: alexandrovnanna@gmail.com

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University.

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrynina Irina Vasiljevna — doctor of physico-mathematical Sciences, associate professor, Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula State Lev Tolstoy University.

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Zhuravlev Vladimir Georgievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Full Professor of the Department of Mathematical Analysis of Vladimir State University named after Alexander G. and Nicholay G. Stoletovs.

e-mail: vzhuravlev@mail.ru

Esayan Albert Rubenovich — doctor of pedagogical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Ignatochkina Liya Anatol'evna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Geometry of Moscow Pedagogical State University.

e-mail: ignlia@gmail.com

Kozhukhov Igor Borisovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics of the National Research University "MIET"

e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Larkin Evgeny Vasilievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Robotics and Automation of Production, Tula State University.

e-mail: rtiap@mail.ru

Lata Aleksandr Nikolaevich — Postgraduate student, Department of Higher Algebra, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alex.lata@yandex.ru

Matveeva Elizaveta Aleksandrovna — Postgraduate student of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula State Lev Tolstoy University.

e-mail: morozova.tspu@gmail.com

Nikiforova Anna Valentinovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Geometry of Moscow Pedagogical State University.

e-mail: anik7@bk.ru

Pikhtilov Sergey Alekseevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Pikhtilkova Ol'ga Aleksandrovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Algebra and Discrete Mathematics, Orenburg State University.

e-mail: OPikhtilkova@mail.ru

Privalov Alexander Nikolaevich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Informatics and Information Technologies of the Tula State Lev Tolstoy University.

e-mail: privalov.61@mail.ru

Rebrova Irina Yuryevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics, Physics and Informatics of the Tula State Lev Tolstoy University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Usova Ludmila Borisovna — Candidate of pedagogical sciences, senior lecturer of the department of algebra and discrete mathematics, Orenburg State University.

e-mail: luda_usova@bk.ru

Ustyan Ashot Enofovich — candidate of physico-mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula State Lev Tolstoy University.

e-mail: ustyan37@mail.ru

Khripunova Marina Borisovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Data Analysis, Decision Making and Financial Technologies of Financial University under the Government of the Russian Federation.

e-mail: MBKHripunova@fa.ru

Tsarev Andrey Valer'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Algebra of Moscow Pedagogical State University.

e-mail: an-tsarev@yandex.ru

Cherednikova Alla Victorovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Chair of Higher Mathematics, Kostroma State Technological University.

e-mail: av-cherednikova@list.ru

Chistyakov Denis Sergeevich — associate professor, Lobachevsky Nizhny Novgorod State University.

e-mail: chistyakovds@yandex.ru

Shteinikov Yuriy Nikolaevich — Steklov Mathematical Institute of RAS, Scientific Research Institute of System Analysis.

e-mail: yuriisht@yandex.ru

Shutov Anton Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Engineering and Control Systems Vladimir State University named after Alexander G. and Nicholay G. Stoletovs.

e-mail: a1981@mail.ru

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 17 Выпуск 3

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: chubarik2009@live.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого

e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН

e-mail: vab@iam.khv.ru

Глухов Михаил Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, академик-секретарь отделения математических проблем криптографии Академии криптографии Российской Федерации

e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Голод Евгений Соломонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: golod@mech.math.msu.su

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математика 1 Финансового университета при Правительстве РФ, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Ярославского государственного университета

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий Отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Волгоградского государственного социально-педагогического университета

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Латышев Виктор Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого

e-mail: tgpu@tula.net

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар Илана, Рамат Ган, Израиль
e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Белоруси
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович (Украина) — доктор физико-математических наук, профессор, Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ» МОН и НАН Украины
e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас (Литва) — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Мисир Джумайл оглы Марданов (Азербайджан) — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.
e-mail: rmi@lan.ab.az

Рахмонов Зарулло Хусейнович (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

THE EDITORIAL BOARD

Volume 17, Issue 3

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2009@live.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of theoretical Informatics of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

THE EXECUTIVE SECRETARY

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

THE MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Bezverhny Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Gluhov Mihail Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician-secretary of the cryptography mathematical problems' department in the Academy of Cryptography of the Russian Federation.

e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Golod Evgeny Solomonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: golod@mech.math.msu.su

Gritsenko Sergey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair Mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Durnev Valery Georgievich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of computer security and mathematical methods of data processing of the Yaroslavl statea public University. P. G. Demidov.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Esayan Albert Rubenovich — doctor of pedagogical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Academy of cryptography of the Russian Federation, head of the chair of mathematical statistics and random processes mechanics and mathematics faculty Moscow state University of a name of M. of Century University, head of the Department of discrete mathematics Mathematical Institute. Century A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Valery Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, the leading researcher of the Department of Algebra and Number Theory of Steklov Mathematical Institute of RAS.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, head of the Department of computer algebra and theory of numbers of the N. G. Chernyshevsky Saratov State University.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Latyshev Viktor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor, Department of applied mathematics of the Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member Russian Academy of Natural Sciences, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of number theory's chair of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor Bar Ilan University, Ramat Gan, Israel.

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich (Belorussia) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine) — doctor of physical and mathematical Sciences, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Politechnic Institute" of the MES of Ukraine and NAS of Ukraine.

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas (Lithuania) — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Misir Jumayil oglu Mardanov (Azerbaijan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of the institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of the Tajik AS.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал "Чебышевский сборник" является общематематическим. В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики и информатики на русском или английском языке.

Журнал "Чебышевский сборник" выходит четыре раза в год в одном томе из четырех выпусков.

Редакция журнала "Чебышевский сборник" предлагает авторам ознакомиться с данными правилами и придерживаться их при подготовке рукописей, направляемых в журнал.

1. Общие положения

- 1.1. Рукопись сопровождается краткой аннотацией на русском и английском языках, которая должна содержать не менее 250 слов, как на русском, так и на английском языках. Ключевые слова входят в аннотацию, но отделяются одной строкой.

Все материалы представляются в редакцию в двух экземплярах.

- 1.2. Текст статьи начинается с шифра УДК, затем следуют заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Затем идет перевод на английский язык заглавия статьи, фамилия и инициалы авторов в латинской транскрипции, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Статья должна иметь следующую структуру: Введение, Основная часть из одного или нескольких разделов, Заключение.

Статья должна быть тщательно выверена и подписана всеми авторами "в печать".

Все страницы рукописи, включая таблицы, список литературы, рисунки и подписи к рисункам, следует пронумеровать. После списка литературы приводятся названия учреждений, в которых выполнена работа.

- 1.3. На отдельном листе указываются сведения о каждом из авторов: фамилия, имя, отчество — полностью, ученая степень, звание, должность, полное название учреждения, полный почтовый адрес, номер телефона с кодом города, адрес электронной почты (e-mail). Обязательно следует указать автора, ответственного за переписку и переговоры с редакцией.
- 1.4. Российские авторы представляют в редакцию акт комиссии, о том что статья не содержит сведений, связанных с государственной тайной, и может публиковаться в открытой печати.
- 1.5. Отклонения в оформлении рукописи от приведенных правил позволяют редколлегии принять решение о снятии с публикации статьи в текущем томе журнала (статья может быть опубликована в следующем томе).

2. Требования к оформлению рукописей

- 2.1. Редакция принимает к публикации статьи, подготовленные только в системе $\text{LaTeX}_2\epsilon$; при этом в редакцию одновременно с распечаткой статьи представляются также соответствующие файлы. Статьи, подготовленные на компьютере в других текстовых редакторах, а также машинописный или рукописный варианты не принимаются.

- 2.2. При подготовке статьи в $\text{LaTeX}_2\epsilon$ следует использовать класс *article* (см. пример в конце).

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения. Пример подготовки статьи находится на Web-странице

<http://cheb.tsput.ru>

- 2.3. Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку. Номер формулы ставится у правого края строки. Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки. Запрещаются прямые ссылки по номеру на формулы из других работ. Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита.
- 2.4. Все рисунки и таблицы должны иметь подпись. Файлы с рисунками необходимо представить в формате *.eps. Максимальный размер рисунка или таблицы вместе с подписью не должен превышать 80% размера A4. Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.
- 2.5. Список цитированной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Сокращение слов и словосочетаний на русском языке оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.12-2011, сокращение слов и словосочетаний на иностранных европейских языках — ГОСТ 7.11-2004.
- 2.6. Раздел REFERENCES оформляется в соответствии с Гарвардским стандартом (см. раздел 4 данных правил).

3. Пример оформления списка цитированной литературы

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985. 510 с.
2. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2001. Т. 2, вып. 1. С. 41–53.
3. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.
4. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об аддитивной проблеме И. М. Виноградова // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 325–339.
5. Archipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. Exponential sums in some binary additive problems over prime parameters // Materials of international scientific workshop on analytic number theory and its applications. Moscow: MSU, 1997. P. 12–13.
6. Голод Е. С. Комплекс Шафаревича и его применения: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1999. 68 с.

4. Список использованных источников (Reference) по Harvard Standard

Наиболее значимыми составляющими в библиографических ссылках являются фамилии авторов и названия журналов, поэтому

- в описание статьи вносят всех авторов, не сокращая их тремя, четырьмя и т.п.

- названия журналов приводят обязательно.

Ссылки на публикации оформляются по Harvard Citation Standard

Оформление ссылок на публикации на русском языке

- Запись всегда начинается с фамилии автора, затем инициалы, за которыми следует дата.
- Фамилии и инициалы авторов приводят в транслитерации (иностранных авторов — в оригинале).
- Если более чем одна запись одного и того же автора, сортировать по датам.
- Название публикации, книга или журнал, всегда выделяется курсивом.
- Выдержки из публикаций, то есть главы в книгах или журнальные статьи, всегда в английских "кавычках", начиная с первого слова.
- Имя издателя ставится перед местом издания (как это было бы в адресе). Место издания — город, страна. Сокращения для штатов США должны быть с большой буквы, и должны быть добавлены по мере необходимости.
- Ссылки на электронные ресурсы следуют тем же правилам, а в конце ставится "Available at:" и URL-адрес ресурса. Недопустимо указывать только URL-адрес.
- Название статьи переводят на английский язык.
- Название книги приводят в транслитерации и в квадратных скобках переводят на английский язык. У англоязычных книг приводят только оригинальное английское название.
- Название периодического издания приводят в транслитерации. Если издание имеет официальное англоязычное название, то это название приводят в круглых скобках.
- Название издательств и организаций приводят в транслитерации.
- Название города, названия конференций, пояснительные слова, словосочетания переводят на английский язык. Для международных конференций, имеющих второе англоязычное название, приводят это название.
- Сокращения заменяют англоязычными аналогами:
part 2; volume 3; Vol. 3; pp. 10–19; 323p.; no.1; issue;
Abstract of the dissertation;
International conference proceedings (Int. Conf. Proc.);
Scientific-and-technical (Sci.-Tech.) collected articles; dated 19 December 2013;
monograph; Annals — Ann.; Annual — Annu.; Colloquium — Colloq.;
Conference — Conf.; Congress — Congr.; Technical Paper — Tech. Paper;
First; Second; Third; Fourth/nth... -1st; 2nd; 3rd; 4th/nth...;
Convention — Conv.; Digest — Dig.; Exposition — Expo.;
International — Int.; National — Nat.; Proceedings — Proc.; Record — Rec.;
Symposium — Symp.; Technical Digest — Tech. Dig.

Базовая схема описания

Автор, А.А., Автор, В.В. & Автор, С.С. Год публикации, "Заглавие статьи в переводе", *Название журнала в транслитерации или перевод заглавия, если журнал переводной*, том., номер, страницы.

Примеры описания статей из журналов:

Polyanchikov, Yu. N., Bannikov, A. I. & Kurchenko, A. I. 2007, "Improved Performance of Thermofrictional Cutting Disks", *Vestnik Saratovskogo Gos. Tekhn. Univ.*, vol. 67, no. 1 (23), pp. 21–24.

Danilovich, A. S. & Koltyshev, S. M. 2009, "Setup for radiometric separation of contaminated soil", *Pribory*, no. 12, pp. 56–59.

Пример описания статьи из электронного журнала:

Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B. P. 1999, "Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange", *Journal of ComputerMediated Communication*, vol. 5, no. 2, Available at:

www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/.

при наличии в статье DOI, в списке литературы желательно указывать ее doi - идентификатор:

Zhang, Z & Zhu, D 2008, "Experimental research on the localized electrochemical micromachining", *Russian Journal of Electrochemistry*, no. 44 (8), pp. 926–930.

doi: 10.1134/S1023193508080077/.

Пример описания монографии:

Автор, А. А. Год, "Заглавие", Издание – если не первое, Издатель, Место публикации, страницы (pp.)

Jones, J. 2002, "Managing small teams", Penguin, Sydney.

Smith, P. & Benn, J. 2012, "Report of the University of Western Australia", Small Business Working group, University of Western Australia, W. A.

Пример описания материалов конференций

Usmanov T. S., Gusmanov A. A., Mullagalin I. Z., Muhametshina R. Ju., Chervyakova A. N., Svishnikov A. V. 2007, "Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing", *Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"*

(*Proc. 6th Int. Technol. Symp. "New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact"*), Moscow, pp. 267–272.

Пример описания Интернет-ресурса:

"APA Style", 2011, Available at: <http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx> (accessed 5 February 2011).

5. Шаблон структуры статьи

Задание колонтитулов

`\levkolonttl{ И. О. ФАМИЛИЯ}`

`\prvkolonttl{НАЗВАНИЕ СТАТЬИ }`

`\thispagestyle{empty}`

`\input{shapka.tex}`

Заголовок на русском

```

УДК ?????
\begin{center}
{\Large\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ }\footnote
{Работа выполнена по гранту РФФИ
.....}

\medskip
{\large
И. О. Фамилия (г. ????????) }
\end{center}

```

Аннотация на русском

```

\begin{abstract}
В данной работе .....

\medskip
{\it Ключевые слова:} .

\medskip
{\it Библиография:} ?? названий.
\end{abstract}

```

Заголовок на английском

```

\begin{center}
{\Large\bf ?????????}

\medskip
{\large
I. O. Family (????????????)}
\end{center}

```

Аннотация на английском

```

\begin{engabstract}
In~this paper .....

\medskip
{\it Keywords:} .....

\medskip
{\it Bibliography:} ?? titles.
\end{engabstract}

```

Текст статьи на русском или английском

```

\section{Введение}
\section{}

```

```

.....
\section{Заключение}
\begin{thebibliography}{19}
\bibitem{Gru1} Оформляется по ГОСТу.
\end{thebibliography}
\begin{engbibliography}{19}
\bibitem{eGru1} Оформляется по Гарвардскому стандарту.
\end{engbibliography}
\noindent Организация.

\noindent Поступило 30.04.2015

```

6. Пример оформления статьи

```

\levkolonttl{О. А. МАТВЕЕВА}
\prvkolonttl{О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ \ldots}
\thispagestyle{empty}
\input{shapka.tex}
%
УДК 511.3
\begin{center}
{\Large \bf О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ В КРИТИЧЕСКОЙ
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
ПОЛОСЕ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ}
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\large О.~А.~Матвеева (г. Саратов)}
\end{center}
%
\begin{abstract}
Получены плотностные теоремы о нулях полиномов Дирихле,
аппроксимирующих L-функции Дирихле в критической области.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Ключевые слова}: полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, нули
полиномов Дирихле.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Библиография:} 21 название.
\end{abstract}
%
\begin{center}
{\Large \bf ZEROS OF DIRICHLET POLYNOMIALS
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
APPROXIMATING DIRICHLET L-FUNCTIONS
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip

```

```

IN THE CRITICAL STRIP}
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\large O.~A.~Matveeva}
\end{center}
%

\begin{engabstract}
Density theorems about zeros of dirichlet polynomials approximating
Dirichlet L-fuctions in the critical strip are obtained.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Keywords}: Dirichlet polynomials, Dirichlet L-fuctions,
zeros of Dirichlet polynomials.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Bibliography:} 21 titles.
\end{engabstract}
%
\section{Введение}
В работе \cite{KorotkovMatveeva} была приведена
вычислительная схема построения полиномов Дирихле
 $Q_n(s)$ ,  $s = \sigma + it$ , которые в прямоугольнике
 $0 < \sigma < 1$ ,  $0 < t < T$  аппроксимируют целые функции,
заданные рядами Дирихле с периодическими коэффициентами,
с показательной скоростью. В частности, эта схема позволяет
эффективно вычислять нули L-функций Дирихле, лежащие в критической
полосе. В данной работе показано, что, с одной стороны,
известные факты о нулях L-функций Дирихле дают возможность получить
результаты о нулях аппроксимирующих полиномов Дирихле; с другой
стороны, поведение в критической полосе аппроксимирующих полиномов
Дирихле определяет поведение L-функций Дирихле.
%
\section{Конструкция полиномов Дирихле, аппроксимирующих
в критической полосе L-функции Дирихле}
Рассмотрим L-функцию Дирихле
\begin{equation}
L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \text{quad } s = \sigma + it,
\end{equation}
и соответствующий степенной ряд
\begin{equation}\label{powerseries}
g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) z^n.
\end{equation}
.....
Для оценки величины \eqref{Meq10} сверху необходимо применить
численную схему, которая связана с вычислением полиномов  $Q_n(s)$ .
.....
\section{Заключение}
В заключении отметим, что аналогичные факты будут иметь место
и в случае рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.

```

.....

Оформление списка цитированной литературы по ГОСТу

```
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{KorotkovMatveeva} А. Е. Коротков, О. А. Матвеева \,
Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций,
определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами //
Научные ведомости Белгородского государственного университета.
Сер. Математика. Физика. --- Белгород: Изд-во
НИУ "Белгу", 2011. Вып.24, № 17(112). С. 47--53.
.....
\bibitem{Prahar}
Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар. --- М.:
Мир, 1967. --- 513 с.
.....
\end{thebibliography}
```

Оформление раздела REFERENCES по Гарвардскому стандарту

```
\begin{engbibliography}{99}
\bibitem{eKorotkovMatveeva} Korotkov, A. E. \& Matveeva, O. A.
2011, "On a numerical algorithm for determining zeros of
entire functions defined by series Dirichlet series with
periodic coefficients"\,, {\it Scientific statements
Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics.
--- Belgorod Univ. NIU "Belgu"\,, issue 24, № 17(112),
pp. 47--53.
.....
\bibitem{ePrahar}
Prahar, K. 1967, "{\cyr Raspredelenie prostykh chisel.}"\,,
(Russian) [Distribution of prime numbers]
Translated from the German by A. A. Karacuba.
Edited by A. I. Vinogradov.
With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov,
and N. M. Korobov {\it Izdat. 'Mir', Moscow} 511 pp.
\end{engbibliography}
%
\noindent Саратовский государственный университет им.
Н. Г. Чернышевского.
% пустая строка здесь обязательна
\noindent Получено 10.03.2013
```

Адрес редакции: г. Тула, пр. Ленина, 125, учебный корпус № 4 ТГПУ им. Л. Н. Толстого, комна-
та 310, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии.

Электронные адреса (e-mail): dobrovol@tsput.ru,

TABLE OF CONTENTS

Volume 18 Issue 2

Congratulation to Z. Kh. Rakhmonov	5
D. Yu. Artemov About ring structures on the set of integers	6
И. М. Буркин Hidden attractors of some multistable systems with infinite number of equilibria 18	
D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov Some extremal problems for the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator	34
N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii, E. A. Matveeva On fractional linear transformations of forms A. Tue — M. N. Dobrovolsky — V. D. Podsypanina	54
N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii D. K. Sobolev, V. N. Soboleva Classification purely real algebraic irrationalities	98
Esayan A. R., Dobrovolsky N. N. The transformation of objects in GeoGebra	129
L. A. Ignatovich Induced transformations for almost hermitian structure of linear extensions 144	
A. N. Lata On congruence-coherent rees algebras and algebras with an operator	154
A. V. Nikiforova The invariants of generalized f -transformations for almost contact metric structures	173
I. A. Petrov The structure of almost hermitian structures of total space of principal fiber T^1 -bundle with flat connection over some classes of almost contact metric manifolds	183
S. A. Pikhtilov , O. A. Pikhtilkova, A. A. Gorelik, L. B. Usova on the homological description of the Jacobson radical for Lie algebras and the locally nilpotent radical for special Lie algebras	195
A. Yu. Popov Two-sided estimates of gamma-function on the real semiaxis	205
Larkin E. V., Gorbachev D. V., Privalov A. N. On the approximation of the flow of events for a poisson	222
A. V. Tsarev E -rings of low ranks	235
A. V. Cherednikova On quasi-endomorphism rings of some strongly indecomposable torsion-free abelian groups of rank 4	245
D. S. Chistyakov On homogeneous mappings of mixed modules	256
Yu. N. Shteinikov Character sums over shifted powers	267
SHORT MESSAGES	
V. G. Chirskii Periodicity and non-periodicity of finite sequences	275

ANNIVERSARIES

- V. N. Bezverkhniĭ, A. E. Ustyan, I. V. Dobrynina The 70th anniversary of professor Valery Georgievich Durnev 279
- V. A. Artamonov, I. B. Kozhukhov, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky The 80th anniversary of professor Vladimir Konstantinovich Kartashov 298
- V. N. Chubarikov, V. G. Chirskii, N. M. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovolsky On mathematical research V. N. Kuznetsova (On the occasion of his 70th birthday) 305

MEMORABLE DATES

- A. V. Shutov, V. G. Zhuravlev, A. S. Balci, M. B. Khripunova Boris Veniaminovich Levin on his 90th anniversary 315

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 331

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS 334

РЕДКОЛЛЕГИЯ 337

THE EDITORIAL BOARD 340

MANUSCRIPT FORMATTING GUIDELINES 343