ISSN 2226-8383

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет
Чебышевский фонд

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

ТОМ XVII

ВЫПУСК 3 (59)

Тула 2016

ББК 22.13
Ч34

Журнал включен в список ВАК *"Рецензируемые научные издания (текущие номера которых или их переводные версии входят в международные базы данных и системы цитирования), включенные в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук"*

Чебышевский сборник: Науч.-теорет. журн. — Т. XVII. Вып. 3(59). —
Ч34 Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. — 247 с.

Журнал “Чебышевский сборник” выходит четыре раза в год в одном томе из четырех выпусков.

В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики, а также информационные материалы.

ББК 22.13
УДК 511

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-01540а

Журнал распространяется в Российской Федерации и странах СНГ.
Подписка по каталогу «Пресса России» —
подписной индекс 10642.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 17 Выпуск 3

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 3.

УДК 512.6+004.421.6

О СТРУКТУРЕ РЕЗОНАНСНОГО МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННОГО МНОГОЧЛЕНА

А. Б. Батхин (г. Москва)

Аннотация

Изучается резонансное множество вещественного многочлена, т. е. множество всех значений пространства коэффициентов, при которых вещественный многочлен имеет соизмеримые корни.

Резонансное множество многочлена может рассматриваться как некоторое обобщение дискриминантного множества последнего. Знание его структуры необходимо при исследовании резонансов вблизи положений равновесия динамической системы.

В работе предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации резонансного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Структура резонансного множества многочлена степени n описывается в терминах разбиения натурального числа n.

Основные алгоритмы, описанные в работе, реализованы в виде библиотеки в системе компьютерной алгебры `Maple`. Приведено описание резонансного множества кубического многочлена.

Ключевые слова: теория исключения, субрезультант, субдискриминант, резонансное множество, компьютерная алгебра.

Библиография: 12 названий.

ON THE STRUCTURE OF THE RESONANCE SET OF A REAL POLYNOMIAL

A. B. Batkhin (Moscow)

Abstract

We consider the resonance set of a real polynomial, i. e. the set of all the points of the coefficient space at which the polynomial has commensurable roots. The resonance set of a polynomial can be considered as a certain generalization of its discriminant set. The structure of the resonance set is useful for investigation of resonances near stationary point of a dynamical system.

The constructive algorithm of computation of polynomial parametrization of the resonance set is provided. The structure of the resonance set of a polynomial of degree n is described in terms of partitions of the number n.

The main algorithms, described in the paper, are organized as a library of the computer algebra system `Maple`. The description of the resonance set of a cubic polynomial is given.

Keywords: elimination theory, subresultant, subdiscriminant, resonance set, computer algebra.

Bibliography: 12 titles.

1. Введение

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда для некоторого вещественного многочлена $f(x)$ необходимо сформулировать условия на его коэффициенты, при выполнении которых этот многочлен имеет соизмеримые корни. Так, например, условие целочисленной соизмеримости (кратности) корней характеристического многочлена матрицы линейной части уравнений движения вблизи положения равновесия выделяет в пространстве коэффициентов многочлена (или параметров уравнений движения) многообразия, на которых имеется резонанс между собственными частотами колебаний. Случай, когда многочлен $f(x)$ имеет корень кратности $k > 1$ является частным случаем описанной выше ситуации.

Эта статья продолжает исследования автора [1–3] по описанию структуры и построению параметрического представления дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ многочлена

$$f_n(x) \stackrel{def}{=} x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n \tag{1}$$

n-й степени с вещественными коэффициентами. Вещественное n-мерное пространство $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ его коэффициентов $a_1, a_2, \ldots a_n$, как и ранее, назовём *пространством коэффициентов* многочлена (1).

Определение 1. *Пару корней t_i, t_j, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, многочлена* (1) *назовём $p : q$-соизмеримой, если $t_i : t_j = p : q$.*

Замечание 1. *Здесь и далее предполагаем, что $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, т. е. исключаем случай, когда один из корней t_i или t_j равен нулю, поскольку нулевой корень соизмерим с любым другим корнем.*

Замечание 2. *Если у многочлена* (1) *есть пара $p : q$-соизмеримых корней, то есть и пара $q : p$-соизмеримых корней. Следовательно, далее предполагаем, что коэффициент соизмеримости $p : q$ удовлетворяет условию $|p/q| \geqslant 1$.*

Определение 2. *Резонансным множеством $\mathcal{R}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовём множество всех точек пространства коэффициентов Π, в которых $f_n(x)$ имеет хотя бы пару $p : q$-соизмеримых корней. Для фиксированного коэффициента соизмеримости, задаваемого рациональным числом $p/q \in \mathbb{Q}$, соответствующее резонансное множество обозначим через $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$, т. е.*

$$\mathcal{R}_{p:q}(f_n) = \{P \in \Pi : \exists i, j = 1, \ldots, n, t_i : t_j = p : q\}.$$

Цель данной работы — разработать конструктивный алгоритм вычисления параметрического представления всех компонент резонансного множества $\mathcal{R}(f_n)$ приведённого вещественного многочлена $f_n(x)$.

Статья состоит из введения, трёх разделов и заключения. В разделе 2 формулируется условие на коэффициенты существования соизмеримых корней многочлена (1) в терминах обобщённых субдискриминантов, которые с точностью до множителя суть субрезультанты пары многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$. В разделе 3 дано описание иерархической структуры резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$, указана связь этой структуры с задачей разбиения натурального числа n, описан алгоритм построения параметрического представления компонент этого множества и дано описание программной библиотеки для системы компьютерной алгебры `Maple`. В заключительном разделе 4 приведено описание резонансного множества кубического многочлена. Статья представляет собой сокращённый вариант препринта [4].

2. Условие $p:q$-соизмеримости корней многочлена $f_n(x)$

Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет пару $p:q$-соизмеримых корней. Это эквивалентно тому, что два многочлена $f_n(px)$ и $f_(qx)$ имеют общий корень, или, другими словами,

$$\operatorname{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = 0,$$

где $\operatorname{Res}_x(g,h)$— результант многочленов $g(x)$ и $h(x)$, вычисленный относительно переменной x.

Определение 3. *Пусть $g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - t_i)$, $h(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - u_i)$ суть два приведённых многочлена степени n и m соответственно. Тогда их результант относительно переменной x вычисляется по формуле*

$$\operatorname{Res}_x(g,h) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(t_i - u_j).$$

Поскольку при $p = q = 1$ многочлены $f_n(px)$ и $f_n(qx)$ имеют n общих корней, то результант $\operatorname{Res}_x(f_n(px), f_n(qx))$ делится на множитель $(p-q)^n$. В силу замечания 1, результант $\operatorname{Res}_x(f_n(px), f_n(qx))$ делится на свободный член a_n многочлена (1). Таким образом, указанный выше результант представим в виде

$$\operatorname{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = a_n(p-q)^n \operatorname{GD}_{p:q}(f),$$

где $\operatorname{GD}_{p:q}(f_n)$ — введённый в [5,6] *обобщённый дискриминант* многочлена $f_n(x)$.

Замечание 3. *Термин обобщённый дискриминант выбран в связи с тем, что при стремлении коэффициента соизмеримости $p:q \to 1$, $GD_{p:q}(f_n)$ стремится к значению дискриминанта $D(f_n)$ многочлена* (1).

У многочлена (1) может быть не одна пара $p:q$-соизмеримых корней. Для полного исследования структуры $p:q$-соизмеримых корней введём несколько вспомогательных понятий.

Определение 4. *Цепочкой $p:q$-соизмеримых корней длины k (кратко цепочкой корней) назовём отрезок длины k геометрической прогрессии с основанием t_i и знаменателем p/q, каждый член которой является корнем этого же многочлена. Основание прогрессии t_i назовём порождающим корнем соответствующей цепочки.*

Замечание 4. *Для того чтобы коэффициенты полиномиальных объектов (многочленов, субрезультантов, параметрических представлений компонентов резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ и др.) были представлены в виде многочленов, а не рациональных функций от чисел p и q, будем в цепочке корней длины k в определении* 4 использовать величину $q^{k-1}t_i$ в качестве порождающего корня.

Резонансное множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ для каждого фиксированного коэффициента соизмеримости $p:q$ состоит из конечного числа многообразий $\mathcal{V}_l$, на каждом из которых многочлен $f_n(x)$ имеет l цепочек корней с различными порождающими корнями. Суммарная длина этих цепочек корней равна степени многочлена n.

Для описания каждого из многообразий $\mathcal{V}_l$ нужно знать структуру корней многочлена

$$\tilde{f}_{p:q}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gcd(f_n(px), f_n(qx)). \tag{2}$$

Пусть $d = \deg \tilde{f}_{p:q} > 0$, тогда корни многочлена $\tilde{f}_{p:q}(x)$ дают информацию о соизмеримых корнях исходного многочлена (1): каждой цепочке корней длины $k \leqslant d$ многочлена $\tilde{f}_{p:q}(x)$ соответствует цепочка корней длины $k+1$ многочлена $f_n(x)$. Структуру корней многочлена удобно определить с помощью субрезультантов [7,8] пары многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$.

Известно много методов вычисления результанта пары многочленов. Их обзор дан, например, в [2,7,9]. Здесь ограничимся методом Сильвестра.

Определение 5. *Матрицей Сильвестра* $\mathbf{Sylv}(f, g)$ *двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$, *для которых* $n = \deg f(x)$ *и* $m = \deg g(x)$, *называется квадратная матрица размера* $(n + m)$, *строки которой суть векторы, составленные из коэффициентов многочленов*

$$x^{m-1}f(x),\ x^{m-2}f(x), \ldots, xf(x),\ f(x),\ g(x),\ xg(x), \ldots, x^{n-2}g(x),\ x^{n-1}g(x)$$

в базисе $x^{n+m-1}, \ldots, x, 1$.

Определение субрезультанта дадим с помощью иннора [10] матрицы $\mathbf{Sylv}(f, g)$.

Определение 6. *Пусть* $\mathbf{M}_n$ — *квадратная матрица размера* $n \times n$. *Тогда матрица* $\mathbf{M}_{n-k}$, $k < [n/2]$, *полученная вычёркиванием* k *крайних строк и столбцов с обеих сторон исходной матрицы* $\mathbf{M}_n$, *называется ее* k*-м иннором.*

Определение 7. k*-м субрезультантом* $\mathrm{Res}_x^{(k)}(f, g)$ *многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *называется определитель* k*-го иннора матрицы Сильвестра* $\mathbf{Sylv}(f, g)$.

Запишем матрицу Сильвестра $\mathbf{Sylv}(f_n(px), f_n(qx))$ размера $2n \times 2n$ для многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$:

$$\mathbf{Sylv}(f_n(px), f_n(qx)) =$$

$$= \begin{pmatrix}
p^n & a_1p^{n-1} & \cdots & a_{n-2}p^2 & a_{n-1}p & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & p^n & \cdots & a_{n-3}p^3 & a_{n-2}p^2 & a_{n-1}p & a_n & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & p^n & a_1p^{n-1} & a_2p^{n-2} & a_3p^{n-3} & \cdots & a_{n-1}p & a_n \\
0 & 0 & \cdots & q^n & a_1q^{n-1} & a_2q^{n-2} & a_3q^{n-3} & \cdots & a_{n-1}q & a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & q^n & \cdots & a_{n-3}q^3 & a_{n-2}q^2 & a_{n-1}q & a_n & \cdots & 0 & 0 \\
q^n & a_1q^{n-1} & \cdots & a_{n-2}q^2 & a_{n-1}q & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрица (3) имеет $n-1$ нетривиальный субрезультант. Очевидно, что в силу её структуры, каждый из этих субрезультантов раскладывается на три множителя. Можно показать, что для k-го субрезультанта многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$ имеет место следующее разложение

$$\operatorname*{Res}_x^{(k)}(f_n(px), f_n(qx)) = (p - q)^{n-k}(pq)^{k(n-k)}\,\mathrm{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n). \quad (4)$$

Определение 8. *Назовём* k*-м обобщённым субдискриминантом* $\mathrm{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n)$ *многочлена* $f_n(x)$ *для коэффициента соизмеримости* p/q *третий нетривиальный множитель в формуле* (4).

Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет цепочку $p : q$-соизмеримых корней длины k с порождающим корнем t, т. е. в силу замечания 4 он имеет вид

$$f_n(x) = u(x)\prod_{i=0}^{k-1}\left(x - p^iq^{k-1-i}t\right).$$

Здесь многочлен $u(x)$ степени $n - k$ не имеет корней $p : q$-соизмеримых с t. Тогда

$$f_n(px) = u(px)\left(px - q^{k-1}t\right)p^{k-1}\prod_{i=0}^{k-2}\left(x - p^iq^{k-2-i}t\right),$$

$$f_n(qx) = u(qx)\left(qx - p^{k-1}t\right)q^{k-1}\prod_{i=0}^{k-2}\left(x - p^iq^{k-2-i}t\right).$$

Следовательно, многочлен $\tilde{f}_{p:q}$ из формулы (2) имеет цепочку $p:q$-соизмеримых корней длины $k-1$ с порождающим корнем t/q.

В силу приведённых выше рассуждений, а также теоремы 3.3 из [8], имеет место следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы* $\deg \tilde{f}_{p:q}(x) = d$, *необходимо и достаточно, чтобы в последовательности* i*-ых обобщённых субдискриминантов* $\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n)$ *первым отличным от нуля обобщённым субдискриминантом был субдискриминант* $\mathrm{GD}^{(d)}_{p:q}(f_n)$ *с номером* d.

Введём полиномиальные идеалы $\mathcal{I}^{(l)}_{p:q}(f_n)$, состоящие из первых l обобщённых субдискриминантов $\mathrm{GD}^{(l)}_{p:q}(f_n)$:

$$\mathcal{I}^{(l)}_{p:q}(f_n) = \left\{\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n), i = 0, \ldots, l-1\right\}.$$

Тогда согласно теореме 1 нули идеала $\mathcal{I}^{(l)}_{p:q}(f_n)$ образуют множество, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет в точности $k < n$ различных цепочек $p:q$-соизмеримых корней.

3. Параметризация резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$

Множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ состоит из алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l$ размерностей l, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий $\mathcal{V}_l$, имеющих фиксированную размерность l, зависит от числа разбиений $p(n)$ степени n многочлена $f_n(x)$.

3.1. Число компонент резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$

Напомним здесь основные определения, связанные с разбиением натуральных чисел; подробнее см. [2, 11–13].

Определение 9. *Разбиением* λ *натурального числа* n *называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$, *для которой*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n.$$

Каждое из разбиений запишем в виде $\lambda = [1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3}\ldots]$, *где* n_i *— число повторений слагаемого* i *в разбиении, т. е.* $\sum_{i=1}^{k} i n_i = n$.

Основные числовые функции, связанные с множеством разбиений числа n следующие.

- Функция $p(n)$ задаётся числом всех разбиений числа n (последовательность A000041 в [13]).
- Функция $p_k(n)$ задаётся числом всех разбиений n на k слагаемых.
- Функция $q(n)$ задаётся числом всех разбиений n на различные слагаемые (последовательность A000009 в [13]).
- Функция $q_k(n)$ задаётся числом всех разбиений n на k различных слагаемых.

Очевидно, $p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(n)$ и $q(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k(n)$.

Рассмотрим разбиение $\lambda = [1^{n_1}2^{n_2}\ldots i^{n_i}\ldots]$ натурального числа n. Величина i в разбиении λ задаёт длину цепочки $p:q$-соизмеримых корней для соответствующего порождающего корня t_i, а n_i — число различных порождающих корней, задающих цепочку корней длины i. Тогда

$l = \sum_i n_i$ есть число различных порождающих корней многочлена $f_n(x)$ для коэффициента соизмеримости p/q и $\sum_i in_i = n$. Любое разбиение λ числа n определяет некоторую структуру $p : q$-соизмеримых корней многочлена и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов Π некоторое алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_l^i$, $i = 1, \ldots, p_l(n)$, размерности l по числу различных порождающих корней t_i. Число таких многообразий размерности l равно $p_l(n)$, а общее число многообразий всех возможных размерностей равно $p(n) - 1$, поскольку разбиению $[1^n]$ соответствует ситуация, когда все порождающие корни многочлена (1) задают цепочки корней длины 1, т. е. среди всех корней многочлена $f_n(x)$ нет ни одной пары $p : q$-соизмеримых корней.

Замечание 5. *В силу того, что исходный многочлен* (1) *вещественный, комплексные корни его образуют пары — сам комплексный корень t_i и ему комплексно сопряжённый $\bar{t}_i$. Если порождающий комплексный корень t_i задаёт цепочку корней длины k, то и сопряжённый ему корень $\bar{t}_i$ задаёт цепочку корней такой же длины, в которой каждый корень является комплексно сопряжённым соответствующему корню из цепочки корней, задаваемых корнем t_i. Значит, в разбиении λ, которое соответствует такой структуре корней, будет два равных слагаемых. Следовательно, на алгебраическом многообразии $\mathcal{V}_l \subset \Pi$ размерности l многочлен $f_n(x)$ имеет только вещественные корни, если соответствующее ему разбиение числа n есть разбиение, состоящее из l различных слагаемых. Число таких разбиений для фиксированного l есть значение функции $q_l(n)$, а общее число компонент резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$, на которых все корни вещественны, задаётся функцией $q(n)$.*

3.2. Иерархическая структура компонент множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$

Рассмотрим разбиение $[n^1]$, которое соответствует случаю, когда имеется единственная цепочка корней длины n, задаваемая порождающим (очевидно вещественным) корнем t_1. Тогда многочлен $f_n(x)$ имеет вид

$$f_n(x; t_1) = \prod_{j=0}^{n-1} \left[x - p^j q^{n-1-j} t_1\right]. \tag{5}$$

Здесь запись $f_n(x; t_1)$ означает, что все корни многочлена (1) зависят от параметра t_1. В этом случае его коэффициенты a_i выражаются через элементарные симметрические многочлены [12, 14] $\sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вычисленные на корнях вида $(p/q)^j t_1$, $j = 0, \ldots, n-1$, соответствующей цепочки корней.

$$a_i = (-1)^i \sigma_i\left(q^{n-1}t_1, pq^{n-2}t_1, \ldots, p^{n-1}t_1\right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

В силу однородности симметрических многочленов σ_i, коэффициенты a_i являются степенными функциями степени i параметра t_1.

Согласно теореме 1 в этом случае $\deg \tilde{f}_{p:q}(x) = n-1$, т. е. в последовательности обобщённых субдискриминантов $\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n)$, $i = 0, \ldots, n-1$, первый отличный от нуля обобщённый субдискриминант есть $\mathrm{GD}^{(n-1)}_{p:q}(f_n)$. Следовательно, формулы (6) задают параметрическое представление нулей идеала $\mathcal{I}^{(n-1)}_{p:q}$. Эти нули представляют собой одномерное многообразие (кривую) $\mathcal{V}^{(1)}_{p:q}$ в пространстве коэффициентов Π. Эта кривая не имеет особых точек, поскольку в силу её параметрического представления (6) $a_i \sim t_1^i$ и, следовательно, производные da_i/dt_1 одновременно в ноль не обращаются.

Рассмотрим следующую конструкцию. Выберем на кривой $\mathcal{V}^{(1)}_{p:q}$ пару точек, соответствующих значениям параметра $t_1 \neq 0$ и $(p/q)^{-1}t_1$, и проведём через них прямую. Покажем, что на этой прямой многочлен $f_n(x)$ имеет одну цепочку $p : q$-соизмеримых корней длины $n-1$ и одну цепочку корней длины 1, т. е. простой корень. Действительно, рассмотрим вспомогательный многочлен

$$g(x; t_1, v) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(x; t_1) + v\frac{f_n(x; t_1) - f_n\left(x; (p/q)^{-1}t_1\right)}{t_1}. \tag{7}$$

Тогда с учётом формулы (5) получим, что

$$g(x; t_1, v) = \left[x - \left(p^{n-1}t_1 + v\frac{p^n - q^n}{p}\right)\right]\prod_{j=0}^{n-2}\left[x - p^j q^{n-1-j}t_1\right].$$

Выбирая

$$v = \frac{p\left(t_2 - p^{n-1}t_1\right)}{p^n - q^n},$$

получим, что $g(x; t_1, t_2) = (x - t_2)\prod\limits_{j=0}^{n-2}\left[x - p^j q^{n-1-j}t_1\right]$. Очевидно, что структура корней в этом случае соответствует разбиению $\left[1^1(n-1)^1\right]$.

Таким образом, коэффициенты вспомогательного многочлена (7) задают в пространстве Π многообразие $\mathcal{V}_2$, представляющую собой линейчатую поверхность. Он образована секущими, которые пересекают кривую $\mathcal{V}_1$ в точках, соответствующих таким значениям t_1^1 и t_1^2 параметра t_1, что $t_1^2/t_1^1 = p/q$. При $p/q \to 1$ эта линейчатая поверхность превращается в касательную развёртывающую поверхность, параметризация которой задаётся формулой (3.6) из [2].

Описанную выше процедуру теперь можно повторить для многообразия $\mathcal{V}_2$ и получить параметрическое представление части многообразия $\mathcal{V}_3$, на котором имеется цепочка корней длины $n-2$ и пара простых корней, т. е. ему соответствует разбиению $\left[1^2(n-2)^1\right]$. Продолжая последовательно эту процедуру в итоге придём к параметрическому представлению многообразия $\mathcal{V}_{n-1}$ наибольшей размерности. На нём имеется одна цепочка $p:q$-соизмеримых корней длины 2, а остальные корни простые, т. е. ему соответствует разбиение $\left[1^{n-2}2^1\right]$. Очевидно, что в силу замечания 5, полученная параметризация описывает только ту часть многообразия $\mathcal{V}_l$, $3 \leqslant l < n$, на котором все корни многочлена (1) вещественные.

3.3. Алгоритм построения параметризации многообразий $\mathcal{V}_l$

Рассмотрим конструктивную процедуру вычисления параметрического представления многообразий $\mathcal{V}_l^i$ для всех значений $l = 1, \ldots, n-1$ и $i = 1, \ldots, p_l(n)$.

Теорема 2. *Пусть в пространстве* Π *имеется многообразие* $\mathcal{V}_l$, $\dim\mathcal{V}_l = l$, *на котором многочлен* (1) *имеет* l *различных цепочек* $p:q$*-соизмеримых корней, причём цепочка корней с порождающим корнем* t_1 *имеет длину* $m > 1$. *Другие* $l-1$ *корней не являются* $p:q$*-соизмеримыми с корнями первой цепочки. Пусть* $\mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l)$ *— параметризация многообразия* $\mathcal{V}_l$, *тогда*

$$\mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l) + \frac{p(t_{l+1} - p^{m-1}t_1)}{t_1(p^m - q^m)}\left[\mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l) - \mathbf{r}_l((q/p)t_1, \ldots, t_l)\right] \tag{8}$$

задаёт параметризацию части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, *на котором имеется цепочка корней длины* $m-1$ *с порождающим* t_1, *простой корень* t_{l+1}, *а остальные цепочки корней такие же, как на исходном многообразии* $\mathcal{V}_l$.

Доказательство. В силу условия теоремы многочлен $f_n(x)$ на многообразии $\mathcal{V}_l$ факторизуется следующим образом:

$$f_n(x; t_1, \ldots, t_l) = u(x)\prod_{j=0}^{m-1}\left[1 - p^j q^{m-1-j}t_1\right], \tag{9}$$

где многочлен $u(x)$ не имеет корней $p:q$-соизмеримых с корнями цепочки, порождённой t_1. Рассмотрим вспомогательный многочлен $g(x;t_1,\ldots,t_l,v)$, коэффициенты которого непрерывно зависят от параметров $t_1,\ldots,t_l,v$ следующим образом

$$g(x;t_1,\ldots,t_l,v)=f_n(x;t_1,\ldots,t_l)+v\frac{f_n(x;t_1,\ldots,t_l)-f_n\left(x;(q/p)t_1,\ldots,t_l\right)}{t_1}.$$

Подставляя выражение для $f_n(x)$ из формулы (9), получим

$$g(x;t_1,\ldots,t_l,v)=u(x)\left[x-\left(p^{m-1}t_1+v\frac{p^{m-1}-q^{m-1}}{p}\right)\right]\times\prod_{j=0}^{m-2}\left(x-p^jq^{m-2-j}qt_1\right).$$

Полагая теперь

$$v=\frac{p\left(t_{l+1}-p^{m-1}t_1\right)}{p^m-q^m},$$

получаем

$$g(x;t_1,\ldots,t_{l+1})=u(x;t_2,\ldots,t_l)(x-t_{l+1})\prod_{j=0}^{m-2}\left(1-p^jq^{m-2-j}qt_1\right).$$

Таким образом, многочлен $g(x;t_1,\ldots,t_{l+1})$ имеет цепочку корней длины $m-1$ с порождающим t_1, один простой корень t_{l+1} и остальные $n-m$ корней такие же, как у многочлена $f_n(x)$. Следовательно, формула (8) параметризует ту часть многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, на которой многочлен $f_n(x)$ имеет описанную выше структуру корней. □

Замечание 6. *Пусть один из корней, например u_1, многочлена $u(x)$ в условии теоремы 2 простой, т. е. $u(x)=(x-u_1)\tilde{u}(x)$. Тогда на части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$ исходный многочлен имеет пару комплексно сопряжённых корней. Чтобы получить параметрическое представление этой части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, следует сделать следующую замену параметров:*

$$t_{l+1}\to v_1+iv_2,\quad u_1\to v_1-iv_2.$$

Эта замена параметров приведёт к тому, что многочлен $f_n(x)$ на части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, где есть пара комплексно-сопряжённых корней, можно представить в виде

$$f_n(x)=\tilde{u}(x)\left((x-v_1)^2+v_2^2\right)\prod_{j=0}^{m-2}\left[1-p^jq^{m-2-j}t_1\right]. \tag{10}$$

Если поменять знак перед слагаемым v_2^2 в правой части формулы (10), то получим факторизацию многочлена $f_n(x)$ на той части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, где имеется пара простых вещественных корней $v_1\pm v_2$. Таким образом, для получения параметризации всего многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$ следует использовать подстановку

$$t_{l+1}\to v_1+\sqrt{v_2},\quad u_1\to v_1-\sqrt{v_2}, \tag{11}$$

которая, в итоге, позволит записать многочлен $f_n(x)$ на всем многообразии $\mathcal{V}_{l+1}$ в виде

$$f_n(x)=\left((x-v_1)^2+v_2\right)\tilde{u}(x)\prod_{j=0}^{m-2}\left[1-p^jq^{m-2-j}t_1\right].$$

Также, как это было сделано в [2, 3], введём три основные операции, которые позволят последовательно перейти от параметрического представления одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ к параметризации всех других компонентов резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$.

1. Назовём операцию перехода от многообразия $\mathcal{V}_l$ к многообразию $\mathcal{V}_{l+1}$ в теореме 2 ***«ПОДЪЁМ»***. Эта операция позволяет перейти к многообразию, размерность которого на единицу больше размерности исходного. Если на нём многочлен (1) имеет только вещественные корни, то получим полную параметризацию этого многообразия, если имеются комплексные корни, то применим следующую операцию.

2. Операцию, основанную на замене (11) в замечании 6, назовём ***«ПРОДОЛЖЕНИЕ»***. Эта операция позволяет получить параметризацию всего многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, полученного в результате операции «ПОДЪЁМ» в случае, когда на последнем имеются комплексные корни.

3. Если на многообразии $\mathcal{V}_{l+1}$ многочлен $f_n(x)$ имеет пару различных цепочек корней одинаковой длины k, то можно перейти к многообразию $\mathcal{V}_l$, на котором имеется цепочка корней удвоенной длины $2k$. Такую операцию назовём ***«СПУСК»***. Если после этого перехода на многообразии $\mathcal{V}_l$ имеется пара корней одинаковой кратности, то для них следует выполнить процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ».

Опишем алгоритм получения параметрического представления алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l^i$, $l = 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, p_l(n)$, составляющих резонансное множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$.

1. Вначале строим параметрическое представление одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ по формулам (6).

2. Применяем операцию «ПОДЪЁМ» получаем параметризацию многообразия $\mathcal{V}_2^1$, соответствующего разбиению $\left[1^1(n-1)^1\right]$.

3. Вновь применяем операцию «ПОДЪЁМ» и получаем параметризацию многообразия $\mathcal{V}_3^1$, которое соответствует разбиению $\left[1^2(n-2)^1\right]$. Поскольку на этом многообразии имеется пара простых корней, то следует применить операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ». В итоге получаем полную параметризацию многообразия $\mathcal{V}_3^1$.

4. Применяя к последней параметризации операцию «СПУСК», получаем параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_2^2$, на котором корни многочлена $f_n(x)$ соответствуют разбиению $\left[2^1(n-2)^1\right]$.

5. Последовательно комбинируя операции «ПОДЪЁМ», «ПРОДОЛЖЕНИЕ» и «СПУСК», получим параметрическое представление всех компонент резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$.

Утверждение 1. *Резонансное множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ вещественного многочлена $f_n(x)$ для фиксированного коэффициента соизмеримости $p:q$ допускает полиномиальную параметризацию.*

3.4. Программная реализация

Для организации вычисления резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ в системе компьютерной алгебры `Maple` был реализован набор процедур, из которых скомпонована программная библиотека `ResonanceSet`. Библиотека расширяет возможности другой библиотеки `SubDiscrim`, ориентированной на работу с дискриминантным множеством многочлена $\mathscr{D}(f_n)$ и описанной в [2, 3].

В состав библиотеки вошли следующие процедуры:

- `GDiscrim` — для вычисления k-го обобщённого субдискриминанта $\mathrm{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ для фиксированного коэффициента соизмеримости $p:q$.

- `MkFam1` — для вычисления параметрического представления многообразия $\mathscr{V}_1$.
- `ProcUp` — для реализации процедуры «ПОДЪЁМ» (см. п. 1 на стр. 13).
- `ProcCont` — для реализации процедуры «ПРОДОЛЖЕНИЕ» (см. п. 2 на стр. 13).
- `ProcDown` — для реализации процедуры «СПУСК» (см. п. 3 на стр. 13).

Каждая из процедур реализована в двух вариантах. Первый вариант предназначен для вычислений при целом коэффициенте соизмеримости, второй — при рациональном. Библиотека `ResonanceSet` будет доступна по адресу http://keldysh.ru/batkhin/ResonanceSet.zip после завершения тестирования. Все вычисления в разделе 4 проводились с использованием библиотеки `ResonanceSet`.

4. Резонансное множество кубики

В качестве примера рассмотрим структуру резонансного множества кубического многочлена
$$f_3 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \tag{12}$$
Он имеет два обобщённых субдискриминанта
$$\begin{aligned}
\mathrm{GD}^{(1)}_{p:q}(f_3) &= pqa_1^2a_2 + (p^2+pq+q^2)a_1a_3 - (p+q)^2a_2^2,\\
\mathrm{GD}^{(0)}_{p:q}(f_3) &= p^2q^2\left(p+q\right)^2a_1^3a_3 - q^3p^3a_1^2a_2^2-\\
&\quad - pq\left(p^2+pq+q^2\right)\left(p^2+4\,pq+q^2\right)a_1a_2a_3+\\
&\quad + p^2q^2\left(p+q\right)^2a_2^3 + \left(p^2+pq+q^2\right)^3a_3^2.
\end{aligned}$$

Резонансное множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_3)$ состоит из двух компонент $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$, соответствующих разбиениям $\left[3^1\right]$ и $\left[1^12^1\right]$. Их параметризации суть
$$\mathcal{V}_1 : \left\{a_1 = -(p^2+pq+q^2)t_1,\ a_2 = pq(p^2+pq+q^2)t_1^2,\ t_3 = -(pq)^3t_1^3\right\}, \tag{13}$$
$$\mathcal{V}_2 : \left\{a_1 = -(p+q)t_1 - t_2,\ a_2 = pqt_1^2 + (p+q)t_1t_2,\ a_3 = -pqt_1^2t_2\right\}. \tag{14}$$
Поскольку на многообразии $\mathcal{V}_1$ нет комплексных корней, то $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$.

Геометрически множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_3)$ представляет собой линейчатую развёртывающую поверхность (14) со скрученной кубикой (13) в качестве направляющей. Эта поверхность самопересекается по своей направляющей, которая является множеством особых точек поверхности и показана на рис. 1 для значения коэффициента соизмеримости $p:q=7$.

Поскольку на многообразии $\mathcal{V}_2$ кубика (12) имеет только вещественные корни, то поверхность (14) не пересекается с дискриминантной поверхностью $\mathcal{D}(f_3)$, которая делит пространство коэффициентов кубики на две области с разным числом вещественных корней. Поверхности $\mathcal{R}_{p:q}(f_3)$ и $\mathcal{D}(f_3)$ касаются друг друга вдоль пары кривых, на которых третий корень совпадает с одним из пары соизмеримых корней. Наконец, отметим, что поверхность (14) делит пространство коэффициентов Π на области, в каждой из которых попарное отношение всех корней имеет свою структуру.

5. Заключение

Резонансное множество $\mathcal{R}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ может рассматриваться как некоторое обобщение дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ для случая, когда отношение пары корней

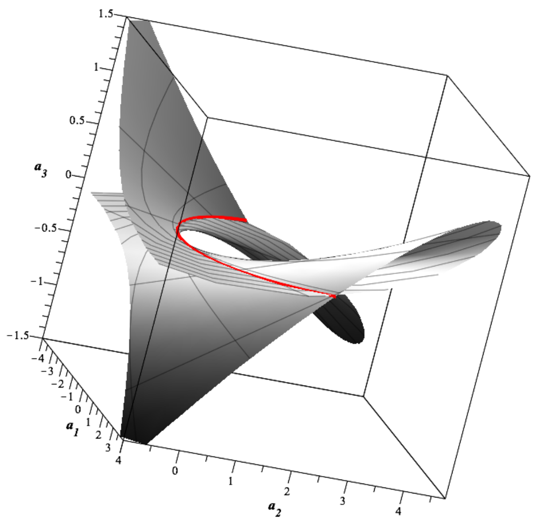


Рис. 1: Резонансное множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_3)$ для $p : q = 7 : 1$.

равно некоторому числу. Резонансное множество состоит из конечного набора алгебраических многообразий размерностей от 1 до $n-1$, число которых определяется числом $p(n)$ разбиений степени n многочлена $f_n(x)$. Каждое из этих многообразий выделяется соответствующим идеалом, состоящим из обобщённых субдискриминантов, и допускает полиномиальную параметризацию.

Результаты работы могут быть применены к решению проблемы формальной устойчивости [15] положения равновесия системы Гамильтона с числом степеней свободы больше двух.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батхин А. Б. Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). 2015. Т. 16, №2. С. 23–34.

2. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. №76. 36 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf.

3. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42, №2. С. 14–27.

4. Батхин А. Б. Структура резонансного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016.№ 29. 23 с. DOI: http://dx.doi.org/10.20948/prepr-2016-29 URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2016_29.pdf.

5. Батхин А. Б. Нелинейная устойчивость системы Гамильтона по линейному приближению // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2012. №33. 24 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_33.pdf.

6. Батхин А. Б. Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автоматика и телемеханика. 2013. Т. 8. С. 47–64.

7. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.

8. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry. Algorithms and Computations in Mathematics 10. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2006. ix+662 p.

9. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М., 1979. 304 с.

10. Gathen, J. von zur, Luücking T. Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. — 2003. — Vol. 297, 1–3. — Pp. 199–239. — DOI: 10.1016/S0304- 3975(02)00639-4.

11. Эндрюс Г. Теория разбиений. М. : Наука, 1982. 256 с.

12. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М. : Мир, 1985. 222 с.

13. Sloane N. The on-line encyclopedia of integer sequences. 2015. URL: http://oeis.org.

14. Прасолов В. В. Многочлены. М. : МЦНМО, 2014. 336 с.

15. Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian Systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, No 1. P. 81–114.

REFERENCES

1. Batkhin, A. B. 2015, “Structure of discriminant set of real polynomial” // Chebyshevskii Sb. (Tula). Vol. 16, no. 2. P. 23–34. (in Russian). URL:http://mi.mathnet.ru/eng/cheb/v16/i2/p23

2. Batkhin, A. B. 2015, “Parametrization of the discriminant set of a real polynomial” // No. 76. Moscow : Keldysh Institute preprints. (in Russian). URL: http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf.

3. Batkhin, A. B. 2016, “Parameterization of the Discriminant Set of a Polynomial” // Programming and Computer Software. Vol. 42, no. 2. Pp. 65– 76.

4. Batkhin, A. B. 2016, *Structure of the resonance set of a real polynomial*. No. 29. Moscow: Keldysh Institute preprints. (in Russian). URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2016_29.pdf

5. Batkhin, A. B. 2012, *Non-linear stability of the Hamiltonian system on linear approximation*. No. 33. Moscow : Keldysh Institute preprints. (in Russian). URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_33.pdf

6. Batkhin, A. B. 2013, “Segregation of stability domains of the Hamilton nonlinear system” // Automation and Remote Control. Vol. 74, no. 8. Pp. 1269–1283.

7. Kalinina, E. A. & Uteshev, A. Yu. 2002, *Elimination theory*, Izd-vo NII Khimii SPbGU, Saint-Petersburg.

8. Basu, S. & Pollack, R. & Roy, M-F. 2006, *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

9. Jury, E. 1974, *Inners and stability of dynamic systems*. John Wiley and Sons.

10. Gathen, J. von zur, Luücking T 2003, Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. Vol. 297, 1–3. Pp. 199–239. DOI: 10.1016/S0304-3975(02)00639-4.

11. Andrews, G. 1998, *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press, 1998.

12. Macdonald, I. A. 1998, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford University Press.

13. Sloane N, 2015, The on-line encyclopedia of integer sequences. URL: http://oeis.org.

14. Prasolov, V. V., 2004, *Polynomials*. Berlin Heidelberg : Springer. Vol. 11 of Algorithms and Computation in Mathematics.

15. Moser, J. 1958, "New aspects in the theory of stability of Hamiltonian Systems" // Comm. Pure Appl. Math. Vol. 11, No 1. P. 81–114.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.
Получено 4.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 519.40

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ДИСКОВОЙ ДИАГРАММЫ НАД $C(3)$-$T(6)$-ГРУППОЙ

Н. В. Безверхний (г. Тула)

Аннотация

Геометрические методы широко используются в комбинаторной теории групп. Теория групп с малыми сокращениями эффективно использует метод групповых диаграмм. Это позволяет решать, в частности, различные алгоритмические проблемы. Одной из таких проблем является проблема степенной сопряжённости. Будучи решённой в классе групп с условиями малого сокращения C(6)-T(3), она остаётся открытой в близком классе C(3)-T(6)-групп.

В данной статье исследуется структура односвязных диаграмм над C(3)-T(6)-группами и указывается, как это исследование может быть использовано при решении проблемы степенной сопряжённости.

Основным результатом данной статьи является доказательство теоремы о нижней оценке площади дисковой диаграммы на группой с условиями C(3)-T(6). Известно, что для групп с условиями C(p)-T(q) при $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$, являющихся автоматными, изопериметрическое неравенство является квадратичным. То же самое утверждается в известной в теории групп с малыми сокращениями теореме о площади. Оба утверждения ограничивают сверху площадь односвязной приведённой диаграммы в рассматриваемом классе групп квадратичной функцией длины границы.

В данной статье доказано, что нижняя граница для площади диаграммы указанного типа тоже является квадратичной функцией длины границы. Важность этого результата видна с точки зрения оценки сложности алгоритма, решающего проблему равенства слов. Он оказывается не менее, чем квадратичной сложности от длины сравниваемых слов.

Ключевые слова: карта, диаграмма, дуальная карта, дэновская область, полоса, кольцевая диаграмма, условия малого сокращения, определяющее соотношение, образующие.

Библиография: 15 названий.

THE AREA THEOREM FOR THE DISC DIAGRAM OVER $C(3)$-$T(6)$-GROUP

N. V. Bezverkhniy (Tula)

Abstract

Geometric methods are widely used in combinatorial group theory. The theory of small cancellation groups use the diagram method. In particular, it allows to approach various algorithmic problems. One of them is the power conjugacy problem. It is already solved for groups with a presentation satisfying the small cancellation conditions C(3) and T(6). However, it remains open for a similar class of groups, having a presentation satisfying the small cancellation conditions C(3) and T(3).

In this paper we investigate the structure of connected diagrams over presentations satisfying the small cancellation conditions C(3) and T(3) and we indicate how our results may be possible used in the power conjugacy problem.

The main result of this article is the proof of the theorem about lower bound on square of the reduced diagram on the group with small cancellation conditions C(3)-T(6). It is known that for groups with conditions C(p)-T(q) with $(p,q) \in \{(3,6),(4,4),(6,3)\}$, being automatic, isoperimetric inequality is quadratic. The same stated in well-known in small cancellation theory theorem of the square. Both statements restrict the area of the simply connected diagrams in the considered class of groups by the quadratic function of the length of the boundary.

In this article it is proved that the lower bound for the area of the diagram of the specified type also is a quadratic function of the length of the border. The importance of this result is visible from the point of view of evaluation of complexity of the algorithm solves the word problem. It is not less than quadratic complexity of the length of the compared words.

Keywords: map, diagram, dual map, dehn region, band, ring diagram, small cancellation condition, defining relation, generators.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Известная теорема о площади [1] ограничивает сверху число областей приведённой диаграммы M над C(p)-T(q) группой квадратичной функцией длины границы:

$$|M| \leqslant \frac{q}{p^2} \left(\sum_M^* [q - i(D)] \right)^2, (p,q) \in \{(3,6),(4,4),(6,3)\}.$$

В этой статье доказывается, что площадь любой приведённой дисковой диаграммы M над $C(3){-}T(6)$-группой с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ и $R, \bar{R}$-несократимыми метками $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ является квадратичной функцией длины границы ∂M.

Свойство квадратичности изопериметрического неравенства для автоматных групп, коими являются и $C(3) - T(6)$-группы, усиливается, и неравенство становится квадратичным уравнением.

Таким образом, диаграммы указанного типа не могут быть "тонкими"и должны иметь структуру вложенных матрёшек. Поясним это примером.

Рассмотрим на плоскости E^2 прямоугольник M_1 из n клеток размера 1×1 с вершинами $A_1(0,0), B_1(0,1), C_1(n,1), D_1(n,0)$. Он содержится в прямоугольнике M_2 с вершинами $A_2(-1,-1), B_2(-1,2), C_2(n+1,2), D_2(n+1,-1)$, который, в свою очередь, содержится в прямоугольнике M_3 с вершинами $A_3(-2,-2), B_3(-2,3), C_3(n+2,3), D_3(n+1,-2)$, и так далее. Прямоугольник M_m имеет вершины $A_m(-(m-m),-(m-1)), B_m(-m+1,m), C_m(n+m-1,m), D_m(n+m-1,-(m-1))$.

Сравним площадь прямоугольника M_m с длиной его границы:

$$|M_m| = |A_m B_m||B_m C_m| = (2m-1)(2m+n-2) = 4m^2 + 2m(n-3) - n + 2;$$

$$|\partial M_m| = 2|A_m B_m| + 2|B_m C_m| = 2((2m-1) + (n+2m-2)) = 8m + 2n - 6.$$

Таким образом, площадь $|M_m|$ с ростом m растёт, как квадрат длины границы ∂M_m. Похожую структуру имеют приведённые дисковые диаграммы над $C(3) - T(6)$ - группами.

Полученный результат может быть использован в исследовании разрешимости проблемы степенной сопряжённости слов в классе групп с условиями C(3)-T(6). Соответствующий алгоритм представляет интерес при построении односторонних функций, применяющихся в криптографии для передачи информации по открытому каналу [12, 13, 14].

2. Основные определения

Будем считать, что копредставление $G = (X; R)$ обладает следующими свойствами: $|X| < \infty, |R| < \infty$, X содержит инверсии всех своих элементов, множество R определяющих соотношений симметризовано: содержит инверсии и все циклические перестановки своих элементов.

Определение 1. *Обозначим через $F = F(X)$ свободную группу с базисом X. Непустое общее начало двух различных определяющих соотношений называется куском. Группа G с копредставлением $(X; R)$ удовлетворяет условию $C(p)$, если ни одно из слов множества R не представимо в виде произведения менее, чем p кусков. Группа G удовлетворяет условию $T(q)$, если для любого набора слов $r_1, \ldots, r_t$ из R, $2 < t < q$, таких, что соседние элементы в последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_i, r_{i+1}, \ldots r_t, r_1$, не являются взаимно обратными в $F(X)$, по крайней мере одно из произведений $r_1 r_2, \ldots, r_t r_1$ приведено в $F(X)$.*

Класс групп с условиями $C(3) - T(6)$ отличается от двух названных слабостью условия $C(3)$ и спецификой условия $T(6)$. И тем не менее, работа в этом классе сильно упрощается, благодаря следующему элементарно доказываемому в статье [2] утверждению.

Свойство копредставлений с условием $T(q)$ при $q > 4$.

Если группа G обладает копредставлением $(X; R)$ с условием $T(q)$ при $q > 4$, то длина любого куска равна единице.

Доказательство.

Графическое равенство слов u, v будем обозначать $u \equiv v$. Предположим, что $r_1 \equiv abr_1'$, $r_2 \equiv abr_2'$ — различные определяющие соотношения, где a, b, r_1', r_2' — непустые слова в алфавите X.

Рассмотрим слова из R, обратные к r_1, r_2, и их циклические перестановки: $u_1 \equiv br_1'a$, $u_2 \equiv a^{-1}(r_2')^{-1}b^{-1}$, $u_3 \equiv br_1'a$, $u_4 \equiv a^{-1}(r_2')^{-1}b^{-1}$. Последовательность u_1, u_2, u_3, u_4, u_1 противоречит условию $T(6)$. Значит, общее начало ab двух различных определяющих соотношений из R имеет единичную длину.

□

Понятия *области, карты, диаграммы, кольцевой диаграммы, граничного цикла области D (∂D) и граничного цикла связной односвязной диаграммы M (∂M), граничной метки $\varphi(p)$ пути p* будем считать известными [1]. Кроме того, считаем, что граничная метка области читается по часовой стрелке, граничная метка связной односвязной диаграммы — против.

Подпуть $\partial D \cap \partial M = p$ в граничных циклах области D и диаграммы M, либо в граничных циклах двух областей, называется *последовательной частью границы* как области D, так и карты M, или двух областей, соответственно [1].

Граничной вершиной в карте M называется любая вершина, принадлежащая граничному циклу карты M. Вершины, не являющиеся граничными, называются внутренними. *Внутренним ребром* в карте будем считать общую часть граничных циклов двух областей, гомеоморфную отрезку и являющуюся последовательной частью границы обеих областей. Область D называется *граничной* в карте M, если в её граничном цикле ∂D есть граничные вершины карты M, то есть $\partial D \cap \partial M \neq \emptyset$. *Граничные ребра диаграммы M* взаимно однозначно сопоставим множеству букв в слове $\varphi(\partial M)$.

Определение 2. *Пара областей (D_1, D_2) с общим ребром e в диаграмме M называется сократимой, если граничная метка односвязной поддиаграммы $D_1 \cup D_2$ равна единице в свободной группе $F(X)$. Если в диаграмме M нет сократимых пар областей, то диаграмма M называется приведённой. (Можно определить сократимую пару и в случае многосвязной диаграммы $D_1 \cup D_2$ — см. [1].)*

Очевидно, что в приведённой диаграмме метка внутреннего ребра всегда является куском, а в $C(3) - T(6)$-диаграмме — буквой.

Скажем несколько слов о геометрической интерпретации условий малого сокращения $C(3)$ и $T(6)$. Рассмотрим произвольную группу $G = (X; R)$ с копредставлением, удовлетворяющим условиям $C(3) - T(6)$. Пусть M — приведённая диаграмма над группой G с данным копредставлением. Тогда условие $C(3)$ означает, что если область $D \subset M$ не имеет рёбер на границе ∂M диаграммы M, то степень области $D : d(D)$ (число рёбер в её граничном цикле ∂D) не может быть меньше 3. Число внутренних рёбер области D обозначим через $i(D)$.

Условие $T(6)$ означает, что степень $d(v)$ (число инцидентных ей рёбер) любой *внутренней вершины* v диаграммы M не может быть меньше 6.

Циклические перестановки слова w обозначаются w^*. Символом $|w|$ обозначают длину слова w.

Связную односвязную диаграмму (карту) M над группой $G = (X; R)$ будем называть *дисковой*, если её граничный цикл ∂M является простым замкнутым путём.

В этой статье нас будут интересовать дисковые карты с граничными циклами вида $\partial M = \sigma \cup \tau$, где простые пути σ, τ имеют ровно две общие вершины A и B: $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$.

3. Понятия $\mathbf{R}, \bar{\mathbf{R}}$-сокращений

Определение 3. *Рассмотрим диаграмму M над $C(3) - T(6)$-группой. Область $D \subset M$ называется дэновской, если*

1) $\partial D \cap \partial M$ — последовательная часть границы ∂M (то есть $\partial D \cap \partial M = p$ — подпуть в граничных циклах области D и диаграммы M [1]);

2) $i(D) \in \{0, 1\}$. Понятие дэновской области аналогично определяется и для карты M, в которой любая внутренняя область имеет не менее трёх рёбер и любое внутреннее ребро имеет степень не менее 6.

Определение 4. *Будем говорить, что в слове w есть R-сокращение, если существует элемент $r \in R$ такой, что:*

1. $r \equiv r_1 r_2$,

2. $w \equiv w_1 w_2 w_3$,

3. $r_1 \equiv w_2$,

4. слово r_2 либо пусто, либо является куском,

5. слова $w_1 r_2^{-1}, r_2^{-1} w_3$ несократимы в свободной группе;

6. в случае замены слова w равным ему в группе G словом $w_1 r_2^{-1} w_3$ будем говорить, что в w выполнено R-сокращение.

7. R-сокращение в слове w, являющемся степенью некоторого слова $v : w = v^s$, называется длинным, если $|w_2| \geqslant |v|$ для w_2 из пункта 2 определения 4. Если же $|w_2| < |v|$, то R-сокращение называется коротким.

Если в любой циклической перестановке слова w нет R-сокращений, то слово w называется циклически R-несократимым.

Определение 5. *Полосой в диаграмме M над $C(3) - T(6)$-группой называется поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$ со свойствами:*

1) $\partial D_i \cap \partial M = p$ — последовательная часть границы ∂M;

2) $\partial \Pi \cap \partial M$ — последовательная часть границы ∂M;

3) при $k = 3$ $i(D_1) = i(D_2) = i(D_3) = 2$, причём соседние области имеют общее ребро, а все три области полосы имеют общую вершину;

при $k > 3, k = 2l+1$ $i(D_1) = i(D_2) = i(D_{2l}) = i(D_{2l+1}) = 2$, $i(D_3) = i(D_5) = \ldots = i(D_{2l-3}) = i(D_{2l-1}) = 3$, $i(D_4) = i(D_6) = i(D_{2l-4}) = i(D_{2l-2}) = 2$;

4) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро $(i = 1, \ldots, k-1)$.

Понятие полосы аналогично определяется и для карты M.

Замечание 1. *Любая полоса в диаграмме M с циклически несократимой в свободной группе, циклически R-несократимой граничной меткой $\varphi(\partial M)$ являеся приведённой диаграммой.*

Действительно, предположив, что две соседние области в полосе образуют сократимую пару, приходим в выводу о свободной сократимости слова $\varphi(\partial M)$, либо к выводу о том, что в слове $\varphi(\partial M)$ есть R-сокращение. Достаточно рассмотреть два случая: 1) сократимые области D_1, D_2 имеют внутренние степени $i(D_1) = 2, i(D_2) = 2$; 2) $i(D_1) = 2, i(D_2) = 3$.

В первом случае из сократимости пары (D_1, D_2) следует свободная сократимость слова $\varphi(\partial M)$. Во втором случае рассмотрим три соседние области в полосе: D_1, D_2, D_3. Ясно, что $i(D_3) = i(D_1) = 2, i(D_2) = 3$. Из сократимости пары D_1, D_2 и из того, что кусок в $T(6)$-группе имеет длину 1 следует, что в слове $\varphi(\partial M)$ есть R-сокращение: метка ребра $\partial D_2 \cap \partial D_3$ является подсловом в метке пути $\partial D_1 \cap \partial M$, и область D_3 можно наклеить по указанному ребру на границу ∂M, в результате чего будет получена область, реализующая R-сокращение в граничной метке диаграммы M.

Понятие $\bar{R}$-сокращения можно определять в рассматриваемом классе групп аналогично тому, как это сделано для R-сокращения (см. также [3,4] — $\bar{R}$-сокращение для групп с условием $C(6)$ и $C(4) - T(4)$). Но из-за громоздкости такого определения в группах, удовлетворяющих условию $T(6)$, будем пользоваться другим, эквивалентным определением.

Определение 6. *Пусть Π — полоса в диаграмме M. Граничным словом области $D_i \subset \Pi$ называется метка пути $\partial D_i \cap \partial M$, прочитанная в соответствии с ориентацией области D_i. Граничным словом полосы Π называется метка пути $\partial\Pi \cap \partial M$, прочитанная в направлении, противоположном ориентации границы ∂M. Аналогично определяется граничное слово дэновской области.*

Понятиям R-, $\bar{R}$-сокращений дадим определения, использующие только язык диаграмм.

Определение 7. *Будем говорить, что в слове v есть R-сокращение, если существует связная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует дэновская область, граничное слово которой является подсловом в v. В слове v есть $\bar{R}$-сокращение, если существует связная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует полоса Π, граничное слово которой является подсловом в v.*

Следствие (*из определения 7.*) Для любого циклически несократимого в $F(X)$ слова w, не равного единице в группе G, существует циклически $R, \bar{R}$-несократимое слово w_0, сопряжённое с w в G.

Доказательство. Действительно, из определения 7 следует, что в результате $R, \bar{R}$-сокращения длина слова строго уменьшается. Записав произвольное слово w на окружности C и выполняя в его циклических перестановках $R, \bar{R}$-сокращения, получим либо пустое слово, что невозможно, поскольку $w \neq 1$ в G, либо непустое слово w_0, в циклических перестановках которого нет $R, \bar{R}$-сокращений. $\square$

Так же просто доказывается утверждение о существовании $R, \bar{R}$-несократимого слова, равного данному.

Понятия дэновской области, полосы были введены в работе [5] на языке групповых диаграмм. Независимо аналогичные понятия использовались в работе [1] при исследовании кусочно евклидовых комплексов. Работая с диаграммами, мы будем придерживаться терминологии, использованной в [1,5].

4. Свойства дисковых диаграмм

Определение 8. *Пусть M — дисковая (6,3)-карта, то есть M — односвязная карта с граничным циклом ∂M без самопересечений. Кроме того, все внутренние вершины в M имеют степень не меньше 6, а все внутренние области имеют степень не меньше 3.*

Определение 9. *Пусть граничный цикл карты M является объединением двух путей: $\partial M = \sigma \cup \tau$, причём $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$ — две вершины. Определим граничные слои K_σ и K_τ карты M как подкарты, состоящие из всех областей вместе с границами, имеющих вершины на σ и τ, соответственно.*

В этой статье считаем, что слои K_σ, K_τ не содержат полос и дэновских областей карты M.

Определение 10. *Пару областей в слое K_σ (K_τ) карты M внутренней степени i, имеющих общее внутреннее ребро, будем называть i-парой. При различных i,j i-пару и j-пару будем называть разноимёнными. Область внутренней степени i будем называть i-областью.*

Определение 11. *Область $D \subset M$ называется простой, если множество $\partial D \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы области D.*

Связная односвязная карта M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ называется простым диском, если $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$ — две вершины, и все области в M простые.

Определение 12. *Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется островом в M, если $M = M_1 \cup M_2 \cup p$, где p — простой подпуть в ∂M, возможно нулевой длины, не имеющий рёбер в граничных циклах областей карт M_1 и M_2 и имеющий по одной вершине в циклах ∂M_1 и в ∂M_2, $|M_1| > 0, |M_2| > 0$. Будем говорить, что M_1 — остров на участке s границы карты M, если граничный цикл ∂M_1 является подпутём в s.*

Определение 13. *Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется полуостровом в M, если существует область $D_0 \subset M : M = M_0 \cup D_0 \cup M_1$, $|M_1| > 0, |M_2| > 0$, причём карта $M_1 \cup M_0$ не является связной. Будем говорить, что M_1 — полуостров на участке s границы карты M, если граничный цикл ∂M_1 является подпутём в s.*

Лемма 1 (5). *(О полосах.) Пусть M — связная односвязная $(6, 3)$-карта, не содержащая дэновских областей, $|M| > 0$. Тогда в ней есть две полосы, не имеющие общих областей.*

Лемма 2 (6). *(Об островах и полуостровах.) Пусть M — связная односвязная или кольцевая карта. Пусть s — подпуть в граничном цикле ∂M для односвязной карты M или в одном из граничных циклов σ, τ для кольцевой карты M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$. Тогда если в карте M нет полос Π и дэновских областей D, для которых $\partial \Pi \cap \partial M$ — подпуть в s, $\partial D \cap \partial M$ — подпуть в s, то в M нет островов и полуостровов на участке границы s.*

Лемма 3 (6). *(О строении граничных слоёв дисковой карты.) Пусть M — дисковая карта типа $(6, 3)$, и граничные слои K_σ, K_τ не содержат полос и дэновских областей, то верно следующее:*

1) для каждой из вершин $\{A, B\}$ в карте M существует единственная область D_A, D_B, соответственно, такая, что $A \in \partial D_A, B \in \partial D_B$;

2) $i(D_A) = i(D_B) = 2$;

3) слои K_σ, K_τ содержат только области внутренней степени 2 и 3, причём, в каждой из подкарт $K_\sigma \backslash (D_B \cup D_A), K_\tau \backslash (D_B \cup D_A)$ областей первого типа на две больше, чем второго.

4) в слоях K_σ, K_τ могут встречаться только 2-пары и 3-пары и нет 2-троек, 3-троек, и т. д., причём, в каждом из слоёв число 2-пар на 1 больше, чем 3-пар, а разноимённые пары чередуются в каждом из слоёв K_σ, K_τ. То же верно и для областей: в K_σ, K_τ могут встречаться только 2- и 3-области.

Лемма 4 (6). *(О длине граничных слоёв дисковой карты.) Пусть в граничных слоях K_σ, K_τ дисковой $(6,3)$-карты M нет полос и дэновских областей. Тогда в карте M число областей с рёбрами на σ не превышает числа областей с рёбрами на τ, умноженного на 5, и наоборот.*

5. Доказательство основной теоремы

Лемма 5. *Пусть M — приведённая дисковая диаграмма над $C(3)-T(6)$-группой с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ и $R, \bar{R}$-несократимыми метками $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$. Тогда диаграмма $M_1 = M \backslash K_\sigma$ тоже является дисковой.*

Доказательство.

Предположим, что диаграмма M_1 не является дисковой. Значит, она является объединением нескольких дисков $N_1, \ldots, N_s$, соединённых простыми путями $p_0, \ldots, p_s$, причём концы пути p_i принадлежат границам дисков N_i, N_{i+1}, а пути p_0, p_i являются в диаграмме M_1 шипами, то есть в граничном цикле ∂M_1 они проходятся дважды в противоположных направлениях. Не исключено, что некоторые или даже все пути p_i имеют нулевую длину.

Из $R, \bar{R}$-несократимости слов $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ следует отсутствие полос и дэновских областей в слое K_σ. Значит, их нет в дисках N_i на участках границ $\partial N_i \cap \sigma$ при $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Те же рассуждения позволяют сделать вывод об отсутствии полос и дэновских областей в дисках N_i на участках границ $\partial N_i \cap \tau$ при $i \in \{1, \ldots, s\}$. Значит, диски N_i удовлетворяют условию леммы 3.

Пусть граница диска N_i состоит из двух путей σ_i, τ_i. По доказанному метки этих путей $R, \bar{R}$-несократимы. В соответствии с леммой 3 пунктом 1 в диске N_i существуют области D_A, D_B, внутренней степени 2.

Обозначим путь $\partial D_A \cap \sigma_i$ как AC. Концевая вершина C этого пути является внутренней в карте M. Значит, по условию $T(6)$ её степень $d(C)$ не меньше 6. Но в карте N_i она инцидентна лишь трём рёбрам (по лемме 3). Значит, три другие ребра, исходящие из C, определяют в слое K_σ 2-пару областей (D_1, D_2).

Ближайшей в карте N_i к вершине C вдоль пути σ_i является не 3-пара областей, а 2-пара, что также гарантирует лемма 3. Этой 2-паре соответствует 2-пара (D_3, D_4) в слое K_σ.

Таким образом, в слое K_σ, а значит, и в карте M на участке границы σ есть полоса состоящая из всех областей слоя K_σ, расположенных между парами $(D_1, D_2), (D_3, D_4)$, включая эти пары. Этот вывод противоречит $\bar{R}$-несократимости граничных меток исходной диаграммы M.

В этом рассуждении мы никак не использовали соседние с N_i диски. Поэтому оно применимо и к случаю, когда после удаления из M слоя K_σ остаётся один диск N_1 с одним или двумя шипами.

Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Пусть M_0 — приведённая дисковая диаграмма над $C(3)-T(6)$-группой с границей $\partial M_0 = \sigma_0 \cup \tau_0$ и $R, \bar{R}$-несократимыми метками $\varphi(\sigma_0), \varphi(\tau_0)$. Тогда диаграмма M_1, полученная из M удалением граничных слоёв K_{σ_0}, K_{τ_0}, тоже является дисковой, а граничные метки $\varphi(\sigma_1), \varphi(\tau_1)$ $R, \bar{R}$-несократимы (здесь $\sigma_1 = \partial(M \backslash K_{\sigma_0}) \cap \partial K_{\sigma_0}$, $\tau_1 = \partial(M \backslash K_{\tau_0}) \cap \partial K_{\tau_0}$).*

Доказательство.

Несократимость граничных меток $\varphi(\sigma_1), \varphi(\tau_1)$ следует из отсутствия полос и деновских областей в слоях K_{σ_0}, K_{τ_0}.

Остальное является следствием леммы 5.

□

Теорема 1. *(о площади дисковой диаграммы). Пусть M — приведённая дисковая диаграмма над $C(3)-T(6)$-группой $G=(X;R)$. Пусть граница $\partial M=\sigma_0\cup\tau_0)$ имеет $R,\bar{R}$-несократимые метки $\varphi(\sigma_0),\varphi(\tau_0)$. Тогда площадь диаграммы M_0 является квадратичной функцией длины границы ∂M_0.*

Доказательство.

Рассмотрим последовательность вложенных диаграмм: $M\supset M_1\supset M_2\ldots\supset M_k$, полученных из дисковой диаграммы M удалением граничных слоёв:

$$M_1=M\backslash(K_{\sigma_0}\cup K_{\tau_0}),M_2=M_1\backslash(K_{\sigma_1}\cup K_{\tau_1}),\ldots,M_k=M_{k-1}\backslash(K_{\sigma_{k-1}}\cup K_{\tau_{k-1}}).$$

При этом последняя диаграмма в этой последовательности либо 1-слойная, либо 2-слойная, то есть на следующем шаге после удаления граничных слоёв остаётся пустое множество.

В соответствии с леммой 6 все эти диаграммы являются дисковыми, а метки $\varphi(\sigma_i),\varphi(\tau_i),i=1,\ldots,k$ $\bar{R},R$-несократимы.

Кроме того, из леммы 3, описывающей строение граничных слоёв дисковой диаграммы, следует, что число областей в $K_{\sigma_0}\cup K_{\tau_0}$ на 6 больше, чем в $K_{\sigma_1}\cup K_{\tau_1}$, и так далее.

Найдём площадь диаграммы M, предполагая, что в диаграмме M_{k-1} число граничных областей равно s.

$$|M|=|M_k|+s+(s+6)+\ldots+(s+(k-1)6)=|M_k|+ks+3k(k-1).$$

Для завершения доказательства теоремы остаётся связать число слоёв k с длиной границы ∂M. Пусть N — число граничных областей в диаграмме M. Тогда выполняется равенство $N=s+6(k-1)$, и $k=1+(N-s)/6$. Подставляя это выражение вместо k в формулу для площади диаграммы M, получаем:

$$|M|=|M_k|+s\left(1+(N-s)/6\right)+3\left(1+(N-s)/6\right)\left((N-s)/6\right).$$

Нетрудно оценить число областей, имеющих рёбра на границе ∂M через длину границы $|\varphi(\partial M)|$: $N\geqslant|\varphi(\partial M)|/|r_0|$, где r_0 — самое длинное определяющее соотношение в копредставлении группы $G=(X;R)$. Эта оценка вместе с предыдущей формулой для площади $|M|$ даёт нижнюю оценку площади диаграммы M, из чего следует квадратичная зависимость последней от длины границы.

□

6. Заключение

Доказанная теорема о площади дисковой диаграммы в рассматриваемом классе групп интересна тем, при рассмотрении кольцевых диаграмм сопряжённости слов в C(3)-T(6)-группах такие дисковые диаграммы могут быть выделены как поддиаграммы кольцевых.

В случае, когда граничные метки кольцевой диаграммы являются степенями фиксированных слов, из выделенных дисковых диаграмм удаётся склеивать односвязную диаграмму с быстро растущей площадью. Всё это может быть использовано для исследования проблемы степенной сопряжённости в данном классе групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линдон Р., Шупп П., 1980, "Комбинаторная теория групп". М.: Мир.

2. Gersten S.M., Short H., 1990, "Small cancellation theory and automatic groups". Inventiones mathematicae 102, pp. 305–334.

3. Безверхний Н. В., 1999, "Разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(6)$."Фундаментальная и прикладная математика, т. 5, N 1, с. 39–46.

4. Паршикова Е. В., 2001, "Проблема слабой степенной сопряжённости в группах с условием C(4)-T(4)". Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Изд-во Тгпу им. Л. Н. Толстого, с. 179–185.

5. Безверхний В. Н., 1994, "О нормализаторах элементов в $C(p)$-$T(q)$-группах". Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Изд-во Тгпу им. Л. Н. Толстого, с.4–58.

6. Безверхний Н. В., 2012, "Проблема сопряжённого вхождения в циклическую подгруппу в группах с условиями C(3)-T(6)". Дискретная математика., т. 24. выпуск 4. с. 27–46.

7. Безверхний Н. В., 2010, "Нормальные формы для элементов бесконечного порядка в группах с условиями C(3)-T(6)". Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Выпуск 1, с. 6–25.

8. Магнус Д., Каррас А., Солитэр Д., 1974, "Комбинаторная теория групп". Перевод с английского, М.: Наука.

9. Ольшанский А. Ю., 1989, "Геометрия определяющих соотношений в группах". М: Наука.

10. Новиков П. С., 1955, "Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп". Труды Математического ин-та АН СССР, т. 44. с. 1–444.

11. Kapovich I., may 1997, "Small cancellation groups and translation numbers". Transactions of the American Mathematical Society, V. 349, N 5, pp. 1851–1875.

12. Глухов М. М., 2010, "К анализу некоторых систем открытого распределения ключей, основанных на неабелевых группах". Математические вопросы криптографии, т. 1, № 4, с. 5–22.

13. Koo K. H., Lee S. J., Cheon J. H., Han J. W., Kang J., Park C., 2000, "New publickey criptosistem using braide groups". CRIPTO 2000, Lect. Notes Comput Sci., v. 1880, pp. 166–183.

14. Paeng S. H., Ha K. C., Kim J. H., Chee S., Park C., 2001, "New public key criptosistem using finite nonabelian groups". CRIPTO 2001, Lect. Notes Comput. Sci., v. 2139, pp. 470–485.

15. Bogley W. A., Pride S. J., 1992, "Aspherical relative presentations". Pros. of the Edinburg Mathematical Society, v. 35, pp. 1–39.

REFERENCES

1. Lindon R., Schupp P., 1980, "Kombinatorial group theory". M.: Mir.

2. Gersten S. M., Short H., 1990, "Small cancellation theory and automatic groups". *Inventiones mathematicae* 102, pp. 305–334.

3. Bezverkhniy N. V., 1999, "The solvability of the membership problem into the cyclic subgroup of C(6)-group". *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, v. 5, N 1, pp. 39–46.

4. Parshikova E. V., 2001, "The solvability of the weak power conjugacy problem in $C(4)$-$T(4)$-group". *Algoritmicheskie problemi teorii grupp i polugrupp.* Publishing house of the Tula state pedagogical University, pp. 179–185.

5. Bezverkhniy V. N., 1994, "The normalizers of elements of C(p)-T(q)-group". *Algoritmicheskie problemi teorii grupp i polugrupp.* Publishing house of the Tula state pedagogical University, c.4–58.

6. Bezverkhniy N. V., 2012, "The solvability of the weak power conjugacy problem in C(3)-T(6)-group". *Diskretnaya matematika.*, v. 24, issue 4, pp. 27–46.

7. Bezverkhniy N. V., 2010, "Normal forms for the elements of infinite order in C(3)-T(6)-groups". *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta*, issue 1, pp. 6-25.

8. Magnus W., Karrass A., Solitar D., 1965, "Combinatorial group theory". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.*

9. Ol'shanskii, A. Yu., 1991, "Geometry of Defining Relations in Groups". *Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.*

10. Novikov P. S., 1955, "On algorithmic unsolvability of the word problem in the group theory". *Trudi Matematicheskogo instituta AN SSSR*, v. 44. pp. 1–444.

11. Kapovich I., may 1997, "Small cancellation groups and translation numbers". *Transactions of the American Mathematical Society*, V. 349, N 5, pp. 1851 — 1875.

12. Gluhov M. M., 2010, "The analysis of some publickey criptosistems using nonabelian groups". *Matematicheskie voprosi kriptografii.*, v.1, № 4, pp. 5–22.

13. Koo K. H., Lee S. J., Cheon J. H., Han J. W., Kang J., Park C., 2000, "New publickey criptosistem using braide groups". *CRIPTO 2000, Lect. Notes Comput Sci.*, v. 1880, pp. 166–183.

14. Paeng S. H., Ha K. C., Kim J. H., Chee S., Park C., 2001, "New public key criptosistem using finite nonabelian groups". *CRIPTO 2001, Lect. Notes Comput. Sci.*, v. 2139, pp. 470–485.

15. Bogley W. A., Pride S. J., 1992, "Aspherical relative presentations". *Pros. of the Edinburg Mathematical Society*, v. 35, pp. 1–39.

МГТУ им. Н. Э. Баумана.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 517.5

О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РАСЧЁТЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Л. В. Бессонов, Т. А. Кузнецова, С. В. Чумакова (г. Саратов)

Аннотация

В работе рассматривается класс нелинейных динамических моделей оболочек, нелинейность которых отражает гауссову кривизну поверхности; в случае когда нагрузки, действующие на оболочку меньше критических в любой момент времени. При этом любая неизвестная функция, входящая в уравнения системы, однозначно выражается через функцию прогиба, а область, определяемая серединной поверхностью оболочки, является ограниченной и имеет кусочно-гладкую границу. К этому классу уравнений относятся такие модели как модель Кирхгофа–Лява, уточняющая её модель Тимошенко, заданная как в перемещениях, так и в смешанной форме, модель отражающая связь полей деформации и температуры и другие модели.

Для таких моделей в качестве численного метода расчёта напряженно-деформированного состояния обсуждается метод последовательного нагружения, разработанный в 70-х годах XX века профессором В. В. Петровым, который сводит решение нелинейных уравнений к решению последовательности линейных уравнений. В работе обсуждаются вопросы, связанные с реализацией этого метода. Известно, что метод В. В. Петрова медленно сходится. Поэтому рассматриваются вопросы, связанные с улучшением сходимости. Далее, применение вариационных методов для решения линейных систем уравнений требует определения скорости сходимости этих методов, а также нахождения ортогональной системы функций, удовлетворяющей граничным условиям. Эти вопросы также рассматриваются в работе.

Ключевые слова: оболочечная конструкция, напряженно-деформированное состояние, нелинейные модели оболочек, метод последовательного возмущения параметров.

Библиография: 15 названий.

ABOUT NUMERICAL REALIZATION OF THE METHOD OF SUBSEQUENT PARAMETERS PERTURBATION FOR CALCULATING A STRESS-STRAIN STATE OF SHALLOW SHELLS

L. V. Bessonov, T. A. Kuznetsova, S. V. Chumakova (Saratov)

Abstract

The paper investigates a class of nonlinear dynamic shell models, which non-linearity reflects Gaussian curvature of a surface; in the case when loads are smaller than critical ones in every point in time. Moreover, every unknown function from the system of equations, can be uniquely identified through the deflection function. Domain that is defined by the middle shell surface is bounded with piecewise smooth boundary. Such models as Kirchhoff-Love model (that specify Tymoshenko model, defined both in transferences and mixed forma), a model that reflects the bond between deformation fields and temperature and others can represent that equation class.

The method of subsequent parameters perturbation developed by professor V. Petrov in 1970s is used as a numerical method for such models. This method brings the solution of nonlinear equations to the solution of a sequence of linear equations. The paper discusses problems connected with the realization of this method. It is known, that method of V. Petrov converges slowly. That is why questions of convergence improvement are examined. The usage of variation methods for solving systems of linear equations requires defined convergence speed and orthogonal system of functions that satisfies the boundary conditions. These questions are investigated in the paper as well.

Keywords: shell, the stress-strain state, nonlinear shell model, serial parameters perturbation method.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Данная работа посвящена описанию алгоритма численной схемы расчёта напряжённо-деформированного состояния геометрически нелинейных оболочек в докритической области параметров в динамическом случае. В основе этой численной схемы лежит метод последовательных нагружений, разработанный в 70-х годах В. В. Петровым [1]. Суть этого метода заключается в том, что решение нелинейной модельной задачи сводится к решению ряда линейных систем дифференциальных уравнений. Метод последовательных нагружений даёт значительное преимущество во времени по сравнению с примеяемыми ранее методами расчёта оболочечных конструкций. К недостаткам этого метода относится, во-первых, его медленная сходимость. Как показано в работе [2] порядок скорости сходимости совпадает с порядком разбиения нагрузки на малые составляющие. Поэтому метод В. В. Петрова нашёл широкое применение в случае, когда требовалась невысокая точность при решении модельной задачи. Вторым недостатком является тот факт, что метод не позволяет определить ту ветвь решения нелинейной задачи при переходе в закритическую область, которая отвечает минимальной потенциальной энергии оболочки. Поэтому нужно из каких-либо соображений знать, что вычисления ведутся в докритической области параметров.

Нужно сказать, что в отдельности эти недостатки были устранены в работах, опубликованных в последнее десятилетие. Так, в работе [2] была получена модификация метода В. В. Петрова, позволяющая на несколько порядков улучшить его сходимость. В работах [4–6] был разработан спектральный критерий потери устойчивости, который позволяет определить «слабые точки» — точки локальной потери устойчивости. Накопление таких точек позволяет говорить о том, что параметры оболочки приближаются к критическим.

Отметим, что модификация метода В. В. Петрова и спектральный критерий отличаются простотой численной схемы, но для их реализации необходимо строить ортонормированную систему функций, удовлетворяющих граничным условиям. Поэтому численная реализация этих методов в работах [4–6] проводилась в случае прямоугольных в плане пологих оболочек.

Приведённая в нашем случае численная схема использует модификацию метода В. В. Петрова и работает в случае произвольных в плане пологих оболочек.

Результаты расчёта обочечных конструкций произвольной конфигурации границы модифицированным методом В. В. Петрова в статическом случае приведены в работах одного из соавторов данной статьи [10–13].

Остановимся более подробно на отдельных моментах вышеизложенного.

В данной работе рассматривается класс динамических геометрически нелинейных моделей оболочечных конструкций, т.е. нелинейность которых отражает гауссову кривизну серединной поверхности оболочки, удовлетворящих ограничениям:

1. Все функции, входящие в уравнения модели, должны однозначно выражаться через функцию прогиба.
2. Серединная поверхность оболочки должна быть односвязной и компактной в $\mathbb{R}^3$ и ограничена простым жордановым контуром, складываемым алгебраическими кривыми.

Пусть Ω — область в плоскости XOY, которая определяется проекцией серединной поверхности оболочки и Γ — граница этой области. Будем предполагать, что Γ является кусочно-алгебраической кривой, т.е. $\Gamma = \sigma\Omega = \cup_i \Gamma_i$, где Γ_i — кривые, заданные алгебраическими уравнениями $\phi_i(x,y) = 0$.

В класс таких моделей входят модели Кирхгофа–Лява, Тимошенко, заданные как в перемещениях, так и в смешанной форме. Проанализируем схему расчёта, разработанную для этого класса нелинейных моделей, на примере динамической модели Кармана. Эта модель определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -D\Delta^2 W + L(W,F) + \Delta_k F + q, t \in [O;T], \\ \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(W,W) - \Delta_k W, \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями в форме Неймана

$$W(t,x,y)|_\Gamma = F(t,x,y)|_\Gamma = \left.\frac{\partial W(t,x,y)}{\partial \bar{\eta}}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial F(t,x,y)}{\partial \bar{\eta}}\right|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

и начальными условиями

$$\begin{gathered} W(0,x,y) = W_0, F(0,x,y) = F_0, \\ \tfrac{\partial W(0,x,y)}{\partial t} = W_1, \tfrac{\partial F(0,x,y)}{\partial t} = F_1, \end{gathered} \tag{3}$$

где D — цилиндрическая жесткость, определяемая по формуле $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (ν — коэффициент Пуассона), E — модуль Юнга, $\Delta^2\bullet = \Delta(\Delta\bullet)$, где Δ — оператор Лапласа, $L(W,F) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ — отражает гауссову кривизну деформированной серединной поверхности оболочки, $\Delta_k = k_y\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, k_x и k_y характеризуют кривизну поверхности оболочки вдоль соответствующих осей, q — величина нормальной нагрузки, W — функция прогиба, F — функция усилий.

Искомые функции — $W(t,x,y)$ и $F(t,x,y)$ ищутся в пространстве $L^\infty([0;T], H^2(\Omega)\times H^2(\Omega))$, где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева.

Будем предполагать, что нагрузки, действующие на оболочку не превосходят критических. То есть нагрузка такова, что сохраняется единственность решения модели на всём отрезке $[0;T]$. Под малостью нагрузки в этом смысле будем понимать нагрузку докритическую. То есть соответствующая нелинейная модель на временном интервале $[0;T]$ имеет единственное решение в пространстве $L^\infty([0;T], H^2(\Omega) \times H^2(\Omega))$ и это решение можно найти методом В. В. Петрова — методом последовательного нагружения (см. [1,3]).

Метод последовательных нагружений был предложен профессором В. В. Петровым. [1] Развитие этого метода получило широкое применение при расчёт напряженно-деформированных состояний тонкостенных оболочечных конструкций и, как следствие, прочности, устойчивости и долговечности конструкций. [3] В основе метода лежит простой факт: малым нагружения соответствуют малые прогибы. Нагрузку $\overline{q}$ представим в виде

$$\overline{q} = \sum_{i=0}^{N} \Delta\overline{q_i}, \tag{4}$$

где $||\Delta\overline{q_k}|| < \epsilon$ для всех $t \in [0;T]$.

Пусть на $n-1$ шаге получено решение (W_{n-1}, F_{n-1}), соответствующее нагрузке $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta q_i$. Запишем решение на шаге n в виде

$$
\begin{aligned}
W_n = W_{n-1} + \delta W_n = \textstyle\sum_{k=1}^{N} \delta W_k, \\
F_n = F_{n-1} + \delta F_n = \textstyle\sum_{k=1}^{N} \delta F_k.
\end{aligned} \tag{5}
$$

На шаге n нормальная нагрузка меняется на величину $\Delta\overline{q_n}$. В результате этого воздействия прогиб на n-ом шаге будет отличаться от прогиба на предшествующем шаге на δW_n, причём отличие это будет незначительным. Этот факт позволяет рассматривать для нахождения прогиба линейную систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w + L(w, F_{n-1}) + L(W_{n-1}, f) - \Delta_k f + \Delta q_n, t \in [0, T], \\
\\
\dfrac{1}{E}\Delta^2 f = -L(w, W_{n-1}) - \Delta_k w,
\end{cases} \tag{6}
$$

где F_{n-1} и W_{n-1} — известные функции, найденные на предыдущем шаге, а через w и f для упрощения записи обозначены искомые функции, упомянутые в (5) δW_n и δF_n соответственно.

При соответствующих исходной задаче граничных условиях последняя система решается одним из вариационных методов. Например, методом Бубнова–Галёркина. Известно, что посдеовательность функций (5) сходится в пространстве $L^{\infty}([0;T], H^2(\Omega) \times H^2(\Omega))$ к решению нелинейной модели (1). [2] Но эта сходимость является медленной. В связи с этим при решении системы (1) методом последовательных нагружений приходится решать задачу, модифицируя ход метода с целью улучшения сходимости.

Далее встают задачи по решению системы (6) методом Бубнова–Галёркина, связанные с построением ортогональной системы функций в $L^2(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям и определяющим скорость сходимости метода Бубнова–Галёркина.

Задачи такого рода встают при решении любой из нелинейных моделей из указанного нами класса моделей.

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с решением этих задач.

Отметим, что подобные вопросы встают и при решении статических геометрическии нелинейных моделей оболочек (см. [4,5]).

2. Модификации метода последовательного нагружения

В работе [6] рассматривалась модификация метода последовательного нагружения, улучшающая сходимость при малых временных затратах. Пусть (W^*_{n-1}, F^*_{n-1}) — приближенное решение, полученное модифицированным методом на шаге $n-1$. Пусть $(\partial W_n, \partial F_n)$ — решение линеаризованной в точке (W^*_{n-1}, F^*_{n-1}) системы уравнений с граничными условиями в форме Неймана.

Тогда будем получать приближённое решение с «недостатком» на шаге n по формуле

$$W^-_n = W^*_{n-1} + \delta W_n. \tag{7}$$

Решение с «избытком» получим по формуле

$$W^+_n = W^*_{n-1} + \lambda\delta W_n, \tag{8}$$

где $\lambda > 1$ и является корнем уравнения

$$\iint_{\Omega} K_1(F_{n-1}^* + f, W_{n-1}^* + \lambda w, q_n)(W_{n-1}^* + \lambda w)dxdy = 0,$$

где $K_1(f, w, q) = 0$ — первое уравнение системы Кармана (1), $q_n = \sum_{i=0}^{n} \Delta q_i$, а через w и f обозначены упомянутые в (7) и (8) ∂W_n и ∂F_n соответственно.

В [7] показано, что такое значение λ будет отвечать минимальному значению потенциальной энегрии оболочки.

Теперь приближенное решение W_n^* для шага n получим по формуле

$$W_n^* = \frac{W_n^+ + W_n^-}{2}.$$

При этом функцию усилий F_n^* для шага n получим как решение второго уравнения системы Кармана (1).

В [6] что такого сорта модификация даёт значительную экономию во времени по сравнению с немодифицированным методом последовательного нагружения и некоторыми известными его модификациями, например, по сравнению с предложенной в [8] модификацией.

3. Вопросы гладкости решений линейных задач и вопросы сходимости метода Бубнова–Галёркина

Метод последовательного нагружения за счёт линейной аппроксимации по отдельным параметрам позволяет строить последовательность функций $\{w_n\}$, которые являются решением соответствующего линейного операторного уравнения вида

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w + L_n(w) + f_n, t \in [O;T], \\ \\ w(0, \bullet) = w_0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(0, \bullet) = w_1, \end{cases} \tag{9}$$

где $L_n(w) = \frac{\partial^2 F_n}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F_n}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, а $f_n = \Delta_k F_n + q$ и $\{F_n\}$ — последовательность функций, полученная каким-либо методом, сходящаяся в пространстве $L^\infty([0;T], H^2(\Omega))$ к функции прогиба F. В работе [2] в качестве последовательности таких функций была взята последовательность функций, получаемых методом последовательных нагружений. В данном случае возьмём последовательность функций $\{F_n\}$, получаемую методом Бубнова–Галёркина и исследуем вопросы гладкости и сходимости решения. Известно [9], что такая последовательность сходится в пространстве $L^\infty([0;T], H^2(\Omega))$, где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева, к функции усилий F. Относительно гладкости фукнций w_n, полученных в результате решения линейных операторных уравнений вида (9) имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что:*

1. *Функции $\frac{\partial^2 F_n}{\partial x_i \partial y_j}$ непрерывны по времени.*
2. *Оператор $A_n = D\Delta^2 - L_n$ является положительно определённым.*
3. *При любом $t \in [0;T]$ функции w_0, w_1, q принадлежат области определения оператора Δ^{2r}, где действие опреатора Лапласа рассматривается в пространстве $H_0^2(\Omega)$.*

Тогда, для любого $t \in [0;T]$ решение w_n задачи (9) принадлежит области определения оператора Δ^{2r}.

Рассмотрим вопрос сходимости метода Бубнова–Галёркина для операторного уравнения (9). Пусть выполняются условия теоремы 1. Метод Бубнова–Галёркина для операторного уравнения (10) заключается в определени последовательности функций

$$w_{m,n}(t,x,y) = \sum_{k=1}^{N} \beta_{k,n}(t) e_k, \tag{10}$$

сходящихся к решению w_n, где $\{e_k\}$ — система собственных функций оператора Δ, а коэффициенты $\beta_{k,n}(t)$ находятся из условий:

1. $\left(\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w_{n,N}}{\partial t^2}, e_r\right) + \left(D\Delta^2 w_{n,N} + L_n(w_{n,N}), e_r\right) = (f_n, e_r), r = \overline{1,N}$;
2. $w_{n,N}(0,\bullet) = w_{0,N}, \frac{\partial w_{n,N}}{\partial t}(0,\bullet) = w_{1,N}$,

где $w_{0,N} \longrightarrow w_0, w_{1,N} \longrightarrow w_1,$ при $N \longrightarrow \infty$.

Относительно порядка скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина при сделанных выше предположениях имеет место теорема.

Теорема 2. *Скорость сходимости последовательности функций* $\{w_{n,N}\}$ *вида* (10) *к решению* w_n *операторного уравнения* (9) *в пространстве* $L^\infty([0;T], H_0^2(\Omega))$ *имеет порядок* $O\left(\frac{1}{N^{2r-1}}\right)$.

Доказательство теоремы 2 см. в работе [2].

4. Построение ортонормированной системы функций для решениия задачи методом Бубнова–Галёркина

При $n = 0$ функции W_0 и F_0 являются решением линейной системы уравнений, полученной в результате линеаризации системы (1) при $q = \Delta q_0$. Линейные системы вида (6) решаются методом Бубнова–Галёркина. Тут следует отметить, что для применения метода Бубнова–Галёркина потребуется построение полной ортнормированной системы базисных функций из $L^2(\Omega)$, отвечающих граничным условиям задачи. Это несложно сделать, к примеру, для прямоугольных в плане оболочек. В самом деле, для оболочки, серединная поверхность которой определена как прямоугольная область $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le a \;\&\; 0 \le y \le b\}$, в качестве такой системы подойдёт, к примеру, следующая система

$$p_{m,l} = \sin\frac{2\pi m}{a} \sin\frac{2\pi l}{b},\ m = 1,2,\ldots,\ l = 1,2,\ldots.$$

В случае оболочечной конструкции с произвольной конфигурацией границ, удовлетворяющей лишь условиям, описанным во введении, задача нахождения такой полной ортнормированной системы базисных функций из $L^2(\Omega)$ существенно усложняется.

Построим линейно независимую систему функций, определенных в области Ω и удовлетворяющих граничным условиям задачи Коши (1). С этой целью введём вспомогательную функцию $\phi(x,y)$.

Пусть граница области Ω является кусочно алгебраическим линией, т.е. $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$, где Γ_i определяется алгебраическим уравнением $\phi_i(x,y) = 0$ и рассмаотри нулевые граничные условия вида:

$$\begin{cases} W|_\Gamma = 0, & \left.\dfrac{\partial W}{\partial \bar\eta}\right|_\Gamma = 0, \\ F|_\Gamma = 0, & \left.\dfrac{\partial F}{\partial \bar\eta}\right|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда вспомогательная функция будет иметь вид

$$\phi(x,y)=\prod_k \phi_k(x,y). \tag{12}$$

Определим систему функций $\{p_{i,j}(x,y)\}$ следующим образом:

$$\mathcal{P}=\{p_{i,j}(x,y):p_{i,j}(x,y)=\phi^2(x,y)x^iy^j\}, \qquad i\in\mathbb{N}_+, \qquad j\in\mathbb{N}_+.$$

Выполним процедуру понижения размерности мультииндекса. Сведём мультииндекс (i,j) системы функций $\mathcal{P}$ к одномерному индексу m как показано в [10-13]. Такая система будет линейно независимой. Теперь выполним ортогонализацию системы $\mathcal{P}$:

$$\begin{gathered}\widehat{\mathcal{R}}=\Big\{\hat r_m(x,y):\hat r_m(x,y)=\tfrac{\tilde r_m(x,y)}{\|\tilde r_m(x,y)\|_{L_2}},\ \tilde r_0(x,y)=r_0,\\ \tilde r_m(x,y)=r_m-\sum_{j=0}^{m-1}\langle r_m,r_j\rangle r_m(x,y)\Big\},\end{gathered} \tag{13}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает

$$\langle u,v\rangle=\frac{\iint\limits_\Omega u(x,y)v(x,y)dxdy}{\iint\limits_\Omega v(x,y)v(x,y)dxdy}. \tag{14}$$

Полученная система функций $\widehat{\mathcal{R}}$ является ортонормированной и удовлетворяет краевым граничным условиям задачи Коши для модели Кармана, взятой для оболочки произвольной конфигурации.

На каждом шаге метода последовательного нагружения, кроме возможно первого, решается задача с граничными условиями в форме Неймана. В этом случае вспомогательная функция будет выглядеть следующим образом

$$\phi(x,y)=\prod_k \phi_k(x,y). \tag{15}$$

Заметим, что в данной работе не планировались примеры численной реализации модифицированного метода В. В Петрова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

2. Кузнецов В. Н. Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций : дис. ... д-ра техн. наук. Саратов, 2000.

3. Петров В. В., Овчинников И. Г., Иноземцев В. К. Деформирование элементов конструкций из нелинейного равномодульного неоднородного материала. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988.

4. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. О численной реализации метода последовательных нагружений при расчете геометрически нелинейных оболочек // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 27–43.

5. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. Операторные методы в нелинейной динамике // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 70–80.

6. Чумакова С. В., Пшенов Д. А., Шабанов Л. Е. К вопросу улучшения сходимости метода В. В. Петрова – метода последовательного возмущения параметров // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002. С. 61–64.

7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М. : Издательство технико-теоретической литературы, 1967.

8. Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. И. Задача Коши для механических систем с конечным числом степеней свободы как задача продолжения по наилучшему параметру // ПММ. 1994. Т.58. Вып.6. С. 14–21.

9. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М. : Мир, 1972. 104 с.

10. Бессонов Л. В. Численная реализация метода последовательного возмущения параметров при расчете напряжённо-деформированного состояния оболочечной конструкции в случае жесткого закрепления краев оболочки // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т.15. вып.1. С. 74–79. DOI 10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79

11. Бессонов Л. В. Численная реализация алгоритма спектрального критерия локальной потери устойчивости оболочечной конструкции // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 7. С. 3–9.

12. Бессонов Л. В. Численная реализация спектрального критерия определения точек локальной потери устойчивости оболочечной конструкции // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), Москва, 2015. С. 223–225.

13. Bessonov L. V. Numerical Realization of The Method of Subsequent Parameters Perturbation for Calculating a Stress-Strain State of The Shell // Applied Mechanics and Materials. 2015. Т. 799–800. С. 656–659.

14. Бессонов Л. В. Об операторном подходе при расчёте напряжённо-деформированного состояния оболочечных конструкций // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань. 2015. С. 467–469.

15. Бессонов Л. В. Геометрические параметры и точки локальной потери устойчивости цилиндрической оболочки // Студенческая наука: перекрёстки теории и практики. Материалы I Внутривузовской научно-практической конференции студентов и аспирантов. Саратов. 2013. С. 20–23

REFERENCES

1. Petrov V. V., 1975, Metod posledovatel'nykh nagruzhenii v nelineinoi teorii plastin i obolochek. [Successive loading method in nonlinear theory of plates and shells] Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta. (in Russian)

2. Kuznetsov V. N., 2000, Metod posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov v prilozhenii k raschetu dinamicheskoi ustoichivosti tonkostennykh obolochechnykh konstruktsii [Method of sequential perturbation of parameters applied to the simulation of dynamic stability thin-walled shell structures] : dis. . . . d-ra tekhn. nauk. Saratov. (in Russian)

3. Petrov V. V., Ovchinnikov I. G., Inozemtsev V. K., 1988, Deformirovanie elementov konstruktsii iz nelineinogo ravnomodul'nogo neodnorodnogo materiala. [The deformation of structural elements of the same–module non-linear inhomogeneous material] Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta. (in Russian)

4. Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V., 2010, O chislennoi realizatsii metoda posledovatel'nykh nagruzhenii pri raschete geometricheski nelineinykh obolochek [About numerical realization of the successive loading method for calculating the geometrically nonlinear shells], Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam: mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta. Vyp. 6. S. 27–43. (in Russian)

5. Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V., 2003, Operatornye metody v nelineinoi dinamike [Operator methods in nonlinear dynamics], Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta. Vyp. 1. S. 70–80. (in Russian)

6. Chumakova S. V., Pshenov D. A., Shabanov L. E., 2002, K voprosu uluchsheniia skhodimosti metoda V. V. Petrova – metoda posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov [To the problem of improving the convergence of the Petrovs method – the method of successive perturbation of parameters], Problemy prochnosti elementov konstruktsii pod deistviem nagruzok i rabochikh sred: Mezhvuz. nauch. sb. Saratov: Izd-vo SGTU. S. 61–64. (in Russian)

7. Mikhlin S. G., 1967, Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike. [Variational methods in mathematical physics] M. : Izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury. (in Russian)

8. Kuznetsov E. B., Shalashilin V. I. 1994, Zadacha Koshi dlia mekhanicheskikh sistem s konechnym chislom stepenei svobody kak zadacha prodolzheniia po nailuchshemu parametru [The Cauchy problem for mechanical systems with a finite number of degrees of freedom as the problem of continuing on the best parameter], PMM. T.58. Vyp.6. S. 14–21. (in Russian)

9. Lions Zh. L., 1972, Nekotorye metody resheniia nelineinykh kraevykh zadach. [Methods of solving nonlinear boundary value problems] M. : Mir. 104 s. (in Russian)

10. Bessonov L. V., 2015, Chislennaia realizatsiia metoda posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov pri raschete napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia obolochechnoi konstruktsii v sluchae zhestkogo zakrepleniia kraev obolochki [Numerical Implementation of Method of Subsequent Perturbation of Parameters for Computation of Stress-Strain State of a Shell Rigidly Fixed on the Boundaries], Izv. Sarat. un-ta Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. T.15. vyp.1. P. 74–79. (in Russian) DOI 10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79

11. Bessonov L. V., 2012, Chislennaia realizatsiia algoritma spektral'nogo kriteriia lokal'noi poteri ustoichivosti obolochechnoi konstruktsii [The numerical implementation of the algorithm of spectral criteria for the local buckling of the shell structure], Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta. Vyp. 7. S. 3–9. (in Russian)

12. Bessonov L. V., 2015, Chislennaia realizatsiia spektral'nogo kriteriia opredeleniia tochek lokal'noi poteri ustoichivosti obolochechnoi konstruktsii [Numerical realization of the spectral

criterion for determining the points of local buckling of the shell structure], Materialy XIX Mezhdunarodnoi konferentsii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnym sistemam (VMSPPS'2015), Moskva. S. 223–225. (in Russian)

13. Bessonov L. V., 2015, Numerical Realization of The Method of Subsequent Parameters Perturbation for Calculating a Stress-Strain State of The Shell, Applied Mechanics and Materials. T. 799–800. P. 656–659.

14. Bessonov L. V., 2015, Ob operatornom podhode pri raschete napryagenno-deformirovannogo sostoyaniya obolochechnyh konstrukciy, XI Vserossiiskiy s'ezd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mehaniki. Kazan. S. 467–469. (in Russian)

15. Bessonov L. V., 2013, Geometriceskie parametry i tochki localnoy poteri ustoychivosti cilindricheskoy obolochki, Studencheskaya nauka: perekrestki teorii i praktiki. Materialy I Vnutrivuzovskoi nauchno-prakticheskoy konferencii studentov i aspirantov. Saratov. S. 20–23 (in Russian)

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского.
Саратовский государственный аграрного университет имени Н. И. Вавилова.
Получено 11.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 517.36

ОТ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДО ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Д. Брюно (г. Москва)

Аннотация

Пусть в вещественном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n = \{X\}$ задано m однородных вещественных форм $f_i(X)$, $i = 1, \ldots, m$, $2 \leqslant m \leqslant n$. Выпуклая оболочка множества значений $G(X) = (|f_1(X)|, \ldots, |f_m(X)|) \in \mathbb{R}_+^m$ для целочисленных $X \in \mathbb{Z}^n$ во многих случаях является выпуклым многогранным множеством, граница которого для $||X|| <$ const вычисляется с помощью стандартной программы. Точки $X \in \mathbb{Z}^n$, для которых значения $G(X)$ лежат на этой границе, названы граничными. Они являются наилучшими диофантовыми приближениями для корневых множеств указанных форм. Их вычисление даёт глобальное обобщение цепной дроби. Для $n = 3$ обобщить цепную дробь безуспешно пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Брун, Арнольд и многие другие.

Пусть $p(\xi)$ — целый неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен степени n и λ — его корень. Набор основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ можно вычислить по граничным точкам некоторой совокупности линейных и квадратичных форм, построенных по корням многочлена $p(\xi)$. До сих пор эти единицы вычислялись только для $n = 2$ (с помощью обычных цепных дробей) и $n = 3$ (с помощью алгоритмов Вороного). Каждая единица определяет автоморфизм граничных точек в $\mathbb{R}^n$ и автоморфизм их образов в $\mathbb{R}_+^m$. В логарифмической проекции $\mathbb{R}_+^m$ на $\mathbb{R}^{m-1}$ можно найти фундаментальную область для группы вторых автоморфизмов, соответствующих единицам.

С помощью этих конструкций можно находить целочисленные решения диофантовых уравнений специального вида. Аналогично вычисляются все указанные объекты для других колец поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Приведены примеры.

Наш подход обобщает цепную дробь, позволяет вычислить наилучшие совместные приближения, основные единицы алгебраических колец поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ и все решения некоторого класса диофантовых уравнений для любого n.

Ключевые слова: обобщение цепной дроби, диофантовы приближения, набор основных единиц, фундаментальная область, диофантово уравнение.

Библиография: 16 названий.

FROM DIOPHANTINE APPROXIMATIONS TO DIOPHANTINE EQUATIONS

A. D. Bruno (Moscow)

Abstract

Let in the real n-dimensional space $\mathbb{R}^n = \{X\}$ be given m real homogeneous forms $f_i(X)$, $i = 1, \ldots, m$, $2 \leqslant m \leqslant n$. The convex hull of the set of points $G(X) = (|f_1(X)|, \ldots, |f_m(X)|)$ for integer $X \in \mathbb{Z}^n$ in many cases is a convex polyhedral set. Its boundary for $||X|| <$ const can be computed by means of the standard program. The points $X \in \mathbb{Z}^n$ are called boundary points if $G(X)$ lay on the boundary. They correspond to the best Diophantine approximations X for the given forms. That gives the global generalization of the continued fraction. For $n = 3$

Euler, Jacobi, Dirichlet, Hermite, Poincaré, Hurwitz, Klein, Minkowski, Brun, Arnold and a lot of others tried to generalize the continued fraction, but without a succes.

Let $p(\xi)$ be an integer real irreducible in $\mathbb{Q}$ polynomial of the order n and λ be its root. The set of fundamental units of the ring $\mathbb{Z}[\lambda]$ can be computed using boundary points of some set of linear and quadratic forms, constructed by means of the roots of the polynomial $p(\xi)$. Similary one can compute a set of fundamental units of other rings of the field $\mathbb{Q}(\lambda)$. Up today such sets of fundamental units were computed only for $n = 2$ (using usual continued fractions) and $n = 3$ (using the Voronoi algorithms).

Our approach generalizes the continued fraction, gives the best rational simultaneous approximations, fundamental units of algebraic rings of the field $\mathbb{Q}(\lambda)$ and all solutions of a certain class of Diophantine equations for any n.

Keywords: generalization of continued fraction, Diophantine approximations, set of fundamental units, fundamental domain, Diophantine equation.

Bibliography: 16 titles.

1. Цепная дробь

Пусть α_0 и α_1 — натуральные числа. Для нахождения их наибольшего общего делителя используется алгоритм Евклида последовательного деления с остатком:

$$\alpha_0 = a_0\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 = a_1\alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_2 = a_2\alpha_3 + \alpha_4, \dots$$

где натуральные числа $a_0, a_1, a_2, \dots$ суть неполные частные. Это алгоритм разложения числа $\alpha = \alpha_0/\alpha_1$ в правильную цепную дробь [1], и он применим к любым вещественным числам α. При этом $a_0 = [\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α, $a_1 = [1/(\alpha - a_0)]$, …, т. е.

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}, \tag{1}$$

и

$$\begin{pmatrix}\alpha_{k+1}\\ \alpha_{k+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -a_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \alpha_{k+1}\end{pmatrix}, \quad a_k = [\alpha_k/\alpha_{k+1}].$$

Если разложение (1) оборвать на a_k и свернуть эту оборванную цепную дробь в рациональное число p_k/q_k, то получается **подходящая дробь**, которая даёт наилучшее рациональное приближение к числу α. При этом

$$\begin{pmatrix}p_k & p_{k-1}\\ q_k & q_{k-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{k-1} & p_{k-2}\\ q_{k-1} & q_{k-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_k & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}a_k & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -a_k\end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix}p_k & p_{k-1}\\ q_k & q_{k-1}\end{pmatrix} = \pm 1,$$

т.е. векторы (α_k, α_{k+1}) и (p_k, q_k) принадлежат сопряжённым плоскостям, и пара векторов (p_k, q_k), (p_{k-1}, q_{k-1}) может служить базисом в одной из них. Лагранж [1, § 10] доказал, что для квадратичных иррациональностей α разложение в цепную дробь периодично (и обратно), то есть последовательность неполных частных $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, начиная с какого-то номера состоит из повторяющегося отрезка $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+t}$.

Итак, разложение числа в цепную дробь: просто; дает наилучшие рациональные приближения к числу; конечно для рационального числа; периодично для квадратичных иррациональностей [1, § 10]; устроено как для почти всех чисел [1, гл. III] для кубических иррациональностей [2]. Кроме того, оно обладает ещё рядом замечательных свойств.

2. Глобальное обобщение цепной дроби и наилучшие диофантовы приближения

Обобщить цепную дробь для векторов безуспешно пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Брун, Арнольд и многие другие [3,4], [5, п. 1.2]. Только пошаговые алгоритмы Вороного [6] безотказны, но сложны.

В [5,7,8] предложено следующее обобщение цепной дроби.

Пусть в n-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $X = (x_1, \dots, x_n)$ заданы m однородных вещественных форм (т. е. многочленов от переменных) $f_1(X), \dots, f_m(X)$, $2 \leqslant m \leqslant n$.

Модули $g_i(X) = |f_i(X)|$ форм $f_i(X)$, $i = 1, \dots, m$, задают отображение $G(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X))$ пространства $\mathbb{R}^n$ в положительный ортант $\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^m_+$ в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами $S = (s_1, \dots, s_m)$: $s_i = g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, \dots, m$. При этом целочисленная решётка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbf{Z} \subset \mathbf{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbf{H}$ множества $\mathbf{Z} \backslash 0$ является выпуклым множеством. Все целочисленные точки $X \in \mathbb{Z}^n \backslash 0$, отображающиеся на границу $\partial\mathbf{H}$ множества $\mathbf{H}$, назовём **граничными**.

Задача 1. *Найти все граничные точки X.*

Решение задачи 1. В дальнейшем ограничимся случаями, когда выпуклое множество $\mathbf{H}$ является многогранным, т.е. его граница $\partial\mathbf{H}$ состоит из вершин, рёбер, граней различных размерностей и не содержит непрерывных «кривых» частей. В этих случаях граница $\partial\mathbf{H}$ вычисляется с помощью стандартных программ для вычисления выпуклых многограных оболочек [9,10]. Это и даёт алгоритмическое обобщение цепной дроби на любую размерность. Примеры см. в [5].

В частности, это даёт возможность вычислить наилучшие совместные рациональные приближения $q_1/q_0, \dots, q_m/q_0$ к вещественным числам $\beta_1, \dots, \beta_m$, где $q_0, q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Z}$ и $f_i(q_0, q_i) = q_0\beta_i - q_i$, $i = 1, \dots, m$. Здесь $m = m$ и $n = m + 1$.

Пример 1. *Пусть $f_1 = x_1\alpha - x_2$, $f_2 = x_1$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Здесь $n = m = 2$. Каждой вершине ломаной $\partial\mathbf{H}$ с $x_1 = p$, $x_2 = q \in \mathbb{Z}_+$ соответствует подходящая дробь q/p цепной дроби числа α. Эта точка (x_1, x_2) является граничной. Но, вообще говоря, не каждой подходящей дроби s/r, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ цепной дроби числа α соответствует вершина $x_1 = r$, $x_2 = s$ ломаной $\partial\mathbf{H}$.*

Гипотеза. *Если все $f_1, \dots, f_m$ суть линейные и квадратичные формы, то граница $\partial\mathbf{H}$ не имеет непрерывных кривых участков, т. е. является многогранной.*

Более того, до сих пор неизвестно ни одного набора форм $f_1, \dots, f_m$, для которого граница $\partial\mathbf{H}$ не была бы многогранной.

3. Основные единицы кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$

Пусть дан целый неприводимый в $\mathbb{Q}$ вещественный многочлен

$$p(\xi) = \xi^n + b_1\xi^{n-1} + \dots + b_{n-1}\xi + b_n \tag{2}$$

с целыми коэффициентами b_i, т. е. он не разлагается в произведение двух нетривиальных многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Ему соответствует кольцо $\mathbb{Z}[\lambda]$ чисел вида

$$\xi(X) = x_1 + x_2\lambda + \dots + x_n\lambda^{n-1} \tag{3}$$

с целыми коэффициентами x_i, где λ — корень многочлена (2) и $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. Каждому числу (3) соответствует квадратная матрица $D(\xi) = (d_{ij})$:

$$\lambda^i \xi(X) = \sum_{j=0}^{n-1} d_{ij} \lambda^j, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Определитель $\det D(\xi)$ называется нормой числа (3) и обозначается $N(\xi)$. Норма произведения чисел равна произведению их норм: $N(\xi_1 \cdot \xi_2) = N(\xi_1) \cdot N(\xi_2)$. Те числа (3), у которых норма $N(\xi) = \pm 1$, называются единицами [11, гл. II]. В дальнейшем предполагаем, что среди корней многочлена $p(\xi)$ нет единиц. Существует такой набор единиц $\Sigma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$, что всякая единица $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\lambda]$ однозначно представляется в виде

$$\varepsilon = \pm \varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_r^{a_r}, \tag{4}$$

где a_i — целые числа. Эти единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ называются основными.

Задача 2. *Для фиксированного многочлена* (2) *найти набор основных единиц кольца* $\mathbb{Z}[\lambda]$.

Решение задачи 2. Пусть неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен (2) имеет l вещественных корней λ_1, …, λ_l и k пар комплексно сопряжённых корней λ_{l+1}, …, λ_{l+k}, $\bar{\lambda}_{l+1}$, …, $\bar{\lambda}_{l+k}$, $l + 2k = n$. Здесь $l \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Рассмотрим $m = k + l$ форм

$$f_i(X) = \langle L_i, X \rangle, \quad i = 1, \ldots, l,$$
$$f_{l+j}(X) = \langle K_{l+j}, X \rangle \left\langle \bar{K}_{l+j}, X \right\rangle, \quad j = 1, \ldots, k,$$

где

$$L_i = \left(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^{n-1}\right), \quad \langle L_i, X \rangle = x_1 + \lambda_i x_2 + \ldots + \lambda_i^{n-1} x_n,$$
$$K_{l+j} = \left(1, \lambda_{l+j}, \lambda_{l+j}^2, \ldots, \lambda_{l+j}^{n-1}\right), \quad \bar{K}_{l+j} = \left(1, \bar{\lambda}_{l+j}, \bar{\lambda}_{l+j}^2, \ldots, \bar{\lambda}_{l+j}^{n-1}\right).$$

По теореме Дирихле [11, гл. II, § 4, п. 3] для многочлена (2) число основных единиц $r = k + l - 1$. Далее предполагаем, что $m = k + l \geqslant 2$. Ибо, если $k + l \leqslant 1$, то $r \leqslant 0$ и по теореме Дирихле основные единицы отсутствуют.

Теорема 1 ([11, гл. II, § 1, п. 2]). *Для чисел* (3) *с* $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$N(\xi) = f(X) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(X) \ldots f_m(X). \tag{5}$$

Поэтому для всех единиц вида (3)

$$f(X) = \pm 1 \text{ и } g(X) \stackrel{\text{def}}{=} |f(X)| = 1. \tag{6}$$

Пусть $\check{\mathbb{Z}}^n$ — множество точек $X \in \mathbb{Z}^n$ со свойством (6). Рассмотрим для него (т. е. для $X \in \check{\mathbb{Z}}^n$) конструкции раздела 1: множество $\check{\mathbf{Z}}$ значений

$$G(X) = (g_1(X), \ldots, g_m(X)) \subset \mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m,$$

где $g_i(X) = |f_i(X)|$, $i = 1, \ldots, m$, выпуклую оболочку $\check{\mathbf{H}}$ множества $\check{\mathbf{Z}}$ и её границу $\partial \check{\mathbf{H}}$. Граница $\partial \check{\mathbf{H}}$ имеет размерность $m - 1 = r$, не имеет кривых участков и состоит из вершин, рёбер и граней.

Теорема 2. *Все грани границы $\partial\check{\mathbf{H}}$ являются симплексами, а значение $G_0 = (1, 1, \ldots, 1)$ является её вершиной.*

Пусть Δ — некоторая $(m-1)$-мерная грань границы $\partial\check{\mathbf{H}}$, содержащая вершину $G_0 = (1, 1, \ldots, 1)$, а $R_1, \ldots, R_{m-1}$ — её рёбра, содержащие G_0.

Теорема 3. *Пусть G_i — вторая вершина ребра R_i, отличная от вершины G_0, $i = 1, \ldots, m-1$. Числа (3), у которых $G(X) = G_i$, $i = 1, \ldots, m-1$, образуют набор основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$.*

Следовательно, для вычисления основных единиц надо на некотором ограниченном множестве $||X|| < \mathrm{const}$, $X \in \check{\mathbb{Z}}^n$ вычислить кусок границы $\partial\check{\mathbf{H}}$, содержащий $(m-1)$-мерную грань Δ.

Каждому числу (3) соответствует матрица

$$T(\xi) = x_1 E + x_2 B + \ldots + x_n B^{n-1},$$

где E — единичная, а B — это матрица, сопровождающая многочлен (2):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \cdots & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Если число (3) является единицей, то матрица $T(\xi)$ унимодулярна и линейное преобразование $X^* = T(\xi)X$ в $\mathbb{R}^n$ является автоморфизмом множества $\mathbf{H}$ и индуцирует автоморфизм

$$s_i^* = g_i(X)s_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

множества $\check{\mathbf{H}}$ в $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m$. Следовательно, каждой единице ε соответствует период $T(\varepsilon)$ обобщённой цепной дроби. Количество независимых периодов равно $m-1$. Это — обобщение теоремы Лагранжа [1, § 10], доказанной для $n = l = 2$, $k = 0$, т. е. $m = k + l = 2$.

4. Фундаментальная область

В поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ всякая целая степень $t \geqslant n$ числа ξ из (3) однозначно записывается в виде многочлена от λ степени $n-1$, ибо

$$\lambda^n = -\left(b_n + b_{n-1}\lambda + \ldots + b_1\lambda^{n-1}\right).$$

Поэтому отношение двух многочленов от λ однозначно записывается в виде многочлена от λ степени $n-1$.

Теорема 4. *Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Q}^n$ и $\xi(X)\cdot\xi(Y) = \xi(Z)$, тогда $f_i(X) \cdot f_i(Y) = f_i(Z)$, $i = 1, \ldots, m$.*

Следствие 1. *В условиях теоремы 4 $g_i(X) \cdot g_i(Y) = g_i(Z)$, $i = 1, \ldots, m$.*

Логарифмическая замена

$$h_i(X) = \ln g_i(X), \quad i = 1, ..., m, \quad H \stackrel{\mathrm{def}}{=} (h_1, \ldots, h_m)$$

взаимно однозначно переводит $\mathbf{S} = \mathbb{R}_+^m$ в $\mathbb{R}^m$. При этом $(m-1)$-мерная граница $\partial\mathbf{H}$ многогранного множества $\mathbf{H}$ переходит в $(m-1)$-мерную поверхность, которая взаимно однозначно проектируется на $\mathbb{R}^{m-1} = \{H'\}$, где $H' \stackrel{\text{def}}{=} (h_1, \ldots, h_{m-1})$.

На $\mathbb{R}^{m-1}$ автоморфизм (7) принимает вид

$$h_i^* = \ln g_i(X) + h_i, \quad i = 1, \ldots, m-1, \tag{8}$$

т. е. является параллельным переносом. Единицы кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ образуют абелеву группу по умножению. По теореме 4 их логарифмы H образуют абелеву группу по сложению. В $\mathbb{R}^{m-1}$ имеется фундаментальная область $\mathcal{F}$ относительно сдвигов (8) этой группы. Пусть m-мерные векторы G_i, $i = 1, \ldots, m-1$, соответствующие основным единицам теоремы 3, имеют вид $G_i = (g_{1i}, \ldots, g_{mi})$. Положим

$$\Gamma_i = (\ln g_{1i}, \ldots, \ln g_{m-1,i}), \quad i = 1, \ldots, m-1. \tag{9}$$

Теорема 5. *В $\mathbb{R}^{m-1}$ фундаментальная область относительно сдвигов* (8), (9) — *это* $(m-1)$-*мерный «куб»*

$$\mathcal{F} = \left\{H' = \mu_1\Gamma_1 + \ldots + \mu_{m-1}\Gamma_{m-1},\ 0 \leqslant \mu_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, m-1\right\}. \tag{10}$$

При вычислении границы выпуклой оболочки некоторого множества точек трудности возрастают вместе с ростом количества точек. Чтобы уменьшить эти трудности можно вычисления разбить на следующие 6 шагов.

Шаг 1. Сначала в кольце $\mathbb{Z}[\lambda]$ находим все единицы с $X \in \mathbb{Z}^n$ из области $||X|| < \text{const}$, вычисляя значения $g(X)$ в этих X.

Шаг 2. Затем на множестве единиц $\{\check{X}\}$ надо вычислить границу $\partial\check{\mathbf{H}}$ их выпуклой оболочки $\check{\mathbf{H}}$.

Шаг 3. По теореме 3 из $\partial\check{\mathbf{H}}$ выделяем набор основных единиц, представленных в $\mathbf{S}$ вершинами $G_1, \ldots, G_{m-1}$.

Шаг 4. По теореме 5 находим фундаментальную область (10).

Шаг 5. Теперь выпуклая оболочка значений $G(X)$ с $\xi(X) \in \mathbb{Z}[\lambda]$ вычисляется только по тем X, у которых $H'(X)$ попадают в фундаментальную область (10) и её близкую окрестность.

Шаг 6. По этой части границы $\partial\mathbf{H}$ восстанавливается вся граница $\partial\mathbf{H}$ с помощью периодов G_i, $i = 1, \ldots, m-1$, соответствующих основным единицам, или с помощью сдвигов (8).

5. Диофантовы уравнения

Многочлену $p(\xi)$ степени n из (2) соответствует форма $f(X)$ из (5) степени n от n переменных $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Её коэффициенты являются многочленами от коэффициентов b_i многочлена (2). Так, при $n = 2$

$$f(X) = x_1^2 - b_1x_1x_2 + b_2x_2^2,$$

при $n = 3$

$$f(X) = x_1^3 - b_1x_1^2x_2 + b_2x_1x_2^2 - b_3x_2^3 + \left(b_1^2 - 2b_2\right)x_1^2x_3 + (3b_3 - b_1b_2)x_1x_2x_3 - \\ - b_1b_2x_2^2x_3 + \left(b_2^2 - 2b_1b_3\right)x_1x_3^2 - b_2b_3x_2x_3^2 + b_3^2x_3^3.$$

Для любого n при $x_3 = \ldots = x_n = 0$ имеем

$$f(X) = x_1^n - b_1 x_1^{n-1} x_2 + b_2 x_1^{n-2} x_2^2 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} b_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + (-1)^n b_n x_2^n.$$

Задача 3. *Для заданного многочлена* (2) *найти все решения* (3) *с* $\xi \in \mathbb{Z}[\lambda]$ *уравнения*

$$f(X) = \beta, \tag{11}$$

где число β *рационально,* $\beta \neq \pm 1$.

Решение задачи 3.

Теорема 6 ([11, гл. II, § 5, теорема 1]). *Все решения* (3) *с* $\xi \in \mathbb{Z}[\lambda]$ *уравнения* (11) *имеют вид*

$$\xi = \xi_j^0 \varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_r^{a_r}, \quad j = 1, \ldots, J, \tag{12}$$

где $\xi_1^0, \ldots, \xi_J^0$ *— конечное множество выделенных решений и* $a_1, \ldots, a_r$ *— любые целые числа. Если выделенных решений* ξ_j^0 *нет, то уравнение* (11) *не имеет решений.*

Далее даётся набросок конструктивного доказательства этой теоремы, позволяющий вычислять соответствующие постоянные и выделенные решения $\xi_1^0, \ldots, \xi_J^0$.

Согласно предыдущим разделам находим набор основных единиц $\Sigma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1})$ кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ и по ним строим фундаментальную область $\mathcal{F}$ в координатах $H' \overset{\text{def}}{=} (h_1, \ldots, h_{m-1})$.

Лемма 1. *Для всех точек* $X \in \mathbb{R}^n$, *у которых логарифмические проекции*

$$H' = (h_1, \ldots, h_{m-1})$$

лежат в фундаментальной области $\mathcal{F}$, *справедливы оценки*

$$\mu_i \leqslant g_i(X) \leqslant \nu_i, \quad i = 1, \ldots, m-1, \tag{13}$$

где $0 < \mu_i < \nu_i$ *— вещественные числа.*

Лемма 2. *Для всех точек* X, *у которых* $H' \in \mathcal{F}$ *и выполнено равенство* $g(X) = |\beta|$, *справедливы оценки*

$$\mu_m \leqslant g_m(X) \leqslant \nu_m, \tag{14}$$

где $0 < \mu_m < \nu_m$ *— вещественные числа.*

Нижние оценки в (13) нужны для получения верхней оценки в (14).

Поскольку $\langle K, X\rangle = \langle \Re K, X\rangle + i\,\langle \Im K, X\rangle$, то

$$\langle K, X\rangle \langle \bar{K}, X\rangle = \langle \Re K, X\rangle^2 + \langle \Im K, X\rangle^2 .$$

Лемма 3. *Если*

$$\gamma \overset{\text{def}}{=} \det\left(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l, \Re K_{l+1}, \Im K_{l+1}, \ldots, \Re K_{l+k}, \Im K_{l+k}\right) \neq 0, \tag{15}$$

то области в $\mathbb{R}^n$, *где выполнены неравенства* (13) *и* (14), *ограничены.*

Поскольку
$$\gamma = \frac{1}{(-2i)^k} \det\left(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l, K_{l+1}, \bar{K}_{l+1}, \ldots, K_{l+k}, \bar{K}_{l+k}\right),$$
и последний определитель отличается от определителя Вандермонда W ненулевым множителем, а $W = \prod\limits_{1<i<j}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)$, то условие (15) эквивалентно условию, что у многочлена (2) нет кратных корней. Но это так по условию, что многочлен (2) неприводим в $\mathbb{Q}$.

Неравенства (13), (14) выделяют в $\mathbb{R}^n$ всего 2^m ограниченных областей вида
$$\mu_i \leqslant \varkappa_i f_i(X) \leqslant \nu_i, \quad \varkappa_i = \pm 1, \quad i = 1, \ldots, m.$$
В каждой из них количество целочисленных точек $X \in \mathbb{Z}^n$ конечно. В каждой из этих точек можно вычислить $f(X)$ и отобрать те X_i, в которых выполнено уравнение (11). Наконец, среди этих точек X_i оставляем только те $X_1^0, \ldots, X_J^0$, для которых отношения $\xi(X_i^0)/\xi(X_j^0)$ по $j \neq i$ не лежат в $\mathbb{Z}[\lambda]$. Тогда $\xi_j^0 = \xi(X_j^0)$, $j = 1, \ldots, J$, являются выделенными решениями уравнения (11) и все решения этого уравнения имеют вид (12).

6. Обобщения

6.1. Единицы с положительной нормой

Для единицы ε норма $N(\varepsilon) = \pm 1$. Иногда нужны только единицы, у которых норма положительна. Чтобы при чётном n найти базисный набор таких (квазиосновных) единиц $\widehat{\Sigma} = (\hat{\varepsilon}_1, \ldots, \hat{\varepsilon}_{m-1})$, надо в описанной процедуре раздела 3 оставлять только те точки $X \in \check{\mathbb{Z}}^n$, для которых $f(X) = +1$, и по ним указанным выше способом выделить мультипликативный базис. При нечётном n всякой единице ε соответствует единица ε' с $N(\varepsilon') = 1$: это либо ε, либо $-\varepsilon$, т. е. в записи (3) X заменяется на $-X$.

6.2. Произвольный порядок

Согласно [11, гл. II,§ 2] полный модуль в поле $\mathbb{Q}(\lambda)$, содержащий число 1 и являющийся кольцом, называется **порядком** поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Очевидно, что кольцо $\mathbb{Z}[\lambda]$ является порядком поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Но в этом поле могут быть и другие порядки. Например, если в записи (3) все x_2 — чётные, то получим подкольцо кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$. Все результаты разделов 3–5, доказанные для порядка $\mathbb{Z}[\lambda]$, справедливы для любого порядка Ω поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — базис порядка Ω, т. е. все числа $\alpha \in \Omega$ имеют вид
$$\alpha = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 + \ldots + y_n\omega_n, \quad y_i \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$
При записи этих чисел в виде (3) коэффициенты x_i могут быть рациональными числами.

Отметим отличия, возникающие для произвольного порядка Ω. Единицы (3) этого порядка могут иметь рациональные коэффициенты x_i. Существует такой набор единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \Omega$, что все единицы поля имеют вид (4). Назовём эти единицы основными. Для них справедливы все конструкции и теоремы разделов 3–5. Только матрица периода $T(\varepsilon)$ может иметь рациональные элементы, но $\det T(\varepsilon) = N(\varepsilon) = \pm 1$. Поэтому для отыскания основных единиц порядка надо вычислять $f(X)$ на решётке чисел (16), записанных в виде (3) с рациональными x_i. Дальнейшие вычисления такие же, как для кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$. Мультипликативный базис единиц с положительной нормой образует набор квазиосновных единиц $\widehat{\Sigma} = (\hat{\varepsilon}_1, \ldots, \hat{\varepsilon}_{m-1})$ с положительной нормой. Здесь также можно найти фундаментальные области $\mathcal{F}$ и $\widehat{\mathcal{F}}$, соответствующие наборам Σ и $\widehat{\Sigma}$.

6.3. Максимальный порядок

В поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ имеется максимальный порядок $\widetilde{\Omega}$. Его базис $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_r$ называется фундаментальным, о его вычислении см. [11, гл. II, § 2]. Всё сказанное для порядка $\mathbb{Z}[\lambda]$ справедливо и для максимального порядка. В частности, он имеет набор основных единиц $\Sigma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$, набор квазиосновных единиц $\widehat{\Sigma} = (\widehat{\varepsilon}_1, \ldots, \widehat{\varepsilon}_r)$ с положительными нормами и соответствующие им фундаментальные области $\mathcal{F}$ и $\widehat{\mathcal{F}}$.

7. Пример 2

Пусть $p(\xi) = \xi^2 - 5$. Тогда $n = 2$, а корни многочлена $p(\xi)$ суть $\lambda = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2.23605$. Поэтому $k = 0$, $l = 2$, $m = k + l = 2$ и $r = m - 1 = 1$. Основная единица максимального порядка $\widetilde{\Omega}$ есть $\varepsilon = (1 + \lambda)/2 \approx 1.61803$, т. е. в записи (3) $x_1 = x_2 = 1/2$. Поскольку $N(X) = x_1^2 - 5x_2^2$, то $N(\varepsilon) = -1$ и квазиосновная единица максимального порядка $\widetilde{\Omega}$ есть $\hat{\varepsilon} = \varepsilon^2 = (3 + \lambda)/2 \approx 2.61803$. Основная единица кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ есть $\varepsilon^3 = 2 + \lambda \approx 4.23605$ с нормой $N\left(\varepsilon^3\right) = -1$. Наконец, квазиосновная единица этого кольца есть $\hat{\varepsilon} = \varepsilon^6 = 9 + 4\lambda \approx 17.94421$.

Уравнение (11) здесь имеет вид $x_1^2 - 5x_2^2 = \beta$. Положим $\beta = 4$ и найдем все целочисленные решения (x_1, x_2) уравнения

$$x_1^2 - 5x_2^2 = 4, \tag{17}$$

т. е. $\xi(x_1, x_2) = x_1 + x_2\sqrt{5} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$. Ограничимся решениями $x_1, x_2 \geqslant 0$, остальные решения получаются изменением знаков. Поэтому наша основная единица — это $\hat{\varepsilon} = \varepsilon^6 = 9 + 4\sqrt{5} \approx 17.94421 < 18$. Фундаментальная область $\widehat{\mathcal{F}}$ в координатах x_1, x_2 — это

$$1 \leqslant f_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2\sqrt{5} \leqslant \hat{\varepsilon} < 18. \tag{18}$$

На кривой (17) над $\widehat{\mathcal{F}}$ выполнены неравенства $4/\hat{\varepsilon} \leqslant f_2 \stackrel{\text{def}}{=} x_1 - x_2\sqrt{5} \leqslant 4$, т. е.

$$\frac{2}{9} \leqslant x_1 - x_2\sqrt{5} \leqslant 4. \tag{19}$$

На плоскости $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ неравенства (18), (19) выделяют четырёхугольник, ограниченный прямыми $f_1 = 1$, $f_1 = 18$, $f_2 = 2/9$, $f_2 = 4$ и показанный на рис. 2.

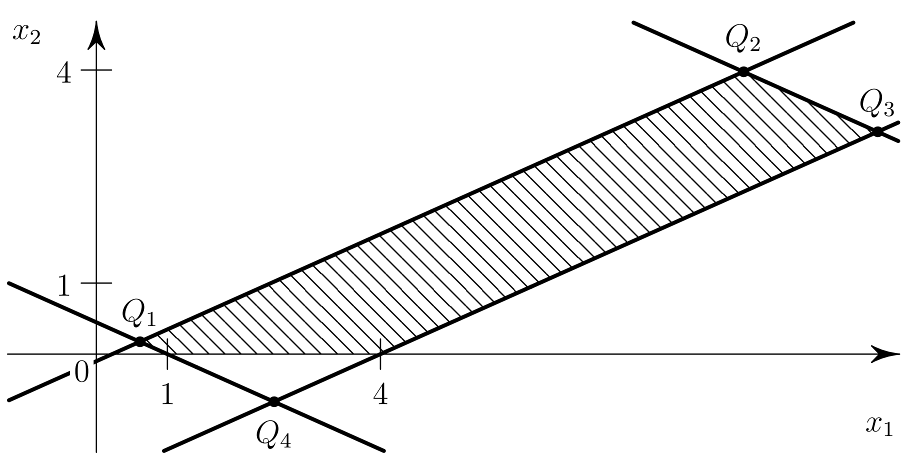


Рис. 2: Область в $\mathbb{R}^2$, где содержатся все выделенные решения ξ_i^0, показана штриховкой.

Вершины этого четырёхугольника суть

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}, \frac{1}{2\sqrt{5}}-\frac{1}{9\sqrt{5}}\right) &&\approx (0.61111,\, 0.17392),\\
Q_2 &= \left(9+\frac{1}{9}, \frac{9}{\sqrt{5}}-\frac{1}{9\sqrt{5}}\right) &&\approx (9.11111,\, 3.97524),\\
Q_3 &= \left(11, \frac{7}{\sqrt{5}}\right) &&\approx (11, 3.13051),\\
Q_4 &= \left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{5}}{10}\right) &&\approx (2.5, -0.67082).
\end{aligned}$$

Теперь для каждого целого $x_2 : 0 \leqslant x_2 \leqslant 3$, переберём все целые $x_1 : 1 \leqslant x_1 < 11$ и выберем среди таких точек (x_1, x_2) решения уравнения (17). Получаем точки $(2,0)$, $(3,1)$, $(7,3)$. Поскольку отношения $\left(3+\sqrt{5}\right)/2$, $\left(7+3\sqrt{5}\right)/2$, $\dfrac{7+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ не лежат в $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$, то получим три выделенных решения $\xi_1^0 = 2$, $\xi_2^0 = 3+\sqrt{5}$, $\xi_3^0 = 7+3\sqrt{5}$. По теореме 6 все решения с $x_1, x_2 \geqslant 0$ имеют вид

$$\xi = \xi_i^0\left(9+4\sqrt{5}\right)^a, \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 \leqslant a \in \mathbb{Z}.$$

8. Пример 3

Пусть $p(\xi) = \xi^3 - 7\xi - 2$, все его корни вещественны:

$$\lambda_1 \approx -2.489288, \quad \lambda_2 \approx -0.289168, \quad \lambda_3 \approx 2.778457.$$

Здесь $n = m = l = 3$, $k = 0$, $r = m - 1 = 2$. Фундаментальный базис максимального порядка $\widetilde{\Omega}$ есть $1, \lambda, \left(\lambda+\lambda^2\right)/2$. Вычисления проведём в 6 шагов раздела 4.

Шаг 1. Вычисляя значения $g(Y)$ на точках $\xi = y_1 + y_2\lambda + y_3\left(\lambda+\lambda^2\right)/2$ с целыми y_i, находим единицы $\varepsilon_i = (y_1, y_2, y_3)$: $\varepsilon_1 = (0,0,1)$, $\varepsilon_2 = (1,2,2)$, $\varepsilon_3 = (-2,0,1)$, $\varepsilon_4 = (-10,-2,3)$, $\varepsilon_5 = (5,2,-2)$, $\varepsilon_6 = (0,2,-1)$.

Шаг 2. Вычисляем выпуклую оболочку соответствующих точек $G_0, G_i = G(Y)$ и получаем у неё 6 двумерных граней. Их логарифмические проекции на плоскость h_1, h_2 показаны на рис. 3. На нём логарифмические проекции рёбер показаны прямыми отрезками, хотя они являются криволинейными. Заметим, что $\varepsilon_{i+3} = \varepsilon_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$.

Шаг 3. Здесь любая пара ε_i и $\varepsilon_j \neq \varepsilon_i^{\pm 1}$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$ образует набор фундаментальных единиц.

Шаг 4. Для пары ε_1, ε_3 фундаментальная область $\mathcal{F}$ — четырёхугольник с вершинами $0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Шаг 5. Логарифмическая проекция границы выпуклой оболочки значений $G(Y)$ по $Y \in \mathbb{Z}^3$ с $H'(Y) \in \mathcal{F}$ показана на рис. 4.

Тут имеются две новые вершины: $\delta_1 = (0,1,1)$ и $\delta_2 = (1,1,1)$. На них $g(Y) = 2$. Имеется четырёхугольная грань с вершинами $0, \delta_1, \varepsilon_2, \delta_2$.

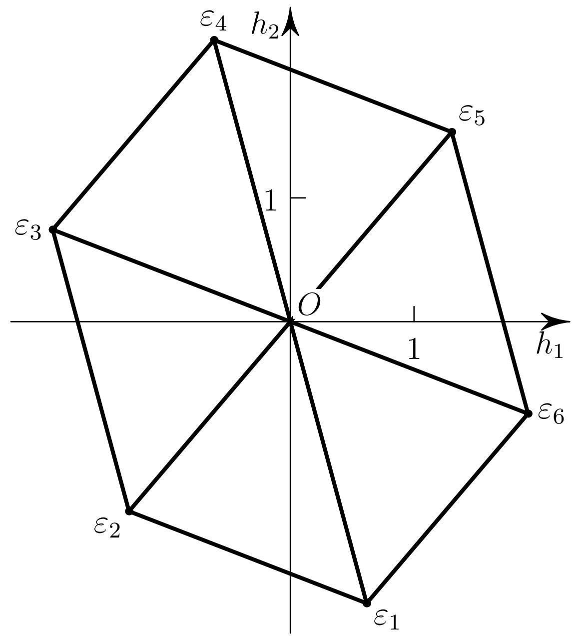


Рис. 3: Логарифмическая проекция вершин, рёбер и граней многогранника $\partial\widetilde{\mathbf{H}}$. Показаны проекции единиц, близкие к нулю. Проекции рёбер выпрямлены.

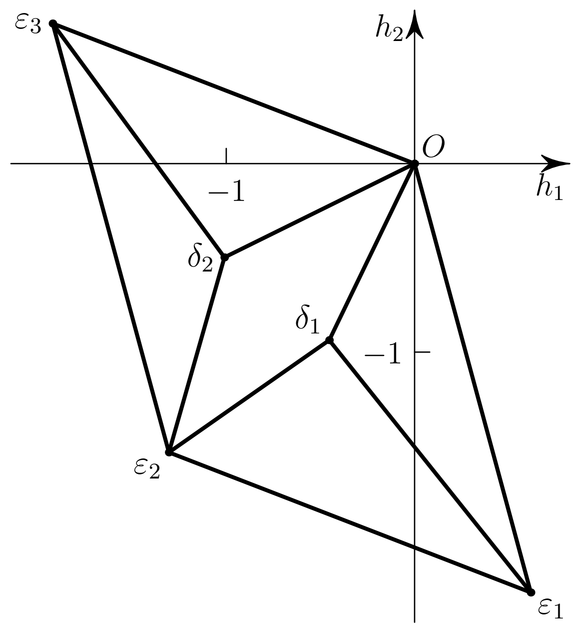


Рис. 4: Логарифмическая проекция многогранника $\partial\mathbf{H}$ на фундаментальную область.

Шаг 6. Сдвигая фундаментальную область рис. 4 на целочисленные линейные комбинации логарифмов известных единиц, получаем схематическую проекцию всего многогранника $\partial\mathbf{H}$ на плоскость h_1, h_2, показанную на рис. 5. На рис. 6 показана точная логарифмическая проекция многогранника $\partial\mathbf{H}$ на плоскость h_1, h_2; проекции рёбер криволинейны. Отрезки в ромбах — это ошибки: их не должно быть. Этот рисунок взят из [5], куда он попал из [12].

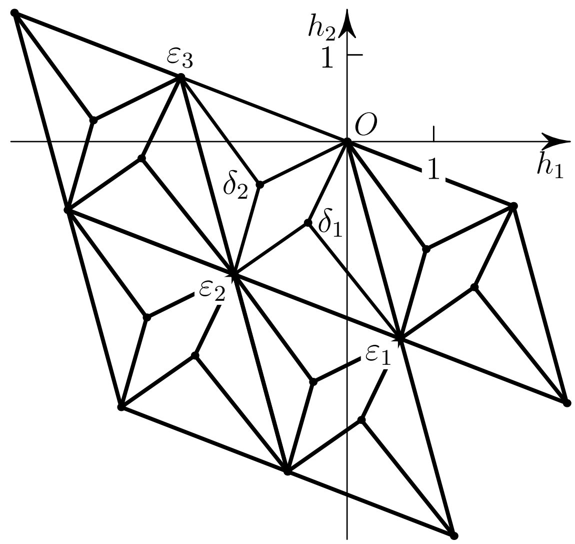


Рис. 5: Логарифмическая проекция многогранника $\partial\mathbf{H}$ на часть плоскости h_1, h_2.

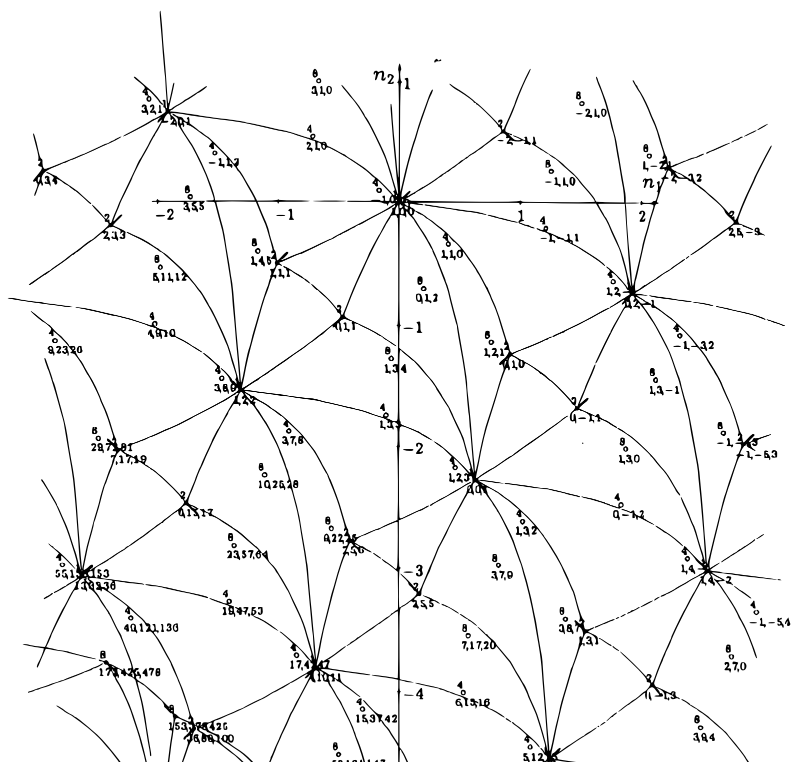


Рис. 6: Аналог рис. 5 с точными проекциями рёбер. Рёбра, разделяющие ромбы на треугольники, ошибочны.

Этот пример взят у Вороного [6, § 59, пример]. Там найдены две пары основных единиц $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ и $\varepsilon_2, \varepsilon_4$, но нет аналогов наших рисунков. На самом деле, в этом примере граница $\partial\mathbf{H}$ вычисляется сразу как выпуклая оболочка значений $G(Y)$ по $Y \in \mathbb{Z}^3$, ибо размерность задачи $n = 3$ невелика. Но здесь показано разбиение на шаги, которое может быть полезным при больших размерностях n и m.

9. Предшественники

Для $n = 2$, $k = 0$, $l = 2$, когда $m = 2$ и $r = 1$, т. е. для вещественных квадратичных полей способ вычисления основной единицы максимального порядка $\widetilde{\Omega}$, основанный на разложении в цепную дробь, описан в книге [11, гл. II, § 7]. В конце этой книги в табл. 1 приведены значения основных единиц $\varepsilon > 1$ максимальных порядков полей $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ для $2 \leqslant d \leqslant 101$, $d \in \mathbb{Z}$.

Для $n = 3$, $m = 2$ $(r = 1)$ и $n = 3$, $m = 3$ $(r = 2)$ основные единицы максимальных порядков вычислял Вороной [6] с помощью своего пошагового обобщения цепной дроби. В [3, 5, 13] вычислены многоугольники и многогранники $\partial\mathbf{H}$.

Для $n = 4$, $k = 2$, $l = 0$, т. е. $m = 2$ $(r = 1)$, Парусников [14] вычислил единицы максимальных порядков полей $\mathbb{Q}(\lambda)$ для 41 многочлена (2) с помощью пошагового алгоритма, основанного на выпуклом многоугольнике. Но большинство найденных им единиц не являются основными, а являются лишь их целыми степенями.

Предварительные версии этой статьи — это препринт [15] и статья [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А. Я. Цепные дроби. 3-е изд. М.: Физматгиз, 1961.

2. Брюно А. Д. Разложения алгебраических чисел в цепные дроби // Журнал вычислительной матем. и матем. физики. 1964. Т. 4, № 2. С. 211–221.

3. Bruno A. D. New generalizations of continued fraction. I // Functiones et Approximatio. 2010. vol. 43, no. 1. Pp. 55–104.

4. Bruno A. D. On geometric methods in works by V. I. Arnold and V. V. Kozlov. Preprint of arXiv, No 1401.6320.

5. Брюно А. Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сборник (Тула), 2015, том 16, выпуск 2. С. 35–65.

6. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197–391.

7. Брюно А. Д. Структура многомерных диофантовых приближений// ДАН, 2010. Т. 433, № 5. С. 587–589.

8. Bruno A. D. Structure of the best diophantine approximations and multidimensional generalizations of the continued fraction // Чебышевский сборник (Тула), 2010. том 11, вып. 1. С. 68–73.

9. Fukuda K. Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation // Proceed. ISSAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and Algebraic Computations, ACM NY, USA, 2008. Pp. 333–334.

10. Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. T. The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Trans. on Mathematical Software, 22(4):469–483, Dec. 1996, http://www.qhull.org.

11. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1972.

12. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники модулей троек линейных форм // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 93. 20 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2003-93

13. Брюно А. Д. Обобщения цепной дроби // Чебышевский сборник (Тула), 2006, том 7, вып. 3. С. 4–71.

14. Парусников В. И. Четырёхмерное обобщение алгоритма цепных дробей // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2011. № 78. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-78.

15. Брюно А. Д. От диофантовых приближений к диофантовым уравнениям // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 1. 20 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-1

16. Брюно А. Д. Вычисление наилучших диофантовых приближений и основных единиц алгебраических полей // ДАН, 2016. Т. 468, № 1. С. 7–11.

REFERENCES

1. Khinchin, A. Ya. 1963, *Continued fractions*, Noordhoff, Groningen.

2. Bruno, A. D. 1964, “The expansion of algebraic numbers into continued fractions”, *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, Vol. 4, no. 2, Pp. 1–15.

3. Bruno, A. D. 2010, “New generalizations of continued fraction. I”, *Functiones et Approximatio.* vol. 43, no. 1. Pp. 55–104.

4. Bruno, A. D. 2014, *On geometric methods in works by V. I. Arnold and V. V. Kozlov*, Preprint of arXiv, No 1401.6320.

5. Bruno, A. D. 2015, “Universal generalization of the continued fraction algorithm”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 16, no. 2, pp. 35–65.

6. Voronoi, G. F. 1896, *On Generalization of the Algorithm of Continued Fraction*, Warsawa University.

7. Bruno, A. D. 2010, “The structure of multidimensional Diophantine approximations”, *Doklady Mathematics*, vol. 82, no. 1. Pp. 587–589.

8. Bruno, A. D. 2010, “Structure of the best diophantine approximations and multidimensional generalizations of the continued fraction”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 11, no. 1, pp. 68–73.

9. Fukuda, K. 2008, “Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation”, *Proceed. ISSAC’08 of XXI International Symposium on Symbolic and Algebraic Computations*, ACM NY, USA, Pp. 333–334.

10. Barber, C. B. & Dobkin, D. P. & Huhdanpaa, H. T. 1996, “The Quickhull algorithm for convex hulls”, *ACM Trans. on Mathematical Software*, 22(4):469–483, http://www.qhull.org.

11. Borevich, ZI & Shafarevich, IR 1966, *Number Theory*, Academic Press.

12. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 2003, “Polyhedra of absolute values for triple of linear forms”, *Preprint no. 93 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2003-93.

13. Bruno, A. D. 2006, “Generalization of continued fraction”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 7, no. 3, pp. 4–71.

14. Parusnikov, V. I. 2011, “4-dimensional generalization of the continued fractions”, *Preprint no. 78 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-78.

15. Bruno, A. D. 2016, “From Diophantine approximations to Diophantine equations”, *Preprint no. 1 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-1

16. Bruno, A. D. 2016, “Computation of the best Diophantine approximations and the fundamental units of the algebraic fields”, *Doklady Mathematics*, vol. 93, no. 3. Pp. 243–247.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.
Получено 5.05.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 514.76

ОБОБЩЕННЫЙ ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ ВАГНЕРА ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

С. В. Галаев (г. Саратов)

Аннотация

На многообразии с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ и эндоморфизмом $N : D \to D$ вводится понятие N-продолженной связности $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ — внутренняя связность. Найден эндоморфизм $N : D \to D$, при котором тензор кривизны N-продолженной связности совпадает с тензором кривизны Вагнера. Доказывается, что тензор кривизны внутренней связности равен нулю тогда и только тогда, когда на многообразии M существует атлас адаптированных карт, для которых коэффициенты внутренней связности обращаются в нуль. Строится взаимно-однозначное соответствие между множеством N-продолженных связностей и множеством N-связностей. Показано, что класс N-связностей включает в себя связность Танака-Вебстера и связность Схоутена-ван Кампена. Получено равенство, выражающее N-связность через связность Леви-Чивита. Исследуются свойства тензора кривизны N-связности, названного в работе обобщенным тензором кривизны Вагнера. Доказывается, в частности, что обращение в нуль обобщенного тензора кривизны Вагнера в случае контактного метрического пространства влечет существование постоянного допустимого векторного поля любого направления. Показано, что тождественное равенство нулю обобщенного тензора кривизны Вагнера возможно лишь в случае нулевого эндоморфизма $N : D \to D$.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, N-продолженная связность, обобщенный тензор кривизны Вагнера, связность Танака–Вебстера, связность Схоутена–ван Кампена.

GENERALIZED WAGNER'S CURVATURE TENSOR OF ALMOST CONTACT METRIC SPACES

S. V. Galaev (Saratov)

Аннотация

On a manifold with an almost contact metric structure $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ and an endomorphism $N : D \to D$ the notion of an N-prolonged connection $\nabla^N = (\nabla, N)$, where ∇ is an interior connection, is introduced. An endomorphism $N : D \to D$ found such that the curvature tensor of the N-prolonged connection coincides with the Wagner curvature tensor. It is proven that the curvature tensor of the interior connection equals zero if and only if on the manifold M exists an atlas of adapted charts for that the coefficients of the interior connection are zero. A one-to-one correspondence between the set of N-prolonged and the set of N-connections is constructed. It is shown that the class of N-connections includes the Tanaka-Webster Schouten-van Kampen connections. An equality expressing the N-connection in the terms of the Levi-Civita connection is obtained. The properties of the curvature tensor of the N-connection are investigated; this curvature tensor is called in the paper the generalized Wagner curvature tensor. It is shown in particular that if the generalized Wagner curvature tensor in the case of a contact metric space is zero, then there exists a constant admissible vector field oriented in any direction. It is shown that the generalized Wagner curvature tensor may be zero only in the case of the zero endomorphism $N : D \to D$.

Key words: almost contact metric structure, N-prolonged connection, generalized Wagner curvature tensor, Tanaka–Webster connection, Schouten–van-Kampen connection.

1. Введение

В последние годы на гладком многообразии M с почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ все чаще, наряду со связностью Леви–Чивита, используются как метрические так и не метрические связности с кручением. В настоящей работе все линейные связности $\nabla^N_{\vec{x}}$, заданные на многообразии M с почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ и однозначно определяемые условиями

1) $S(\vec{x},\vec{y})=2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}+\eta(\vec{x})N\vec{y}-\eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(TM)$;

2) $\nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z})=0$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(D)$;

3) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi}=0$, $\vec{x}\in\Gamma(TM)$;

4) $\nabla^N_{\vec{x}}\eta=0$, $\vec{x}\in\Gamma(TM)$, где $S(\vec{x},\vec{y})$ — кручение связности, $N:D\to D$ — эндоморфизм распределения структуры, объединены в один класс связностей, названных N-связностями. Тензор кривизны $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ N-связности, названный в работе обобщенным тензором кривизны Вагнера, находится по формуле $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}=2\omega(\vec{x},\vec{y})N\vec{z}+R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}+\eta(\vec{x})(P(\vec{y},\vec{z})-(\nabla^N_{P\vec{y}}N)\vec{z})-\eta(\vec{y})(P(\vec{x},\vec{z})-(\nabla^N_{P\vec{x}}N)\vec{z})$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(TM)$, где $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ — тензор кривизны Схоутена [1].

N-связность может быть отождествлена с парой (∇,N), где ∇ — внутренняя связность, осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых.

Идея построения N-связностей берет начало в геометрической теории неголономной механики. С геометрической точки зрения уравнения движения неголономной динамической системы интерпретируются как уравнения геодезических внутренней связности [1] – [2], заданной на неголономном многообразии — конфигурационном пространстве механической системы. Интегрирование уравнений движения во многом зависит от удачного выбора системы координат [2]. В некоторых случаях, геометрические свойства неголономного многообразия позволяют выбрать такую специальную систему координат, в которой уравнения движения неголономной динамической системы принимают наиболее простой вид. Поиск необходимых геометрических инвариантов приводит В. В. Вагнера к построению тензора кривизны неголономного многообразия, называемого сегодня тензором кривизны Вагнера. Нами показано, что в случае контактного многообразия тензор кривизны Вагнера совпадает с тензором кривизны некоторой связности в векторном расслоении (D,π,M), пространством которого является распределение D контактной структуры $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi)$. Необходимую для получения тензора кривизны Вагнера связность будем называть связностью Вагнера. Задание связности Вагнера сводится к продолжению внутренней связности до связности в векторном расслоении с помощью эндоморфизма $N:D\to D$, имеющего специальное строение.

В настоящей работе, с одной стороны, конструкция Вагнера уточняется для случая многообразия с почти контактной метрической структурой, а с другой стороны, мы обобщаем построения Вагнера, используя наперед заданный эндоморфизм $N:D\to D$. Полученная таким образом в векторном расслоении (D,π,M) связность получает название N-продолженной связности. Всякой N-продолженной связности естественным образом соответствует некоторая N-связность. Вообще говоря, N-связность $\nabla^N_{\vec{x}}$ не является метрической связностью. Выбирая соответствующим образом эндоморфизм N, можно получить часто используемые в геометрии почти контактных метрических пространств N-связности: связность Танака–Вебстера, связность Схоутена–ван Кампена и другие связности [3] – [8].

Предлагаемая работа устроена следующим образом. Во втором разделе на почти контактном метрическом многообразии M определяются внутренняя и N-продолженная связности и изучаются их основные свойства. В третьем разделе устанавливается соответствие между классом N-продолженных связностей и подклассом линейных связностей на многообразии с почти контактной метрической структурой. Дается описание как уже хорошо известных N-связностей — связности Танака–Вебстера [3] – [5] и связности Схоутена–ван Кампена [6], так и совсем недавно получивших свое развитие — связности Бежанку [7] и φ-связности [8].

В четвертом разделе определяется обобщенный тензор кривизны Вагнера, и изучаются его свойства. Доказывается, что обращение в нуль обобщенного тензора кривизны Вагнера влечет существование постоянного допустимого векторного поля любого направления.

2. Внутренняя и N-продолженная связности

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m+1$, $m > 1$, $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ [9], где φ — тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. Мы требуем, чтобы $\vec{\xi} \in \ker\omega$, где $\omega = d\eta$. Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = Span(\vec{\xi})$ — его оснащение: $TX = D \oplus D^\perp$. В контактном случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = Span(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба. Будем называть D распределением почти контактной метрической структуры. В работе, в частности, рассматривается пространство (многообразие) Сасаки — контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [9]. Пусть $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Условие $\vec{\xi} \in \ker\omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид: $t = t^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону: $t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля, определяемые равенствами

$$h\vec{x} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)(\vec{x}),\ C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(\vec{x}, \vec{y}),\ g(C\vec{x}, \vec{y}) = C(\vec{x}, \vec{y}),\ L\vec{x} = C\vec{x} - \psi\vec{x},\ \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM).$$

В адаптированных координатах получаем: $h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n \varphi^a_b$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b = g^{da}C_{db}$, $\psi^c_a = g^{bc}\omega_{ab}$.

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви–Чивита тензора g: $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:*

$$\widetilde{\Gamma}^{c}_{ab} = \Gamma^{c}_{ab},\ \widetilde{\Gamma}^{n}_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab},\ \widetilde{\Gamma}^{b}_{an} = \widetilde{\Gamma}^{b}_{na} = C^{b}_{a} - \psi^{b}_{a},\ \widetilde{\Gamma}^{n}_{na} = \widetilde{\Gamma}^{a}_{nn} = 0,$$

где $\Gamma^{a}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с контактной метрической структурой [9] понимается отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}};$$
$$2)\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y},$$
$$3)\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^{c}_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_{a}\vec{e}_{a'}$, где

$$A^{a'}_{a} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{a}}, \tag{1}$$

обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов связности:

$$\Gamma^{c}_{ab} = A^{a'}_{a} A^{b'}_{b} A^{c}_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^{c}_{c'}\vec{e}_a A^{c'}_{b}. \tag{2}$$

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^{c}_{ab} = \Gamma^{c}_{ab} - \Gamma^{c}_{ba}$.

Координатное представление тензора кручения внутренней связности указывает на целесообразность называть внутреннюю связность с нулевым кручением симметричной связностью. Действие внутренней линейной связности обычным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Если кручение внутренней связности равно нулю и $\nabla g = 0$, то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D, π, M). Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределеоние $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(\alpha)$ на многообразии M сверхкарту $\tilde{K}(x^{\alpha}, x^{n+a})$ на многообразии D, где (x^{n+a}) — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^{n}_{a}\partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^{a}_{b}(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^{n}_{a}\partial_n - G^{b}_{a}\partial_{n+b}$. В случае, когда $G^{a}_{b}(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^{a}_{bc}(x^a)x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. В настоящей работе уточняется введенное ранее [11] понятие продолженной связности. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N : D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Под кручением N-продолженной связности будем понимать кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ — внутренняя связность. N-продолженную связность назовем метрической, если ∇ — внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство $\nabla^N_{\vec{\xi}} g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0$.

Если не оговорено противное, на протяжении всей работы под связностью ∇ будет пониматься внутренняя симметричная метрическая связность.

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = 1 - P$, названо Вагнером [1] тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$. Тензор кривизны Схоутена возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных: $2\nabla_{[a}\nabla_{b]} v^c = R^c_{abe} v^e + 4\omega_{ba} \partial_n v^c$.

Обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса. Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Из формул (1), (2) следует, что частные производные $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем $P(\vec{x}, \vec{y})$.

Для K-контактных [9] пространств тензор кривизны Схоутена наделен теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае препятствием к этому выступает наличие производных $\partial_n g_{bc}$ в равенстве

$$\nabla_{[e}\nabla_{a]} g_{bc} = 2\omega_{ea} \partial_n g_{bc} - g_{dc} R^d_{eab} - g_{bd} R^d_{eac}.$$

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d}(2\omega_{ba} N^c_d + R^c_{bad}) \partial_{n+c}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d}(\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d) \partial_{n+c}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c},$$

$$[\vec{u}, \partial_{n+a}] = N^c_a \partial_{n+c}.$$

Из (3), (4) получаем выражение для тензора кривизны N-продолженной связности:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y}) N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}, \tag{5}$$

$$K(\vec{\xi}, \vec{x})\vec{y} = P(\vec{x}, \vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}} N)\vec{y}, \tag{6}$$

где $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Как следует из (5), (6), тензор кривизны N-продолженной связности полностью определяется допустимыми тензорными полями. Если положить в адаптированных координатах

$N^a_b = \frac{1}{4m}\omega^{cd}R^a_{cdb}$, то соответствующую N-продолженную связность и ее тензор кривизны будем называть связностью Вагнера и тензором кривизны Вагнера соответственно. В более общем случае назовем тензор кривизны N-продолженной связности обобщенным тензором кривизны Вагнера. Для связности Вагнера будем использовать обозначение ∇^W. Эндоморфизм $N^a_b = \frac{1}{4m}\omega^{cd}R^a_{cdb}$ получен Вагнером [1] при построении тензора кривизны неголономного многообразия коразмерности 1.

Выбор эндоморфизма N определяется предпочитаемыми свойствами конструируемой связности.

Теорема 2. *На многообразии с контактной метрической структурой существует N-продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:*

1. $\vec{z}g(\vec{x},\vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x},\vec{y}) + g(\vec{x},\nabla_{\vec{z}}\vec{y})$ (свойство метричности),

2. $\nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}] = 0$ (отсутствие кручения),

3. N — симметрический оператор, такой, что

$$g(N\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g(\vec{x},\vec{y}), \tag{7}$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$ — сечения распределения D.

Доказательство. Первые два условия теоремы однозначно определяют внутреннюю метрическую связность [1]. В случае, когда $L_{\vec{\xi}}g = 0$, полагаем $N = 0$. Пусть, теперь, $L_{\vec{\xi}}g \neq 0$. Альтернируя вторую ковариантную производную, получаем: $\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}$.

Предполагая, что существует N-продолженная метрическая связность, удовлетворяющая условиям теоремы, и, сравнивая полученный результат с (7), находим явное выражение для эндоморфизма N:

$$N^f_b = \frac{1}{4m}\omega^{ea}(R^f_{eab} + g_{bd}g^{cf}R^d_{eac})$$

Далее, с помощью прямого вычисления убеждаемся в справедливости равенства $\nabla_n g_{ab} = 0$ для найденного выше эндоморфизма N. Тем самым теорема доказана. □

3. N-продолженные связности и специальные связности в почти контактном метрическом пространстве

Пусть ∇^N — N-продолженная связность на многообразии с почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$. Поставим в соответствие связности ∇^N линейную связность на многообразии M, обозначаемую тем же символом ∇^N и удовлетворяющую следующим условиям:

1) $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM)$;

2) $\nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z}) = 0$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$;

3) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$;

4) $\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, где $S(\vec{x},\vec{y})$ — кручение связности $\nabla^N_{\vec{x}}$.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда на многообразии M существует единственная связность $\nabla^N_{\vec{x}}$ такая, что выполняются следующие условия:*

$$S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}, \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM), \tag{8}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z}) = 0, \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D), \tag{9}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = 0, \vec{x} \in \Gamma(TM), \tag{10}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0, \vec{x} \in \Gamma(TM), \tag{11}$$

где $N : D \to D$ распределения D.

Доказательство. Из предположения существования связности, докажем ее единственность. Получим явное выражение для коэффициентов $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ связности $\nabla^N_{\vec{x}}$ в адаптированных координатах. Условия (8), (9) определяют коэффициенты $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$. Из условий (10), (11) следует справедливость следующих равенств: $\Gamma^a_{bn} = \Gamma^n_{an} = \Gamma^a_{nn} = \Gamma^n_{ab} = \Gamma^n_{nb} = \Gamma^n_{nn} = 0$. Повторно используя условие (8), получаем, что $\Gamma^b_{na} = N^b_a$. Что и доказывает единственность. Определим теперь отличные от нуля коэффициенты связности $\nabla^N_{\vec{x}}$, положив $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$, $\Gamma^b_{na} = N^b_a$. Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям (8)-(11). Теорема доказана. □

Теорема 3 указывает на биективное соответствие между множеством N-продолженных связностей и множеством N-связностей. Следующее утверждение позволяет построить N-связность, используя связность Леви–Чивита.

Теорема 4. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда определяемая с помощью равенства*

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\widetilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$$

связность $\nabla^N_{\vec{x}}$ совпадает с N-связностью с соответствующим эндоморфизмом $N : D \to D$.

Доказательство теоремы сводится вычислению коэффициентов связности в адаптированных координатах.

Используя равенства (5), (6), получаем выражение для тензора кривизны N-связности $\nabla^N_{\vec{x}}$:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y}, \vec{z}) - (\nabla^N_{P\vec{y}}N)\vec{z}) - \eta(\vec{y})(P(\vec{x}, \vec{z}) - (\nabla^N_{P\vec{x}}N)\vec{z}),$$

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$.

Назовем тензор кривизны N-связности, также как и тензор кривизны соответствующей N-продолженной связности, обобщенным тензором кривизны Вагнера. Задавая надлежащим образом эндоморфизм $N : D \to D$, получаем специальные классы N-связностей:

1. Связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Бежанку [7] определяет связность ∇^B на почти контактном метрическом многообразии с помощью формулы

$$\nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} = \widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\widetilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}.$$

В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$. В случае многообразия Сасаки тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна K-контактности контактной метрической структуры. N-связность ∇^N на многообразии с почти контактной метрической структурой с заданным эндоморфизмом $N : D \to D$ может быть определена с помощью равенства $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$.

2. Связность Танака-Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\nabla^{TW}\eta = 0$,
2) $\nabla^{TW}\vec{\xi} = 0$,
3) $\nabla^{TW}g = 0$,
4) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$,
5) $S(\vec{\xi}, \varphi\vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} является N-связностью для $N = C$.

3. Связность Схоутена-ван Кампена ∇^{Sk} определяется с помощью равенства [6]:

$$\nabla^{Sk}_{\vec{x}}\vec{y} = (\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^h)^h + (\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^v)^,$$

где $\vec{y}^h = P\vec{y}$, $\vec{y}^v = Q\vec{y}$. Непосредственно проверяется, что связность Схоутена-ван Кампена является N-связностью для случая, когда $N = C - \varphi$.

4. Совсем недавно было введено понятие φ-связности [8]. Для K-контактных метрических пространств φ-связность совпадает со связностью Схоутена–ван Кампена.

4. Свойства кривизны N-продолженной связности

Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тем самым на многообразии M определена внутренняя симметричная метрическая связность ∇ с коэффициентами $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства $\Gamma^a_{bc} = 0$.*

Доказательство. Достаточность утверждения непосредственно подтверждается координатным представлением тензора Схоутена в адаптированных координатах. Докажем необходимость. Как показано в [1], обращение в нуль тензора Схоутена влечет независимость коэффициентов связности Γ^a_{bc} от последней координаты: $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc} = 0$. Покажем, что на многообразии M можно построить атлас адаптированных карт, в которых коэффициенты связности равны нулю. Составим систему уравнений в полных дифференциалах.

$$\partial_a f^{b'} = A^{b'}_a, \partial_a A^{c'}_b = \Gamma^c_{ab} A^{c'}_c. \tag{12}$$

Условия интегрируемости полученной системы сводятся к следующим соотношениям: $S^c_{ab} A^{c'}_c = 0$, $R^d_{abc} A^{d'}_d = 0$, которые выполняются тождественно. Следовательно, система (12) вполне интегрируема и имеет решение с произвольными начальными условиями, что и завершает доказательство теоремы. □

Теорема 6. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $N = 0$ и существует постоянное допустимое векторное поле любого направления.*

Доказательство. Предположим, что обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю. Из равенства (5) заключаем, что $2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \vec{0}$. В качестве следствия легко проверяемого тождества $R^d_{[abc]} = 0$, получаем равенство $N^b_a(m-1) = 0$. Т.к. $m > 1$, то отсюда следует, что $N = 0$. Что, в свою очередь, влечет обращение в нуль тензора Схоутена. Оставшиеся рассуждения можно провести, опираясь на теорему 5. □

5. Заключение

N-продолженные связности естественным образом возникают в различных разделах математики и теоретической физики [13-15]. Так, например, в работе [13] с помощью N-продолженной симплектической связности определяются обобщенные классы Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных метрических пространств. Доказывается, что все характеристические классы Маслова вполне геодезических лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств равны нулю. Во многих случаях знание строения обобщенного тензора кривизны Вагнера позволяет значительно упростить проводимые исследования. При интегрировании уравнений движения системы, Вагнер, используя геометрические свойства тензора кривизны неголономного многообразия [2], подбирает такую систему координат, в которой уравнения движения принимают наиболее простой вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагнер, В. В. Геометрия $(n-1)$– мерного неголономного многообразия в n — мерном пространстве / В. В. Вагнер// Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173-255.

2. Вагнер, В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем / В. В. Вагнер// Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 301-327.

3. Tanaka, N. On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections / N. Tanaka // Japan J. Math. 20 (1976), 131–190.

4. Tanno, S. Variational problems on contact Riemannian manifolds / S. Tanno // Trans. Amer. Math. Soc., 1989 314, № 1. P. 349–379.

5. Webster, S. M. Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface / S. M. Webster // J. Diff. Geom. 1978. № 13. P. 25–41.

6. Schouten, J. Zur Einbettungs-und Krummungstheorie nichtholonomer Gebilde / J. Schouten, E. van Kampen // Math. Ann. 1930. № 103 P. 752–783.

7. Bejancu A. Kähler contact distributions / A. Bejancu // Journal of Geometry and Physics, 2010. Vol. 60, iss. 12. P. 1958–1967.

8. Букушева А. В. О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью / А. В. Букушева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. — Белгород: Изд-во НИУ "Белгу 2015. Вып.40, № 17(214). С. 20–24.

9. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий / С. В. Галаев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 1. С. 16-22.

10. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. Вузов, Математика. 2013, № 4. С. 10-18.

11. Галаев С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны / С. В. Галаев // Изв. Вузов, Математика. 2014. № 8. С. 42-52.

12. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ, 2015. Т. 22. № 1. С. 25-34.

13. Галаев С. В. О характеристических классах Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: межвуз. темат. сб. науч. тр. Калининград : Изд-во БФУ им. И. Канта, 2015. Вып. 46. С.68-75.

14. Krym V. R., Petrov N. N. The curvature tensor and the Einstein equations for a four-dimensional nonholonomic distribution. Vestnik St. Petersburgskogo Un-ta. Math. 2008. Vol. 41, № 3. P. 256-265.

15. Bejancu A., Călin, C. 4D Einstein equations in a general gauge Kaluza-Klein space. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.. 2015. Vol. 12, № 3, 1550036, 18 pp.

doi: 10.1142/S021988781550036X

REFERENCES

1. Vagner V. V. 1941, "The geometry of an $(n-1)$-dimensional nonholonomic manifold in an n-dimensional space" , *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow Univ. Press, Moscow, issue 5, pp. 173–255 (Russian).

2. Vagner V. V. 1941, "Geometric interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems" , *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow Univ. Press, Moscow, issue 5, pp. 301-327 (Russian).

3. Tanaka N. 1976, "On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections" , *Japan J. Math.* № 20, pp. 131–190.

4. Tanno S. 1989, "Variational problems on contact Riemannian manifolds" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 314, № 1. pp. 349–379.

5. Webster S. M. 1978, "Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface" , *J. Diff. Geom.* № 13. pp. 25–41.

6. Schouten J. 1930, "Zur Einbettungs-und Krummungstheorie nichtholonomer" , Gebilde. Math. Ann. № 103 pp. 752–783.

7. Bejancu A. 2010, "Kähler contact distributions" , *Journal of Geometry and Physics*, vol. 60, issue 12. pp. 1958–1967.

8. Bukusheva A. V. 2015, "On geometry of the contact metric spaces with φ-connection" , *Belgorod State University. Scientific Bulletin. Mathematics. Physics.* № 17(214), issue 40, pp. 20-24 (Russian).

9. Galaev S. V. 2012, "The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds" , *Izvestiya Saratovskogo un-ta. Seriya «Matematika. Informatika. Mekhanika»*, vol. 12, issue 1, pp. 16–22 (Russian).

10. Bukusheva A. V., Galaev S. V. 2013, "Connections on distributions and geodesic sprays" , , *Izvestija vuzov. Mat. (Russian Mathematics (Izvestija VUZ. Mathematika))*, № 4, pp. 10-18 (Russian).

11. Galaev S. V. 2014, "Almost contact Kähler manifolds of constant holomorphic sectional curvature" , *Izvestiya vuzov. Mat. (Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Mathematika))*, № 8. pp. 42-52 (Russian).

12. Galaev S. V. 2015, "Almost contact metric structure determined by N-extended connection" , *Yakutian Mathematical Journal*, vol. 22, № 1, pp. 25-34 (Russian)

13. Galaev S. V. 2015, "Characteristic classes Maslov Legendre submanifolds of almost contact Kähler spaces *Differential geometry of manifolds of figures*, Izd-vo BFU im. I. Kanta, Kaliningrad, issue 46. pp. 68-75 (Russian).

14. Krym V.R., Petrov N.N. 2008, "The curvature tensor and the Einstein equations for a four-dimensional nonholonomic distribution" , *Vestnik St. Petersburgskogo Un-ta. Math.*, vol. 41, № 3, pp. 256-265.

15. Bejancu A., Călin C. 2015, "4D Einstein equations in a general gauge Kaluza-Klein space" , *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 12, № 3, 1550036, 18 pp. doi: 10.1142/S021988781550036X

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
Получено 8.02.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 512.543

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЫ КОНЕЧНОГО ГРАФА ГРУПП КОРНЕВЫМ КЛАССОМ ГРУПП

Д. В. Гольцов (г. Иваново)

Аннотация

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс групп, и пусть $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну неединичную группу. Тогда класс $\mathcal{K}$ называется корневым, если выполнены следующие три условия:

1. Если $A \in \mathcal{K}$ и $B \leq A$, то $B \in \mathcal{K}$.
2. Если $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$, то $A \times B \in \mathcal{K}$.
3. Если $1 \leq C \leq B \leq A$ — субнормальный ряд группы A и $A/B, B/C \in \mathcal{K}$, тогда существует нормальная подгруппа D группы A такая, что $D \leq C$ и $A/D \in \mathcal{K}$.

Группа G называется аппроксимируемой корневым классом $\mathcal{K}$ (или $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента g группы G, существует гомоморфизм φ группы G на группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g\varphi \neq 1$. Другими словами, группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента g группы G существует нормальная подгруппа N группы G такая, что $G/N \in \mathcal{K}$ и $g \notin N$. Наиболее интересными аппроксимационными свойствами являются аппроксимируемость классом всех конечных групп (финитная аппроксимируемость), аппроксимируемость классом всех конечных p-групп и аппроксимируемость классом разрешимых групп. Все эти три класса являются корневыми. Поэтому результаты об аппроксимируемости корневым классом групп имеют достаточно общий характер.

Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс конечных групп. И пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп с конечными реберными группами. Получено необходимое и достаточное условие почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Ключевые слова: корневой класс групп, фундаментальная группа графа групп, почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемость.

ROOT-CLASS RESIDUALITY OF FUNDAMENTAL GROUP OF A FINITE GRAPH OF GROUP

D. V. Goltsov

Abstract

Let $\mathcal{K}$ be an abstract class of groups. Suppose $\mathcal{K}$ contains at least a non trivial group. Then $\mathcal{K}$ is called a root-class if the following conditions are satisfied:

1. If $A \in \mathcal{K}$ and $B \leq A$, then $B \in \mathcal{K}$.
2. If $A \in \mathcal{K}$ and $B \in \mathcal{K}$, then $A \times B \in \mathcal{K}$.
3. If $1 \leq C \leq B \leq A$ is a subnormal sequence and $A/B, B/C \in \mathcal{K}$, then there exists a normal subgroup D in group A such that $D \leq C$ and $A/D \in \mathcal{K}$.

Group G is root-class residual (or $\mathcal{K}$-residual), for a root-class $\mathcal{K}$ if, for every $1 \neq g \in G$, exists a homomorphism φ of group G onto a group of root-class $\mathcal{K}$ such that $g\varphi \neq 1$. Equivalently, group G is $\mathcal{K}$-residual if, for every $1 \neq g \in G$, there exists a normal subgroup N of G such that $G/N \in \mathcal{K}$ and $g \notin N$. The most investigated residual properties of groups are finite groups residuality (residual finiteness), p-finite groups residuality and soluble groups residuality. All there three classes of groups are root-classes. Therefore results about root-class residuality have safficiently enough general character.

Let $\mathcal{K}$ be a root-class of finite groups. And let G be a fundamental group of a finite graph of groups with finite edges groups. The necessary and sufficient condition of virtual $\mathcal{K}$-residuality for the group G is obtained.

Key words: root-class of finite groups, fundamental group of a finite graph of groups, virtual $\mathcal{K}$-residuality.

1. Введение

Абстрактный класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым,* если выполнены следующие три условия.

1. Если группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и B — подгруппа группы A, то группа B также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Если $1 \leq C \leq B \leq A$ — субнормальный ряд группы A такой, что фактор-группы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой классом* $\mathcal{K}$ (или короче $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, переводящий элемент g в элемент отличный от 1. Группа G называется *почти $\mathcal{K}$-аппроксими руемой*, если в ней существует $\mathcal{K}$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса

Если класс $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью рассматривается также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость, где p — простое число, π — множество простых чисел, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Заметим, что все перечисленные классы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_\pi$ являются корневыми классами конечных групп.

Аппроксимируемость различными корневыми классами конечных групп для обобщенных свободных произведений и HNN-расширений подробно изученаа в работах [1]–[7]. Работы [8]–[10] посвящены изучению аналогичных аппроксимационных свойств для групп автоморфизмов, расщепляемых расширений и некоторых классов разрешимых групп.

Грюнберг в [11] доказал, что свободное произведение групп аппроксимируемых корневым классом само аппроксимируемо этим классом при условии, что любая свободная группа аппроксимируема этим классом. В последствии Д. Н. Азаров в [12] установил, что это условие всегда выполняется, т.е. любая свободная группа аппроксимируется любым корневым классом. Поэтому результат Грюнберга принимает следующий вид: свободное произведение групп аппроксимируемых корневым классом само обладает этим свойством.

Если теперь вместо свободного произведения рассмотреть свободное произведение с объединенными подгруппами, то для него результат, аналогичный теореме Грюнберга, уже не имеет место (даже в случае когда объединенная подгруппа конечная). Однако если вместо аппроксимируемости корневым классом рассмотреть почти аппроксимируемость корневым классом, то удается получить следующий результат.

Теорема 1. *Свободное произведение двух групп с конечными объединенными подгруппами почти аппроксимируемо корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладают свободные множители.*

Аналогичный результат имеет место и для HNN-расширения с конечными связными подгруппами.

Теорема 2. *HNN-расширение группы с конечными связными подгруппами почти аппроксимируемо корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладает база HNN-расширения.*

Теоремы 1 и 2 допускают следующее простое обобщение.

Теорема 3. *Фундаментальная группа конечного графа групп с конечными реберными группами почти аппроксимируема корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладают все вершинные группы.*

Напомним определение фундаментальной группы графа групп. Это понятие было введено и изучено Бассом и Серром в [13].

Пусть неориентированный связный *граф* Γ состоит из множества вершин X и из множества ребер Y. Для каждого ребра $y \in Y$ зафиксируем начало ребра $\alpha(y) \in X$ и конец ребра $\omega(y) \in X$.

Граф Γ называется *конечным* графом, если в этом графе множества X и Y являются конечными.

Граф групп $\Lambda(\Gamma)$ состоит из графа Γ, множества групп $\{G_x : x \in X\}$ (вершинные группы), множеста групп $\{H_y : y \in Y\}$ (реберные группы) и вложений групп $\alpha_y : H_y \to G_{\alpha(y)}$ и $\omega_y : H_y \to G_{\omega(y)}$ для всех $y \in Y$.

В графе Γ выберим некоторое максимальное поддерево S, т.е. максимальный подграф, являющийся деревом.

Фундаментальная группа графа групп $\Lambda(\Gamma)$ *относительно максимального поддерева* S — это группа, которая порождается всеми вершинными группами $G_x (x \in X)$ и множеством $\{t_y : y \in Y \setminus S\}$ и определяется следующими соотношениями:

$$t_y^{-1}\alpha_y(g)t_y = \omega_y(g) \quad (g \in H_y, y \in Y \setminus S),$$

$$\alpha_y(g) = \omega_y(g) \quad (g \in H_y, y \in S),$$

Если граф Γ представляет собой две вершины, соединенные одним ребром, то фундаментальная группа G этого графа представляет собой свободное произведение двух вершинных групп с объединенными подгруппами.

Если граф Γ представляет собой одну вершину, которая соединена сама с собой ребром в виде петли, то фундаментальная группа G этого графа представляет собой HNN-расширение вершинной группы.

Поэтому теоремы 1 и 2 являются частными случаями теоремы 3.

Необходимость в каждой из теорем 1, 2 и 3 очевидна. Достаточность в каждой из этих теорем доказана ниже.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Пусть группы A и B почти аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$ и подгруппы H и K конечны. Покажем, что группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Так как группа A почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$, то в ней существует подгруппа U конечного индекса аппроксимируемая классом $\mathcal{K}$. Без потери общности можно считать, что подгруппа U нормальна в A. Очевидно, что группа A финитно аппроксимируема, так как класс $\mathcal{K}$ состоит из конечных групп. Отсюда и из того, что H — конечная подгруппа группы A, следует, что в группе A существует нормальная подгруппа V конечного индекса такая, что $V \cap H = 1$. Пусть $M = U \cap V$. Тогда M — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, $M \cap H = 1$ и группа M аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Аналогично проверяется, что в группе B существует нормальная подгруппа N конечного индекса, являющаяся аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ и такая, что $N \cap K = 1$.

Так как $M \cap H = 1$ и $N \cap K = 1$, то отображение φ_{MN} подгруппы $HM/M = \{hM : h \in H\}$ группы A/M на подгруппу $KN/N = \{kN : k \in K\}$ группы B/N, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi N$ из KN/N, является изоморфизмом. Поэтому можно рассматривать свободное произведение

$$G_{MN} = A/M * B/N(HM/M, KN/N, \varphi_{MN})$$

групп A/M и B/N с подгруппами HM/M и KN/N, объединенными относительно изоморфизма φ_{MN}. Так как группы A/M и B/N конечны, то группа G_{MN} является финитно аппроксимируемой [14].

Очевидно, что существует гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $\varepsilon_M : A \to A/M$ и $\varepsilon_N : B \to B/N$. Тогда $a\rho_{MN} = a\varepsilon_M = aM$ и $b\rho_{MN} = b\varepsilon_N = bN$ для произвольных элементов a и b из подгрупп A и B соответственно.

Поскольку группа G_{MN} финитно аппроксимируема и подгруппы A/M и B/N конечны, то существует гомоморфизм σ группы G_{MN} на конечную группу $\overline{G}$, инъективный на A/M и B/N. Тогда произведение $\rho_{MN}\sigma$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу $\overline{G}$. Поэтому ядро L гомоморфизма $\rho_{MN}\sigma$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G.

Так как $A \cap \mathrm{Ker}\,\rho_{MN} = M$ и σ инъективен на подгруппе $A\rho_{MN} = A/M$, то $A \cap \mathrm{Ker}\,\rho_{MN}\sigma = M$, т. е. $L \cap A = M$. Аналогично получается, что $L \cap B = N$.

Тогда $L \cap H = L \cap A \cap H = M \cap H = 1$, т. е. $L \cap H = 1$. Отсюда и из того, что L — нормальная подгруппа группы G, следует, что L пересекается по единице со всеми сопряжениями к H в группе G. Поэтому в силу теоремы Х. Нейман (см., напр., [15, с. 122]) подгруппа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$L \cap x^{-1}Ax = x^{-1}(L \cap A)x = x^{-1}Mx,$$

$$L \cap y^{-1}By = y^{-1}(L \cap B)y = y^{-1}Ny,$$

где $x, y \in G$.

Свободная группа F аппроксимируема корневым классом $\mathcal{K}$ [12], а группы $x^{-1}Mx$ и $y^{-1}Ny$ аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, т. к. $x^{-1}Mx \cong M$ и $x^{-1}Nx \cong N$ для любых $x, y \in G$. Таким образом, группа L раскладывается в свободное произведение групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$. Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо [12] доказали, что свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Поэтому группа L аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что L является подгруппой конечного индекса в группе G, следует, что группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. Пусть

$$G^* = \langle G, t; t^{-1}ht = h\varphi (h \in H)\rangle$$

— HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными изоморфизмом φ. Будем предполагать, что подгруппы H и K конечны. И пусть группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Покажем, что группа G^* почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$.

Как и в доказательстве теоремы 1 легко проверяется, что в группе G существует нормальная подгруппа M конечного индекса, являющаяся $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, и такая, что $M \cap H = 1 = M \cap K$. Так как $H \cap M = 1 = K \cap M$, то отображение $\varphi_{_M}$ подгруппы $HM/M = \{hM : h \in H\}$ группы G/M на подгруппу $KM/M = \{kM : k \in K\}$ группы G/M, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi M$ из KM/M, является изоморфизмом.

Поэтому можно рассматривать HNN-расширение

$$G^*_{_M} = \langle G_{_M},\ t;\ t^{-1}\overline{h}t = \overline{h}\varphi_{_M}\ (\overline{h} \in HM/M)\ \rangle$$

группы $G_{_M} = G/M$ со связанными подгруппами HM/M и KM/M. Так как группа $G_{_M}$ конечная, то группа $G^*_{_M}$ финитно аппроксимируема [16].

Очевидно, что существует гомоморфизм $\rho_{_M} : G^* \longrightarrow G^*_{_M}$, продолжающий естественный гомоморфизм $\varepsilon_{_M} : G \longrightarrow G_{_M}$ и такой, что $t\rho_{_M} = t$. Тогда для каждого элемента a из G выполняется $a\rho_{_M} = aM$.

Так как группа $G^*_{_M}$ финитно аппроксимируема и ее подгруппа $G_{_M}$ конечна, то существует гомоморфизм σ группа $G^*_{_M}$ на конечную группу $\overline{G}$, иньективный на подгруппе $G_{_M}$. Тогда произведение $\rho_{_M}\sigma$ является гомоморфизмом группы G^* на конечную группу $\overline{G}$. Поэтому ядро L гомоморфизма $\rho_{_M}\sigma$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G^*.

Поскольку $G \cap \mathrm{Ker}\ \rho_{_M} = M$ и σ инъективен на подгруппе $G_{_M} = G\rho_{_M}$, то $G \cap \mathrm{Ker}\ \rho_{_M}\sigma = M$, т. е. $L \cap G = M$. Тогда $L \cap H = L \cap G \cap H = M \cap H = 1$. Таким образом, подгруппа L, а значит и все сопряженные к ней подгруппы группы G^*, тривиально пересекаются со связанной подгруппой H. Поэтому в силу теоремы А. Карраса и Д. Солитера [3, с. 288] подгруппа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$L \cap x^{-1}Gx = x^{-1}(L \cap G)x = x^{-1}Mx,$$

где $x \in G^*$. Поскольку группа F и подгруппы $L \cap x^{-1}Gx$ аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$, то и группа L аппроксимируема классом $\mathcal{K}$. Отсюда и из того, что L является подгруппой конечного индекса в группе G^*, следует, что группа G^* почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим конечный граф групп $\Lambda(\Gamma)$ состоящий из графа Γ, множества групп $\{G_x : x \in X\}$ (вершинные группы), множеста групп $\{H_y : y \in Y\}$ (реберные группы) и вложений групп $\alpha_y : H_y \to G_{\alpha(y)}$ и $\omega_y : H_y \to G_{\omega(y)}$ для всех $y \in Y$. Пусть S — некоторое максимальное поддерево в графе Γ, т.е. максимальный подграф, являющийся деревом. И пусть G — фундаментальная группа графа групп $\Lambda(\Gamma)$ относительно максимального поддерева S. Заметим, что группа G не зависит от выбора дерева S, дерево S необходимо только при описании группы G.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. Пусть группы G_x почти аппроксимируемы классом $\mathcal{K}$ для любого $x \in X$ и группы H_y являются конечными для любого $y \in Y$. Докажем, что группа G почти аппроксимируема классом $\mathcal{K}$ индукцией по количеству ребер в графе Γ.

Для доказательства базы индукции рассмотрим граф групп с одной реберной группой. Фундаментальная группа такого графа представляет собой либо свободное произведение двух почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с конечным объединением, либо HNN-расширение почти

$\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы с конечными связными подгруппами. Справедливость теоремы 3 в этих случаях следует из теорем 1 и 2.

Индуктивный шаг также обеспечивается теоремами 1 и 2. В самом деле возможны два случая.

1. Рассмотрим сначала случай, когда S совпадает с Γ. В этом случае группа G является древесным свободным произведение групп G_x. Поэтому группу G легко представить как свободное произведение с конечными объединенными подгруппами двух древесных произведений с меньшим количеством реберных групп.

2. Рассмотрим теперь случай, когда S не совпадает с Γ, то есть существует ребро y из Y, не входящее в S. В этом случае группу G можно представить как HNN-расширение с конечными подгруппами, связанными ребром y, базой которого является фундаментальная группа графа групп с меньшим числом реберных групп.

В первом из рассмотренных случаев индуктивный шаг обеспечивается теоремой 1, во втором — теоремой 2. Теорема 3 доказана.

5. Заключение

Рассмотрен вопрос о почти аппроксимируемости корневым классом обобщенных свободных произведений групп и HNN-расширений. Получены критерии почти аппроксимируемости корневым классом конечных групп свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами и HNN-расширения группы с конечными связными подгруппами. Эти результаты получили обобщения в виде критерия почти аппроксимируемости корневым классом конечных групп фундаментальной группы конечного графа групп.

Остаётся неисследованным вопрос о том, будут ли теоремы 1, 2 и 3 справедливы для произвольного корневого класса, не обязательно состоящего из конечных групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Azarov. Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation // Commun. in Algebra. 2015. Vol. 43:4. P. 1464 – 1471.

2. Азаров Д. Н. Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56. № 2. С. 249 – 264.

3. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 6. С. 1203 – 1215.

4. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. В. 1. С. 9 – 19.

5. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 3. С. 485 – 497.

6. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага – Солитэра // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20. № 1. С. 116 – 123.

7. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. В. 3(35). С. 11 – 20.

8. Азаров Д. Н. Аппроксимационные свойства групп автоморфизмов и расщепляемых расширений // Известия ВУЗов. Математика. 2015. № 8. С. 3 – 13.

9. Азаров Д. Н. Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Известия ВУЗов. Математика. 2014. № 8. С. 18 – 29.

10. Азаров Д. Н. Некоторые аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15. Вып. 1(49). С. 7 – 18.

11. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite solublegroups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, P. 29-62.

12. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. 2002. Т. 5, С. 6-10.

13. Serre J.-P. Trees. Springer-Verlag 1980.

14. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, №2. P. 193-209.

15. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

16. Karrass A., Solitar D. Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. V. 28, P. 627–643.

REFERENCES

1. Azarov, D. N. 2015, "Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation", Commun. in Algebra. Vol. 43:4. P. 1464–1471.

2. Azarov, D. N. 2015, "Residuallity by same classes of finite groups of generalized free products of groups with normal amalgamation", Sibirskii Math. J., vol. 56, issue 2, pp. 249—264. (Russian)

3. Azarov, D. N. 2015, "On residual finiteness of HNN-extension and of generalized free products of finite rank groups", Sibirskii Math. J., vol. 54, issue 6, pp. 1203—1215. (Russian)

4. Azarov, D. N. 2012, "On the virtually residuallity by finite p-groups of descending HNN-extensions", Chebyshevskii Sb., vol. 13, issue 1, pp. 9—19. (Russian)

5. Azarov, D. N. 2013, "On residual finiteness of generalized free products of groups of finite rank", Sibirskii Math. J., vol. 54, issue 3, pp. 485—497. (Russian)

6. Azarov, D. N. 2013, "On the virtually residuallity by finite p-groups of Baumslag–Solitar groups", Modeling and Analysis of Information Systems., vol. 20, issue 1, pp. 116—123. (Russian)

7. Azarov, D. N. 2010, "On the virtually residuallity by finite p-groups", Chebyshevskii Sb., vol. 11, issue 3, pp. 11—21. (Russian)

8. Azarov, D. N. 2015, "Residual properties of automorphism groups and split extension" Izvestiya VUZov. Mathematics, issue 8, pp. 3—13. (Russian)

9. Azarov, D. N. 2014, "The residuallity of solvable groups of finite rank by some classes of finite groups", Izvestiya VUZov. Mathematics, issue 8, pp. 18—29. (Russian)

10. Azarov, D. N. 2014, "The residuallity of solvable groups of finite rank by some classes of finite groups", Izvestiya VUZov. Mathematics, issue 8, pp. 18—29. (Russian)

11. Gruenberg, K. W. 1957, "Residual properties of infinite solublegroups", Proc. London Math. Soc. V. 7, P. 29-62.

12. Azarov, D. N., Tieudjo, D. 2002, "On the residuallity of a free product with amalgamation by a root class of groups" , Nauch. trudy of Ivanovo State University. Mathematics., issue 5, pp. 6—10. (Russian)

13. Serre J.-P. Trees. Springer-Verlag 1980.

14. Baumslag G. 1963, "On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups" Trans. Amer. Math. Soc. V. 106, №2. P. 193-209.

15. Lyndon R. C., Schupp P. E., Combinatorial group theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1977

16. Karrass A., Solitar D. 1971, "Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation" Can. J. Math. V. 28, P. 627–643.

Ивановский государственный университет.
Получено 3.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 3.

УДК 511.9.

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ГУРВИЦА[1]

© 2016. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский (г. Тула),
В. Н. Соболева, Д. К. Соболев (г. Москва),
Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова (г. Тула).

Аннотация

В работе рассматривается новый объект исследования — гиперболическая дзета-функция Гурвица, которая задается в правой α-полуплоскости $\alpha = \sigma+it$, $\sigma > 1$ равенством

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha},$$

где $d \neq 0$ и b — любое вещественное число.

Гиперболическая дзета-функция Гурвица $\zeta_H(\alpha; d, b)$ при $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$ совпадает с гиперболической дзета-функцией сдвинутой одномерной решеткой $\zeta_H(\Lambda(d, b)|\alpha)$. Важность этого класса одномерных решёток обусловлена тем, что каждая декартова решётка представляется объединением конечного числа декартовых произведений одномерных сдвинутых решёток вида $\Lambda(d, b) = d\mathbb{Z} + b$.

Декартовы произведения одномерных сдвинутых решёток — это суть сдвинутые диагональные решётки, для которых в данной работе удается дать наиболее простой вид функционального уравнения для гиперболической дзета-функции этих решёток.

Изучается связь гиперболической дзета-функции Гурвица с периодизированной по параметру b дзета-функцией Гурвица $\zeta^*(\alpha; b)$ и с обычной дзета-функцией Гурвица $\zeta(\alpha; b)$.

Получены новые интегральные представления для этих дзета-функций и аналитическое продолжение слева от прямой $\alpha = 1 + it$.

Все рассматриваемые гиперболические дзета-функции решёток образуют важный класс рядов Дирихле, непосредственно связанный с развитием теоретико-числового метода в приближенном анализе. Для исследования таких рядов эффективным является применение теоремы Абеля, дающей интегральное представление через несобственные интегралы. Интегрирование по частям этих несобственных интегралов приводят к несобственным интегралам с полиномами Бернулли, которые также исследуются в данной работе.

Ключевые слова: дзета-функция Гурвица, периодизированная дзета-функция Гурвица, дзета-функция Гурвица второго рода, гиперболическая дзета-функция Гурвица, решётка, гиперболическая дзета-функция решётки, дзета-функция решётки, полиномы Бернулли, контур Ханкеля.

Библиография: 34 названия.

ON HYPERBOLIC HURWITZ ZETA FUNCTION

N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky (Tula),
V. N. Soboleva, D. K. Sobolev (Moscow),
L. P. Dobrovol'skaya, O. E. Bocharova (Tula).

Abstract

[1]Работа выполнена по грантам РФФИ №15-01-01540, №15-41-03263р_центр_а

The paper deals with a new object of study — hyperbolic Hurwitz zeta function, which is given in the right α-semiplane $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ by the equality

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\overline{dm + b}\right)^{-\alpha},$$

where $d \neq 0$ and b — any real number.

Hyperbolic Hurwitz zeta function $\zeta_H(\alpha; d, b)$, when $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$ coincides with the hyperbolic zeta function of shifted one-dimensional lattice $\zeta_H(\Lambda(d, b)|\alpha)$. The importance of this class of one-dimensional lattices is due to the fact that each Cartesian lattice is represented as a union of a finite number of Cartesian products of one-dimensional shifted lattices of the form $\Lambda(d, b) = d\mathbb{Z} + b$.

Cartesian products of one-dimensional shifted lattices are in substance shifted diagonal lattices, for which in this paper the simplest form of a functional equation for the hyperbolic zeta function of such lattices is given.

The connection of the hyperbolic Hurwitz zeta function with the Hurwitz zeta function $\zeta^*(\alpha; b)$ periodized by parameter b and with the ordinary Hurwitz zeta function $\zeta(\alpha; b)$ is studied.

New integral representations for these zeta functions and an analytic continuation to the left of the line $\alpha = 1 + it$ are obtained.

All considered hyperbolic zeta functions of lattices form an important class of Dirichlet series directly related to the development of the number-theoretical method in approximate analysis. For the study of such series the use of Abel's theorem is efficient, which gives an integral representation through improper integrals. Integration by parts of these improper integrals leads to improper integrals with Bernoulli polynomials, which are also studied in this paper.

Keywords: Hurwitz zeta function, periodised Hurwitz zeta function, Hurwitz zeta function of the second kind, hyperbolic Hurwitz zeta function, lattice, hyperbolic zeta function of lattice, zeta function of lattice, Bernoulli polynomials, Hankel contour.

Bibliography: 34 titles.

1. Введение

Теория гиперболической дзета-функции решёток излагается в монографиях [23], [13] и [2], которые опираются на результаты из работ [4]– [7], [10]– [17], [24], [25]. Теории гиперболической дзета-функции решёток и обобщенной гиперболической дзета функции сдвинутых решёток были посвящены диссертации [8], [28], [26], [11] и [5], содержание которых отражено в авторефератах [9], [29], [27], [12] и [6].

В работе [16] получена новая асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки квадратичного поля. Таким образом теория развивается как для произвольной размерности s, так и для конкретных значений, а именно, для $s = 2$. В настоящей работе внимание сосредоточено на одномерном случае, так как логика развития теории показала, что именно к этому случаю естественно сводится вся теория гиперболической дзета-функции декартовых решёток.

В большой обзорной работе [3] и в работе [34] приводятся последние достижения в этой теории — даётся вывод функционального уравнения для дзета-функции произвольной декартовой решётки. Кроме этого, в последнем разделе этой работы даётся список актуальных нерешенных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток. Одной из таких проблем — получению аналитического продолжения и выводу функционального уравнения для гиперболической дзета-функции Гурвица — посвящена данная работа.

Данная постановка вопросов возникла естественным образом в процессе изучения гиперболической дзета-функции решётки приближений Дирихле квадратичной иррациональности. Приложение полученных результатов к этому классу гиперболических дзета-функций решёток будет посвящена наша следующая работа.

Как обычно, используются обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел и $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел; через $\{x\}$ и $[x]$ обозначаются дробная часть и целая часть вещественного числа x: $0 \leqslant \{x\} < 1$, $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leqslant x < [x] + 1$, $x = [x] + \{x\}$. В работе для вещественных m используем очень удобное обозначение Коробова $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Как правило, из контекста видно, что речь идет об обозначении Коробова, а не об комплесно-сопряженном числе.

2. Цели и содержание работы

В работе [3] были перечислены несколько актуальных нерешенных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток. Одной из таких проблем является **Проблема существования аналитического продолжения.**

Как показано ранее в наших предыдущих работах, для любой декартовой решётки существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки. Более того, для произвольной декартовой решётки получено функциональное уравнение, задающее это аналитическое продолжение в явном виде.

Естественно возникают вопросы о существовании аналитического продолжения для гиперболической дзета-функции в случае, когда решётка не является декартовой. Простейшей такой решёткой является решётка приближений Дирихле квадратичных иррациональностей.

По-видимому, ключом к решению проблемы аналитического продолжения является дальнейшее изучение возможности предельного перехода для гиперболических дзета-функций декартовых решеток в левой полуплоскости по сходящейся последовательности декартовых решёток.

Если такой предел всегда существует, то, переходя в функциональном уравнении слева и справа к пределу, получим функциональное уравнение для предельной решётки. Наиболее перспективно должно быть получение функционального уравнения только в терминах взаимных решёток, так как сходимость последовательности решёток эквивалентна сходимости соответствующих взаимных решёток. Здесь необходимо подчеркнуть, что основная сложность должна быть в случае, когда предельная решётка недекартовая.

В процессе осуществления указанной программы для случая решётки приближений Дирихле квадратичных иррациональностей естественным образом возникло понятие гиперболической дзета-функции Гурвица и вопрос об аналитическом продолжении этой гиперболической дзета-функции, которая тесно связана с гиперболической дзета-функцией одномерной сдвинутой решётки.

В третьем разделе мы рассматриваем несобственные интегралы с полиномами Бернулли, которые естественно возникают в этой проблематике, когда от ряда Дирихле с помощью теоремы Абеля переходят к несобственному интегралу.

В четвертом разделе приводятся все необходимые факты о периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица $\zeta(\alpha; b)$ и о дзета-функции Гурвица второго рода.

В пятом разделе вводится понятие гиперболической дзета-функции Гурвица и развивается соответствующая теория, которая во многом является аналогом теории дзета-функции Гурвица.

На основании полученных результатов в шестом разделе строится функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток.

Наконец, в заключении обсуждаются полученные результаты и возникающие трудности при реализации намеченной программы.

3. Полиномы Бернулли и несобственные интегралы с ними

Для дальнейшего нам потребуются числа и полиномы Бернулли, сведения о которых мы приведём из [1] и [23].

Числа и полиномы Бернулли определяются равенствами:

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{n+1-k} B_k = 0 \quad (n \geqslant 1),$$

$$B_0(x) = 1, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k} \quad (n \geqslant 1),$$

$$y_\nu(x) = B_\nu(x) - B_\nu \quad (\nu \geqslant 1).$$

Для полиномов Бернулли справедливы следующие важные свойства:

$$B_n(1) - B_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geqslant 0; \\ 1, & \text{если } n = 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1); \tag{2}$$

$$\int\limits_0^1 B_n(x)dx = 0 \quad (n \geqslant 1). \tag{3}$$

Нетрудно подсчитать первые пять многочленов $y_\nu(x)$:

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2 - x, \quad y_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad y_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2,$$

$$y_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

Из следующей леммы видно, что периодизированные многочлены Бернулли $y_\nu(\{x\})$ принадлежат классу E_1^ν периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье и имеют непосредственное отношение к теоретико-числовому методу Н. М. Коробова [23].

Лемма 1. *Справедливо разложение в ряд Фурье*

$$y_\nu(\{x\}) = -B_\nu + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}+\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} i^{2\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} \nu!}{(2\pi m)^\nu} e^{2\pi i m x} =$$

$$= \begin{cases} -B_{2\mu} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^{\mu-1}(2\mu)!}{(2\pi m)^{2\mu}} \cos 2\pi m x, & \text{при } \nu = 2\mu, \\[2ex] \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{\pi m} \sin 2\pi m x, & \text{при } \nu = 1, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots). \\[2ex] \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^{\mu}(2\mu+1)!}{(2\pi m)^{2\mu+1}} \sin 2\pi m x, & \text{при } \nu = 2\mu + 1, \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, для разложения в ряд Фурье

$$y_\nu(\{x\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C(m) e^{2\pi i m x}, \quad C(m) = \int\limits_0^1 y_\nu(x) e^{-2\pi i m x} dx$$

имеем

$$C(0) = \int\limits_0^1 y_\nu(x) dx = \int\limits_0^1 (B_\nu(x) - B_\nu)\, dx = \int\limits_0^1 B_\nu(x) dx - B_\nu =$$

$$= -B_\nu = \begin{cases} -B_{2\mu}, & \text{при } \nu = 2\mu, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } \nu = 1, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots), \\ 0, & \text{при } \nu = 2\mu + 1, \end{cases}$$

согласно равенству (3) и свойствам чисел Бернулли.

При $m \neq 0$ получим

$$C(m) = \int\limits_0^1 y_\nu(x) e^{-2\pi i m x} dx = \left. \frac{y_\nu(x)}{-2\pi i m} e^{-2\pi i m x} \right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{y'_\nu(x)}{-2\pi i m} e^{-2\pi i m x} dx =$$

$$= -\frac{\nu}{-2\pi i m} \int\limits_0^1 B_{\nu-1}(x) e^{-2\pi i m x} dx = \ldots = \frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi i m)^{\nu-1}} \left. \frac{B_1(x)}{-2\pi i m} e^{-2\pi i m x} \right|_0^1 -$$

$$- \frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi i m)^\nu} \int\limits_0^1 e^{-2\pi i m x} dx = \frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi i m)^\nu} = \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}+\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} i^{2\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} \nu!}{(2\pi m)^\nu}.$$

□

Рассмотрим для $0 < \beta \leqslant 1$ и $q \geqslant 0$ несобственный интеграл при $\nu = 1, 2, \ldots$

$$I_\nu(\alpha; q, \beta) = \frac{1}{\nu!} \prod_{\mu=0}^{\nu-1} (\alpha + \mu) \cdot \int\limits_q^\infty \frac{y_\nu(\{x\}) dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}, \tag{5}$$

который абсолютно сходится для $\alpha = \sigma + it$ при $\sigma > 1 - \nu$.

Отметим сразу, что $I_\nu(\alpha; q, \beta) = 0$ при $\alpha = 0, -1, \ldots, 2 - \nu$, так как при этих значения α несобственный интеграл абсолютно сходится, а множитель перед интегралом обращается в ноль. Вопрос о значении в точке $\alpha = 1 - \nu$ должен исследоваться отдельно, так как интеграл в определении (5) расходится, а аналитическое продолжение будет построено позже.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$I_\nu(\alpha;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)-$$

$$-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(\alpha+\mu)\cdot\frac{(\alpha+\nu)B_\nu}{(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+I_{\nu+1}(\alpha;q,\beta). \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\int\limits_0^1 y_\nu(x)dx=-B_\nu \quad (\nu\geqslant 1). \tag{7}$$

Действительно,

$$\int\limits_0^1 y_\nu(x)dx=\int\limits_0^1\left(B_\nu(x)-B_\nu\right)dx=\int\limits_0^1 B_\nu(x)dx-B_\nu=-B_\nu$$

согласно равенству (3).

Далее заметим, что

$$\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt=[x]\int\limits_0^1 y_\nu(t)dt+\int\limits_0^{\{x\}} y_\nu(t)dt=-[x]B_\nu+\int\limits_0^{\{x\}} y_\nu(t)dt=$$

$$=-xB_\nu+\int\limits_0^{\{x\}}\left(y_\nu(t)+B_\nu\right)dt=-xB_\nu+\left(\frac{B_{\nu+1}(t)}{\nu+1}\right)\bigg|_0^{\{x\}}=$$

$$=-xB_\nu+\frac{B_{\nu+1}(\{x\})-B_{\nu+1}}{\nu+1}=-xB_\nu+\frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_q^\infty\frac{y_\nu(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}=\left(\frac{\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)\Bigg|_q^\infty+(\alpha+\nu)\int\limits_q^\infty\frac{\left(\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt\right)dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}=$$

$$=\left(\frac{-xB_\nu+\frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)\Bigg|_q^\infty+(\alpha+\nu)\int\limits_q^\infty\frac{\left(-xB_\nu+\frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}\right)dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}=$$

$$=\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+(\alpha+\nu)B_\nu\left(-\int\limits_q^\infty\frac{dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}+\int\limits_q^\infty\frac{\beta dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}\right)+$$

$$+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty\frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}=\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+$$

$$+(\alpha+\nu)B_\nu\cdot\left(-\frac{1}{(\alpha+\nu-1)(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+\frac{\beta}{(\alpha+\nu)(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)+$$

$$+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty\frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}.$$

Подставляя последний результат в правую часть равенства (5), получим

$$I_\nu(\alpha;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+(\alpha+\nu)B_\nu\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{1}{(\alpha+\nu-1)(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+\frac{\beta}{(\alpha+\nu)(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty\frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(\alpha+\mu)\cdot\frac{(\alpha+\nu)B_\nu}{(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+$$

$$+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+I_{\nu+1}(\alpha;q,\beta)$$

и лемма полностью доказана. □

Замечание 1. *Из доказанной леммы вытекает, что функция $I_\nu(\alpha;q,\beta)$, заданная в правой полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1-\nu)$, последовательно аналитически продолжается на всю комплексную α-плоскость.*

Теперь мы можем ответить на вопрос о величине $I_\nu(1-\nu;q,\beta)$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$I_\nu(1-\nu;q,\beta)=\frac{(-1)^\nu B_\nu}{\nu}. \tag{8}$$

Доказательство. Действительно,

$$I_\nu(1-\nu;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(1-\nu+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{q+\beta}\right)-$$

$$-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(1-\nu+\mu)\cdot B_\nu+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(1-\nu+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{q+\beta}+I_{\nu+1}(1-\nu;q,\beta)=$$

$$=\frac{(-1)^\nu B_\nu}{\nu}.$$

□

4. Периодизированная по параметру b дзета-функция Гурвица и дзета-функция Гурвица второго рода

В дальнейшем будет использоваться периодизированная по вещественному параметру b дзета-функция Гурвица

$$\zeta^*(\alpha;b)=\sum_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^\infty n^{-\alpha}, & \text{при } \{b\}=0,\\ \\ \sum\limits_{n=0}^\infty (n+\{b\})^{-\alpha}, & \text{при } \{b\}>0\end{cases},\quad (\sigma>1). \tag{9}$$

Кроме того, определим дзета-функцию Гурвица второго рода $\zeta^{**}(\alpha; b)$ равенством

$$\zeta^{**}(\alpha; b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}}, \quad (\sigma > 1). \tag{10}$$

По теореме Абеля (см. [32] стр. 106) получаем интегральное представление для периодизированной дзета-функции Гурвица ($\sigma > 1$):

$$\zeta^{*}(\alpha; b) = \begin{cases} \alpha \int\limits_{1}^{\infty} \frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} = 0, \\ \alpha \int\limits_{0}^{\infty} \frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}} = \alpha \int\limits_{\{b\}}^{\infty} \frac{[x+1-\{b\}]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} \neq 0 \end{cases} \tag{11}$$

и интегральное представление для дзета-функции Гурвица второго рода ($\sigma > > 1$):

$$\zeta^{**}(\alpha; b) = \begin{cases} \alpha \int\limits_{1}^{\infty} \frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} = 0, \\ \alpha \int\limits_{1}^{\infty} \frac{(\sin(\pi(2[x]+1)b) - \sin(\pi b))\, dx}{2\sin(\pi b) x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\} \neq 0, \end{cases} \tag{12}$$

которое получается из выражения для сумматорной функции при $\{b\} > 0$

$$A(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \cos(2\pi nb) = \frac{1}{\sin(\pi b)} \sum_{n=1}^{[x]} \cos(2\pi nb)\sin(\pi b) =$$

$$= \frac{1}{2\sin(\pi b)} \sum_{n=1}^{[x]} (\sin(\pi(2n+1)b) - \sin(\pi(2n-1)b)) = \frac{\sin(\pi(2[x]+1)b) - \sin(\pi b)}{2\sin(\pi b)}.$$

4.1. Аналитическое продолжение периодизированной по параметру b дзета-функция Гурвица

Нетрудно выписать различные явные формулы для аналитического продолжения на всю комплексную плоскость кроме точки $\alpha = 1$ периодизированной дзета-функции Гурвица. В этой точке при всех вещественных значениях b периодизированная дзета-функции Гурвица имеет полюс первого порядка с вычетом равным 1.

Приведенные ниже формулы покрывают всю комплексную плоскость, задавая явный вид аналитического продолжения $\zeta^{*}(\alpha; b)$.

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\zeta^{*}(\alpha; b) =$$

$$
=\begin{cases}
\sum\limits_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}, & \sigma>1,\\[2ex]
\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {\scriptstyle \{b\}=0, \atop \sigma>-1},\\[2ex]
\dfrac{1}{\{b\}^\alpha}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}+(1-\{b\})\left(1-\dfrac{\alpha\{b\}}{2}\right)-I_2\left(\alpha;1-\{b\},\{b\}\right), & {\scriptstyle \{b\}\neq0, \atop \sigma>-1},\\[2ex]
2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}+\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right), & \sigma<0.
\end{cases}
\tag{13}
$$

Доказательство. Действительно, первое равенство при $\sigma>1$ совпадает с определением периодизированной по вещественному параметру b дзета-функции Гурвица (9).

Во втором случае из первой формулы в равенстве (11) и леммы 2 (стр. 77) имеем при $b\in\mathbb{Z}$

$$
\zeta^*(\alpha;b)=\alpha\int\limits_1^\infty\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_1^\infty\frac{(x-\{x\})dx}{x^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{\alpha-1}-\alpha\int\limits_1^\infty\frac{\{x\}dx}{x^{\alpha+1}}=
$$

$$
=\frac{\alpha}{\alpha-1}-I_1(\alpha;0,1)=\frac{\alpha}{\alpha-1}-\alpha\cdot\left(\frac{0\cdot B_1-\frac{y_2(0)}{2}}{1}\right)+
$$

$$
+\frac{(\alpha+1)B_1}{1}-\alpha\cdot\frac{B_1}{1}-I_2(\alpha;0,1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1),
$$

что доказывает второй случай равенства (13).

Аналогично, в третьем случае из второй формулы в равенстве (11) имеем при $b\notin\mathbb{Z}$

$$
\zeta^*(\alpha;b)=\alpha\int\limits_0^\infty\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_0^{1-\{b\}}\frac{dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=
$$

$$
=\frac{1}{\{b\}^\alpha}-1+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{(x+1-\{x\})dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=\frac{1}{\{b\}^\alpha}-1+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{dx}{(x+\{b\})^{\alpha}}+
$$

$$
+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{(1-\{b\})dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}-\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{\{x\}dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=
$$

$$
\begin{gathered}
=\frac{1}{\{b\}^{\alpha}}-1+\frac{\alpha}{\alpha-1}+1-\{b\}-I_1(\alpha,1-\{b\},\{b\})= \\
=\frac{1}{\{b\}^{\alpha}}+\frac{1}{\alpha-1}+1-\{b\}-\left(\alpha\cdot\frac{(1-\{b\})B_1-\frac{y_2(\{1-\{b\}\})}{2}}{1}-\right. \\
\left.-\frac{(\alpha+1)B_1}{1}+\alpha\cdot\frac{B_1\cdot\{b\}}{1}+I_2(\alpha;1-\{b\},\{b\})\right)= \\
=\frac{1}{\{b\}^{\alpha}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}+(1-\{b\})\left(1-\frac{\alpha\{b\}}{2}\right)-I_2\left(\alpha;1-\{b\},\{b\}\right),
\end{gathered}
$$

что доказывает третий случай равенства (13).

Наконец, четвертый случай следует из функционального уравнения для дзета-функции Гурвица (см. [30], стр. 48), так как

$$
\zeta^*(\alpha;b)=\begin{cases}\zeta(\alpha;\{b\}), & \text{при } \{b\}>0;\\ \zeta(\alpha)=\zeta(\alpha;1), & \text{при } \{b\}=0\end{cases}.
$$

□

4.2. Множитель Римана

Через

$$
M(\alpha)=\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2} \tag{14}
$$

будем обозначать множитель из функционального уравнения для дзета-функции Римана (См. [30], стр. 19)

$$
\zeta(\alpha)=M(\alpha)\zeta(1-\alpha).
$$

Легко проверить, что

$$
M(\alpha)\cdot M(1-\alpha)=1. \tag{15}
$$

Действительно,

$$
\begin{gathered}
M(\alpha)\cdot M(1-\alpha)=\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\frac{2\Gamma(\alpha)}{(2\pi)^{\alpha}}\sin\frac{\pi(1-\alpha)}{2}= \\
=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi}\sin\pi\alpha=1
\end{gathered}
$$

согласно формулы дополнения для гамма-функции (см. [31], стр. 19).

Множитель $M(\alpha)$ будем называть *множителем Римана*, а формулу (15) — *формулой дополнения для множителя Римана*.

Из свойств гамма-функции, определения (14) и формулы дополнения (15) следует, что множитель Римана — аналитическая функция для любого комплексного α, кроме точек $\alpha = 1,3,5,\ldots$ — нечетных натуральных значений, где он имеет полюс первого порядка.

Действительно, при $\alpha=n\in\mathbb{N}$ имеется полюс первого порядка у гамма-функции $\Gamma(1-\alpha)$ и это все полюса, а множитель $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ имеет значения

$$
\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}(-1)^m, & \text{при } n=1+2m,\ m=0,1,2,\ldots.\\ 0, & \text{при } n=2m,\ m\in\mathbb{N}.\end{cases}
$$

Поэтому при нечетных натуральных значениях $\alpha=1,3,5,\ldots$ множитель Римана $M(\alpha)$ имеет полюса с вычетом

При натуральных четных значений $\alpha = 2n$, $(n \in \mathbb{N})$ имеем:

$$M(\alpha) = \lim_{\alpha\to 2n} \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \lim_{\alpha\to 2n} \Gamma(1-\alpha)(1-\alpha-(1-2n))\cdot$$
$$\cdot \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)} \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)}{2n-\alpha} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n-1)!}.$$

По свойствам гаммы функции $\Gamma(1+2n) = (2n)!$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому в четных отрицательных значениях α множитель Римана имеет нули первого порядка

$$M(-2n) = \frac{2\Gamma(1+2n)}{(2\pi)^{1+2n}} \sin(-\pi n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}. \tag{16}$$

Так как гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то нули множителя Римана являются нулями функции $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ и формулой (16) исчерпываются все нули множителя Римана.

Наконец, в точках $\alpha = -1, -3, -5, \ldots$ имеем:

$$M(\alpha) = M(1-2n) = \frac{2\Gamma(2n)}{(2\pi)^{2n}} \sin\frac{\pi(1-2n)}{2} = \frac{2(2n-1)!(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Следующая лемма является своеобразным функциональным уравнением для периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица и дзета-функции Гурвица второго рода.

Лемма 5. *Для $0 < b < 1$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо равенство*

$$\zeta^*(\alpha; b) + \zeta^*(\alpha; 1-b) = 2M(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha; b). \tag{17}$$

Доказательство. Действительно, при $\sigma < 0$ согласно (13) имеем

$$\zeta^*(\alpha; b) + \zeta^*(\alpha; 1-b) =$$
$$= 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} + \cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right) +$$
$$+ 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n(1-b)}{n^{1-\alpha}} + \cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n(1-b)}{n^{1-\alpha}}\right) =$$
$$= 4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha; b)$$

что и требовалось доказать. □

4.3. Аналитическое продолжение дзета-функции Гурвица второго рода

Теперь нетрудно доказать аналог леммы 4 (стр. 79) для дзета-функции Гурвица второго рода.

Лемма 6. *Справедливы равенства*

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}}, & \sigma>1,\\[2ex] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {}^{\{b\}=0,}_{\sigma>-1},\\[2ex] \alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-\dfrac{1}{2}, & {}^{\{b\}\ne 0,}_{\sigma>-1},\\[2ex] \dfrac{M(\alpha)}{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{\overline{n+b}^{\,1-\alpha}}=\dfrac{M(\alpha)}{2}\left(\zeta^*(1-\alpha;b)+\zeta^*(1-\alpha;1-b)\right), & {}^{\{b\}\ne 0,}_{\sigma<0},\\ M(\alpha)\zeta(1-\alpha), & {}^{\{b\}=0,}_{\sigma<0}.\end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. Действительно, первое равенство при $\sigma>1$ совпадает с определением дзета-функции Гурвица второго рода (10) (стр. 79).

Второй случай совпадает со вторым случаем равенства (13) (стр. 80), так как при $\{b\}=0$ имеем равенство $\zeta^{**}(\alpha;b)=\zeta^*(\alpha;b)$.

В третьем случае воспользуемся вторым интегральным представлением (12) (стр. 79) для дзета-функции Гурвица второго рода, получим, интегрируя по частям,

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\alpha\int\limits_1^{\infty}\frac{(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\,dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}=$$

$$=\alpha\left.\frac{f(x)}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}\right|_1^{\infty}+\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{\infty}\frac{f(x)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}=\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{\infty}\frac{f(x)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}},$$

где

$$f(x)=\int\limits_1^{x}(\sin(\pi(2[t]+1)b)-\sin(\pi b))\,dt=\sum_{k=1}^{[x]-1}\int\limits_k^{k+1}(\sin(\pi(2k+1)b)-\sin(\pi b))\,dt+$$

$$+\int\limits_{[x]}^{x}(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\,dt=\sum_{k=1}^{[x]-1}(\sin(\pi(2k+1)b)-\sin(\pi b))+$$

$$+(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\{x\}=\sum_{k=1}^{[x]-1}\sin(\pi(2k+1)b)-$$

$$-([x]-1+\{x\})\sin(\pi b)+\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}=\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}-$$

$$-(x-1)\sin(\pi b)+\frac{1}{2\sin(\pi b)}\sum_{k=1}^{[x]-1}(\cos(\pi(2k+1)b-\pi b)-\cos(\pi(2k+1)b+\pi b))=$$

$$=\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}-(x-1)\sin(\pi b)+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^\infty\frac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-$$

$$-\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^\infty\frac{(x-1)dx}{2x^{\alpha+2}}=$$

$$=\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^\infty\frac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-\frac{1}{2},$$

что доказывает третий случай равенства (18).

Наконец, четвертый случай следует из формулы (17) и формулы дополнения для множителя Римана, а пятый случай совпадает с функциональным уравнением для дзета-функции Римана. □

Замечание 2. *Из лемм 5 и 6 следует, что для любых $\alpha\neq1$ справедливы равенства*

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\begin{cases}\zeta(\alpha), & \text{при } \{b\}=0;\\ \frac{M(\alpha)}{2}\left(\zeta^*(1-\alpha;b)+\zeta^*(1-\alpha;1-b)\right), & \text{при } \{b\}>0.\end{cases}$$

Лемма 7. *Справедливо равенство*

$$\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right)=2\zeta(\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right). \tag{19}$$

Доказательство. Действительно, в правой полуплоскости $\sigma>1$ имеем:

$$\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\sum_{n=0}^\infty\left(n+\frac{l}{q}\right)^{-\alpha}+\sum_{n=0}^\infty\left(n+1-\frac{l}{q}\right)^{-\alpha}\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q-1}\left(\sum_{n=0}^\infty(qn+l)^{-\alpha}+\sum_{n=0}^\infty(qn+q-l)^{-\alpha}\right)=$$

$$=2\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}-2\sum_{n=1}^\infty(qn)^{-\alpha}=2\zeta(\alpha)(1-q^{-\alpha}).$$

Переходя к аналитическому продолжению, получим утверждение для любого $\alpha\neq1$.

Проверим утверждение для левой полуплоскости $\sigma<0$. По лемме 5 имеем

$$\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos 2\pi n\frac{l}{q}}{n^{1-\alpha}}=$$

$$=q^{-\alpha}4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{1-\alpha}}\sum_{l=1}^{q-1}\cos 2\pi n\frac{l}{q}.$$

Так как
$$\sum_{l=1}^{q-1}\cos 2\pi n\frac{l}{q} = -1+\sum_{l=0}^{q-1}\frac{e^{2\pi i\frac{nl}{q}}+e^{-2\pi i\frac{nl}{q}}}{2} = q\delta_q(n)-1,$$
то
$$\sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right) =$$
$$= q^{-\alpha}4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q}{(qn)^{1-\alpha}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) =$$
$$= 4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\zeta(1-\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right) = 2\zeta(\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right)$$
что и требовалось доказать. □

5. Гиперболическая дзета-функция Гурвица

Определение 1. *Назовём гиперболической дзета-функцией Гурвица при $d\neq 0$, $d,b\in\mathbb{R}$ функцию $\zeta_H(\alpha;d,b)$, заданную в правой α-полуплоскости $\alpha = = \sigma+it$ $(\sigma>1)$ равенством* [2]
$$\zeta_H(\alpha;d,b) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha}. \qquad (20)$$

Если мы рассмотрим сдвинутую одномерную решетку $\Lambda(d,b)=d\mathbb{Z}+b$, то для гиперболической дзета-функции этой сдвинутой решетки мы получим
$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases}\zeta_H(\alpha;d,b), & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\}\neq 0,\\ \zeta_H(\alpha;d,b)-1, & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\}=0.\end{cases} \qquad (21)$$

Кроме этого нам потребуется дзета-функция сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством
$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = {\sum_{m\in\mathbb{Z}}}' |dm+b|^{-\alpha}, \quad \sigma>1, \qquad (22)$$
где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка m, для которой $dm+b=0$, и аналитическая функция $f_1(\alpha;d,b)$, задаваемая равенством
$$f_1(\alpha;d,b) = {\sum_{-1<dm+b<1}}'\left(1-|dm+b|^{-\alpha}\right). \qquad (23)$$
Ясно, что справедливо равенство
$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) = \zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)+f_1(\alpha;d,b). \qquad (24)$$

Будем как обычно через $\|b\| = \min(\{b\},1-\{b\})$ обозначать расстояние до ближайшего целого. Как хорошо известно, функция $\|b\|$ — чётная: $\|b\| = \|-b\|$.

В работе [16] рассматривалась аналитическая по α функция $f(\alpha,d)$, заданая равенством
$$f(\alpha,d) = \begin{cases}0, & \text{при } d\geqslant 1,\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{d}\right]}\left(1-\frac{1}{|dm|^{\alpha}}\right), & \text{при } 0<d<1.\end{cases} \qquad (25)$$

[2]Здесь и далее для вещественных m используем обозначение $\overline{m}=\max(1,|m|)$.

Ясно, что
$$f_1(\alpha; d, 0) = f(\alpha, d). \tag{26}$$

Положим
$$f_1^*(\alpha; d, b) = \begin{cases} f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| \neq 0; \\ f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + 1, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Лемма 8. *Для гиперболической дзета-функции Гурвица $\zeta_H(\alpha; d, b)$ в правой α-полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ справедливы равенства*
$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \zeta_H\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) =$$
$$= \zeta\left(\Lambda\left(|d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\Big|\alpha\right) + f_1^*\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{28}$$

Доказательство. Действительно, при $\left\{\frac{b}{d}\right\} = 0$ имеем $\left[\frac{b}{d}\right] = \frac{b}{d}$ и
$$\zeta_H(\alpha; d, b) = 1 + \sum_{m=1-\frac{b}{d}}^{\infty} \overline{d\left(m + \frac{b}{d}\right)}^{-\alpha} + \sum_{m=-\infty}^{-1-\frac{b}{d}} \overline{d\left(m + \frac{b}{d}\right)}^{-\alpha} =$$
$$= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \overline{|d|m}^{-\alpha} = \zeta_H\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$$
и в этом случае первое равенство доказано.

Пусть теперь $\left\{\frac{b}{d}\right\} \neq 0$, тогда
$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \sum_{m=-\left[\frac{b}{d}\right]}^{\infty} \overline{d\left(m + \frac{b}{d}\right)}^{-\alpha} + \sum_{m=-\infty}^{-1-\left[\frac{b}{d}\right]} \overline{d\left(m + \frac{b}{d}\right)}^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{|d|\left(m + \left\{\frac{b}{d}\right\}\right)}^{-\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} \overline{|d|\left(m + 1 - \left\{\frac{b}{d}\right\}\right)}^{-\alpha} = \zeta_H\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$$
и первое равенство полностью доказано.

Аналогично первому равенству доказывается, что
$$f_1(\alpha; d, b) = f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{29}$$

Действительно, при $d < 0$ имеем
$$f_1(\alpha; d, b) = \sideset{}{'}\sum_{-1<dm+b<1} \left(1 - |dm+b|^{-\alpha}\right) = \sideset{}{'}\sum_{-\frac{1}{d}>m+\frac{b}{d}>\frac{1}{d}} \left(1 - \left(|d|\left|m + \frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha}\right) =$$
$$= \sideset{}{'}\sum_{-\left|\frac{1}{d}\right|<m+\left\|\frac{b}{d}\right\|<\left|\frac{1}{d}\right|} \left(1 - \left(|d|\left|m + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right|\right)^{-\alpha}\right) = f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{30}$$

Отсюда и из равенств (21), (24) и (27) следует справедливость второго равенства в формуле (28). $\square$

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } |d|\geqslant 1, \left\|\frac{b}{d}\right\|=0; \\ \sum\limits_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{|d|}\right]}\left(1-\dfrac{1}{|dm|^{\alpha}}\right), & \text{при } 0<|d|<1, \left\|\frac{b}{d}\right\|=0; \\ 0, & \text{при } |d|\geqslant 2, \left\|\frac{b}{d}\right\|\geqslant\frac{1}{|d|}; \\ 1-\left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } |d|\geqslant 2, 0<\left\|\frac{b}{d}\right\|<\frac{1}{|d|}; \\ 2-\left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}-\left(|d|-|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1\leqslant|d|<2, \\ \left\|\frac{b}{d}\right\|>\left\|\frac{1}{|d|}\right\| \end{cases}; \\ 1-\left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1\leqslant|d|<2, \\ 0<\left\|\frac{b}{d}\right\|\leqslant\left\|\frac{1}{|d|}\right\| \end{cases}; \\ \sum\limits_{m=-\left[\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]}^{\left[\left|\frac{1}{d}\right|-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]}\left(1-\left(|d|\left|m+\left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right|\right)^{-\alpha}\right), & \text{при } 0<|d|<1, 0<\left\|\frac{b}{d}\right\|. \end{cases} \tag{31}$$

Доказательство. При $\left\|\frac{b}{d}\right\|=0$ первый и второй случай в равенстве (31) следует из (29), (26) и (25).

При $\left\|\frac{b}{d}\right\|\geqslant\frac{1}{|d|}$ и $|d|\geqslant 2$ область суммирования в формуле (30) не содержит целых точек, поэтому сумма равна 0 и третий случай в равенстве (31) доказан.

При $0<\left\|\frac{b}{d}\right\|<\frac{1}{|d|}$ и $|d|\geqslant 2$ область суммирования в формуле (30) содержит только одну целую точку $m=0$, поэтому сумма содержит только одно слагаемое и четвертый случай в равенстве (31) доказан.

При $\left\|\frac{b}{d}\right\|>\left\|\frac{1}{|d|}\right\|$ и $1\leqslant|d|<2$ область суммирования в формуле (30) содержит только две целых точки $m=0$ и $m=-1$, поэтому сумма содержит только два слагаемых и пятый случай в равенстве (31) доказан.

При $0<\left\|\frac{b}{d}\right\|\leqslant\left\|\frac{1}{|d|}\right\|$ и $1\leqslant|d|<2$ область суммирования в формуле (30) также как и в четвертом случае содержит только одну целую точку $m=0$, поэтому сумма содержит только одно слагаемое и шестой случай в равенстве (31) доказан.

Наконец, при $0<\left\|\frac{b}{d}\right\|$ и $0<|d|<1$ область суммирования $-\left|\frac{1}{d}\right|<m+\left\|\frac{b}{d}\right\|<\left|\frac{1}{d}\right|$ в формуле (30) можно записать в виде $-\left[\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]\leqslant m\leqslant\left[\left|\frac{1}{d}\right|-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]$, поэтому сумма преобретает указанный вид и седьмой случай в равенстве (31) доказан. □

5.1. Дзета-функция сдвинутой решетки

Для получения функционального уравнения для дзета-функции сдвинутой решетки $\Lambda(d,b)$ нам еще потребуется дзета-функция второго рода сдвинутой решетки $\zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством

$$\zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \zeta(\Lambda(d,b)|\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0, \\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{|dm|^{\alpha}}, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0. \end{cases} \tag{32}$$

Взаимную сдвинутую решётку определим равенством $\Lambda^*(d,b) = \Lambda\left(\frac{1}{d}, \frac{b}{d^2}\right)$. Нетрудно видеть, что $\Lambda^{**}(d,b) = \Lambda^*\left(\frac{1}{d}, \frac{b}{d^2}\right) = \Lambda(d,b)$.

Лемма 10. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$ на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, где полюс первого порядка, справедливо равенство*

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha}, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ \\ \dfrac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1 - \left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right)\right), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| > 0. \end{cases} \qquad (33)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала правую полуплоскость $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$.

При $\left\|\frac{b}{d}\right\| = 0$ согласно равенству (22) (стр. 85) имеем

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' |dm+b|^{-\alpha} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m + \frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m + \left\{\frac{b}{d}\right\}\right|\right)^{-\alpha} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' (|d|\,|m|)^{-\alpha} = \frac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha}$$

и первый случай равенства (33) для правой полуплоскости доказан.

Аналогично, при $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$ имеем

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' |dm+b|^{-\alpha} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m + \frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m + \left\{\frac{b}{d}\right\}\right|\right)^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(|d|\left(m + \left\{\frac{b}{d}\right\}\right)\right)^{-\alpha} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \left(|d|\left(m + 1 - \left\{\frac{b}{d}\right\}\right)\right)^{-\alpha} = \frac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1 - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\right)$$

и второй случай равенства (33) для правой полуплоскости доказан.

Так как все функции, входящие в правую часть равенства (33), аналитичны на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, где у двух функций полюс первого порядка, то, применяя принцип аналитического продолжения, получим справедливость равенства (33) на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$. □

Лемма 11. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \dfrac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ \\ \dfrac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| > 0. \end{cases} \qquad (34)$$

Доказательство. Действительно, если $\left\|\frac{b}{d}\right\| = 0$, то $\Lambda(d,b) = \Lambda(d)$, $\Lambda^*(d,b) = \Lambda^*(d) = \Lambda\left(\frac{1}{d}\right) = \Lambda\left(\frac{1}{d}, \frac{b}{d^2}\right)$ и согласно лемме 10 и функциональному уравнению для дзета-функции Римана

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha} = \frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{|d|^\alpha} =$$
$$= \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)} \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{\left|\frac{m}{d} + \frac{b}{d^2}\right|^{1-\alpha}} = \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha)$$

и первый случай равенства (34) доказан.

Пусть теперь $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$, тогда по лемме 10 имеем:

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1 - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\right).$$

Применим функциональное уравнение (5) (стр. 82) к правой части, получим

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\zeta^{**}\left(1-\alpha; \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) = \frac{M(\alpha)}{|d|^\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{|m|^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\cos\left(2\pi \frac{m\frac{b}{d^2}}{\frac{1}{d}}\right)}{\left|\frac{m}{d}\right|^{1-\alpha}} = \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha).$$

□

Рассмотрим теперь двумерную сдвинутую решётку $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda(d_1,b_1)\times\Lambda(d_2,b_2) = d_1\mathbb{Z}\times d_2\mathbb{Z} + (b_1,b_2)$. Её дзета-функция определяется естественным образом:

$$\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha) = \zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)\cdot\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha).$$

Аналогично определяется дзета-функция второго рода сдвинутой решетки:

$$\zeta^*(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha) = \zeta^*(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)\cdot\zeta^*(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha).$$

Нетрудно видеть, что если положить $\Lambda^*(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda^*(d_1,b_1)\times\Lambda^*(d_2,b_2)$, то

$$\Lambda^{**}(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda^*\left(\frac{1}{d_1},\frac{b_1}{d_1^2},\frac{1}{d_2},\frac{b_2}{d_2^2}\right) = \Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2).$$

Лемма 12. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)|\alpha)$ в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)|\alpha) = \frac{M^2(\alpha)}{\det\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)}\zeta^*(\Lambda^*(d_1,b_1,d_2,b_2)|1-\alpha). \tag{35}$$

Доказательство. Действительно, так как $\det\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) = \det\Lambda(d_1,b_1)\cdot\det\Lambda(d_2,b_2)$, то утверждение леммы непосредственно следует из определения дзета-функции сдвинутой решётки и леммы 11. □

5.2. Интегральные представления

Обозначим через $n(d,b)$ количество решений системы неравенств

$$-1\leqslant dm+b\leqslant 1$$

в целых числах m, а через $n^*(d,b)$ — количество решений системы неравенств

$$-1<dm+b<1.$$

Нетрудно видеть, что $n(d,b) = n\left(|d|,|d|\cdot\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$, $n^*(d,b) = n^*\left(|d|,|d|\cdot\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$, кроме того

$$n^*(d,b) = \begin{cases} n(d,b), & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{1+b}{d}\notin\mathbb{Z};\\ n(d,b)-1, & \text{при } \frac{1-b}{d}\in\mathbb{Z},\ \frac{1+b}{d}, \frac{2}{d}\notin\mathbb{Z};\\ n(d,b)-1, & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{2}{d}\notin\mathbb{Z},\ \frac{1+b}{d}\in\mathbb{Z};\\ n(d,b)-2, & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{1+b}{d}, \frac{2}{d}\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Рассмотрим шесть положительных чисел

$$\omega_1=\omega_1(d,b)=1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\},\quad \omega_2=\omega_2(d,b)=1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\},$$
$$\omega_1^*=\omega_1^*(d,b)=\frac{1}{|d|}+\left\{\left\|\frac{b}{d}\right\|-\frac{1}{|d|}\right\},\quad \omega_2^*=\omega_2^*(d,b)=\frac{1}{|d|}+\left\{-\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\},$$
$$\omega_1^{**}=\begin{cases}\{\omega_1^*(d,b)\}, & \text{при } \{\omega_1^*(d,b)\}>0;\\ 1, & \text{при } \{\omega_1^*(d,b)\}=0;\end{cases},\quad \omega_2^{**}=\begin{cases}\{\omega_2^*(d,b)\}, & \text{при } \{\omega_2^*(d,b)\}>0;\\ 1, & \text{при } \{\omega_2^*(d,b)\}=0.\end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что

$$\omega_1=\begin{cases}\omega_1^*, & \text{при } \left\{\frac{1}{|d|}\right\}\ne\left\|\frac{b}{d}\right\|;\\ \\ \omega_1^*+1, & \text{при } \left\{\frac{1}{|d|}\right\}=\left\|\frac{b}{d}\right\|;\end{cases},\quad \omega_2=\begin{cases}\omega_2^*, & \text{при } \left\{1-\frac{1}{|d|}\right\}\ne\left\|\frac{b}{d}\right\|;\\ \\ \omega_2^*+1, & \text{при } \left\{1-\frac{1}{|d|}\right\}=\left\|\frac{b}{d}\right\|;\end{cases}$$

Теорема 1. *В α-полуплоскости $\alpha=\sigma+it$, $\sigma>1$ справедливы тождества*

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b)=n(d,b)\Gamma(\alpha)+$$
$$+|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right)dx= \tag{36}$$

$$=n^*(d,b)\Gamma(\alpha)+\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}+\left\{\left\|\frac{b}{d}\right\|-\frac{1}{|d|}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(\frac{1}{|d|}+\left\{-\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right)dx= \tag{37}$$

$$=f_1^*(\alpha;d,b)\Gamma(\alpha)+\begin{cases}\dfrac{1}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\left(e^{-\left\|\frac{b}{d}\right\|\cdot x}+e^{-\left(1-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\cdot x}\right)}{1-e^{-x}}dx, & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0;\\ \dfrac{2}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}e^{-x}dx, & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0.\end{cases} \tag{38}$$

Доказательство. Без ограничения общности согласно лемме 8 (стр. 86) можно считать $d>0$, $0\leqslant b\leqslant\frac{d}{2}$.

Известно, что при $\sigma>0$ справедливо интегральное представление для гамма функции

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Заменим теперь в этом интеграле переменную x на $\overline{dm+b}\cdot x$ [3]. Эта замена даст равенство:

$$\Gamma(\alpha)\left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha}=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\overline{dm+b}\cdot x}dx.$$

[3]Здесь и далее $\overline{dm+b}=\max(1,|dm+b|)$

Суммируя по всем целым $m \in \mathbb{Z}$, получим

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b) = \Gamma(\alpha)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\overline{dm+b}\cdot x}dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\left(\sum_{m=-N}^{N}e^{-\overline{dm+b}\cdot x}\right)dx = \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}S(N,d,b)dx,$$

где

$$S(N,d,b) = \sum_{m=-N}^{N}e^{-\overline{dm+b}\cdot x}.$$

Пусть $N_1 = \left[\frac{1-b}{d}\right]$, $N_2 = \left[\frac{1+b}{d}\right]$, тогда $n(d,b) = N_1 + N_2 + 1$. Аналогично, положим $N_1^* = -\left[\frac{b-1}{d}\right] - 1$, $N_2^* = -\left[-\frac{1+b}{d}\right] - 1$, тогда $n^*(d,b) = N_1^* + N_2^* + 1$ и справедливы неравенства $N_1^* \leqslant N_1$, $N_2^* \leqslant N_2$ и

$$N_1^* = \begin{cases} N_1, & \text{при } \left\{\frac{1-b}{d}\right\} > 0; \\ N_1 - 1, & \text{при } \left\{\frac{1-b}{d}\right\} = 0, \end{cases} \qquad N_2^* = \begin{cases} N_2, & \text{при } \left\{\frac{1+b}{d}\right\} > 0; \\ N_2 - 1, & \text{при } \left\{\frac{1+b}{d}\right\} = 0; \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что при $N > \max(N_1, N_2)$

$$S(N,d,b) = \sum_{m=-N}^{N}e^{-\overline{dm+b}\cdot x} = \sum_{m=N_1+1}^{N}e^{-|dm+b|\cdot x} + \sum_{m=-N_2}^{N_1}e^{-x} + \sum_{m=-N}^{-(N_2+1)}e^{-|dm+b|\cdot x} =$$

$$= (N_1+N_2+1)e^{-x} + \sum_{m=1}^{N-N_1}e^{-(dm+dN_1+b)\cdot x} + \sum_{m=1}^{N-N_2}e^{-(dm+dN_2-b)\cdot x} =$$

$$= (N_1+N_2+1)e^{-x} + \sum_{m=1}^{N-N_1}e^{-\left(dm+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} + \sum_{m=1}^{N-N_2}e^{-\left(dm+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x} =$$

$$= (N_1+N_2+1)e^{-x} + \frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} - e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}} +$$

$$+ \frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x} - e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}.$$

Поэтому

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b) = \Gamma(\alpha)(N_1+N_2+1) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} + e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx -$$

$$- \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} + e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx =$$

$$= n(d,b)\Gamma(\alpha) + |d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x} + e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right)dx,$$

так как

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx=0$$

в силу оценок

$$\left|x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right)\frac{x}{e^{dx}-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{d}\cdot x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right);$$

$$\left|\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\infty\frac{1}{d}\cdot x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right)dx=\frac{1}{d}\cdot$$

$$\cdot\left(\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)^{1-\sigma}+\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)^{1-\sigma}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^\infty x^{\sigma-2}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\sigma-1)}{d}\cdot(dN)^{1-\sigma}\cdot$$

$$\cdot\left(\left(1-\frac{N_1}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1-b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}+\left(1-\frac{N_2}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1+b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}\right),$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(\sigma-1)}{d}\cdot(dN)^{1-\sigma}=0,$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\left(1-\frac{N_1}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1-b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}+\left(1-\frac{N_2}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1+b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}\right)=2.$$

Аналогично получим и тождество (37).

Для полноты изложения проверим непосредственно, что правые части в (36) и (37) равны. Для этого надо рассмотреть только случай, когда $\left\{\frac{1-b}{d}\right\}=0$ или $\left\{\frac{1+b}{d}\right\}=0$. Оба эти случаи разбираются одинаково и сводятся к доказательству равенства

$$\Gamma(\alpha)+|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx=\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx.$$

Но

$$\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx-|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx=$$

$$= \frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)\left(1-e^{-x}\right)dx = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \Gamma(\alpha),$$

и равенство правых частей в (36) и (37) доказано.

Перейдем к доказательству последнего равенства в утверждении теоремы. Из леммы 8 (стр. 86) следует, что

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b) = \Gamma(\alpha)\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\Big|\,\alpha\right) + \Gamma(\alpha)f_1^*\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right).$$

Повторяя для дзета-функции $\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\big|\,\alpha\right)$ предыдущие рассуждения, получим

$$\Gamma(\alpha)\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\Big|\,\alpha\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\left(e^{-\left\|\frac{b}{d}\right\|\cdot x}+e^{-\left(1-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\cdot x}\right)}{1-e^{-x}}dx, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0; \\ \dfrac{2}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}e^{-x}dx, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0 \end{cases}$$

и доказательство полностью завершено. □

Напомним определение контура Ханкеля C, состоящего из трех последовательных частей C_1, C_2 и C_3. Делается разрез комплексной α-плоскости вдоль вещественной оси от 0 до бесконечности. Берется положительное число r, удовлетворяющее неравенствам $0<r<2\pi$. C_1 обозначает луч, начинающийся в бесконечности и идущий до точки $\alpha=r$ вдоль верхнего края разреза плоскости, C_2 — окружность радиуса r с центром в точке $\alpha=0$, которая обходится в положительном направлении, и C_3 — луч, начинающийся в точке $\alpha=r$ и идущий в бесконечность вдоль нижнего края разреза плоскости.

Определим для комплексных α и положительных ω функцию $F(\alpha;\omega)$ равенством

$$F(\alpha;\omega) = \int\limits_C \frac{z^{\alpha-1}e^{-\omega z}}{1-e^{-z}}dz. \tag{39}$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Интеграл $F(\alpha;\omega)$ всюду сходится и изображает целую функцию.*

2. *Для любого $\alpha\neq 1$ справедливы тождества*

$$F(\alpha;\omega_1)+F(\alpha;\omega_2) = \left(e^{2\pi i\alpha}-1\right)\cdot|d|^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\left(\zeta_H(\alpha;d,b)-n(d,b)\right), \tag{40}$$

$$F(\alpha;\omega_1^*)+F(\alpha;\omega_2^*) = \left(e^{2\pi i\alpha}-1\right)\cdot|d|^\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\left(\zeta_H(\alpha;d,b)-n^*(d,b)\right). \tag{41}$$

3. *Функция $\zeta_H(\alpha;d,b)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость, кроме точки $\alpha=1$, где она имеет полюс 1-го порядка, причём*

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1}\zeta_H(\alpha;d,b) = \frac{2}{|d|}. \tag{42}$$

4. В полуплоскости $\sigma < 0$ справедливы тождества:

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi m \frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} =$$

$$= f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \zeta^{**}\left(1 - \alpha, \frac{b}{d}\right). \tag{43}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 31 из [33] (см. [33], стр. 82).

При $\sigma > 1$, повторяя рассуждения из теоремы 31 из [33] и пользуясь теоремой 1 (стр. 90), получим первое равенство второго утверждения теоремы. Второе равенство доказывается аналогично.

Так как все входящие в (40) функции имеют аналитическое продолжение на всю комплексную α-плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, то и функция $\zeta_H(\alpha; d, b)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость, кроме точки $\alpha = 1$.

Таким образом второе утверждение доказано полностью, причём из равенства (40) следует, что в α-полуплоскости $\sigma \leqslant 1$ гиперболическая дзета-функция Гурвица определяется равенством

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = n(d, b) + \frac{F(\alpha; \omega_1) + F(\alpha; \omega_2)}{(e^{2\pi i \alpha} - 1) \cdot |d|^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}.$$

Из последнего выражения следует, что особенности гиперболической дзета-функции Гурвица, если таковые вообще существуют, могут находиться только в точках $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Но в точках $\alpha = 2, 3, \ldots$ особенностей быть не может, ибо во всей α-полуплоскости $\sigma > 1$ гиперболическая дзета-функция Гурвица изображается абсолютно сходящимся рядом (20).

Далее, в точках $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$ нули функции $e^{2\pi i \alpha} - 1$ "гасят" полюсы гамма функции; поэтому эти точки также не являются особыми точками для гиперболической дзета-функции Гурвица. Остаётся только точка $\alpha = 1$. Для неё имеем:

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1} \zeta_H(\alpha; d, b) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\alpha - 1}{e^{2\pi i \alpha} - 1} \cdot \frac{F(1; \omega_1) + F(1; \omega_2)}{|d| \cdot \Gamma(1)} =$$

$$= \frac{1}{|d| \cdot 2\pi i} \left(\int\limits_C \frac{z^{\alpha-1} e^{-\omega_1 z}}{1 - e^{-z}} dz + \int\limits_C \frac{z^{\alpha-1} e^{-\omega_2 z}}{1 - e^{-z}} dz \right) = \frac{2}{|d|}$$

в силу рассуждений при доказательстве теоремы 31 из [33] (см. стр. 85). Тем самым третье утверждение теоремы доказано.

Наконец, повторяя дословно рассуждения из монографии [33] на стр. 87, при $\sigma < 0$ получим:

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{i(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha} \left(e^{-\pi i \frac{\alpha}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m \omega_1^{**}} + e^{-2\pi i m \omega_2^{**}}}{m^{1-\alpha}} - \right.$$

$$\left. - e^{\pi i \frac{\alpha}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m \omega_1^{**}} + e^{2\pi i m \omega_2^{**}}}{m^{1-\alpha}} \right) = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \omega_1^{**}) + \sin(2\pi m \omega_2^{**})}{m^{1-\alpha}} + \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi m \omega_1^{**}) + \cos(2\pi m \omega_2^{**})}{m^{1-\alpha}} \right).$$

Теперь воспользуемся периодичность тригонометрических функций и видом величин ω_1^{**} и ω_2^{**}, получим:

$$\sin(2\pi m\omega_1^{**}) + \sin(2\pi m\omega_2^{**}) = \sin\left(2\pi m\left(1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) +$$
$$+ \sin\left(2\pi m\left(1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) = \sin\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) - \sin\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) = 0,$$
$$\cos(2\pi m\omega_1^{**}) + \cos(2\pi m\omega_2^{**}) = \cos\left(2\pi m\left(1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) +$$
$$+ \cos\left(2\pi m\left(1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) = 2\cos\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right),$$

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = f_1(\alpha; d, b) + \frac{4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)}{m^{1-\alpha}} =$$
$$= f_1(\alpha; d, b) + \frac{4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} =$$
$$= f_1(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\cdot\zeta^{**}\left(1-\alpha, \frac{b}{d}\right)$$

и теорема полностью доказана. □

6. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток

Диагональные решётки и сдвинутые диагональные решётки относятся к классу простейших декартовых решёток. Уже на их примере видно, что функциональные уравнения для гиперболической дзета-функции решёток имеют дополнительные слагаемых, которых нет в функциональном уравнении для дзета-функции Римана.

В этом разделе рассмотрим одномерный случай функционального уравнения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(d\mathbb{Z}+b \mid \alpha)$ и двумерный случай функционального уравнения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(d_1\mathbb{Z}\times d_2\mathbb{Z}+\vec{b} \mid \alpha)$.

Нам потребуется следующее определение.

Определение 2. *Гиперболической дзета-функцией второго рода сдвинутой решетки $\zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha)$ называется функция $\zeta_H^*(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством*

$$\zeta_H^*(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0, \\ \sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{\overline{dm}^{\,\alpha}}, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| > 0. \end{cases} \tag{44}$$

Если ввести обозначения

$$f_2(\alpha; d, b) = \sideset{}{'}\sum_{-1<dm<1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)\left(1-|dm|^{-\alpha}\right), \tag{45}$$

то ясно, что справедливо равенство

$$\zeta_H^*(\Lambda(d,b)|\alpha) = \zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha) + f_2(\alpha; d, b). \tag{46}$$

6.1. Одномерный случай

Лемма 13. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(d,b) \mid \alpha)$ произвольной сдвинутой решётки $\Lambda(d,b)$ вида $\Lambda(d,b) = d\cdot\mathbb{Z}+b$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda(d,b) \mid \alpha)$ справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(d,b) \mid \alpha) = \zeta(\Lambda(d,b) \mid \alpha) + f_1(\alpha; d, b). \tag{47}$$

Доказательство. Действительно, из определения гиперболической дзета-функции решётки следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d,b) \mid \alpha) = \sum_{|dm+b|\geqslant 1} |dm+b|^{-\alpha} + \sum_{-1<dm+b<1}{}' 1 =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' |dm+b|^{-\alpha} + \sum_{-1<dm+b<1}{}' \left(1-|dm+b|^{-\alpha}\right) = \zeta(\Lambda(d,b) \mid \alpha) + f_1(\alpha; d, b).$$

□

Теорема 3. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d\cdot\mathbb{Z}$, где $d>0$, в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) - f(\alpha, d) = \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda}\left(\zeta_H\left(\Lambda^*\right| 1-\alpha) - f(1-\alpha, d^{-1})\right). \tag{48}$$

Доказательство. См. [16]. □

Для сдвинутой решётки $\Lambda(d,b)$, когда $\left\|\frac{b}{d}\right\| \neq 0$, ситуация несколько другая.

Теорема 4. *Для гиперболической дзета-функции произвольной сдвинутой декартовой решётки $\Lambda(d,b)$ вида $\Lambda(d,b) = d\cdot\mathbb{Z}+b$, где $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$, в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d,b) \mid \alpha) - f_1(\alpha, d, b) =$$
$$= \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\left(\zeta_H^*\left(\Lambda^*(d,b)\right| 1-\alpha) - f_2\left(1-\alpha, \frac{1}{d}, \frac{b}{d^2}\right)\right). \tag{49}$$

Доказательство. Действительно, согласно формулам (23) и (46) имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) - f_1(\alpha; d, b) = \zeta(\Lambda(d,b)|\alpha),$$
$$\zeta_H^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha) - f_2\left(1-\alpha; \frac{1}{d}, \frac{b}{d^2}\right) = \zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha).$$

Согласно лемме 11 (см. стр. 88) правые части связаны функциональным уравнением, отсюда следует утверждение теоремы. □

Уже в одномерном случае можно проиллюстрировать эффективность функционального уравнения для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки.

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda(d) = d\cdot\mathbb{Z}$ и её подрешетку $\Lambda(d_1) = d_1\cdot\mathbb{Z}$. Ясно, что $d_1 = n\cdot d$, $n\in\mathbb{N}$ и имеет место разбиение на сдвинутые подрешётки

$$\Lambda(d) = \bigcup_{b=0}^{n-1} \Lambda\left(d_1, bd\right). \tag{50}$$

Из этого разбиения вытекает равенство в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ ($\sigma > 1$):

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha) = \sum_{b=0}^{n-1} \zeta_H(\Lambda\left(d_1, bd\right)|\alpha). \tag{51}$$

Применим функциональные уравнения для левой и правой частей данного равенства, тогда в левой полуплоскости $\sigma < 0$ получим

$$\zeta_H(\Lambda(d) \mid \alpha) - f(\alpha, d) = \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda(d)} \left(\zeta_H\left(\Lambda^*(d)\right| 1-\alpha) - f(1-\alpha, d^{-1})\right),$$

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, bd) \mid \alpha) - f_1(\alpha, d_1, bd) =$$

$$= \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, bd)} \left(\zeta^*_H\left(\Lambda^*(d_1, bd)\right| 1-\alpha) - f_2\left(1-\alpha, \frac{1}{d_1}, \frac{bd}{d_1^2}\right)\right).$$

Лемма 14. *Справедливо равенство*

$$f(\alpha, d) = \sum_{b=0}^{n-1} f_1(\alpha, dn, bd). \tag{52}$$

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{b=0}^{n-1} f_1(\alpha, dn, bd) = \sum_{b=0}^{n-1} \sideset{}{'}\sum_{-1<dnm+bd<1} \left(1 - |dnm+db|^{-\alpha}\right) =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<dm<1} \left(1 - |dm|^{-\alpha}\right) = f(\alpha, d),$$

так как

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{b=0}^{n-1} \{nm + b | m \in \mathbb{Z}\}.$$

□

Лемма 15. *Справедливо равенство*

$$f(1-\alpha, d^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} f_2\left(1-\alpha, \frac{1}{dn}, \frac{bd}{(dn)^2}\right). \tag{53}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} f_2\left(1-\alpha, \frac{1}{dn}, \frac{bd}{(dn)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{dn}<1} \cos\left(2\pi m \frac{b}{n}\right) \left(1 - \left|\frac{m}{dn}\right|^{\alpha-1}\right) =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{dn}<1} \left(1 - \left|\frac{m}{dn}\right|^{\alpha-1}\right) \frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} \cos\left(2\pi m \frac{b}{n}\right) =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{d}<1} \left(1 - \left|\frac{m}{d}\right|^{\alpha-1}\right) = f(\alpha, d^{-1}),$$

так как

$$\frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} \cos\left(2\pi m \frac{b}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 0 \pmod n, \\ 0, & \text{при } m \not\equiv 0 \pmod n \end{cases}.$$

□

Лемма 16. *Справедливо равенство*

$$\zeta\left(\Lambda^*(d)|\,1-\alpha\right)=\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\zeta^*(\Lambda^*(dn,bd)|1-\alpha). \tag{54}$$

Доказательство. Действительно, $\Lambda^*(dn,bd)=\Lambda\left(\frac{1}{dn},\frac{b}{dn^2}\right)$ и

$$\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right)}{\left|\frac{m}{dn}\right|^{1-\alpha}}=$$
$$=\sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left|\frac{m}{dn}\right|^{1-\alpha}}\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right)=\sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left|\frac{m}{d}\right|^{1-\alpha}}=\zeta\left(\Lambda^*(d)|\,1-\alpha\right),$$

так как

$$\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right)=\begin{cases}1, & \text{при } m\equiv 0 \pmod n,\\ 0, & \text{при } m\not\equiv 0 \pmod n\end{cases}.$$

□

Из лемм 14 — 16 видно, что правые части функционального уравнения для сдвинутых решёток, содержащие функции второго рода, обеспечивают выделение подрешёток из решёток.

Теорема 5. *Для любого $\alpha_0=\sigma_0+it_0$ в левой полуплоскости $\sigma<0$ пусть $K(\alpha_0)$ — произвольный компакт в этой полуплоскости, содержащий точку α_0, тогда для любого $d_0>0$ и для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки $\Lambda(d)$ вида $\Lambda(d)==d\cdot\mathbb{Z}$, где $d>0$, справедливо равенство*

$$\lim_{d\to d_0}\zeta_H(\Lambda(d)\mid\alpha)=\zeta_H\left(\Lambda(d_0)|\,\alpha\right). \tag{55}$$

и эта сходимость равномерная во всем компакте $K(\alpha_0)$.

Доказательство. Действительно, для любой точки α из компакта $K(\alpha_0)$ точка α принадлежит левой полуплоскости $\sigma<0$, а $1-\alpha$ — правой полуплоскости $\sigma>1$, и согласно теореме 3 (стр. 96) имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(d)\mid\alpha)=f(\alpha,d)+\frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d)}\left(\zeta_H\left(\Lambda^*(d)|\,1-\alpha\right)-f(1-\alpha,d^{-1})\right).$$

В правой части все функции, зависящие от d, непрерывны, а множитель $M(\alpha)$ — аналитическая функция на компакте $K(\alpha_0)$, поэтому ограничена некоторой константой, зависящей от компакта. Отсюда следует равномерная сходимость в равенстве (61). □

6.2. Двумерный случай

Перейдем к рассмотрению двумерного случая.

Положим $\Lambda_\nu=d_\nu\cdot\mathbb{Z}$, $\Lambda_\nu(d_\nu,b_\nu)=d_\nu\cdot\mathbb{Z}+b_\nu$, $(\nu=1,2)$.

Лемма 17. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda\mid\alpha)$ произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda=d_1\cdot\mathbb{Z}\times d_2\cdot\mathbb{Z}$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda\mid\alpha)$ справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda\mid\alpha)=\zeta(\Lambda\mid\alpha)+\zeta(\Lambda_1\mid\alpha)+\zeta(\Lambda_2\mid\alpha)+\\+f(\alpha,d_1)\zeta(\Lambda_2\mid\alpha)+f(\alpha,d_2)\zeta(\Lambda_1\mid\alpha)+\\+f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2)+f(\alpha,d_1)+f(\alpha,d_2)=\\=\zeta(\Lambda\mid\alpha)+\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha)+\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha)+\\+f(\alpha,d_1)\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha)+f(\alpha,d_2)\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha)-f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2).\end{gathered} \tag{56}$$

Доказательство. См. [16]. □

Теорема 6. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d_1\cdot\mathbb{Z}\times d_2\cdot\mathbb{Z}$, где $d_1, d_2 > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda\mid\alpha) - \zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha) - \zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha) - f(\alpha,d_1)\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha) - \\ - f(\alpha,d_2)\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha) + f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(\zeta_H\left(\Lambda^*\right|1-\alpha) - \right. \\ - \zeta_H(\Lambda_1^*\mid 1-\alpha) - \zeta_H(\Lambda_2^*\mid 1-\alpha) - \\ - f(1-\alpha, d_1^{-1})\zeta_H(\Lambda_2^*\mid 1-\alpha) - f(1-\alpha,d_2^{-1})\zeta_H(\Lambda_1^*\mid 1-\alpha) + \\ \left. + f(1-\alpha,d_1^{-1})f(1-\alpha,d_2^{-1})\right). \end{gathered} \tag{57}$$

Доказательство. См. [16]. □

Теперь мы можем получить новую форму функционального уравнения для гиперболической дзета-функции двумерной диагональной решётки.

Теорема 7. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d_1\cdot\mathbb{Z}\times d_2\cdot\mathbb{Z}$, где $d_1, d_2 > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda\mid\alpha) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta_H\left(\Lambda^*\right|1-\alpha) +$$

$$\begin{gathered} + \zeta_H\left(\Lambda_1^*\right|1-\alpha)\left(\frac{M(\alpha)}{d_1}\left(1+f(\alpha,d_2)\right) - \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_2^{-1})\right)\right) + \\ + \zeta_H\left(\Lambda_2^*\right|1-\alpha)\left(\frac{M(\alpha)}{d_2}\left(1+f(\alpha,d_1)\right) - \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_1^{-1})\right)\right) + \\ + \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}f(1-\alpha,d_1^{-1})f(1-\alpha,d_2^{-1}) + f(\alpha,d_1) + f(\alpha,d_2) + f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2) - \\ - \frac{M(\alpha)}{d_1}f(1-\alpha,d_1^{-1})\left(1+f(\alpha,d_2)\right) - \frac{M(\alpha)}{d_2}f(1-\alpha,d_2^{-1})\left(1+f(\alpha,d_1)\right). \end{gathered} \tag{58}$$

Доказательство. Действительно, по теореме 3 имеем:

$$\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha) - f(\alpha,d_1) = \frac{M(\alpha)}{d_1}\left(\zeta_H\left(\Lambda_1^*\right|1-\alpha) - f(1-\alpha,d_1^{-1})\right),$$

$$\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha) - f(\alpha,d_2) = \frac{M(\alpha)}{d_2}\left(\zeta_H\left(\Lambda_2^*\right|1-\alpha) - f(1-\alpha,d_2^{-1})\right).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha)\left(1+f(\alpha,d_2)\right) = \\ = \left(f(\alpha,d_1) + \frac{M(\alpha)}{d_1}\left(\zeta_H\left(\Lambda_1^*\right|1-\alpha) - f(1-\alpha,d_1^{-1})\right)\right)\left(1+f(\alpha,d_2)\right),\end{gathered} \tag{59}$$

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha)\left(1+f(\alpha,d_1)\right) = \\ = \left(f(\alpha,d_2) + \frac{M(\alpha)}{d_2}\left(\zeta_H\left(\Lambda_2^*\right|1-\alpha) - f(1-\alpha,d_2^{-1})\right)\right)\left(1+f(\alpha,d_1)\right).\end{gathered} \tag{60}$$

Сложив почленно (57), (59) и (60), получим

$$\zeta_H(\Lambda\mid\alpha) + f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta_H\left(\Lambda^*\right|1-\alpha) +$$

$$+\zeta_H\left(\Lambda_1^*|\,1-\alpha\right)\left(\frac{M(\alpha)}{d_1}\left(1+f(\alpha,d_2)\right)-\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_2^{-1})\right)\right)+$$
$$+\zeta_H\left(\Lambda_2^*|\,1-\alpha\right)\left(\frac{M(\alpha)}{d_2}\left(1+f(\alpha,d_1)\right)-\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_1^{-1})\right)\right)+$$
$$+\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}f(1-\alpha,d_1^{-1})f(1-\alpha,d_2^{-1})+f(\alpha,d_1)+f(\alpha,d_2)+2f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2)-$$
$$-\frac{M(\alpha)}{d_1}f(1-\alpha,d_1^{-1})\left(1+f(\alpha,d_2)\right)-\frac{M(\alpha)}{d_2}f(1-\alpha,d_2^{-1})\left(1+f(\alpha,d_1)\right).$$

После приведения подобных получим утверждение теоремы. □

Перейдем к получению функционального уравнения для гиперболической дзета-функции двумерной сдвинутой диагональной решётки $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)=(d_1\mathbb{Z}+b_1)\times(d_2\mathbb{Z}+b_2)$.

Лемма 18. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)$ произвольной сдвинутой решётки $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)$ вида $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)=(d_1\mathbb{Z}+b_1)\times(d_2\mathbb{Z}+b_2)$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)$ в правой α-полуплоскости $\sigma>1$ справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)=\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)+$$
$$+\zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)+\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)+f_1(\alpha;d_1,b_1)f_1(\alpha;d_2,b_2). \qquad (61)$$

Доказательство. Действительно, из определения гиперболической дзета-функции решётки следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)=\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant1}}(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant1\\|d_2m_2+b_2|<1}}(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}+$$
$$+\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant1}}(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}1=\sideset{}{'}\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2}(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+$$
$$+\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant1\\|d_2m_2+b_2|<1}}(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}\left(1-|d_2m_2+b_2|^{-\alpha}\right)+\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant1}}(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\left(1-|d_1m_1+b_1|^{-\alpha}\right)+$$
$$+\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}\left(1-(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\right)=\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)+$$
$$+\zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)-\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}\left(1-|d_2m_2+b_2|^{-\alpha}\right)+$$
$$+\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)-\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\left(1-|d_1m_1+b_1|^{-\alpha}\right)+$$
$$+\sideset{}{'}\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}\left(1-(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\right)=\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)+$$
$$+\zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)+\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)+f_1(\alpha;d_1,b_1)f_1(\alpha;d_2,b_2).$$

□

Теорема 8. *Для гиперболической дзета-функции произвольной сдвинутой решётки $\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)$ вида $\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) = (d_1\mathbb{Z} + b_1) \times (d_2\mathbb{Z} + b_2)$, где $d_1, d_2 > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) - \\ -\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) = \\ = \frac{M^2(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)} \zeta^*(\Lambda^*(d_1, b_1, d_2, b_2)|1 - \alpha).\end{gathered} \tag{62}$$

Доказательство. Действительно, из лемм 13 (стр. 96) и 18 (стр. 100) следует, что

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda(d_\nu, b_\nu) \mid \alpha) = \zeta(\Lambda(d_\nu, b_\nu) \mid \alpha) + f_1(\alpha; d_\nu, b_\nu), \quad (\nu = 1, 2), \\ \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) = \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) + \\ +\zeta(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) + \zeta(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2), \\ \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - (\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) - f_1(\alpha; d_1, b_1)) f_1(\alpha; d_2, b_2) - \\ -(\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) - f_1(\alpha; d_2, b_2)) f_1(\alpha; d_1, b_1) - f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) = \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha), \\ \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) - \\ -\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) = \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha).\end{gathered}$$

По принципу аналитического продолжения последнее равенство справедливо на всей комплексной α-плоскости кроме точки $\alpha = 1$.

По лемме 12 (стр. 89) имеем для правой части равенство:

$$\zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)|\alpha) = \frac{M^2(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)} \zeta^*(\Lambda^*(d_1, b_1, d_2, b_2)|1 - \alpha).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) - \\ -\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) = \\ = \frac{M^2(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)} \zeta^*(\Lambda^*(d_1, b_1, d_2, b_2)|1 - \alpha)\end{gathered} \tag{63}$$

и утверждение теоремы доказано. □

7. Заключение

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- во-первых, теория гиперболической дзета-функции Гурвица является вполне содержательной и аналогична теории обычной дзета-функции Гурвица;
- во-вторых, на наш взгляд выделение дзета-функций второго рода является удачным и перспективны;
- в-третьих, последняя доказанная теорема 8 позволяет наметить дальнейшую программу исследований.Следующим этапом должно стать получение функционального уравнения для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки в аналогичной форме. Имеющееся в настоящее время функциональное уравнение не позволяет переходить в нем к пределу, так как предел дзета-функций решёток не всегда существует.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. О. Гельфонд Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. 376 с.
2. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с.
3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4–107.
4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.
5. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.
6. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.
7. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.
8. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.
9. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.
10. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.
11. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Дис. ... доктора физ.–мат. наук. Тула, 2000.
12. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Автореф. дис. ... доктора физ.–мат. наук. Москва, 2000.
13. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. — 195 с.
14. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О гиперболической дзета–функции алгебраических решёток // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 22.
15. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета–функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, №2327–В90.
16. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сборник 2015. Т. 16, вып. 4(56). С. 100–149.

17. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.

18. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

19. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета–функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

20. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

21. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

22. А. А. Карацуба Основы аналитической теории чисел, 2-е изд. М.: Наука, 1983. 240 с.

23. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

24. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Современные проблемы теории чисел: Тез. докл. III Междунар. конф. Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

25. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

26. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

27. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МПГУ, 1999.

28. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

29. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

30. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953. 408 с.

31. Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. — М.: Физматгиз, 1963. 516 с.

32. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 188 с.

33. Н. Г. Чудаков Введение в теорию L-функций Дирихле. М. — Л.: ОГИЗ, 1947. 204 с.

34. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Gel'fond A. O., 1977, *Calculus of finite differences*, Nauka, Moscow, 376 p.

2. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovolsky, N. N. 2012, *Multidimensional Number-theoretic grid and lattice algorithms for finding the optimal coefficients* , Izd-vo TSPU L. N. Tolstoy, Tula, 283 p.

3. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovolsky, N. N. 2012, "Hyperbolic zeta-functions on nets and lattices and computation of optimal coefficients *Chebyshevskii sbornik* vol 13, № 4(44) pp. 4–107.

4. Dobrovolskiy, M. N. 2007, "A functional equation for the hyperbolic zeta function of integer lattices. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* no. 5, pp. 18–23.

5. Dobrovolskiy M. N. 2009, *Some questions Number-theoretic methods in approximate analysis.*, dissertation of the candidate physical and mathematical sciences, Moscow.

6. Dobrovolskiy M. N. 2009, *Some questions Number-theoretic methods in approximate analysis.*, author's abstract of dissertation of the candidate physical and mathematical sciences, Moscow.

7. Dobrovolskiy N. M., 1984 "Hyperbolic zeta function of lattices." *Dep. v VINITI 24.08.84*, no. 6090-84

8. Dobrovolskiy N. M., 1984 *Number-theoretic nets and applications.*, dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Tula.

9. Dobrovolskiy N. M., 1985 *Number-theoretic nets and applications.*, author's abstract of dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.

10. Dobrovolskiy N. M., 1985 "Number-theoretic nets and applications. *Number Theory and Its Applications: Proc. rep. All-Union. Conf.* Tbilisi, pp. 67–70.

11. Dobrovolskiy N. M., 2000 *Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.*, dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences, Tula.

12. Dobrovolskiy N. M., 2000 *Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.*, author's abstract of dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences, Moscow.

13. Dobrovolskiy N. M., 2005 *Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.*,Izd-vo TSPU L. N. Tolstoy, Tula, 195 p.

14. Dobrovolskiy N. M., Vankova V. C., 1990, "On hyperbolic zeta functions of algebraic lattices"*Number theory and its applications: Proc. rep. Republics. Conf. Tashkent, pp. 22.*

15. *Dobrovolskiy N. M., Vankova V. C., Kozlov SL, 1990, "Hyperbolic zeta functions of algebraic lattices. Dep. v VINITI 12.04.90, no. 2327–B90.*

16. *Dobrovolskiy N. M., Dobrovolskiy N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Yushina E. I., 2015 "Hyperbolic zeta function of lattice over quadratic field Chebyshevskii sbornik vol. 16, no. 4(56). pp. 100–149.*

17. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., Rebrova I. Yu., 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices"Mat. Zametki, vol. 63, Issue 4, pp. 522–526*

18. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, "Number of lattice points in the hyperbolic cross"Algebraic, probability, geometry, and combinatorial functional methods in the theory of numbers: Coll. mes. rep. II International. Conf. Voronezh, pp. 53.*

19. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1996, "Analytic continuation of the hyperbolic zeta-function of rational lattices Modern problems theory numbers and its applications: Coll. mes. rep. III International. Conf. Tula, pp. 49.*

20. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L. 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta function of lattices Izvestija Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. vol. 2. no. 1. pp. 77–87.*

21. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L. 1998, "Number of lattice points in the hyperbolic cross Mat. Zametki, vol. 63, Issue 3, pp. 363–369*

22. *Karatsuba A. A., 1983, Basics analytic number theory Nauka, Moscow 1983. p. 240.*

23. *Korobov N. M. 2004 Number-theoretic methods in approximate analysis. Fizmatgiz, Moskow, p. 288*

24. *Rebrova I. Yu., 1996, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices // Modern problems of number theory: Tez. rep. III International. Conf. Tula pp. 119*

25. *Rebrova I. Yu., 1998, "The continuity of the generalized hyperbolic zeta function of lattices and its analytic continuation"Izvestija Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. vol. 4. no .3. pp. 99–108.*

26. *Rebrova I. Yu., 1999, The space lattices and functions on it, dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.*

27. *Rebrova I. Yu., 1999, The space lattices and functions on it, author's abstract of dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.*

28. *Roshchenya A. L., 1998, Analytic continuation of the hyperbolic zeta function of lattices, dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.*

29. *Roshchenya A. L., 1998, Analytic continuation of the hyperbolic zeta function of lattices, author's abstract dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.*

30. *Titchmarsh E. K., 1953, The theory of the Riemann zeta function, M.: IL, p. 408*

31. *Whittaker E. T., Watson D. H., 1963, Course of modern analysis. Part two. Transcendental functions, Fizmatgiz, Moskow, p. 516*

32. *Chandrasekharan K, 1974, Introduction to analytic number theory Mir, Moscow, p. 188*

33. *Chudakov H. G., 1947 Introduction to the Theory of L–functions of Dirichlet, M. — L.: OGIZ, p. 204*

34. *L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.*

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
Московский педагогический государственный университет.
Институт экономики и управления.
Получено 2.05.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 511

О КОЛИЧЕСТВЕ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА, ЛЕЖАЩИХ В «ПОЧТИ ВСЕХ» ОЧЕНЬ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

До Дык Там (г. Белгород)

Аннотация

Центральной проблемой аналитической теории чисел является доказательство (или опровержение) гипотезы Римана. К настоящему времени она не решена.

В 1985 году А. А. Карацуба доказал, что при любом $0 < \varepsilon < 0,001$, $0,5 < \sigma \leq 1$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$ и $H = T^{27/82+\varepsilon}$ в прямоугольнике с вершинами $\sigma + iT$, $\sigma + i(T + H)$, $1 + i(T + H)$, $1 + iT$ содержится не больше, чем $cH/(\sigma - 0,5)$ нулей функции $\zeta(s)$. Тем самым А.А. Карацуба существенно усилил классическую теорему Дж. Литтлвуда.

Для индивидуального прямоугольника существенно уменьшить величину H не удается. Однако решая эту задачу «в среднем», Л.В. Киселева в 1989 году доказала, что для «почти всех» T из промежутка $[X, X + X^{11/12+\varepsilon}]$, $X > X_0(\varepsilon)$, для которых в прямоугольнике с вершинами $\sigma + iT$, $\sigma + i(T + X^\varepsilon)$, $1 + i(T + X^\varepsilon)$, $1 + iT$ содержится не больше, чем $O(X^\varepsilon/(\sigma - 0,5))$ нулей функции $\zeta(s)$.

В нашей статье получен результат подобного рода, но только для «почти всех» T из промежутка $[X, X + X^{7/8+\varepsilon}]$.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая.

Библиография: 23 названия.

ON NUMBER OF ZEROS OF THE RIEMANN ZETA FUNCTION THAT LIE IN «ALMOST ALL» VERY SHORT INTERVALS OF NEIGHBORHOOD OF THE CRITICAL LINE

Do Duc Tam (Belgorod)

Abstract

Proof (or disproof) of the Riemann hypothesis is the central problem of analytic number theory. By now it has not been solved.

In 1985 Karatsuba proved that for any $0 < \varepsilon < 0,001$, $0,5 < \sigma \leq 1$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$ and $H = T^{27/82+\varepsilon}$ in the rectangle with vertices $\sigma + iT$, $\sigma + i(T + H)$, $1 + i(T + H)$, $1 + iT$ contains no more than $cH/(\sigma - 0,5)$ zeros of $\zeta(s)$. Thereby A.A. Karatsuba significantly strengthened the classical theorem J. Littlewood's.

Decrease in magnitude of H for individual rectangle has not been obtained. However, by solving this problem «on average», in 1989 L.V. Kiseleva proved that for «almost all» T in the interval $[X, X + X^{11/12+\varepsilon}]$, $X > X_0(\varepsilon)$ in rectangle with vertices $\sigma + iT$, $\sigma + i(T + X^\varepsilon)$, $1 + i(T + X^\varepsilon)$, $1 + iT$ contains no more than $O(X^\varepsilon/(\sigma - 0,5))$ zeros of $\zeta(s)$.

In this article, we obtain a result of this kind, but for «almost all » T in the interval $[X, X + X^{7/8+\varepsilon}]$.

Keywords: zeta function, non-trivial zeros, critical line.

Bibliography: 23 titles.

1. Введение

Впервые $\zeta(s)$ при вещественных s рассматривалась Л. Эйлером, которому принадлежит замечательное тождество, выражающее $\zeta(s)$ через эйлерово произведение

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \Re(s) > 1,$$

где в правой части стоит произведение по всем простым числам p. Тождество Эйлера указывает на связь, которая существует между функцией $\zeta(s)$ и простыми числами.

Бернхард Риман стал изучать дзета-функцию как функцию комплексного переменного. В 1859 г. он (см. [1, с. 219]) высказал гипотезу о том, что все комплексные нули дзета-функции $\zeta(s)$ лежат на критической прямой $\Re(s) = 1/2$. Риман обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x, выражается через распределение комплексных нулей дзета-функции. До сих пор гипотеза Римана ещё не доказана и не опровергнута. Дзета-функцию изучали многие математики, например: Г. Харди [2,3], Дж. Литтлвуд [3,4], А. Сельберг [5], Н. Левинсон [6], А. А. Карацуба [7–16] и другие. А. А. Карацуба в своей работе [12] выделил три направления в исследованиях, связанных с нулями $\zeta(s)$:

1. граница нулей $\zeta(s)$,
2. нули $\zeta(s)$ на критической прямой,
3. плотность распределения нулей в критической полосе.

В настоящей статье продолжены исследования, связанные с распределением нулей $\zeta(s)$ в критической полосе. Получена оценка сверху для числа нулей $\zeta(s)$, лежащих в «почти всех» очень коротких промежутках окрестности прямой $\Re(s) = 1/2$.

Пусть $N(\sigma, T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике с вершинами $s = \sigma$, $s = \sigma + iT$, $s = 1$ и $s = 1 + iT$. В 1924 г. Дж. Литтлвуд [4] на основе теоремы о количестве нулей аналитической функции в прямоугольнике доказал следующие 2 теоремы:

Теорема 1. *При $1/2 < \sigma \leq 1$ равномерно по σ справедлива оценка*

$$N(\sigma, T) = O\left(\frac{T}{\sigma - 0,5} \log \frac{1}{\sigma - 0,5}\right). \tag{1}$$

Теорема 2. *Если $\Phi(t)$ — положительная и стремящаяся к бесконечности вместе с t функция, то почти все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат в области*

$$\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \Phi(t) \frac{\ln \ln t}{\ln t}. \tag{2}$$

Добавив к соображению Дж. Литтлвуда идею использования «успокаивающего множителя», А. Сельберг в [5] доказал следующую теорему:

Теорема 3. *Если $H \geq T^a$, где $a > 1/2$, то при $1/2 < \sigma \leq 1$ равномерно по σ справедлива оценка*

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T) = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right). \tag{3}$$

Отсюда следует, что множитель $\ln(1/(\sigma - 0,5))$ в оценке (1) под знаком O можно пропустить. В той же работе А. Сельберг доказал усиление теоремы Дж. Литтлвуда:

Теорема 4. *Если $\Phi(t)$ — положительная и стремящаяся к бесконечности вместе с t функция, то почти все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат в области*

$$\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|<\Phi(t)\frac{1}{\ln t}. \tag{4}$$

Следующий шаг в этом направлении выполнил А. А. Карацуба, который в 1985 г. методом тригонометрических сумм доказал неравенство (3) для $H=T^{27/82+\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ — произвольно малое число.

Л. В. Киселева в [18] рассматривала эту задачу «в среднем». Доказано, что для всех $T\in[X,X+X_1]$, $X_1=X^{11/12+\varepsilon}$ и $H=X^{\varepsilon}$, за исключением $o(X_1)$ из них, имеет место неравенство (3).

В настоящей работе мы получим результат подобного рода, но только для случая $T\in\left[X,X+X^{7/8+\varepsilon}\right]$. Сформулируем основную теорему:

Теорема 5. *Пусть $\varepsilon>0$ — произвольно малое фиксированное число,*

$$X>X_0(\varepsilon)>0,\quad H=X^{\varepsilon},\quad X\le T\le X+X_1,\quad X_1=X^{7/8+\varepsilon}.$$

Через E обозначим множество тех T из промежутка $X\le T\le X+X_1$, для которых неравенство

$$N(\sigma,T+H)-N(\sigma,T)\le c\frac{H}{\sigma-0,5}, \tag{5}$$

не выполняется, где $1/2<\sigma<1$, $c=c(\varepsilon)>0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε. Тогда для меры этого множества $\mu(E)$ справедлива оценка:

$$\mu(E)\ll X_1X^{-0,5\varepsilon}.$$

2. Леммы

В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения: $0<\varepsilon<0,01$ — произвольно малое фиксированное число, X — растущий параметр, $X_1\geqslant X^{7/8+\varepsilon}$, $X\le T\le X+X_1$, $P=\sqrt{T/2\pi}$, $H=X^{\varepsilon}$, $L=\ln X$, $Y=H^{0,01}$, $P_1=PY$, числа $\delta(\nu)$ и $a(m)$ определяются следующим равенствами

$$\delta(\nu)=\sum_{r\nu<Y}\frac{\mu(\nu r)\mu(r)}{\varphi(r\nu)}\left(\sum_{r<Y}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r\nu)}\right)^{-1},$$

$$a(m)=\sum_{\substack{n\nu=m\\ n\leqslant P,\nu<Y}}\frac{\sqrt{\nu}\delta(\nu)}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Справедлива следующая оценка*

$$\Sigma=\sum_{m<P_1}a^2(m)=O(1).$$

Доказательство см. в [20, стр. 149].

Лемма 2. *При натуральных числах m,m_1,m_2 положим*

$$D(m_1,m_2)=a(m_1)a(m_2)\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-iT},$$

$$W(T)=\sum_{m_1<m_2<P_1} D(m_1,m_2).$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\int_X^{X+X_1} W(T)^2 dT \ll \frac{X_1 Y^8 L^5}{H},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε.

Доказательство. Если

$$\frac{m_2}{m_1}>1+\frac{L}{H},$$

то

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right)<\exp\left(-\frac{L^2}{64}\right).$$

С другой стороны

$$\delta(\nu)=\sum_{r\nu<Y}\frac{\mu(\nu r)\mu(r)}{\varphi(r\nu)}\left(\sum_{r<Y}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r\nu)}\right)^{-1}=\frac{\mu(\nu)}{\varphi(\nu)}\sum_{\substack{r\nu<Y\\(r,\nu)=1}}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\left(\sum_{r<Y}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r\nu)}\right)^{-1}<\frac{1}{\varphi(\nu)}.$$

Таким образом тривиально оценивая часть суммы $W(T)$, отвечающую таким слагаемым, у которых

$$m_2>m_1(1+L/H),$$

имеем

$$\sum_{\substack{m_1<m_2<P_1\\m_2>m_1(1+L/H}} D(m_1,m_2)\ll\sum_{\nu_1,\nu_2<Y}\ \sum_{\substack{n_1\nu_1<n_2\nu_2<P_1\\n_2\nu_2>n_1\nu_1(1+L/H)}}\frac{\sqrt{\nu_1\nu_2}}{\sqrt{n_1n_2}}\exp\left(-\frac{L^2}{64}\right)=O\left(\exp(-0,01L^2)\right).$$

Следовательно,

$$|W(T)|^2\ll\left|\sum_{\nu_1,\nu_2<Y}S(\nu_1,\nu_2)\right|^2+O(e^{-0,02L^2}),$$

где

$$S(\nu_1,\nu_2)=\sum_{n_1\leqslant P}\ \sum_{\substack{n_1\nu_1<n_2\nu_2\leqslant n_1\nu_1(1+L/H)\\n_2\leqslant P}} D\left(n_1\nu_1,n_2\nu_2\right).$$

Далее, применяя неравенство Коши к сумме по ν_1,ν_2, получаем

$$|W(T)|^2\ll Y^2\sum_{\nu_1,\nu_2<Y}|S(\nu_1,\nu_2)|^2+O(e^{-0,02L^2}).$$

Следовательно,

$$\int_X^{X+X_1}|W(T)|^2\,dT\ll Y^6\int_X^{X+X_1}\left|\sum_{n_1\leqslant P}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\n_2\leqslant P}}\Phi(n_1,n_2,T)\right|^2 dT,$$

где

$$\Phi(n_1,n_2,T)=\frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right),$$

$\beta = \nu_1/\nu_2$ и ν_1, ν_2 — некоторые фиксированные натуральные числа, не превосходящие Y. Пусть $P_0 = \sqrt{X/(2\pi)}$. Разбивая промежуток суммирования по n_1 на два промежутка точкой P_0, приходим к неравенству:

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2\,dT \ll Y^6 \left(\int_X^{X+X_1} \left| \sum_{n_1 \leqslant P_0} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) \right|^2 dT + \right.$$

$$\left. + \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{P_0 < n_1 \leqslant P} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) \right|^2 dT \right). \tag{7}$$

Обозначаем интегралы в правой части (7) через J_1 и J_2. В подынтегральной сумме для J_1 $n_1 \leqslant P_0$, а для J_2 — $P_0 < n_1 \leqslant P\alpha$.

Оценим J_2 сверху. Пусть $P_2 = \sqrt{(X+X_1)/(2\pi)}$ и $M = [P_2 Y] + 1$. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi i l (n - n')}{M} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = n', \\ 0, & \text{если } n \neq n', \end{cases}$$

преобразуем подынтегральную сумму по n_1, n_2 в J_2 так:

$$\sum_{\substack{P_0 < n_1 \leqslant P \\ n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) = \frac{1}{M^2} \sum_{l_1, l_2 = 0}^{M-1} \sum_{P_0 < n_1', n_2' \leqslant P} \exp\left(-\frac{2\pi i \left(n_1' l_1 + n_2' l_2\right)}{M} \right) K(l_1, l_2, T), \tag{8}$$

где

$$K(l_1, l_2, T) = \sum_{P_0 < n_1 \leqslant P_2} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P_2}} \Phi(n_1, n_2, T) \exp\left(\frac{2\pi i n_1 l_1}{M} \right) \exp\left(\frac{2\pi i n_2 l_2}{M} \right).$$

Суммы по n_1' и n_2' в (8) оцениваем сверху так:

$$\left| \sum_{P_0 < n_1' \leqslant P} \exp\left(-\frac{2\pi i n_1' l_1}{M} \right) \right| \ll \frac{M}{l_1 + 1}; \quad \left| \sum_{P_0 < n_2' \leqslant P} \exp\left(-\frac{2\pi i n_2' l_2}{M} \right) \right| \ll \frac{M}{l_2 + 1}.$$

Отсюда и из неравенства (8) следует, что:

$$\left| \sum_{\substack{P_0 < n_1 \leqslant P \\ n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) \right| \ll \sum_{l_1, l_2 = 0}^{M-1} \frac{1}{l_1 + 1} \frac{1}{l_2 + 1} \left| K(l_1, l_2, T) \right|.$$

Применяя неравенство Коши, получаем:

$$\left| \sum_{P_0 < n_1 \leqslant P} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) \right|^2 \leqslant L^2 \sum_{l_1=0}^{M-1} \sum_{l_2=0}^{M-1} \frac{1}{l_1 + 1} \frac{1}{l_2 + 1} \left| K(l_1, l_2, T) \right|^2.$$

Следовательно,

$$J_2 \leqslant L^2 \sum_{l_1=0}^{M-1} \sum_{l_2=0}^{M-1} \frac{1}{l_1+1} \frac{1}{l_2+1} \int_X^{X+X_1} |K(l_1,l_2,T)|^2\,dT \leqslant L^4 \int_X^{X+X_1} \left|K(l_1',l_2',T)\right|^2 dT, \qquad (9)$$

где $0 \leqslant l_1', l_2' < M$ — некоторые фиксированные натуральные числа.

Оценим теперь последний интеграл сверху. Применяя известный приём (см., например в [8, с. 576]), получаем:

$$\int_X^{X+X_1} |K(l_1,l_2,T)|^2\,dT \ll \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((T-X)/X_1)^2} \left|K(l_1',l_2',T)\right|^2 dT \ll$$

$$\ll X_1 \sum_{P_0<n_1,n_3\le P_2,} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H)\\ n_3\beta<n_4\le n_3\beta(1+L/H)\\ n_2,n_4<P_2}} \frac{1}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}} \exp\left(-\left(\frac{X_1}{2}\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{X_1}{P_0^2\beta} \sum_{P_0<n_1,n_3\le P_2} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H)\\ n_3\beta<n_4\le n_3\beta(1+L/H)\\ |n_2n_3-n_1n_4|\le P_2^2L/X_1}} 1 + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right) \leqslant \frac{X_1}{P_0^2\beta} R + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right),$$

где R — число возможных n_1, n_2, n_3, n_4, удовлетворяющих условиям:

$$P_0 < n_1, n_3 \le P_2, n_1\beta < n_2 \le n_1\beta(1+L/H),$$

$$n_3\beta < n_4 \le n_3\beta(1+L/H), |n_2n_3 - n_1n_4| \le P_2^2 L/X_1.$$

Если зафиксируем числа n_1 и n_4, то число возможных пар n_2, n_4 не превосходит величины R_1, где

$$R_1 = \sum_{-P_2^2L/X_1+n_1n_4\leqslant m\leqslant n_1n_4+P_2^2L/X_1} \tau(m) \ll \frac{P_2^2L^2}{X_1}.$$

Откуда получаем

$$R \ll (P_2 - P_0)\frac{P_2\beta L}{H}\frac{P_2^2L^2}{X_1} \ll \frac{XL^3\beta}{H}.$$

Следовательно,

$$\int_X^{X+X_1} |K(l_1,l_2,T)|^2\,dT \ll \frac{X_1}{P_0^2\beta}\frac{X\beta L^3}{H} = \frac{X_1L^3}{H}.$$

Из (9) и этого неравенства получаем:

$$J_2 \ll \frac{X_1L^7}{H}. \qquad (10)$$

Оценим интеграл J_1 сверху. Заметим, что в формуле, которой определяется J_1, условие $n_2 \leqslant P\gamma$ лишнее, так как

$$n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \leqslant P_0\alpha\beta(1+L/H) < P_2\gamma.$$

Разбивая промежуток суммирования по n_1 в этой формуле на $\ll L$ промежутков вида $N < n_1 \le N_1 \le 2N \le P_0\alpha$, приходим к неравенству

$$J_1 \ll L^2 \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\le N_1} \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)} \Phi(n_1,n_2,T)\right|^2 dT.$$

Повторяя такие же рассуждения, как и в случае для J_2, получаем неравенство:

$$J_1 \ll L^2 I_1, \tag{11}$$

где

$$I_1 = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\le N_2} \sum_{N\beta<n_2\le N_3\beta} \frac{e^{-(H\ln(n_2/n_1\beta)/2)^2}}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} E(n_1,n_2)\right|^2 dT,$$

$$E(n_1,n_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } N<n_1\le N_1 \text{ и } n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H), \\ 0, \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

$N<N_2\leqslant N_1$ и $N<N_3\leqslant N_1(1+L/H)$ — некоторые фиксированные числа.

Оценим теперь I_1 сверху. Рассуждая так же как это было сделано для оценки $I(B_1', B_2')$, имеем

$$I_1 \ll X_1 \left| \sum_{N<n_1,n_3\le N_2} \sum_{N\beta<n_2,n_4\le N_3\beta} \left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^{iX} \eta(n_1,n_2,n_3,n_4)E(n_1,n_2)E(n_3,n_4)\right|,$$

где

$$\eta(n_1,n_2,n_3,n_4) = \frac{e^{-(H\ln(n_2/(n_1\beta))/2)^2}e^{-(H\ln(n_4/(n_3\beta))/2)^2}e^{-(X_1\ln(n_2n_3/(n_1n_4))/2)^2}}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}}.$$

Если $|n_2n_3-n_1n_4|>N^2\beta L/X_1$, то

$$\left|\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right| \geqslant \frac{L}{2X_1}.$$

Отсюда следует, что часть последней кратной суммы по n_1, n_2, n_3, n_4, отвечающая таким слагаемым, есть величина $O(e^{-0{,}01L^2})$. Тем самым получаем:

$$I_1 \ll X_1\left(\Sigma + |W|\right) + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right), \tag{12}$$

где Σ — часть последней суммы, отвечающая таким слагаемым, у которых $n_2n_3=n_1n_4$, а W — слагаемым, у которых $1\le n_2n_3-n_1n_4\le N^2\beta L/X_1$.

Оценим сумму Σ тривиально. Имеем:

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{N<n_1,n_3\leqslant N_1} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\ n_3\beta<n_4\leqslant n_3\beta(1+L/H)\\ n_1n_4=n_2n_4}} 1.$$

Пусть $d=(n_1,n_3)$. Тогда $n_1=db$, $n_3=da$, $(b,a)=1$. Из условия $n_1n_4=n_2n_3$ следует, что $n_4=ma$ и $n_2=mb$. Откуда получаем

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{1\leqslant d\leqslant N} \sum_{\substack{N/d<b,a\leqslant N_1/d\\ (b,a)=1}} \sum_{d\beta<m\leqslant d\beta(1+L/H)} 1 \leqslant \frac{1}{N^2\beta}\sum_{1\leqslant d\leqslant N}\frac{N^2}{d^2}\frac{d\beta L}{H} \leqslant \frac{L^2}{H}. \tag{13}$$

Оценим сумму W. Имеем

$$W = \sum_{N<n_1,n_3\le N_2} \sum_{\substack{N\beta<n_2,n_4\le N_3\beta\\ 1\le n_2n_3-n_1n_4\le N^2\beta L/X_1}} \left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^{iX} \eta(n_1,n_2,n_3,n_4)E(n_1,n_2)E(n_3,n_4).$$

Если уберём множители $E(n_1,n_2), E(n_3,n_4)$ и наложим на переменные n_1, n_2, n_3, n_4 дополнительные условия

$$0<n_2-n_1\beta\le\frac{c_2N\beta L}{H}\ \text{и}\ 0<n_4-n_3\beta\le\frac{c_3N\beta L}{H},$$

то сумма W изменится на величину $O(e^{-0{,}01L^2})$. Пусть $l=n_2n_3-n_1n_4$, $1\le l\le N^2\beta L/X_1$ и $d=(n_1,n_3)$. Тогда $n_3=da$, $n_1=db$, $(b,a)=1$, $l=dl_1$, $1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)$, $an_2-bn_4=l_1$. Последнее равенство равносильно тому, что

$$n_4\equiv -l_1\bar b\pmod a\ \text{и}\ n_2=(bn_4+l_1)/a,$$

где $b\bar b\equiv 1\pmod a$. Пользуясь формулой:

$$\frac1a\sum_{-a/2\le x<a/2}\exp\left(\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar b)}{a}\right)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ n_4\equiv -l_1\bar b\pmod a,\\ 0,\ \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

преобразуем сумму W следующим образом:

$$W=\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\ \sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\ \sum_{\substack{N/d<b,\ a\le N_2/d\\ (b,\,a)=1}}\frac1a\times$$

$$\times\sum_{-a/2\le x<a/2}\ \sum_{\substack{0<(bn_4+l_1)/a-db\beta\le c_2N\beta L/H\\ 0<n_4-da\beta\le c_3N\beta L/H}}\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)^{iX}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar b)}{a}\right)\eta_1(b,a,l_1,n_4)+O(e^{-0{,}01L^2}),$$

где $\eta_1(b,a,l_1,n_4)=\eta(b,(bn_4+l_1)/a,a,n_4)$. Разобьем сумму W на две суммы: W_1 — часть этой суммы, отвечающая слагаемым с условием $x\ne 0$, W_2 — остальным слагаемым.

Оценим теперь сумму W_2. Если пропустим условие

$$0<\frac{bn_4+l_1}{a}-db\beta\le\frac{c_2N\beta L}{H},$$

то сумма W_2 изменится на величину $O(e^{-0{,}01L^2})$. Пользуясь формулой

$$\sum_{d_1/(b,a)}\mu(d_1)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ (b,a)=1,\\ 0,\ \text{если}\ (b,a)>1,\end{cases}$$

преобразуем сумму W_2 так:

$$W_2=\sum_{d\leqslant N^2\beta L/X_1}\ \sum_{1\le l_1\leqslant N^2\beta L/(X_1d)}\ \sum_{d_1\leqslant N_2/d}\frac{\mu(d_1)}{d_1}\sum_{N/(dd_1)<a_1\leqslant N_2/(dd_1)}\frac{1}{a_1}\times$$

$$\times\sum_{0<n_4-dd_1a_1\beta\le c_3N\beta L/H}\ \sum_{N/(dd_1)<b_1\le N_2/(dd_1)}\left(1+\frac{l_1}{d_1b_1n_4}\right)^{iX}\times$$

$$\times\eta_1(d_1b_1,d_1a_1,l_1,n_4)+O(e^{-0{,}01L^2}).$$

Разобьем последнюю сумму на две суммы $W_{2.1}$ и $W_{2.2}$, где в $W_{2.1}$ входят слагаемые, у которых $d_1<X/X_1$, а в $W_{2.2}$– слагаемые с $d_1\ge X/X_1$.

Оценивая тривиально сумму $W_{2.2}$, получаем:

$$|W_{2.2}| \ll \frac{Y^2L^2}{H}.$$

Оценим сумму $W_{2.1}$. Применяя к сумме по b_1 преобразование Абеля, приходим к неравенству:

$$|W_{2.1}| \ll \sum_{d\le N^2\beta L/X_1} \frac{1}{d} \sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/X_1 d} \sum_{d_1\le X/X_1} \frac{1}{d_1}\times$$

$$\times \sum_{N/(dd_1)<a_1\le N_2/(dd_1)} \frac{1}{a_1} \sum_{0<n_4-dd_1a_1\beta\le c_3N\beta L/H} \frac{d}{N^2\beta}\left|W_{2.3}\right|, \tag{14}$$

где

$$W_{2.3} = \sum_{M<b_1\le M_1} \exp\left(iX\ln\left(1+\frac{l_1}{d_1b_1n_4}\right)\right),$$

$M = N/(dd_1)$, и $N/(dd_1) < M_1 \le N_4/(dd_1)$ — некоторое фиксированное число. Применяя к сумме $W_{2.3}$ лемму о замене тригонометрической суммы интегралом и полагая в ней

$$a = M,\ b = M_1,\ f(x) = \frac{X}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{d_1xn_4}\right),$$

$$\left|f'(x)\right| = \left|\frac{Xl_1}{2\pi x(d_1n_4x+l_1)}\right| \ll \frac{X^2N\beta L}{X_1^3} < X^{-0,1} < 1,$$

находим

$$W_{2.3} = \left|\int_M^{M_1} e^{2\pi i f(x)}dx\right| + O(1).$$

Оценивая последний интеграл по первой производной, имеем:

$$\left|\int_M^{M_1} e^{2\pi i f(x)}dx\right| \ll \frac{N^3}{Xl_1d^2d_1}.$$

Тем самым получаем:

$$W_{2.3} \ll \frac{N^3}{Xl_1d^2d_1^2} + 1.$$

Подставляя последнюю оценку в (14), приходим к неравенству:

$$|W_{2.1}| \ll \frac{Y^2L^3}{H}.$$

Из оценок для $W_{2.1}$ и $W_{2.2}$ следует, что

$$W_2 \ll \frac{Y^2L^3}{H}. \tag{15}$$

Оценим теперь сумму W_1 сверху. Можно считать, что N не меньше, чем $X_1^{1/2-\varepsilon/2}$. Если это не так, то $1 \le l_1 \le \beta LX^{-\varepsilon} < 1$. Из условия $da\beta < n_4$ следует, что $db\beta < (bn_4+l_1)/a$. Таким образом, если пропустим условие

$$0 < \frac{bn_4+l_1}{a} - db\beta \le \frac{c_2N\beta L}{H},$$

то сумма W_1 изменится на величину $O\left(e^{-0{,}01L^2}\right)$. Кроме этого, имеет место равенство

$$\exp\left(2\pi i\left(\frac{X}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)\right)\right)=\exp\left(2\pi i\left(\frac{Xl_1}{2\pi bn_4}\right)\right)+O\left(X^{-0{,}7}\right).$$

Далее, применяя к суммам по b и n_4 преобразование Абеля, потом переходя от получившего равенства к неравенству, получаем:

$$W_1\ll\frac{L^4}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\sum_{N/d<a\le N_2/d}\frac{1}{a}S+O\left(X^{-0{,}075-\varepsilon}\right), \tag{16}$$

где

$$S=\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\ne0}}\sum_{\substack{N/d<b\le N_4/d\\ (b,a)=1\\ ad\beta<n_4\le N_5\beta}}\exp\left(\frac{iXl_1}{bn_4}\right)\exp\left(\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar{b})}{a}\right),$$

$N<N_4\le N_2$, $ad<N_5\le ad+c_3NL/H$.

Применим преобразование Абеля к сумме по b в S, потом освободимся от зависимости предела суммирования по b от переменного интегрирования. Получаем:

$$S=S_1+S_2, \tag{17}$$

где

$$S_1=\frac{1}{a}\sum_{-a/2\leqslant y<a/2}\int_{N/d}^{N_4/d}\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\ne0}}\sum_{\substack{N/d<b\le N/d+a\\ (b,a)=1}}\exp\left(\frac{2\pi i(xl_1\bar{b}+yb)}{a}\right)\times$$

$$\times\sum_{N/d<r\leqslant u}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\sum_{ad\beta<n_4\le N_5\beta}\frac{1}{n_4}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi un_4}\right)\right)\frac{iXl_1}{u^2}du,$$

$$S_2=\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\ne0}}\sum_{\substack{N/d<b\le N_4/d\\ (b,a)=1\\ ad\beta<n_4\le N_5\beta}}\exp\left(\frac{2\pi ixl_1\bar{b}}{a}\right)\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1d}{2\pi N_4n_4}\right)\right).$$

Разобъем сумму S_1 на 3 суммы: $S_{1.1}$ отвечает таким слагаемым, у которых $x<$ $<Xl_1a/(2\pi uN_5^2\beta^2)$, $S_{1.2}$ — слагаемым, у которых $Xl_1a/(2\pi uN_5^2\beta^2)\leqslant x<Xl_1a/(2\pi ua^2d^2\beta^2)$ и $S_{1.3}$ — остальным слагаемым. Тогда из (16) и (17) следует

$$W_1\ll\frac{L^4}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\sum_{N/d<a\le N_2/d}\frac{S_{1.1}+S_{1.2}+S_{1.3}+S_2}{a}, \tag{18}$$

Разобъем сумму в правой части последнего неравенства на 4 суммы W_3, W_4, W_5, W_6, соответственно суммам $S_{1.1}$, $S_{1.2}$, $S_{1.3}$, S_2.

1) Оценим W_6. Имеет место неравенство:

$$|W_6|\le\frac{L^5}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\sum_{N/d<a\le N_2/d}\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\ne0}}\frac{\sqrt{(xl_1,a)}}{a^{0{,}5-\varepsilon_1}}|E|,$$

где

$$E=\sum_{ad\beta<n_4\le N_5\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1d}{2\pi N_4n_4}\right)\right).$$

Здесь мы воспользовались оценкой, (см. [22, с. 50]):

$$\sum_{\substack{N/d<b\leqslant N/d+a\\(b,a)=1}}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xl_1\overline{b}+yb}{a}\right)\right)<_{\varepsilon_1}a^{0,5+\varepsilon_1}\sqrt{(xl_1,a)}L,\tag{19}$$

где $0<\varepsilon_1<0,01\varepsilon$ — произвольная малая постоянная.

Если x не принадлежит $[Xl_1/(32\pi N^2\beta^2), 2Xl_1/(\pi N^2\beta^2))$, то для оценки E воспользуемся леммой о замене тригонометрической суммы интегралом (см. [20, гл. 3]). Получаем:

$$E=\int_{ad\beta}^{N_5\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1d}{2\pi N_4z}\right)\right)dz+O(1).$$

Применяя к интегралу в правой части лемму об оценке интеграла по первой производной (см. [21, гл. 4]), найдём оценку

$$E\ll a/\left|x\right|.$$

Если $Xl_1/(32\pi N^2\beta^2)<x\leq 2Xl_1/(\pi N^2\beta^2)$, то для оценки E воспользуемся теоремой Ван дер Корпута (см. [20, с. 362]). Полагая $f(n_4)=xn_4/a+Xl_1d/(2\pi N_4n_4)$, $k=2$, найдём $E\ll N^2/\sqrt{Xl_1d}$.

Из полученных оценок для E следует, что

$$W_6\ll\frac{1}{H}.$$

2) Оценим W_3. Имеет место неравенство

$$W_3\ll\frac{XL^6}{N^3\beta}\sum_{d\leq N^2\beta L/X_1}d\sum_{1\leq l_1\leq N^2\beta L/(X_1d)}l_1\sum_{N/d<a\leq N_2/d}a^{-0,5+\varepsilon_1}\times$$

$$\times\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<Xl_1a/(2\pi u_0N_5^2\beta^2)\\x\neq0}}\sqrt{(xl_1,a)}\left|\sum_{ad\beta<n_4\leq N_5\beta}\frac{1}{n_4}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0n_4}\right)\right)\right|,\tag{20}$$

где u_0 — некоторое число из промежутка $[N/d, N_4/d]$. Через Q обозначаем сумму по n_4 в правой части последнего неравенства. Применяя к Q преобразования Абеля, потом переходя от получившего равенства к неравенству, получаем:

$$Q\ll\frac{1}{N\beta}Q_1,$$

где

$$Q_1=\left|\sum_{ad\beta<n_4\leqslant N_6\beta}\exp\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0n_4}\right)\right|,$$

где $ad<N_6\leqslant N_5$ — некоторое фиксированное число. Если $x<0$, то Q_1 оценивается по аналогии с оценкой E в пункте 1). Получаем оценку $Q\ll a/(N\beta\left|x\right|)$. А если $0<x<Xl_1a/(2\pi u_0N_5^2\beta^2)$, то применяя к Q_1 теорему о замене тригонометрической суммы интегралом, приходим к неравенству:

$$|Q|\leqslant\frac{1}{N\beta}\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0z}\right)\right)dz\right|+O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

Оценивая последний интеграл по второй производной, получаем

$$\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0 z}\right)\right)dz\right| \ll \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}}.$$

С другой стороны, так как $0 < x < Xl_1 a/(2\pi u_0 N_5^2\beta^2)$, то по теореме об оценке интеграла по первой производной, имеем

$$\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0 z}\right)\right)dz\right| \ll \left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u_0(N_6\beta)^2}\right\|^{-1}.$$

Таким образом, справедлива оценка для Q:

$$Q \ll \frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u_0(N_6\beta)^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}}\right)+\frac{1}{N\beta}.$$

Пусть $q=(xl_1,a)$, $a=mq$, $xl_1=sq$, $x=x_1q_1$, $l_1=l_2q_2$, $q_1q_2=q$. Собирая выше полученные оценки для Q, из (20) получаем

$$W_3 \ll \frac{XL^6}{N^4\beta^2}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1} d\sum_{q_2\leqslant N_2/d} q_2^{1+\varepsilon_1}\sum_{1\le l_2\le N^2\beta L/(X_1dq_2)} l_2\left(\sum_{q_1<2N/d} q_1^{\varepsilon_1}\times\right.$$

$$\times\sum_{m\asymp N/(dq_1q_2))} m^{-0,5+\varepsilon_1}\sum_{-mq_2/3\leqslant x_1<0}\frac{mq_2}{|x_1|}+\sum_{q_1\ll X/X_1} q_1^{\varepsilon_1}\sum_{m\asymp N/(dq_1q_2)} m^{-0,5+\varepsilon_1}\times$$

$$\left.\times\sum_{1\leqslant x_1\ll Xl_2q_2/(N^2\beta^2)}\min\left(\left\|\frac{x_1}{mq_2}-\frac{Xl_2q_2}{2\pi i u_1(N_7\beta)^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_2q_2d}}\right)\right)+O(H^{-1}).$$

Применяя к сумме по x_1 лемму из [23, с. 94], получаем:

$$W_3 \ll \frac{1}{H}.$$

4) Сумму W_5 оценим по аналогии с W_3:

$$W_5 \ll \frac{1}{H}.$$

5) Оценим теперь сумму W_4. Через P будем обозначать сумму по n_4 в $S_{1.3}$. Применяя к этой сумме лемму о замене тригонометрической суммы интегралом (см. [20, гл. 3]), получаем:

$$P=\int_{ad\beta}^{N_5\beta}\frac{1}{z}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi uz}\right)\right)dz+O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

Далее, применим к последнему интегралу метод стационарной фазы (см. [20, гл. 3]). Получаем

$$P=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\pi ua}{Xl_1x}\right)^{1/4}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)+O(R),$$

где

$$R=\frac{1}{N\beta}+\frac{N^2}{Xl_1}+\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u(ad\beta)^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right)+$$

$$+\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u(N_5\beta)^2}\right\|^{-1},\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right).$$

Подставляя это равенство в формулу, определяющую W_4, потом переходя от получившего равенства к неравенству и пользуясь неравенством (19), получаем:

$$W_4\ll\frac{X^{3/4}L^5}{N^2\beta}\sum_{d\leq N^2\beta L/X_1}\ \sum_{1\leq l_1\leq N^2\beta L/(X_1d)}l_1^{3/4}\sum_{N/d<a\leq N_2/d}a^{-5/4+\varepsilon_1}\sum_{-a/2\leqslant y<a/2}\times$$

$$\times\sum_{x\asymp Xl_1/(N\beta)^2}\frac{\sqrt{(xl_1,a)}}{x^{1/4}}\left|\int_U^{U_1}\sum_{N/d<r\leqslant u}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{7/4}}du\right|+O\left(\frac{1}{H}\right),\quad(21)$$

где

$$U=max\left(\frac{N}{d},\frac{Xl_1a}{2\pi xN_5^2\beta^2}\right)\asymp\frac{N}{d},U_1=min\left(\frac{N_4}{d},\frac{Xl_1a}{2\pi xa^2d^2\beta^2}\right)\asymp\frac{N}{d}.$$

Через G будем обозначать интеграл в правой части (21). Меняем порядок интегрирования и суммирования по r в G, потом интегрируем по частям. Получаем

$$G=\sum_{N/d<r\leqslant U}e^{-2\pi iyr/a}\int_U^{U_1}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{7/4}}du-\frac{\sqrt{2\pi a}}{2\pi iU_1^{1/4}\sqrt{Xl_1x}}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi U_1a}}\right)\times$$

$$\times\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)-\frac{\sqrt{2\pi a}}{8\pi i\sqrt{Xl_1x}}\int_U^{U_1}\sum_{U<r\leqslant u}\exp-\left(\frac{2\pi iyr}{a}\right)\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{5/4}}du+$$

$$+\frac{\sqrt{2\pi a}}{2\pi i\sqrt{Xl_1x}}\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)\frac{1}{r^{1/4}}.\quad(22)$$

Через S будем обозначать сумму по r в последнем слагаемом равенства (22). Применяя к S преобразование Абеля, потом переходя к неравенству, получаем:

$$S\ll\left(\frac{d}{N}\right)^{1/4}\left|\sum_{U<r\leqslant U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)\right|,$$

где $U<U_2\leqslant U_1$ — некоторое фиксированное число. Далее, к сумме по r применим лемму о замене суммы интегралом. Получаем:

$$\sum_{U<r\leqslant U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)=\int_U^{U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yv}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi va}}\right)\right)dv+O(1).$$

Оценивая первый интеграл в правой части (22) по первой производной и пользуясь неравенством

$$\left|\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\right|\ll\frac{a}{|y|+1},$$

приходим к неравенству

$$G\ll\sqrt{\frac{a}{Xl_1x}}\left(\frac{d}{N}\right)^{1/4}\left(\frac{a}{|y|+1}+\left|\int_U^{U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yv}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi va}}\right)\right)dv\right|+1\right).$$

Оценим последний интеграл зависимости от значения y. Обозначим этот интеграл через V. Если $y = 0$, то для оценки V воспользуемся теоремой об оценке по первой производной. Получаем

$$V \ll \sqrt{\frac{N^3 a}{Xl_1 x d^3}} \asymp \frac{N^3}{Xl_1 d^2}.$$

Если

$$y < -\sqrt{\frac{2Xl_1 x a d^3}{\pi N^3}} = M \text{ или } \frac{a}{2} > y > -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{Xl_1 x a d^3}{\pi N^3}} = M_1 \text{ и } y \neq 0,$$

то оценивая интеграл V по аналогии с пунктом 1), найдем

$$V \leqslant \frac{a}{|y|}.$$

В случае когда $M \leqslant y \leqslant M_1$, применяя к V теорему об оценке интеграла по второй производной, получаем

$$V \ll \sqrt[4]{\frac{N^5 a}{Xl_1 x d^5}} \asymp \frac{N^2}{\sqrt{d^3 X l_1}}.$$

Собирая полученные оценки, из (21) следует

$$W_4 \ll \frac{X^{1/4} L^5}{N^{9/4}\beta} \sum_{d \leq N^2\beta L/X_1} d^{1/4} \sum_{1 \leq l_1 \leq N^2 \beta L/(X_1 d)} l_1^{1/4} \sum_{N/d < a \leq N_2/d} a^{-3/4+\varepsilon_1} \times$$

$$\times \sum_{x \asymp X l_1/(N\beta)^2} \frac{\sqrt{(xl_1, a)}}{x^{3/4}} \left(\sum_{\substack{y \notin [M, M_1] \\ y \neq 0}} \frac{a}{|y|} + \frac{N^3}{X l_1 d^2} + \sum_{M \leqslant y \leqslant M_1} \frac{N^2}{\sqrt{X l_1 d^3}} \right) + O\left(\frac{1}{H}\right).$$

После несложных вычислений получим

$$W_4 \ll \frac{1}{H}.$$

Из (15), (18), и оценок для сумм W_j, $j = 3, 4, 5, 6$, получаем:

$$W \ll \frac{1}{H}.$$

Из (12), (13) и оценки для W следует:

$$I_1 \ll \frac{X_1 Y^2 L^3}{H}.$$

Подставляя это неравенство в (11), получаем

$$J_1 \ll \frac{X_1 Y^2 L^5}{H}. \tag{23}$$

Из (7), (10) и (23) следует утверждение леммы.

Следствие 1. *Пусть δ — произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_2 — множество таких T из интервала $[X, X + X_1]$, для которых выполняется неравенство*

$$W^2(T) \geq \frac{X_1^{1-\delta} Y^8 L^5}{H}.$$

Тогда для меры множества E_2 справедлива оценка $\mu(E_2) \ll X_1^{\delta}$.

3. Доказательство основной теоремы

В следствии 1 полагаем $\delta = 1 - 4/7\varepsilon$. Будем рассматривать те числа T из $X \le T \le X + X_1$, которые не принадлежат множеству E_2; для них выполняется оценка

$$W^2(T) < \frac{Y^8 L^5}{\sqrt{H}}. \tag{24}$$

Далее, доказательство проводится по схеме работы А. А. Карацубы [13]. Введём теперь функцию

$$\Phi(s) = \zeta(s) f(s), \quad f(s) = \sum_{\nu < Y} \delta(\nu)\nu^{1-s}.$$

Применим теорему 11 из [20, с. 324] к $\Phi(s)$ и прямоугольнику с вершинами $s = 0,5 + iT$, $s = 0,5 + i(T+H)$, $s = 3 + iT$, $s = 3 + i(T+H)$. Получаем

$$2\pi \int_{0,5}^{3} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma = 2\pi \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma =$$

$$= \int_{T}^{T+H} (\log|\Phi(0,5+it)| - \log|\Phi(3+it)|) +$$

$$+ \int_{0,5}^{3} (\arg\Phi(\sigma + i(T+H)) - \arg\Phi(\sigma + iT))\, d\sigma.$$

Пользуясь теоремой 12 из [20, с. 325], оценим второй интеграл величиной $O(\log T)$. Вторая подынтегральная функция первого интеграла есть величина порядка $O(1)$. Применяя теорему 2 из [20, с. 345] к первому интегралу, получаем

$$2\pi \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma \le \frac{H}{2} \log\left(\frac{J}{H}\right) + O(H),$$

где

$$J = \int_{T}^{T+H} |\zeta(0,5+it)|^2 \, |f(0,5+it)|^2 \, dt.$$

Пользуясь приближенным функциональным уравнением для $\zeta(s)$ ([21, с. 82]), получаем

$$J \le 8J_1 + O\left(HT^{-0,5} Y L^4\right),$$

где

$$J_1 = \int_{T}^{T+H} \left| \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it} \right|^2 |f(0,5+it)|^2 \, dt.$$

Вспоминая определение $f(s)$, можно переписать J_1 так:

$$J_1 = \int_{T}^{T+H} \left| \sum_{m \le P_1} a(m) m^{it} \right|^2 dt,$$

где числа $a(m)$ определены в (6). Имеет место цепочка соотношений

$$J_1 \le e \int_{T}^{T+H} \exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2\right) \left| \sum_{m \le P_1} a(m) m^{it} \right|^2 dt \le eH \sum_{m_1, m_2 \le P_1} a(m_1) a(m_2) \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{iT} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\left(v - iv\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right)dv =$$

$$= e\sqrt{\pi}H\sum_{m_1,m_2\le P_1} a(m_1)a(m_2)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right) \le e\sqrt{\pi}H\left(\Sigma + 2\left|W(T)\right|\right),$$

где Σ и $W(T)$ определены в леммах 1 и 2. В силу леммы 1 и оценки (24) получаем:

$$J_1 = O(H), \quad J = O(H), \quad \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T)d\sigma = O(H).$$

Пусть $\sigma > 0,5$ и $\sigma_1 = 0,5 + 0,5(\sigma - 0,5) < \sigma$. Определяем

$$g(\alpha) = N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T).$$

Заметим, что $g(\alpha_2) \le g(\alpha_1)$ при $\alpha_1 \le \alpha_2$. Отсюда следует, что

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) \le \frac{1}{\sigma - \sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma} N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T)d\alpha \le$$

$$\le \frac{2}{\sigma - 0,5}\int_{0,5}^{1} N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T)d\alpha = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right).$$

Далее, утверждение теоремы следует из следствия 1.

4. Заключение

В нашей работе границу $H = X^{\varepsilon}$ определяет лемма 1. Это объясняется тем, что надо «успокоить» достаточно длинный отрезок ряда Дирихле, которым определяется дзета-функция Римана. В дальнейшем интересно было бы рассмотреть задачу для существенно более коротких промежутков окрестности критической прямой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. 479 с.

2. Hardy G. H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt. Rend. Acad. Sci. 1914, vol. 158, pp. 1012–1014.

3. Hardy G. H. & Littlewood, J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Mathematische Zeitschrift. 1921. vol. 10, pp. 283–317.

4. Littlewood J. E. On the zeros of the Riemann zeta-function // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1924 Vol. 22. pp 295–318 doi:10.1017/S0305004100014225

5. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. Vol. 10. pp. 1–59.

6. Levinson N. More than one third of the zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$ // Adv. in Math. 1974, v. 13, p. 383–436.

7. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Теория чисел, математический анализ и их приложения, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР. 1981. Т. 157, с. 49–63.

8. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, №3. С. 569–584.

9. Карацуба А. А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, №6. С. 1214–1224.

10. Карацуба А. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 167, С. 167–178.

11. Карацуба А. А. О вещественных нулях функции $\zeta(1/2+it)$ // УМН. 1985. Т. 40, №4. С. 171–172.

12. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40, №5. С. 23–82.

13. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985 Т. 49, вып. 2. С. 326–333.

14. Карацуба А. А. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56, №2. С. 372–397.

15. Карацуба А. А. Уточнение теорем о количестве нулей, лежащих на отрезках критической прямой, некоторых рядов Дирихле // УМН. 1992. Т. 47, №2. С. 193–194.

16. Карацуба А. А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, №3. С. 483–514.

17. Киселева Л. В. О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на “почти всех” коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 479–500.

18. Киселева Л. В. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Матем. заметки. 1989 Т. 46, вып. 4. С. 114–115.

19. До Дык Там О нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 71–89.

20. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. // М.: Физматлит, 1994. 376 с.

21. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана // М.: Мир, 1953. 406 с.

22. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР 1962. Т. 65. С. 3–212.

23. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.

REFERENCES

1. Riemann, B. 1948, “Sochineniya.” (Russian) [The works], *OGIZ*, Moskva–Leningrad. 479 p.

2. Hardy, G. H. 1914, “Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann” [On the zeros of the function $\zeta(s)$ Riemann], *Compt. Rend. Acad. Sci.,* vol. 158, pp. 1012–1014.

3. Hardy, G. H. & Littlewood, J. E. 1921. “The zeros of Riemann’s zeta-function on the critical line”, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 10, pp. 283–317.

4. Littlewood, J. E. 1924, “On the zeros of the Riemann zeta-function,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 22. pp 295-318 doi:10.1017/S0305004100014225

5. Selberg, A. 1942, “On the zeros of Riemann’s zeta-function”, *Skr. Norske. Vid. Akad Oslo*, vol. 10, pp. 1–59.

6. Levinson, N. 1974, “More than one third of the zeros of Riemann’s zeta-function are on $\sigma = 1/2$”, *Adv. in Math.,* vol. 13, pp. 383–436.

7. Karatsuba, A. A. 1981, “On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line”, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 157 , pp. 49–63. (Russian)

8. Karatsuba, A. A. 1984, “On the zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 48, no 3, pp. 569–584. (Russian)

9. Karatsuba, A. A. 1984, “The distribution of zeros of the function $\zeta(1/2 + it)$”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 48, no 6, pp. 1214–1224. (Russian)

10. Karatsuba, A. A. 1985, “Zeros of the Riemann zeta function on the critical line”, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 167 , pp. 167–178. (Russian)

11. Karatsuba, A. A. 1985, “On the real zeros of the function $\zeta(1/2 + it)$”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 40, no 4, pp. 171–172. (Russian)

12. Karatsuba, A. A. 1985, “The Riemann zeta function and its zeros”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 40, no 5, pp. 23–82. (Russian)

13. Karatsuba, A. A. 1986, “On the zeros of the function $\zeta(s)$ in the neighborhood of the critical lin”, *Math. USSR-Izv.,* vol. 26, no 2, pp. 307–313.

14. Karatsuba, A. A. 1992, “On the number of zeros of the Riemann zeta-function lying in almost all short intervals of the critical line”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 56, no 2, pp. 372–397. (Russian)

15. Karatsuba, A. A. 1992, “A refinement of theorems on the number of zeros lying on intervals of the critical line of certain Dirichlet series”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 47, no 2, pp. 193–194. (Russian)

16. Karatsuba, A. A. 1992 “On the zeros of a special type of function connected with Dirichlet series”, *Math. USSR-Izv.,* vol. 38, no 3, pp. 471–502.

17. Kiseleva, L. V. 1988, “The number of zeros of the function $\zeta(s)$ on "almost all” short intervals of the critical line.” (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 52, no. 3, pp. 479–500; translation in Math. USSR-Izv. 32 (1989), no. 3, 475–499.

18. Kiseleva, L.V. 1989 “On the zeros of the function $\zeta(s)$ in the neighborhood of the critical line.” Zbl 0691.10032 *Mat. Zametki* vol. 46, no 4, pp. 114–115.(Russian)

19. Tam, D. D. 2015 “On the zeros of the Rieman zeta function, lying in almost all short intervals of the critical line.” *Chebyishovski Sbornhik.* vol. 17, no 1, pp. 71–89.

20. Voronin, S. V. & Karatsuba, A. A. 1994, “Zeta-funkcia Rimana.” (Russian) [The Riemann zeta-function], *Fizmatlit*, Moscow, 376 p.

21. Titchmarsh, E. K. 1953, “Teoriya dzeta-funkcii Rimana.” (Russian)[Теория дзета-функции Римана], *Mir*, Moscow, 409 p.

22. Malysev, A. V. 1962, "On the representation of integers by positive quadratic forms." (Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 65, pp. 3-212.

23. Karatsuba, A. A. 1983, "Osnovui analiticheskoi teorii chisel." (Russian) [Fundamentals of analytic number theory], *Nauka*, Moscow, 240 p.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет.
Получено 11.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 511.3

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА РЯДОВ ДИРИХЛЕ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (г. Саратов)

Аннотация

В работе рассматривается задача поведения функций, определенных рядами Дирихле с мультипликативными коэффициентами с ограниченной сумматорной функцией, при подходе к мнимой оси. Показано, что точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле для функций, определяемых рядами Дирихле с мультипликативными коэффициентами, определяемыми неглавными обобщенными харакатерами. Этот результат представляет интерес в связи с решением гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что конечнозначный числовой характер, принимающий ненулевые значения почти на всех простых числах и имеющий ограниченную сумматорную функцию, является характером Дирихле. В основе доказательства основного результата работы лежит так называемый метод редукции к степенным рядам, основные положения которого были разработаны В. Н. Кузнецовым в начале 80-х годов. Этот метод изучает взаимосвязь между аналитическими свойствами рядов Дирихле и граничными свойствами соответсвующих (с теми же коэффециентами, что и у рядов Дирихле) степенных рядов, что позволяет получать новые результаты как для рядов Дирихле, так и для степенных рядов. В нашем случае метод редукции к степенным рядам позволяет на основании полученных в работе свойств степенных рядов с мультипликативными коэффициентами, определяемыми неглавными обобщенными характерами, доказать основной результат работы.

Ключевые слова: ряды Дирихле, сумматорная функция коэффициентов, обобщенные характеры, характеры Дирихле.

Библиография: 16 названий.

ON A BOUNDARY BEHAVIOR OF A DIRICLET SERIES CLASS WITH MULTIPLICATIVE COEFFICIENTS

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva (Saratov)

Abstract

In this paper we consider the behavior of funcions defined by Dirichlet series with multiplicative coefficients and with bounded summatory function when approaching the imaginary axis. We show that the points of the imaginary axis are also the points of continuity in a broad sense of functions defined by Dirichlet series with multiplicative coefficients which are determined by nonprincipal generalized characters. This result is particularly interesting in its connection with a solution of Chudakov hyphotesis, which states that any finite-valued numerical character, which does not vanish on all prime numbers and has bounded summatory function, is a Dirichlet character.

The proof of the main result in this paper is based on the method of reduction to power series, basic principles of which were developed by prof. Kuznetsov in the early 1980s. Ths method establishes a connection between analytical properties of Dirichlet series and boundary

[1]Работа выполнена при финансовой поодержке РФФИ (проект №16-01-00399)

properties of the corresponding power series (i.e. a power series with the same coefficients as the Dirichlet series). This allows to obtain new results both for the Dirichlet series and for the power series. In our case this method allowed us to prove the main result using the properties of the power series with multiplicative coefficients determined by the nonprincipal generalized characters, which also were obtained in this work.

Keywords: Dirichlet series, summatory function of the coefficients, generalized characters, Dirichlet series.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где $h(n)$ - мультипликативная функция натурального аргумента, для которой сумматорная функция ограничена, т.е.

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = O(1). \tag{2}$$

Из условия (2) и интегрального представления

$$f(s) = s \int_1^{\infty} \frac{S(u)}{u^{(s+1)}} du, \quad \sigma > 1,$$

следует, что функция (1) является аналитической в полуплоскости $\sigma > 0$.

Основная задача данной работы — выяснить поведение функции (1) при подходе к мнимой оси. Эта задача представляет интерес в связи с окончательным решением известной гипотезы Н. Г. Чудакова относительно обобщенных характеров, сформулированной им в 1950 году ([1], [2]). Н. Г. Чудаков предположил, что конечнозначный числовой характер $h(n)$, принимающий ненулевые значения почти на всех простых числах, сумматорная функция которого имеет асимптотику

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = \alpha x + O(1),$$

является характером Дирихле. Это предположение остается открытым в случае неглавных обобщенных характеров ($\alpha = 0$). Всюду в дальнейшем под $h(n)$ будем понимать неглавный обобщенный характер.

Ниже будет показано, что для функций, определяемых рядами Дирихле вида (1) точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле. В основе доказательства этого факта лежит так называемый метод редукции к степенным рядам, главные положения которого были разработаны в 80-х годах В. Н. Кузнецовым [3], [4], [5], [6]. Этот метод предполагает изучение взаимосвязи аналитических свойств рядов Дирихле и граничных свойств степенных рядов с теми же коэффициентами, что и у рядов Дирихле. Изучение такой взаимосвязи позволяет получать новые результаты как в теории рядов Дирихле, так и в теории степенных рядов (см, например, [7], [8], [9], [10], [11]).

2. О граничном поведении степенных рядов с мультипликативными коэффициентами

Рассмотрим степенной ряд вида

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) x^n, \tag{3}$$

где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер.

Относительно степенных рядов вида (3) докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Степенной ряд*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) x^n,$$

имеет в точке единица конечный предел вида

$$\lim_{x\to 1-0} g(x) = \alpha_0. \tag{4}$$

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд лемм относительно приближения на отрезке непрерывных функций алгебраическими полиномами с привлечением аппарата сильно непрерывных ограниченных полугрупп операторов (С.Н.О.П.О.) в теории приближений.

Известно, [12], [13], что наличие С.Н.О.П.О. $\{V_t, t \geq 0\}$, действующей в банаховом пространстве, обеспечивает прямые и обратные теоремы приближения по заданным подпространствам, аналогичные классическим, но выраженные в терминах оператора, порождающего С.Н.О.П.О. и соответствующих модулей k-го порядка. Под классическими понимаются прямые и обратные теоремы приближения периодических функций тригонометрическими полиномами.

Пусть H — линейное пространство степенных рядов, сходящихся на интервале $[0,1)$, и H_n^* — подмножество алгебраических полиномов степени $\leq n$ с мультипликативными коэффициентами. Определим в этом подмножестве операцию «сложения». Под «суммой» двух таких полиномов будем понимать полином с мультипликативными коэффициентами, у которго коэффициенты при простых степенях определяются как сумма соответсвующих коэффициентов слагаемых. Аналогично определяется «умножение на число». В итоге получим цепочку конечномерных линейных пространств H_n^* той же размерности, что и линейных пространств H_n^p, порожденных степенями x^p, p — простое, $p \leq n$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $H_\varepsilon = C[0, 1-\varepsilon]$. Обозначим через H_ε^* и H_ε^p замыкания в H_ε линеалов, порожденных цепочкой конечномерных пространств H_n^* и цепочкой конечномерных пространств H_n^p. Отметим, что размерности подпространств H_n^* и H_n^p асимптотически ведут себя следующим образом

$$\dim H_n^p = \dim H_n^* \sim \frac{n}{\ln n} \tag{5}$$

Как известно, ([12], [13]), в пространстве $C^*[0,2\pi]$ действует С.Н.О.П.О., порожденная группой сдвигов.

Отображение

$$g(x) = \varphi \arccos \frac{2\pi - 1 + \varepsilon}{1-\varepsilon}$$

определяет изоморфизм пространств $C^*[0,2\pi]$ и H_ε — следовательно, этот изоморфизм определяет С.Н.О.П.О. $\{V_\varepsilon(t), t \geq 0\}$, действующую в пространстве H_ε и в подпространстве H_ε^p.

Пусть $\varepsilon > \varepsilon_1$. Рассмотрим линейное отображение

$$\psi_{\varepsilon,\varepsilon_1} : H_\varepsilon^* \to H_{\varepsilon_1}^p,$$

которое на многочленах с мультипликативными коэффициентами определяется следующим образом

$$\psi_{\varepsilon,\varepsilon_1}\left(\sum_0^n a_n x^n\right) = \sum_{p\leq n} a_p x^p.$$

В работе [14] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Отображение $\psi_{\varepsilon,\varepsilon_1}$ является взаимнооднозначным, ограниченным отображением пространств H_ε^* и $H_{\varepsilon_1}^p$.*

Это отображение определяет С.Н.О.П.О. $V_\varepsilon^*(t), t \geq 0$, действующую в пространстве H_ε^*. Для любой функции $g(x)$ из линеала $\widetilde{H_\varepsilon^*}$, определенного пространствами H_n^* положим по определению:

$$V_\varepsilon^*(t)(g) = \psi_{\varepsilon,\varepsilon_1}^{-1}(V_{\varepsilon_1}(t)(\psi_{\varepsilon,\varepsilon_1}(g))).$$

Тогда, как следует из результатов работ [12], [13], в которых изучаются вопросы приближения в пространствах с С.Н.О.П.О., в нашем случае для величины $E_n^*(g)$ наилучшего приближения функции $g(x) \in H_\varepsilon^*$ алгебраическими полиномами степени $\leq n$ с мультипликативными коэффициентами имеют место прямые и обратные теоремы, аналогичные классическим.

Остановимся на одном из таких результатов. В рассматриваемом случае в силу (5) размерность пространства полиномов, определенных только простыми степенями переменной степени $\leq n$, асимптотически равна $\frac{n}{\ln n}$. В этом случае, как следует из результатов работы [13], имеет место утверждение.

Лемма 2. *Пусть $g(x) \in H_\varepsilon^*$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1. $E_n^*(g) = O\left(\omega\left(\frac{lnn}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)\right)$;
2. $\omega(\delta, g, V_\varepsilon^*(t)) = O(\widetilde{\omega}(\delta))$,

где $\omega(\delta, g, V_\varepsilon^*(t))$ — модуль первого порядка, т.е.

$$\omega(\delta, g, V_\varepsilon^*(t)) = \sup_{0\leq t\leq\delta} \left\|V_\varepsilon^*(t)g - g\right\|,$$

где $\widetilde{\omega}(\delta)$ —функция, удовлетворяющая условию Бари.

Отметим, что модуль $\omega(\delta, g, V_\varepsilon^*(t))$ обладает свойствами, аналогичными свойствам модуля непрерывности $\omega(\delta, \varepsilon)$.

В работе [15] приведены прямые и обратные теоремы приближения алгебраическими полиномами, выраженные в терминах гладкости. Соответствующие теоремы имеют место и в случае приближения подпространствами из H_ε^p, а в силу леммы 1, и в случае пространства H_ε^*.

Следовательно, в силу леммы 2 имеет место следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть $g \in H_\varepsilon^*$, модуль непрерывности которой $\omega(\delta, g)$ удовлетворяет условию Бари. Тогда существуют такие положительные константы c_1 и c_2, в общем случае зависящие от ε, для которых имеет место неравенство*

$$c_1\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g\right) \leq \omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right) \leq c_2\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g\right).$$

Следствие 1. *Пусть функция $g(x)$ определена рядом (3). Тогда имеет место оценка*

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \leq C \ln^{-1} n, \tag{6}$$

где константа C в общем случае зависит от ε.

Докажем утверждение, которое уточняет неравенство (6).

Лемма 4. *Для функции $g(x)$, определенной рядом* (3), *имеет место оценка*

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} < C\ln^{-1} n, \tag{7}$$

где константа C не зависит от ε.

Доказательство. Для заданного ε обозначим через $g_t(x)$, где $t < \frac{1}{n}$, функцию $g_t = (V_\varepsilon(t) - E)g$ такую, что $\|g_t(x)\|_\varepsilon = \omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon\right)$ и обозначим через $g_{t_1}(x)$, где $t_1 < \frac{\ln n}{n}$, функцию $g_{t_1} = (V_\varepsilon^*(t) - E)g$, такую, что $\|g_{t_1}(x)\|_\varepsilon = \omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*\right)$.

Здесь мы предполагаем, что указанные t и t_1 существуют. В противном случае в доказательство леммы 4 нужно ввести незначительные коррективы.

Обозначим также

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right) = \sup_{\varepsilon>0} \omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right),$$

$$\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right) = \sup_{\varepsilon>0} \omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right),$$

Заметим, что в силу ограниченности сумматорной функции коэффициентов будет ограничена функция $g(x)$ на интервале $[0,1)$, а её модуль непрерывности $\omega(\delta, g)$ ограничен единой константой для всех отрезков $[0, 1-\varepsilon]$.

Следовательно, имеют место неравенства

$$\|g_t(x)\|_\varepsilon \le C_1 \omega(\frac{1}{n}, g, V(t))\, \|g(x)\|_\varepsilon \tag{8}$$

$$\|g(x)\|_\varepsilon \le C_2 \omega^{-1}(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t))\, \|g_t\|_\varepsilon, \tag{9}$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от ε.

В силу (8) и (9) имеем оценку вида

$$\omega(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)) \le \|g_t\|_\varepsilon \le C_1 \omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right) \|g(x)\|_\varepsilon \le$$
$$\le C_2 \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \|g_{t_1}\|_\varepsilon \le C_2 \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \omega(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)) \tag{10}$$

Из (10) следует

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \le C_2 \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \tag{11}$$

Обратно

$$\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right) \le \|g_{t_1}\|_\varepsilon \le C_3 \omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right) \|g\|_\varepsilon \le$$
$$\le C_4 \frac{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)}{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)} \omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right),$$

где константа C_4 не зависит от ε.

Отсюда получаем

$$\frac{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)}{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)} \le C_4 \frac{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)}{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)} \tag{12}$$

В силу (12) имеем

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \geq \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)}, \tag{13}$$

где константа C_5 не зависит от ε

Из неравенств (11) и (13) получаем

$$C_5\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \leq \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \leq C_3\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \tag{14}$$

Неравенство (14) завершает доказательство леммы 4. □

Доказательство.

В силу леммы 4 имеем:

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right) \leq C\ln^{-1} n\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right),$$

где константа C не зависит от ε. В силу (14) получаем:

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right) \leq C_1\ln^{-1} n\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right). \tag{15}$$

Учитывая, что $g(x) = O(1)$ на отрезке $[0,1]$, имеем:

$$\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right) = O(1),$$

что в совокупности с (15) даёт оценку вида

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g\right) \leq C_2\ln^{-1} n,$$

где $\omega\left(\frac{1}{n}, g\right)$ — модуль непрерывности функции $g(x)$ на интервале $[0,1)$.

Таким образом, функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, т.е. имеет место (4), что и доказывает утверждение теоремы 1.

Отметим, что рассуждения, приведённые при доказательстве леммы 4, позволяют доказать следующий результат.

Лемма 5. *Пусть $g(x)$ — функция, определённая степенным рядом* (3). *Тогда для модулей k-го порядка имеет место асимптотическая оценка*

$$\frac{\omega_k\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega_k\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \leq C\ln^{-k} n,$$

где $n \geq n_0$, n_0 определяется величиной k и где константа C не зависит от ε и k.

Как следствие леммы 5 получается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $g(x)$ — функция, определённая степенным рядом* (3). *Тогда для модуля непрерывности функции $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ имеет место асимптотическая оценка вида*

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g\right) \leq C\ln^{-k} n, \tag{16}$$

где $n \geq n_0$, n_0 определяется величиной k и где константа C не зависит от k.

Доказательство. Как показано в лемме 5, для модуля непрерывности k-го порядка функции $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ имеет место оценка вида

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, g\right) \leq C \ln^{-k} n,$$

где $n \geq n_0$, n_0 определяется величиной k и где константа C не зависит от k.

Как показано в [12], [13], из этой оценки для величины $E_n(g)$ наилучшего приближения функции $g(x)$ алгебраическими полиномами следует оценка вида

$$E_n(g) = O(\varphi(n)),$$

где $\varphi(n) = o(\ln^{-k} n)$, где при любом натуральном k константа в символе «O» не зависит от k, что обеспечивает оценку вида

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g\right) \leq C \ln^{-k} n,$$

где $n \geq n_0$, n_0 определяется величиной k и где константа C не зависит от k, что завершает доказательство теоремы 2. □

Отметим, что оценка (16) равносильна оценке вида

$$|g(x) - \alpha_0| \leq C|\ln^{-k}(1-x)|,$$

где $\alpha_0 = \lim\limits_{x\to 1-0} g(x)$, и $x_0 \leq x < 1$, где x_0 определяется величиной k, а константа C не зависит от k.

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Степенной ряд*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)x^n,$$

где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, определяет функцию, имеющую конечный предел вида (4), *т.е.*

$$\lim_{x\to 1-0} g(x) = \alpha_0.$$

Более того, имеет место оценка

$$|g(x) - \alpha_0| \leq \frac{C}{\left|\ln^k(1-x)\right|}, \tag{17}$$

где x_0 определяется величиной k, а константа C не зависит от k.

Отметим, что оценка (17) является более слабой, чем оценка, имеющая место при условии ограниченности производной функции $g(x)$ на интервале $[0,1)$.

3. О поведении рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами в критической полосе

В работе [16] авторами рассматривалась задача поведения рядов Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{18}$$

с ограниченной сумматорной функцией коэффициентов в критической полосе, в частности, при подходе к мнимой оси. В этой работе показано, что выполнение граничных условий вида (4), (17), для соответствующего степенного ряда обеспечивает для функции $f(s)$, определённой рядом Дирихле (18) следующие аналитические свойства:

1. Функция $f(s)$ является аналитической и ограниченной в области $0 < \sigma < 1$, $|t| < T$ константой, зависящей только от величины T.

2. Существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, равномерно сходящаяся к функции $f(s)$ в каждой области $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$.

3. Для каждого интервала $[-T, T]$ мнимой оси существует подпоследовательность полиномов Дирихле $Q_{n_k}(s)$, для которых последовательность функций $f_k(t) = Q_{n_k}(\sigma_k + it)$, где $\sigma_k \to 0$ при $k \to \infty$, равномерно сходится на этом интервале.

Отметим, что свойство 3 позволяет сделать вывод о том, что каждая точка мнимой оси являтся точкой непрерывности в широком смысле для функции $f(s)$.

Таким образом, результаты работы [16] вместе с теоремой 3 доказывают основную теорему данной работы.

Теорема 4. *Ряд Дирихле вида* (1)*:*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

где $h(n)$ — неглавный обобщённый характер, определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > 0$, ограниченную в любой области $0 < \sigma < 1$, $|t| < T$ константой, зависящей только от величины T, для которой точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле.

Отметим, что результат теоремы 4 связан с задачей аналитического продолжения рядов Дирихле вида (1) на комплексную плоскость и с решением гипотезы Н. Г. Чудакова в случае неглавных обобщённых характеров. Но на этих вопросах в данной работе останавливаться не будем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2, С. 133–136.

2. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Об обобщенном характере. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №4, С. 1137–1138.

3. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т. 36, №6, С. 805–812.

4. Кузнецов В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1987, Т. 1, С. 13–23.

5. Кузнецов В. Н. О граничных свойствах степенных рядов с конечнозначными коэффициентами // Диф. уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1987, Т. 7, С. 8–16.

6. Кузнецов В. Н. К задаче описания одного класса рядов Дирихле, определяющих целые функции // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1988, Т. 1, С. 63–72.

7. Матвеева О. А. К задаче описания степенных рядов с целыми коэффициентами, непродолжимых за границу сходимости // Ученые записки Орловского гос. ун-та. Серия: «естественные, технические и медицинские науки» — Орел: изд-во ВГСПУ «Перемена», 2012, вып. 6, ч. 2, С. 153–156.

8. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Механика. Информатика» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013. Т. 13, вып. 4, С. 80–84.

9. Матвеев В. А., Матвеева О. А. Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле числовых полей // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Информатика. Механика.» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013, вып. 4, ч. 2. С. 76–80.

10. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2013, Т. 14, вып. 2, С. 117–121.

11. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле // Диссертация на соискание уч. степени к. ф.-м.н. — Ульяновск: УлГУ, 2014.

12. Терехин А. П. Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение // Диф. уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1975, вып. 2, С. 3–28.

13. Кузнецова Т. А. Отыскание полугруппы операторов, целой, экспоненциального типа на заданных подпространствах // Диссертация на соискание уч. степени к. ф.-м. н. — Саратов, 1982.

14. Кузнецов В. Н., Водолазов А. М. К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 2003, вып. 1, С. 43–59.

15. Даугавет И. К. Введение в теорию приближений функций: Учебное пособие — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1972.

16. Кузнецов В. Н, Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, вып. 2, С. 162–168.

REFERENCES

1. Chudakov N. G., Linnik U. V. On a class of completely multiplicative functions *DAN SSSR*, 1950, vol.74, issue 2, pp. 133–136.

2. Chudakov N. G., Rodosskij K. A. On a generalized character *DAN SSSR*, 1950, vol.74, issue 4, pp. 1137–1138.

3. Kuznetsov V. N."Analogue of the Szego theorem for a class of Dirichlet series"*Math. issues*, 1984, vol. 36, № 16, pp. 805–812

4. Kuznetsov V. N. "On the analytic extension of a class of Dirichlet series" *Vychislitel'nye metody i programmirovanie: Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, publ. SSU, 1987, vol. 1, pp. 13–23

5. Kuznetsov V. N. "On the boundary properties of power series with finite-valued coefficients" *Differencial'nye uravnenija i teorija funkcij: Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, publ. SSU, 1987, vol. 7, pp. 80–84

6. Kuznetsov V. N. "On the problem of description of a certain class of Dirichlet series, defining integral functions" *Vychislitel'nye metody i programmirovanie: Mezhvuz. sb. nauch. tr. — Saratov: Izd-vo SGU, 1988, T. 1, S. 63–72.*

7. Matveeva O. A. "On a problem of defining of the power series with integer coefficients that can not be continued beyond the boundary of convergence" *Uchenye zapiski Orlovskogo gos. un-ta. Serija: «estestvennye, tehnicheskie i medicinskie nauki» — Orel: izd-vo VGSPU «Peremena», 2012, vyp. 6, ch. 2, S. 153–156.*

8. Matveeva O. A. "Approximation polynomials and the behavior of the Dirichlet L-functions on the critical band" *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriia «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, 2013, vol. 13, issue 4, pp. 80–84

9. Matveev V. A., Matveeva O. A. "On a certain equivalent of the extended Riemann hypothesis for L-functions of Dirichlet series" *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriia «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, 2013, issue 4, part 2, pp. 76–80

10. Matveeva O. A. "On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions in the critical band " *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2013, vol. 14, issue 2, pp. 117–121

11. Matveeva, O. A. "Analytical properties of some classes of Dirichlet series and some problems of the theory of Dirichlet L-functions Dissertation, Ul'ianovsk, 2014.

12. Terehin A. P. Restricted group of operators and best approximation Dif. uravnenija i vychislitel'naja matematika: Mezhvuz. sb. nauch. tr. — Saratov: Izd-vo SGU, 1975, vyp. 2, S. 3–28.

13. Kuznetsova T. A. "Finding semigroup, whole, of exponential type on a subspace Dissertation, Saratov, 1982.

14. Kuznetsov V. N., Vodolazov A. M. "On the problem of analytical extension of the Dirichlet series with completely multiplicative coefficients"Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkcional'nomu analizu i smezhnym voprosam: Mezhvuz. sb. nauch. tr. — Saratov: Izd-vo SGU, 2003, vyp. 1, S. 43–59.

15. Daugavet I. K. "Introduction to functions approximation theory". L.: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1972.

16. Kuznetsov V. N., Matveeva O. A. "On a boundary behavior of a certain Dirichlet series class" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2016, vol. 17, issue 2, pp. 162–168

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
Получено 22.05.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 519.14

МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ МИШУ

А. Лауринчикас, (г. Вильнюс, Литва), Л. Мешка (г. Вильнюс, Литва)

Аннотация

В 2007 г. Г. Мишу доказал совместную теорему универсальности для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и дзета-функции Гурвица $\zeta(s,\alpha)$ с трансцендентным параметром α об одновременном приближении пары функций из широкого класса аналитических функций сдвигами $(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))$, $\tau\in\mathbb{R}$. Он получил, что множество таких сдвигов, приближающих данную пару аналитических функций, имеет положительную нижнюю плотность. В статье получено, что множество таких сдвигов имеет положительную плотность для всех $\varepsilon>0$, за исключением счетного множества значений ε, где ε – точность приближения.

Результаты аналогичного типа также получены для сложных функций $F(\ \zeta(s),\zeta(s,\alpha))$ для некоторых классов операторов F в пространстве аналитических функций.

Ключевые слова: дзета-функция Гурвица, дзета-функция Римана, пространство аналитических функций, универсальность.

Библиография: 21 названий.

MODIFICATION OF THE MISHOU THEOREM

A. Laurinčikas, (Vilnius, Lithuania), L. Meška (Vilnius, Lithuania)

Abstract

The Mishou theorem asserts that a pair of analytic functions from a wide class can be approximated by shifts of the Riemann zeta and Hurwitz zeta-functions $(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))$ with transcendental α, $\tau\in\mathbb{R}$, and that the set of such τ has a positive lower density. In the paper, we prove that the above set has a positive density for all but at most countably many $\varepsilon>0$, where ε is the accuracy of approximation. We also obtain similar results for composite functions $F(\zeta(s),\zeta(s,\alpha))$ for some classes of operator F.

Keywords: Hurwitz zeta-function, Riemann zeta-function, space of analytic functions, universality.

Bibliography: 21 titles.

1. Introduction

Let $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$, be the Riemann zeta-function. In 1975, S. M. Voronin discovered [21] the universality property of $\zeta(s)$ which means that a wide class of non-vanishing analytic functions can be approximated by shifts $\zeta(s+i\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$. The non-vanishing of approximated functions is connected to the existence of Euler's product over primes for $\zeta(s)$.

Now let $0<\alpha\leqslant 1$ be a fixed parameter, and $\zeta(s,\alpha)$ denotes the Hurwitz zeta-function which is defined, for $\alpha>1$, by the series

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and can be meromorphically continued to the whole complex plane. Clearly, $\zeta(s,1)=\zeta(s)$, and

$$\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right)=(2^s-1)\zeta(s).$$

For other values of the parameter α, the function $\zeta(s,\alpha)$ has no Euler product. It is well known that the Hurwitz zeta-function with transcendental or rational $\neq 1, \frac{1}{2}$ parameter α is also universal in the above sense, however, its shifts $\zeta(s+i\tau,\alpha)$ approximate not necessarily non-vanishing analytic functions. The universality of $\zeta(s,\alpha)$ with algebraic irrational α is an open problem.

Some other zeta-functions are also universal in the Voronin sense. The universality for zeta-functions of certain cusp forms was obtained in [12], for periodic zeta-functions was studied in [20] and [15], while the works [2], [4] and [5] are devoted to periodic Hurwitz zeta-functions. Universality theorems for Lerch zeta-functions can be found in [11]. A very good survey on universality of zeta-functions is given in [16].

In [19], H. Mishou began to study the so-called mixed joint universality. In this case, a collection of analytic functions are simultaneously approximated by shifts of a collection of zeta-functions consisting from functions having the Euler product and having no such a product. H. Mishou considered the pair $(\zeta(s),\zeta(s,\alpha))$ with transcendental α. For the statement of the Mishou theorem, we need some notation. Let $D=\left\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\right\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements. Moreover, let $H(K)$, $K\in\mathcal{K}$, be the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K, and let $H_0(K)$, $K\in\mathcal{K}$, be the subclass of $H(K)$ consisting from non-vanishing functions on K. Denote by meas$A$ the Lebesgue measure of a measurable set $A\subset\mathbb{R}$. Then H. Mishou proved [19] the following theorem.

THEOREM 1. *Suppose that α is transcendental number. Let $K_1,K_2\in\mathcal{K}$, and $f_1(s)\in H_0(K_1)$, $f_2(s)\in H(K_2)$. Then, for every $\varepsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-f_1(s)|<\varepsilon,\\ \sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f_2(s)|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Mixed joint universality theorems are also proved in [3], [7] and [10].

Our aim is to replace "lim inf"in Theorem 1 by "lim". In the case of the function $\zeta(s)$, this was done in [13] and [18], and, in the case of $\zeta(s,\alpha)$, a similar theorem was obtained in [14]. Let $\mathbb{P}$ be the set of all prime numbers, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, and

$$L(\alpha,\mathbb{P})=\{(\log(m+\alpha):m\in\mathbb{N}_0),(\log p:p\in\mathbb{P})\}.$$

THEOREM 2. *Suppose that the set $L(\alpha,\mathbb{P})$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Let $K_1,K_2\in\mathcal{K}$, and $f_1(s)\in H_0(K_1)$, $f_2(s)\in H(K_2)$. Then the limit*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau)-f_1(s)|<\varepsilon,\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f_2(s)|<\varepsilon\Big\}>0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon>0$.

For example, if α is transcendental, then the set $L(\alpha,\mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$.

Let $H(G)$ be the space of analytic functions on G equipped with the topology of uniform convergence on compacta. In [9], universality theorems were proved for the functions $F(\zeta(s),\zeta(s,\alpha))$ with some operators $F:H^2(D)\to H(D)$. Let

$$S=\{g\in H(D):g(s)\neq 0 \text{ or } g(s)\equiv 0\}.$$

Then, for example in [9], the following assertion was obtained.

THEOREM 3. *Suppose that α is transcendental, and that $F : H^2(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that, for every open set $G \subset H(D)$, the set $(F^{-1}G) \cap (S \times H(D))$ is non-empty. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(D)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

More general results are obtained in [10].

Clearly, the transcendence of α in Theorem 3 can be replaced by a linear independence over $\mathbb{Q}$ of the set $L(\alpha, \mathbb{P})$. Therefore, we will prove the following theorem.

THEOREM 4. *Suppose that the set $L(\alpha,\mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and that F, K and $f(s)$ are the same as in Theorem 3. Then the limit*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0 \tag{1}$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Now, let V be an arbitrary positive number, $D_V = \big\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1,\ |t| < \mathrm{V}\big\}$ and

$$S_V = \{g \in H(D_V) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

For brevity, we use the notation $H^2(D_V, D) = H(D_V) \times H(D)$.

THEOREM 5. *Suppose that the set $L(\alpha,\mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and that K and $f(s)$ are the same as in Theorem 3, and $V > 0$ is such that $K \subset D_V$. Let $F : H^2(D_V, D) \to H(D_V)$ be a continuous operator such that , for each polynomial $p = p(s)$, the set $(F^{-1}\{p\}) \cap (S_V \times H(D_V))$ is non-empty. Then the limit (1) exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.*

For example, Theorem 5 implies the modified universality of the functions

$$c_1\zeta(s) + c_2\zeta(s,\alpha) \text{ and } c_1\zeta'(s) + c_2\zeta'(s,\alpha) \quad \text{with } c_1, c_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Let $a_1, ..., a_r$ be arbitrary distinct complex numbers, and

$$H_{a_1,\dots,a_r}(D) = \big\{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D),\ j = 1, ..., r\big\}.$$

THEOREM 6. *Suppose that the set $L(\alpha,\mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and $F : H^2(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that $F(S \times H(D)) \supset H_{a_1,\dots,a_r}(D)$. When $r = 1$, let $K \in \mathcal{K}$, and $f(s) \in H(K)$ and $f(s) \neq a_1$ on K. Then the limit (1) exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. If $r \geqslant 2$, $K \subset D$ is an arbitrary compact subset, and $f(s) \in H_{a_1,\dots,a_r}(D)$, then the limit (1) exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.*

The case $r = 1$ with $a_1 = 0$ shows that, for $F(g_1(s), g_2(s)) = e^{g_1(s)+g_2(s)}$, the limit (1) exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. If $r = 2$ and $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, then, for example, for $F(g_1(s), g_2(s)) = \cos(g_1(s) + g_2(s))$ and $f(s) \in H_{1,-1}(D)$, the limit (1) exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

THEOREM 7. *Suppose that the set $L(\alpha,\mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, $F : H^2(D) \to H(D)$ is a continuous operator, $K \subset D$ is a compact subset, and $f(s) \in F(S \times H(D))$. Then the limit (1) exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.*

2. Lemmas

In this section, we present probabilistic theorems on the weak convergence of probability measures in the space of analytic functions.

Let $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, and

$$\Omega_1 = \prod_p \gamma_p \quad \text{and} \quad \Omega_2 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

where $\gamma_p = \gamma$ for all $p \in \mathbb{P}$, and $\gamma_m = \gamma$ for all $m \in \mathbb{N}_0$. By the Tikhonov theorem, the tori Ω_1 and Ω_2 with the product topology and operation of pointwise multiplication are compact topological Abelian groups. Similarly, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ is also a compact topological Abelian group. Therefore, denoting by $\mathcal{B}(X)$ the Borel σ-field of the space X, we have that, on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, the probability Haar measure m_H can be defined, and we obtain the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Denote by $\omega_1(p)$ and $\omega_2(m)$ the projections of $\omega_1 \in \Omega_1$ and $\omega_2 \in \Omega_2$ to the coordinate spaces γ_p, $p \in \mathbb{P}$, and γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$, respectively, and, on the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, define the $H^2(D)$-valued random element $\underline{\zeta}(s, \omega)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, by the formula

$$\underline{\zeta}(s, \alpha, \omega) = (\zeta(s, \omega_1), \zeta(s, \alpha, \omega_2)),$$

where

$$\zeta(s, \omega_1) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega_1(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

and

$$\zeta(s, \alpha, \omega_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_2(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Moreover, let

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = m_H\left(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s, \alpha, \omega) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(H^2(D)),$$

i.e., $P_{\underline{\zeta}}$ is the distribution of the random element $\underline{\zeta}(s, \omega)$. We set $\underline{\zeta}(s, \alpha) = \big(\zeta(s),\ \zeta(s, \alpha)\big)$, and

$$P_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \text{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta}(s + i\tau, \alpha) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^2(D)).$$

LEMMA 1. *Suppose that the set $L(\alpha, \mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then P converges weakly to $P_{\underline{\zeta}}$ as $T \to \infty$.*

PROOF. The lemma for transcendental α is proved in [19], Theorem 1, however, the transcendence of α is used only for the linear independence of the set $L(\alpha, \mathbb{P})$.

□

Let X_1 and X_2 be two metric spaces, and let the function $u : X_1 \to X_2$ be $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$-measurable. Then every probability measure P on $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$ induces on $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$ the unique probability measure $Pu^{-1}(A)$ given by the formula

$$Pu^{-1} = P(u^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(X_2).$$

It is well known that if u is a continuous function, then it is $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$-measurable.

In the sequel, the following property of weakly convergent probability measures will be very useful.

LEMMA 2. *Suppose that P_n, $n \in \mathbb{N}$, and P are probability measures on $(X_1,\ \mathcal{B}(X_1))$, the function $u : X_1 \to X_2$ is continuous, and P_n converges weakly to P as $n \to \infty$. Then $P_n u^{-1}$ also converges weakly to Pu^{-1} as $n \to \infty$.*

The lemma is Theorem 5.1 from [1].

LEMMA 3. *Suppose that the set $L(\alpha, \mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and $F : H^2(D) \to H(D)$ is a continuous operator. Then*

$$P_{T,F}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : F\left(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha)\right) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

converges weakly to $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ as $T \to \infty$.

PROOF. The definitions of P_T and $P_{T,F}$ imply that $P_{T,F} = P_T F^{-1}$. Therefore, the continuity of F and Lemmas 1 and 2 prove the lemma.

□

Let $V > 0$, and, for $A \in \mathcal{B}\left(H^2(D_V, D)\right)$,

$$P_{T,V}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha) \in A\right\},$$

$$P_{\underline{\zeta},V}(A) = m_H\left(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s,\alpha,\omega) \in A\right).$$

LEMMA 4. *Suppose that the set $L(\alpha, \mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and $F : H^2(D_V, D) \to H(D_V)$ is a continuous operator. Then*

$$P_{T,F,V}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : F\left(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha)\right) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D_V)),$$

converges weakly to $P_{\underline{\zeta},V}F^{-1}$ as $T \to \infty$.

PROOF. Clearly, the function $u_V : H^2(D) \to H^2(D_V, D)$ given by the formula

$$u_V(g_1(s), g_2(s)) = \left(g_1(s)\Big|_{s\in D_V}, g_2(s)\right), \; g_1, g_2 \in H(D),$$

is continuous, and, $P_{T,V} = P_T u_V^{-1}$. Therefore, Lemmas 1 and 2 imply that $P_{T,V}$ converges weakly to $P_{\underline{\zeta},V}$ as $T \to \infty$. Since $P_{T,F,V} = P_{T,V}F^{-1}$, we have that $P_{T,F,V}$ converges weakly to $P_{\underline{\zeta},V}F^{-1}$ as $T \to \infty$.

□

Now we consider the supports of the limit measures $P_{\underline{\zeta}}$, $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$, $P_{\underline{\zeta},V}$ and $P_{\underline{\zeta},V}F^{-1}$.

LEMMA 5. *Suppose that the set $L(\alpha, \mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then the support of the measure $P_{\underline{\zeta}}$ is the set $S \times H(D)$.*

PROOF. Denote by m_{1H} and m_{2H} the probability Haar measures on $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1))$ and $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2))$, respectively. Then we have that m_H is the product of m_{1H} and m_{2H}, i.e., if $A = A_1 \times A_2$, where $A_1 \in \mathcal{B}(\Omega_1)$ and $A_2 \in \mathcal{B}(\Omega_2)$, then

$$m_H(A) = m_{1H}(A_1)m_{2H}(A_2). \tag{2}$$

The space $H^2(D)$ is separable, therefore, $\mathcal{B}(H^2(D)) = \mathcal{B}(H(D)) \times \mathcal{B}(H(D))$. Thus, it suffices to consider the measure $P_{\underline{\zeta}}$ on the sets $A = A_1 \times A_2$, $A_1, A_2 \in H(D)$.

It is known [20] that the support of the measure

$$m_{1H}\left(\omega_1 \in \Omega_1 : \zeta(s,\omega_1) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)) \tag{3}$$

is the set S. The linear independence of $L(\alpha,\mathbb{P})$ implies that of the set $L(\alpha)=\{\log(m+\alpha): m\in\mathbb{N}_0\}$. Therefore, the case $r=1$ of Theorem 11 from [6] gives that the support of the measure

$$m_{2H}\left(\omega_2\in\Omega_2:\zeta(s,\alpha,\omega_2)\in A\right),\quad A\in\mathcal{B}(H(D)), \tag{4}$$

is the set $H(D)$. Since

$$P_{\underline{\zeta}}(A)=m_H\left(\omega\in\Omega:\underline{\zeta}(s,\alpha,\omega)\in A\right),\ \ A\in\mathcal{B}(H^2(D)),$$

in view of (2), we have that, for $A=A_1\times A_2$,

$$P_{\underline{\zeta}}(A)=m_{1H}\left(\omega_1\in\Omega_1:\zeta(s,\omega_1)\in A_1\right)m_{2H}\left(\omega_2\in\Omega_2:\zeta(s,\alpha,\omega_2)\in A_2\right).$$

Therefore, the lemma follows from remarks on supports of the measures (3) and (4), and minimality property of a support.

□

LEMMA 6. *Suppose that the set $L(\alpha,\mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and $F: H^2(D)\to H(D)$ is a continuous operator such that, for every open set $G\subset H(D)$, the set $(F^{-1}G)\cap(S\times H(D))$ is non-empty. Then the support of the measure $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ is the whole of $H(D)$.*

PROOF. We apply standard arguments. Let $g\in H(D)$ be an arbitrary element, and G be its any open neighborhood. Since the operator F is continuous, the set $F^{-1}G$ is open, too. Therefore, by the hypothesis of the lemma, $F^{-1}G$ is an open neighborhood of a certain element of the set $S\times H(D)$. Hence, by Lemma 5, $P_{\underline{\zeta}}(F^{-1}G)>0$. Therefore,

$$P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(G)=P_{\underline{\zeta}}(F^{-1}G)>0.$$

Since g and G are arbitrary, this proves the lemma.

□

In what follows, the Mergelyan theorem on the approximation of analytic functions by polynomials will be exceptionally useful [17].

LEMMA 7. *Suppose that $K\subset\mathbb{C}$ is a compact subset with connected complement, and $f(s)$ is a continuous function on K which is analytic in the interior of K. Then, for every $\varepsilon>0$, there exists a polynomial $p(s)$ such that*

$$\sup_{s\in K}|f(s)-p(s)|<\varepsilon.$$

LEMMA 8. *Suppose that the set $L(\alpha,\mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and $V>0$. Then the support of $P_{\underline{\zeta},V}$ is the set $S_V\times H(D)$.*

PROOF. Let g be an arbitrary element of $S_V\times H(D)$, and G be its open neighborhood. The function u_V defined in the proof of Lemma 4 is continuous. Therefore, by the definition of u_V, the set $u_V^{-1}G$ is open and non-empty. Really, it is well known, see, for example, [8], that the approximation in the space $H(D)$ coincides with the uniform approximation on compact sets with connected complements. Therefore, by Lemma 7, there exists a polynomial $p(s)$ such that $p(s)\in G$. Since the polynomial $p(s)$ is an entire function, $p(s)$ also belongs to $u_V^{-1}G$. Thus, the set $u_V^{-1}G$ is non-empty, and is an open neighborhood of an element from $S\times H(D)$. Therefore, by Lemma 5, $P_{\underline{\zeta}}(u_V^{-1}G)>0$. Hence, $P_{\underline{\zeta},V}(G)=P_{\underline{\zeta}}u_V^{-1}(G)=P_{\underline{\zeta}}(u_V^{-1}G)>0$. Clearly, if $(g_1,g_2)\in S\times H(D)$, then also $(g_1,g_2)\in S_V\times H(D)$. Therefore,

$$m_H\left(\omega\in\Omega:\underline{\zeta}(s,\alpha,\omega)\in S_V\times H(D)\right)\geqslant m_H\left(\omega\in\Omega:\underline{\zeta}(s,\alpha,\omega)\in S\times H(D)\right)=1.$$

Hence,

$$P_{\underline{\zeta},V}\left(S_V\times H(D)\right)=1.$$

□

Lemma 9. *Suppose that the set $L(\alpha, \mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Let $F : H^2(D_V, D) \to H(D_V)$ be a continuous operator such that, for each polynomial $p = p(s)$, the set $(F^{-1}\{p\}) \cap (S_V \times H(D))$ is non-empty. Then the support of the measure $P_{\underline{\zeta},V} F^{-1}$ is the whole of $H(D_V)$.*

Proof. Let g be an arbitrary element of $H(D_V)$, and G be its arbitrary open neighbourhood. Then, by Lemma 7, there exists a polynomial $p(s) \in G$. Therefore, the hypotheses of the lemma imply that the set $F^{-1}G$ is open and contains an element of the set $S_V \times H(D)$. Thus, in virtue of Lemma 8, $P_{\underline{\zeta},V}(F^{-1}G) > 0$. From this, it follows that

$$P_{\underline{\zeta},V} F^{-1}(G) = P_{\underline{\zeta},V}(F^{-1}G) > 0,$$

and the lemma is proved because g and G are arbitrary.

□

Lemma 10. *Suppose that the set $L(\alpha, \mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and the operator $F : H^2(D) \to H(D)$ satisfies the hypotheses of Theorem 6. Then the support of the measure $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ contains the closure of the set $H_{a_1,\dots,a_r}(D)$.*

Proof. Since $F(S \times H(D)) \supset H_{a_1,\dots,a_r}(D)$, for each element $g \in H_{a_1,\dots,a_r}(D)$, there exists an element $(g_1, g_2) \in S \times H(D))$ such that $F(g_1, g_2) = g$. If G is an arbitrary open neighborhood of g, then we have that the open set $F^{-1}G$ is an open neighborhood of a certain element of $S \times H(D)$. Therefore, in view of Lemma 5, $P_{\underline{\zeta}}(F^{-1}G) > 0$. Hence,

$$P_{\underline{\zeta}} F^{-1}(G) = P_{\underline{\zeta}}(F^{-1}G) > 0.$$

This shows that the element g lies in the support of the measure $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$. Since g is an arbitrary element of $H_{a_1,\dots,a_r}(D)$, we have that the support of $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ contains the set $H_{a_1,\dots,a_r}(D)$. However, the support is a closed set, therefore, it contains the closure of $H_{a_1,\dots,a_r}(D)$.

□

Lemma 11. *Suppose that the set $L(\alpha, \mathbb{P})$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, and $F : H^2(D) \to H(D)$ is a continuous operator. Then the support of $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ is the closure of $F(S \times H(D))$.*

Proof. Let g be an arbitrary element of $F(S \times H(D))$, and G is its any neighborhood. Then, by Lemma 5, $P_{\underline{\zeta}}(F^{-1}G) > 0$. Hence, $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}(G) > 0$. Moreover, by Lemma 5 again,

$$P_{\underline{\zeta}} F^{-1}\left(F(S \times H(D))\right) = P_{\underline{\zeta}}\left(S \times H(D)\right) = 1.$$

Therefore, the support of $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ is the closure of $F(S \times H(D))$.

□

3. Proof of universality theorems

We will apply the equivalent of the weak convergence of probability measures in terms of continuity sets. We remind that $A \in \mathcal{B}(X)$ is a continuity set of the probability measure P on $(X, \mathcal{B}(X))$ if $P(\partial A) = 0$, where ∂A is the boundary of A.

Lemma 12. *Let P_n, $n \in \mathbb{N}$, and P be probability measures on $(X, \mathcal{B}(X))$. Then P_n, as $n \to \infty$, converges weakly to P if and only if, for every continuity set A of P,*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

A proof of the lemma can be found in[1], Theorem 2.1.

Proof of Theorem 2. Put

$$G_\varepsilon = \left\{ (g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s\in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s\in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Then G_ε is an open set in $H^2(D)$. Moreover,

$$\begin{aligned}\partial G_\varepsilon = &\left\{ (g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s\in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s\in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| = \varepsilon \right\}\\ &\cup \left\{ (g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s\in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| = \varepsilon, \sup_{s\in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| < \varepsilon \right\}\\ &\cup \left\{ (g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s\in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| = \varepsilon, \sup_{s\in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| = \varepsilon \right\}.\end{aligned}$$

Therefore, if $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, then $\partial G_{\varepsilon_1} \cap \partial G_{\varepsilon_2} = \varnothing$. Hence, we have that $P_{\underline{\zeta}}(\partial G_\varepsilon) > 0$ for at most a countable set of values of $\varepsilon > 0$. This means that the set G_ε is a continuity set of $P_{\underline{\zeta}}$ for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. Therefore, by Lemmas 1 and 12,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas}\left\{ \tau \in [0;T] : \underline{\zeta}(s + i\tau) \in G_\varepsilon \right\} = P_{\underline{\zeta}}(G_\varepsilon),$$

or, by the definition of G_ε,

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas}\Big\{ \tau \in [0;T] : &\sup_{s\in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon,\\ &\sup_{s\in K_2} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \Big\} = P_{\underline{\zeta}}(G_\varepsilon)\end{aligned} \tag{5}$$

for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. By Lemma 7, there exist polynomials $p_1(s)$ and $p_2(s)$ such that

$$\sup_{s\in K_1} \left| f_1(s) - e^{p_1(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

and

$$\sup_{s\in K_2} |f_2(s) - p_2(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

In view of Lemma 5, $\left\{ e^{p_1(s)}, p_2(s) \right\}$ is and element of the support of the measure $P_{\underline{\zeta}}$. Therefore, putting

$$\hat{G}_\varepsilon = \left\{ (g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s\in K_1} |g_1(s) - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \sup_{s\in K_2} |g_2(s) - p_2(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

we obtain that $P_{\underline{\zeta}}(\hat{G}_\varepsilon) > 0$. Inequalities (6) and (7) show, that for $(g_1, g_2) \in \hat{G}_\varepsilon$,

$$\sup_{s\in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| < \varepsilon$$

and

$$\sup_{s\in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| < \varepsilon.$$

Thus, we have that $\hat{G}_\varepsilon \subset G_\varepsilon$. Hence, $P_{\underline{\zeta}}(G_\varepsilon) \geqslant P_{\underline{\zeta}}(\hat{G}_\varepsilon) > 0$. This together with (5) proves the theorem.

□

PROOF OF THEOREM 4. Define the set

$$G_{1,\varepsilon} = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Then we have that $G_{1,\varepsilon}$ is a continuity set of the measure $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.Hence, in view of Lemmas 3 and 12,

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0;T] : F\left(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha)\right) \in G_{1,\varepsilon}\right\}\\
=&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon\Big\}\\
=&P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(G_{1,\varepsilon})
\end{aligned} \tag{8}$$

for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. By Lemma 7, there exists a polynomial $p(s)$ such that

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Define

$$\hat{G}_{1,\varepsilon} = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

The polynomial $p(s)$, by Lemma 6, is an element of the support of the measure $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$. Hence, $P_{\underline{\zeta}}(\hat{G}_{1,\varepsilon}) > 0$. Obviously, for $g \in \hat{G}_{1,\varepsilon}$, by (9),

$$\sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon.$$

Therefore, $\hat{G}_{1,\varepsilon} \subset G_{1,\varepsilon}$, $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(G_{1,\varepsilon}) \geqslant P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(\hat{G}_{1,\varepsilon}) > 0$, and the theorem follows from (8).

□

PROOF OF THEOREM 5. We follow the proof of Theorem 4, and use Lemma 4 in place of Lemma 3, and Lemma 9 in place of Lemma 6.

□

PROOF OF THEOREM 6. The case $r = 1$. By Lemma 7, there exists a polynomial $p(s)$ such that

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

By hypotheses of the theorem, $f(s) \neq a_1$ on K. Therefore, in view of (10), $p(s) \neq a_1$ on K as well if ε is small enough. Thus, we can define a continuous branch of $\log(p(s) - a_1)$ which will be an analytic function in the interior of K. Using Lemma 7 once more, we find a polynomial $p_1(s)$ such that

$$\sup_{s\in K} |p(s) - a_1 - e^{p_1(s)})| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

Now we put $f_1(s) = e^{p_1(s)} + a_1$. Then $f_1(s) \in H(D)$ and $f_1(s) \neq a_1$. Therefore, by Lemma 10, $f_1(s)$ is an element of the support of the measure $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$. Define

$$\mathcal{G}_{1,\varepsilon} = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f_1(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Then $\mathcal{G}_{1,\varepsilon}$ is an open neighborhood of $f_1(s)$, thus, $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(\mathcal{G}_{1,\varepsilon}) > 0$. Now consider the set

$$\hat{\mathcal{G}}_{1,\varepsilon} = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Similarly as in the proof of the above theorems, we observe that $\mathcal{G}_{1,\varepsilon}$ is an continuity set of the measure $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. Therefore, taking into account Lemmas 3 and 12, we have that

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{ \tau \in [0;T] : F\left(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha)\right) \in \hat{\mathcal{G}}_{1,\varepsilon} \right\} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{ \tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon \Big\} = P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(\hat{\mathcal{G}}_{1,\varepsilon}). \end{aligned} \tag{12}$$

Clearly, by (10) and (11),

$$\sup_{s\in K} |f(s) - f_1(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Therefore, if $g \in \mathcal{G}_{1,\varepsilon}$, then $g \in \hat{\mathcal{G}}_{1,\varepsilon}$, i.e., $\mathcal{G}_{1,\varepsilon} \subset \hat{\mathcal{G}}_{1,\varepsilon}$. Since $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(\mathcal{G}_{1,\varepsilon}) > 0$, we have that $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(\hat{\mathcal{G}}_{1,\varepsilon}) > 0$. This inequality together with (12) proves the theorem in the case $r = 1$.

Now let $r \geqslant 2$. Define

$$\mathcal{G}_{2,\varepsilon} = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Since $f(s) \in H_{a_1,\dots,a_r}(D)$, we have by Lemma 10, that $f(s)$ is an element of the support of $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$. Moreover, $\mathcal{G}_{2,\varepsilon}$ is an open neighborhood of $f(s)$. Therefore,

$$P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(\mathcal{G}_{2,\varepsilon}) > 0. \tag{13}$$

On the other hand, $\mathcal{G}_{2,\varepsilon}$ is a continuity set of the measure $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. Therefore, in view of Lemmas 3 and 12, and (12)

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{ \tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \varepsilon \Big\} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{ \tau \in [0;T] : F\left(\underline{\zeta}(s+i\tau,\alpha)\right) \in \mathcal{G}_{2,\varepsilon} \right\} = P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(\mathcal{G}_{2,\varepsilon}) > 0. \end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 7. We repeat the proof of the case $r \geqslant 2$ of Theorem 6, and, in place of Lemma 10, we apply Lemma 11.

□

4. Conclusions

It was well known that the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ and Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$ with transcendental or rational parameter α are universal in the Voronin sense, i.e., their shifts $\zeta(s+i\tau)$ and $\zeta(s+i\tau,\alpha)$, $\tau \in \mathbb{R}$, approximate functions from wide classes. H. Mishou obtained a joint universality theorem for $\zeta(s)$ and $\zeta(s,\alpha)$. He proved that the set of shifts $(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau,\alpha))$ with transcendental α approximating a pair of given analytic functions has a positive lower density.

In the paper, it is observed that the set of the above shifts has a positive density for all but at most countably many values of $\varepsilon > 0$, where ε is accuracy of approximation.

Also, it is obtained that composite functions $F(\zeta(s), \zeta(s, \alpha))$ for some classes of operators F in the space of analytic functions $H(D)$ has a similar approximation property, namely, the set of shifts $F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha))$ approximating a given analytic function with accuracy $\varepsilon > 0$ has a positive density for all but at most countably many values of ε.

REFERENCES

1. Billingsley P., 1968, "Convergence of Probability Measures" , *New York: Willey.*

2. Javtokas A., Laurinčikas A., 2006, "Universality of the periodic Hurwitz zeta-function" , *Integr. Transf. Spec. Funct.* Vol. 17. P. 711–722.

3. Kačinskaitė R., Laurinčikas A., 2011, "The joint distribution of periodic zeta-functions" , *Studia Sci. Math. Hung.* Vol. 18. P. 257–279.

4. Laurinčikas A., 2007, "Voronin-type theorem for periodic Hurwitz zeta-functions" , *Sb. Math.* Vol. 198, No. 1-2. P. 231–242.

5. Laurinčikas A., 2008, "Joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions" , *Izv. Math.* Vol. 72, No. 1-2. P. 741–760.

6. Laurinčikas A., 2008, "The joint universality of Hurwitz zeta-functions" , *Šiauliai Math. Semin.* Vol. 3(11). P. 169–187.

7. Laurinčikas A., 2010, "Joint universality of zeta-functions with periodic coefficients" , *Izv. Math.* Vol. 74. P. 515–539.

8. Laurinčikas A., 2012, "Universality of composite functions" , in: *Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, K. Matsumoto et al (Eds), RIMS Kôkyûroku Bessatsu. Vol. B34. P. 191–204.

9. Laurinčikas A., 2012, "On joint universality of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions" , *J. Number Theory.* Vol. 132. P. 2842–2853.

10. Laurinčikas A., 2016, "Universality theorems for zeta-functions with periodic coefficients" , *Sib. Math. J.* Vol. 57, No. 2. P. 330–339.

11. Laurinčikas A., Garunkštis R., 2002, "The Lerch Zeta-Function" , *Dordrecht: Kluwer.*

12. Laurinčikas A., Matsumoto K., 2001, "The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms" , *Acta Arith.* Vol. 98. P. 345–359.

13. Laurinčikas A., Meška L., 2014, "Improvement of the universality inequality" , *Math. Notes.* Vol. 96, No. 5-6. P. 971–976.

14. Laurinčikas A., Meška L., 2016, "On the modification of the universality of the Hurwitz zeta-function" , *Nonlinear Analysis: Modelling and Control.* Vol. 21, No. 4. P. 564–576.

15. Laurinčikas A., Šiaučiūnas D., 2006, "Remarks on the universality of the periodic zeta-function" , *Math. Notes.* Vol. 80, No. 3-4. P. 532–538.

16. Matsumoto K., 2015, "A survey on the theory of universality for zeta and L-functions", in: *Series on Number Theory and Its Applications. Number Theory: Plowing and Starring Through High Wave Forms*, Proc. of the 7th China-Japan Seminar, Fukuoka, Japan, 2013, M. Kaneko ed al (Eds). Vol. 11. P. 95–144.

17. Mergelyan S.N., 1952, "Uniform approximation to functions of a complex variable", *Uspekhi Mat. Nauk* Vol. 7. P. 31–122. (In Russian).

18. Meška L., 2014, "A modification of the universality inequality", *Šiauliai Math. Semin.* Vol. 9(17). P. 71–81.

19. Mishou H., 2007, "The joint value distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions", *Lith. Math. J.* Vol. 47. P. 32–47.

20. Steuding J., 2007, "Value-Distribution of L-functions", Lecture Notes in Math. 1877, *Berlin: Springer*.

21. Voronin S.M., 1975, "A theorem on the "universality"of the Riemann zeta-function", *Math. USSR Izv.* Vol. 9. P. 443–453.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: Willey, 1968.

2. Javtokas A., Laurinčikas A. Universality of the periodic Hurwitz zeta-function // Integr. Transf. Spec. Funct. 2006. Vol. 17. P. 711–722.

3. Kačinskaitė R., Laurinčikas A. The joint distribution of periodic zeta-functions // Studia Sci. Math. Hung. 2011. Vol. 18. P. 257–279.

4. Лауринчикас А.П. Аналог теоремы Воронина для периодических дзета-функций Гурвица // Матем. Сб. 2007. Т. 198, №. 2. С. 91–102.

5. Лауринчикас А. Совместная универсальность периодических дзета-функций Гурвица // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72, №. 4. С. 121–140.

6. Laurinčikas A. The joint universality of Hurwitz zeta-functions // Šiauliai Math. Semin. 2008. Vol. 3(11). P. 169–187.

7. Лауринчикас А. Совместная универсальность дзета- функций с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, №. 3. С. 79–102.

8. Laurinčikas A. Universality of composite functions // Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, K. Matsumoto et al (Eds), RIMS Kôkyûroku Bessatsu. 2012. Vol. B34. P. 191–204.

9. Laurinčikas A. On joint universality of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions // J. Number Theory. 2012. Vol. 132. P. 2842–2853.

10. Лауринчикас А. Расширение универсальности дзета функций с периодическими коэффициентами // Сиб. матем. ж. 2016. Т. 57, №. 2. С. 420–431.

11. Laurinčikas A., Garunkštis R. The Lerch Zeta-Function. Dordrecht: Kluwer, 2002.

12. Laurinčikas A., Matsumoto K. The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms // Acta Arith. 2001. Vol. 98. P. 345–359.

13. Лауринчикас А., Мешка Л. Уточнение неравенства универсальности // Матем. заметки. 2014. Т. 96, №. 6. С. 905–910.

14. Laurinčikas A., Meška L. On the modification of the universality of the Hurwitz zeta-function // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2016. Vol. 21, No. 4. P. 564–576.

15. Лауринчикас А.П., Шяучюнас Д. Замечания об универсальности периодической дзета-функции // Матем. заметки. 2006. Т. 80, №. 4. С. 561–568.

16. Matsumoto K. A survey on the theory of universality for zeta and L-functions // in: Series on Number Theory and Its Applications. Number Theory: Plowing and Starring Through High Wave Forms, Proc. of the 7th China-Japan Seminar, Fukuoka, Japan, 2013. M. Kaneko ed al (Eds). 2015. Vol. 11. P. 95–144.

17. Мергелян С.Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // УМН. 1952. Т. 7, №. 2. С. 31–122

18. Meška L. A modification of the universality inequality // Šiauliai Math. Semin. 2014. Vol. 9(17). P. 71–81.

19. Mishou H. The joint value distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions // Lith. Math. J. 2007. Vol. 47. P. 32–47.

20. Steuding J. Value-Distribution of L-functions, Lecture Notes in Math. 1877. Berlin: Springer, 2007.

21. Воронин С. М. Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. С. 475–486.

Vilnius University.
Получено 27.06.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 519.40

РЕГУЛЯРНЫЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЧАСТИЦ. I: СИСТЕМЫ БЕЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А. А. Лыков, В. А. Малышев, В. Н. Чубариков (г. Москва)

Аннотация

Обычно в математике и физике рассматриваются системы точечных частиц либо конечные либо счетные. В статье вводится новый формальный математический обьект. Именно, мы определяем регулярные системы континуума точечных частиц (с континуальным числом частиц). В начальный момент каждая частица характеризуется парой: (начальная координата, начальная скорость) в R^{2d}. При этом все начальные координаты различны и заполняют некоторую область в R^d. Каждая из частиц начинает двигаться согласно обычной ньютоновской динамике под влиянием некоторой внешней силы, но без взаимодействия друг с другом. Если внешняя сила ограничена, то траектории любых двух частиц в фазовом пространстве не пересекаются. Точнее говоря, в любой заданный момент времени у любых двух частиц либо координаты либо скорости различны. Система частиц называется регулярной, если столкновений частиц нет и в координатном пространстве.

Условие регулярности необходимо для того, чтобы ключевое понятие скорости частицы в заданный момент и находящейся в заданной точке пространства было единственным образом определена. И тогда для нее классическое уравнение Эйлера для поля скоростей имеет четкий смысл. Хотя континуум частиц это фактически определение сплошной среды, но важнейшее понятие регулярности, кажется, не было исследовано в математической литературе.

Обнаружилось, что кажущаяся простота объекта (отсутствие взаимодействия) обманчива. И даже для простых внешних сил мы не смогли найти простых необходимых и достаточных условий регулярности. Однако, открылся богатый запас примеров, как в одномерном так и в многомерном случае, для которых мы и получаем условия регулярности на разных временных интервалах. В заключение мы формулируем множество задач для регулярных систем с взаимодействием.

Ключевые слова: динамика точечных частиц, сплошная среда, уравнение Эйлера, отсутствие столкновений.

Библиография: 12 названий.

REGULAR CONTINUUM SYSTEMS OF POINT PARTICLES. I: SYSTEMS WITHOUT INTERACTION

A. A. Lykov, V. A. Malyshev, V. N. Chubarikov (Moscow)

Abstract

Normally in mathematics and physics only point particle systems, which are either finite or countable, are studied. We introduce new formal mathematical object called regular continuum system of point particles (with continuum number of particles). Initially each particle is characterized by the pair: (initial coordinate, initial velocity) in R^{2d}. Moreover, all initial coordinates are different and fill up some domain in R^d. Each particle moves via normal newtonian dynamics under influence of sone external force, but there is no interaction between particles. If the external force is bounded then trajectories of any two particles in the phase space do not intersect. More exactly, at any time moment any two particles have either different coordinates or different velocities. The system is called regular if there are no particle collisions in the coordinate space.

The regularity condition is necessary for the velocity of the particle, situated at a given time at a given space point, were uniquely defined. Then the classical Euler equation for the field of velocities has rigorous meaning. Though the continuum of particles is in fact a continuum medium, the crucial notion of regularity was not studied in mathematical literature.

It appeared that the seeming simplicity of the object (absence of interaction) is delusive. Even for simple external forces we could not find simple necessary and sufficient regularity conditions. However, we found a rich list of examples, one dimensional and many dimensional, where we get regularity conditions on different time intervals. In conclusion we formulate many perspective problems for regular systems with interaction.

Keywords: point particle dynamics, continuum media, Euler equation, absence of collisions.

Bibliography: 12 titles.

1. Введение

Дадим сначала точное определение объекта, который мы будем здесь изучать.

Регулярная континуальная система $\mathbf{M}_T$ точечных частиц отождествляется с набором подмножеств $\Lambda_t \in R^d$ в моменты времени $t \in [0,T), 0 < T \leq \infty$. При этом Λ_0 предполагается замыканием открытой области в R^d с кусочно гладкой границей $\partial\Lambda_0$. Каждая точка этой области рассматривается как "материальная частица" бесконечно малой массы. Динамика определяется системой взаимно-однозначных отображений (диффеоморфизмов) $U_t = U_{0,t} : \Lambda_0 \to \Lambda_t, t \in [0, \mathrm{T})$, причем эти отображения предполагаются достаточно гладкими по x и кусочно-гладкими по t. При этом $U_0(x)$ является тождественным отображением. Таким образом, каждая точка (частица) $x \in \Lambda_0$ описывает свою траекторию в R^d: $y(t,x) = U_t(x)$, где $y(0,x) = x$ - начальное положение этой частицы. Из определения следует, что частицы никогда не сталкиваются, то есть $y(t,x) \neq y(t,x')$ для всех t и $x \neq x'$.

Мы назовем $\mathbf{M}_T$ системой без взаимодействия, если $y(t,x)$ определяются решениями уравнений

$$\frac{d^2y(t,x)}{dt^2} = F_x(y(t,x)), \quad y(0,x) = x, \ \frac{dy(0,x)}{dt} = v(x) \tag{1}$$

для некоторых двух данных функций: начальной скорости $v(x)$ и внешних сил $F_x(y)$, возможно разных для разных частиц. Далее мы считаем, что либо $F_x(y) = F(y)$ не зависит от x либо $F_x(y) = \frac{F(y)}{m(x)}$ для некоторой функции $F(y)$ и $m(x) > 0$, см. ниже раздел 4. Всегда предполагается, что $v(x)$ и $m(x)$ достаточно гладко зависят от $x \in \Lambda_0$, а $F(y)$ гладкая или кусочно гладкая по y. При этом, всегда предполагается, что каждое уравнение (1) имеет единственное решение на всем рассматриваемом интервале $[0,T)$. Если специально не оговорено, считается что $m(x) = 1$.

Конечно, понимание сплошной среды как состоящей из континуума частиц бесконечно малой массы хорошо известно математикам, см. например [7], стр. 56. Цель данной статьи — подчеркнуть важность понятия регулярности и дать примеры классов таких систем. Если свойства гладкости $y(t,x)$ следуют из общих теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений, то главная трудность — проверка отсутствия столкновений (подчеркнем, что мы рассматриваем траектории не в фазовом пространстве $R^d \times R^d$, а только их проекции на пространство R^d).

Слово < <регулярная> > подчеркивает, что возможны более общие определения континуальных систем.

2. Основные результаты

2.1. Одномерные системы

Гладкая сила

Заметим сначала, что если $v(x)$ и $F(y)$ неубывающие функции¸то столкновений не будет, поскольку частица не сможет догнать частицы, находящиеся в момент $t = 0$ правее ее.

Здесь $\Lambda_0 = [0, 1]$, а $F(y), y \in [-\infty, \infty)$, предполагается гладкой. Определим потенциальную энергию в произвольной точке y и полную энергию частицы в момент t, вышедшей из точки x, соответственно уравнению (1),

$$U(y) = -\int_0^y F(z)dz, H_t(x) = \frac{u^2(t, y(t, x)))}{2} + U(y(t, x))$$

где через

$$u(t, x) = \frac{dy(t, x)}{dt}$$

обозначена скорость частицы, оказавшейся в момент t в точке y.

Мы докажем сначала более простое, но наглядное утверждение, а потом технически более сложное. Обозначим $T(x, y)$ момент времени, когда точка $x \in [0, 1]$ впервые попадёт в точку y.

Сделаем следующие предположения:

1) $v(x) > 0$,

2) для всех $x \in [0, 1]$ и всех $y \geq x$ функция $H_0(x) - U(y) > 0$. В частности¸ так будет если $F(y)$ положительна при всех $y \geqslant 0$ (при этом все частицы движутся в одну сторону).

Теорема 1. *В этих предположениях следующие условия эквивалентны:*

1) на всем интервале $[0, \infty)$ не будет столкновений частиц;

2) для всех $y > 0$ функция $T(x, y)$ строго убывает по x на отрезке $x \in [0, \min\{y, 1\}]$:

3) при $x \in [0, \min\{y, 1\}]$

$$\frac{1}{v(x)} + \frac{v(x)v_x'(x) - F(x)}{2\sqrt{2}} \int_x^y \frac{dz}{((H_0(x) - U(z))^{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

причем равенство нулю возможно лишь на дискретном множестве точек.

Теорема 2. *Пусть теперь $v(x) \geq 0, m(x), F(y) > 0 \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда в система не будет столкновений в том и только в том случае, когда для всех $x \in [0, \min\{y, 1\}]$ и $y > x$ выполняется неравенство*

$$H_0'(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x) - U(y))}}\frac{1}{F(y)} + \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2(H_0(x) - U(z))}}\frac{F'(z)}{F^2(z)}dz\right) < \tag{2}$$

$$< \frac{v'(x)\sqrt{m(x)}}{F(x)} + \frac{v(x)m'(x)}{2F(x)\sqrt{m(x)}}$$

В частном случае, когда $v(x) = 0,\ m(x) = 1$ для всех $x \in [0, 1]$ неравенство (2) равносильно следующему:

$$\frac{1}{\sqrt{U(x) - U(y)}} + F(y)\int_x^y \frac{1}{\sqrt{U(x) - U(z)}}\frac{F'(z)}{F^2(z)}dz > 0$$

Отметим, что аналогичное утверждение верно, если функции $F(y), v(x), m(x)$ являются кусочно гладкими.

Кусочно-постоянная сила

Теорема 3. *1) (одна ступенька) Пусть для некоторых $F_1 > 0, F_2 \geq 0$ и $A > 1$*

$$F(x) = F_1, 0 \leq x < A, \;\; F(x) = F_2, x \geq A$$

Если $v(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, то столкновений не будет если и только если $F_2 \geq F_1$.

Если же $v(x) \geq 0$ для всех $x \in [0,1]$, то столкновений не будет, если и только если для всех $x \in [0,1]$ выполняются одновременно два неравенства:

$$-2(A-x)v'(x) < v(x) + \sqrt{D(x)}, \tag{3}$$

$$v'(x)((F_1 - F_2)v(x) + F_2\sqrt{D(x)}) \geqslant F_1(F_1 - F_2), \tag{4}$$

где

$$D(x) = v^2(x) + 2F_1(A - x)$$

2) (две ступеньки) пусть $v(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, а для некоторых $0 < F_2 < F_1, F_2 < F_3$ и $1 < A < B$

$$F(x) = F_1, 0 \leq x < A, \;\; F(x) = F_2, x \in [A, B), \;\; F(x) = F_3, x \geq B$$

Тогда столкновений не будет тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:

$$B - A \leqslant \alpha(A - 1), \quad \alpha = \frac{F_1(F_3 - F_1)\,(F_3(F_1 - F_2) + F_1(F_3 - F_2))}{(F_1 - F_2)^2 F_3^2}, \tag{5}$$

Отметим необходимое условие отсутствия столкновений: $F_3 > F_1$, вытекающее из сформулированного утверждения. Также заметим, что множество тех $B > A > 1$, для которых имеет место отсутствия столкновений, не пусто при условии $F_3 > F_1$.

Неожиданным следствием второго утверждения пункта 1) теоремы 3 для случая $F_2 = 0$ оказывается следующее простое достаточное (но не необходимое) условие отсутствия столкновений:

$$v'(x) \geqslant \frac{F_1}{\sqrt{F_1 x + v^2(0)}}.$$

2.2. Многомерные системы

Многомерный аналог монотонности силы

Напомним сначала, что в одномерном случае, если сила, действующая на частицу, не убывает и начальные скорости не убывают, то столкновений не будет. Сформулируем обобщение данного утверждения для многомерного случая.

Теорема 4. *Пусть сила $F(y)$ такова, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство:*

$$(F(y) - F(x), y - x) \geqslant 0.$$

Дополнительно предположим, что для всех $x_1, x_2 \in \Lambda$ выполненно неравенство:

$$(v(x_2) - v(x_1), x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

Тогда столкновений не будет.

Линейная сила

Предположим, что сила F является линейной, т.е.

$$F(y) = Ay + b,$$

для некоторой $(d \times d)$-матрицы A и $b \in \mathbb{R}^d$.

Далее мы будем для простоты предполагать, что все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ матрицы A вещественны и существует базис пространства $\mathbb{R}^d$ составленный из собственных векторов матрицы A, причём, $Au_i = \lambda_i u_i, \; i = 1, \ldots, d$.

Теорема 5. *Предположим, что все собственные числа матрицы A неотрицательны и, что для всех $x_1, x_2 \in \Lambda$ выполняется неравенство:*

$$(v(x_2) - v(x_1), x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

тогда столкновений не будет.

Кусочно-постоянная сила.

Lemma 1. *Пусть $F(y) = F$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$ для некоторого постоянного вектора $F \in \mathbb{R}^d$. Частицы x_1, x_2 сталкиваются тогда и только тогда, когда векторы $R(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ и $V(x_1, x_2) = v(x_2) - v(x_1)$ параллельны и выполнено неравенство:*

$$(R(x_1, x_2), V(x_1, x_2)) < 0,$$

где $(,)$ обозначает стандартное евклидово произведение в $\mathbb{R}^d$.

Далее, предположим, что сила F определяется следующим условием:

$$F(y) = \begin{cases} F_1, & y \in \Pi_1 = \{y = (y^1, \ldots, y^d) \in \mathbb{R}^d : \; y^d < A\} \\ F_2, & y \in \Pi_2 = \{y = (y^1, \ldots, y^d) \in \mathbb{R}^d : \; y^d \geqslant A\} \end{cases},$$

где $F_k = (F_k^1, F_k^2, \ldots, F_k^d) \in \mathbb{R}^d, \; k = 1, 2$ постоянные вектора и параметр $A > 0$. Для определённости, будем считать, что $F_1^d > 0$. Будем считать, что $\Lambda \subset \Pi_1$.

Естественным и в какой-то мере неожиданным обобщением теоремы (3) является следующее утверждение.

Теорема 6. *Предположим, что $v(x) = 0$ для всех $x \in \Lambda$ и $F_2^d \geqslant 0$. Тогда столкновений не будет в том и только в том случае, если $F_1^d \leqslant F_2^d$.*

Заметим, что условие $F_2^d \geqslant 0$ необходимо для того, чтобы частица после попадания в множество Π_2 не возвращалась в множество Π_1. Если это условие не будет выполнятся, то возможны осцилляции частицы между множествами Π_1, Π_2 и анализ осложнится.

Центральное поле на плоскости

Рассмотрим случай, когда $d = 2$, и кроме евклидовых координат $x = (x^1, x^2)$ будем также использовать полярные координаты (r, ϕ) на плоскости:

$$x^1 = r \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \phi.$$

Пусть Λ_0 ограничена и не содержит начала координат, а значит она содержится в некотором кольце

$$O(R_1, R_2) = \{x : 0 < R_1 < r < R_2 < \infty\}$$

Силу будем предполагать центральной, то есть направленной по радиусу и равной

$$F(\mathrm{r}) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}, \ y \in \mathbb{R}^2,$$

где U — гладкая скалярная функция на $(0, \infty)$, потенциальная энергия поля.

$|\cdot|$ обозначает евклидову норму на плоскости

Будем обозначать $r(t,x),\ \phi(t,x)$ норму и угол точки $y(t,x)$ в момент времени t. Заметим, что траектория

$$y(t,x) = (r(t,x), \phi(t,x)).$$

однозначно определяется полем начальных скоростей $v(0,x),\ x \in \Lambda$, или функциями

$$\frac{dr(0,x)}{dt}, \ \frac{d\phi(0,x)}{dt}, \ x \in \Lambda$$

Сделаем следующие предположения:

1. Для всех точек $x \in \Lambda$

$$\frac{dr(0,x)}{dt} = g(|x|) > 0. \ \frac{d\phi(0,x)}{dt} = h(|x|)$$

   зависят лишь от r и первая из них положительна.

2. Для всех $r_2 \geqslant r_1 > R_1$ справедливо неравенство:

$$-\frac{dU(r_2)}{dr_2} + \frac{M^2(r_1)}{r_2^3} \geqslant 0,$$

   где $M(r) = r^2 h(r)$ — кинетический момент.

Как будет видно далее, эти условия гарантируют, что точка x монотонно уходит в бесконечность, т.е. $r(t,x)$ монотонно увеличивается с ростом t.

Теорема 7. *При сделанных предположениях, для того, чтобы отсутствовали столкновения достаточно, чтобы для всех $R_1 < r_1 < R_2$ и $r_2 > r_1$ выполнялось неравенство:*

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr_1} \frac{1}{\sqrt{2(E_0(r_1) - V(z,r_1))}} dz < \frac{1}{g(r_1)},$$

где

$$E_0(r) = \frac{1}{2}g^2(r) + U(r) + \frac{1}{2}r^2h^2(r), \quad V(z,r) = U(z) + \frac{r^4h^2(r)}{2z^2}.$$

Заметим, что динамика области Λ_0 будет выглядеть следующим образом. Все точки пересечения Λ_0 с окружностью γ_r радиуса $r > 0$ в момент времени t будут лежать на окружности некоторого радиуса $R(t,r)$, повернутые вокруг начала координат на одинаковый угол $\phi(t,r)$. При этом $R(t,r)$ и $\phi(t,r)$ зависят только от r и t.

Условие 2) можно ослабить, а именно, предположив, что $g(|x|) \geqslant 0$. Тогда доказательство нужно изменить по тому же плану, что и в теореме 2.

3. Доказательства

3.1. Одномерные системы

Гладкая сила — теорема 1

Эквивалентность 1) и 2) очевидна — это означает что никакая частица не догонит никакую частицу, расположенную в момент $t = 0$ правее. Для доказательства 3) заматим, что из закона сохранения полной энергии $H_t(x) = H_0(x)$ следует явная формула

$$T(x,y) = \int_x^y \frac{dz}{\sqrt{2(H_0(x) - U(z))}} \tag{6}$$

Заметим, что в наших предположениях функция U невозрастающая функция x и поэтому подкоренные выражения в равенстве (6) всегда неотрицательны.Остается вычислить производную

$$\frac{dT(x,y)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x) - U(x))}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_x^y \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{((H_0(x) - U(z))^{\frac{1}{2}}} \right) dz =$$

$$= -v^{-1}(x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_x^y \frac{(vv'_x - F(x))dz}{((H_0(x) - U(z))^{\frac{3}{2}}} \leq 0 \tag{7}$$

Гладкая сила — Теорема 2

Проинтегрируем по частям в формуле, для $T(x,y)$:

$$\sqrt{2}T(x,y) = -\int_x^y \frac{2}{U'(z)} \; d\sqrt{H_0(x) - U(z)} =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{H_0(x) - U(y)}}{U'(y)} + \frac{\sqrt{H_0(x) - U(x)}}{U'(x)} \right) + 2\int_x^y \sqrt{H_0(x) - U(z)} \left(\frac{1}{U'(z)} \right)' dz =$$

$$= 2h(x,y) + 2g(x,y),$$

где

$$h(x,y) = -\frac{\sqrt{H_0(x) - U(y)}}{U'(y)} + \frac{\sqrt{H_0(x) - U(x)}}{U'(x)} = \frac{\sqrt{H_0(x) - U(y)}}{F(y)} - \frac{v(x)\sqrt{m(x)}}{\sqrt{2}F(x)}$$

$$g(x,y) = \int_x^y \sqrt{H_0(x) - U(z)} \left(\frac{1}{U'(z)} \right)' dz = \int_x^y \sqrt{H_0(x) - U(z)} \frac{F'(z)}{F^2(z)} dz$$

Производная первого слагаемого равна:

$$\frac{d}{dx}h(x,y) = H'_0(x) \frac{1}{2\sqrt{H_0(x) - U(y)}} \frac{1}{F(y)} - \frac{v'(x)\sqrt{m(x)}}{\sqrt{2}F(x)} + \frac{v(x)F'(x)\sqrt{m(x)}}{\sqrt{2}F^2(x)} - \frac{v(x)m'(x)}{2\sqrt{2}F(x)\sqrt{m(x)}}$$

Воспользовавшись известной формулой:

$$\frac{d}{dx} \int_x^y f(x,z)dz = -f(x,x) + \int_x^y \frac{\partial}{\partial x} f(x,z)dz.$$

получим

$$\frac{d}{dx}g(x,y) = -\sqrt{H_0(x) - U(x)} \frac{F'(x)}{F^2(x)} + \frac{1}{2} H'_0(x) \int_x^y \frac{1}{\sqrt{H_0(x) - U(z)}} \frac{F'(z)}{F^2(z)} dz.$$

Что и дает доказательство

$$\frac{d}{dx}T(x,y)=\sqrt{2}\frac{d}{dx}h(x,y)+\sqrt{2}\frac{d}{dx}g(x,y)=$$

$$=H_0'(x)\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(y))}}\frac{1}{F(y)}-\frac{v'(x)\sqrt{m(x)}}{F(x)}-\frac{v(x)m'(x)}{2F(x)\sqrt{m(x)}}+$$
$$+H_0'(x)\int_x^y\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(z))}}\frac{F'(z)}{F^2(z)}dz$$

Кусочно-постоянная сила — теорема 3

Данное утверждние можно доказать, опираясь на теорему 2 (вернее на её аналог для кусочно гладкого случая силы $F(x)$). Но полезнее более простое доказательство.

Докажем первое утверждение теоремы.

Очевидно, что на отрезке $[0,\infty)$ не будет столкновений в том и только в том случае, если $u(T(0,A),x)$ является неубывающей функцией по $x\in[0,1]$. Имеем очевидные равенства:

$$u(T(0,A),x)=u(T(x,A),x)+F_2(T(0,A)-T(x,A)),\qquad u(T(x,A),x)=F_1T(x,A).$$

$$\frac{du(T(0,A),x)}{dx}=F_1\frac{dT(x,A)}{dx}-F_2\frac{dT(x,A)}{dx}=(F_1-F_2)\frac{dT(x,A)}{dx}.$$

Ясно, что $\frac{dT(x,A)}{dx}<0$ для всех $x\in[0,1]$, откуда и следует утверждение.

Докажем второе утверждение теоремы.

Очевидно, что на отрезке $[0,\infty)$ не будет столкновений в том и только в том случае, если $u(T(0,A),x)$ является неубывающей функцией по $x\in[0,1]$ и $T(x,A)$ является убывающей функцией по x. Имеем очевидные равенства:

$$u(T(0,A),x)=u(T(x,A),x)+F_2(T(0,A)-T(x,A)),\qquad u(T(x,A),x)=v(x)+F_1T(x,A).$$

$$\frac{du(T(0,A),x)}{dx}=v'(x)+F_1\frac{dT(x,A)}{dx}-F_2\frac{dT(x,A)}{dx}=v'(x)+(F_1-F_2)\frac{dT(x,A)}{dx}.\tag{8}$$

Выясним, при каком условии функция $T(x,A)$ убывает по x. Из уравнения

$$x+v(x)t+\frac{F_1}{2}t^2=A$$

получаем

$$T(x,A)=\frac{-v(x)+\sqrt{D(x)}}{F_1},\ D(x)=v^2(x)+2F_1(A-x).\tag{9}$$

Отсюда

$$\frac{dT(x,A)}{dx}=\frac{-v'(x)+\frac{v(x)v'(x)-F_1}{\sqrt{D(x)}}}{F_1}=v'(x)\frac{v(x)-\sqrt{D(x)}}{F_1\sqrt{D(x)}}-\frac{1}{\sqrt{D(x)}}.$$

Поэтому, условие $\frac{dT(x,A)}{dx}<0$ равносильно неравенству:

$$(v(x)-\sqrt{D(x)})v'(x)<F_1.$$

Домножая последнее неравенство на $v(x)+\sqrt{D(x)}$, из (9) получаем эквивалентное неравенство:

$$-2(A-x)v'(x)<v(x)+\sqrt{D(x)}.$$

Далее, подставим полученную формулу для $\frac{dT(x,A)}{dx}$ в формулу (8):

$$\frac{du(T(0,A),x)}{dx} = v'(x)\left(1 + (F_1 - F_2)\frac{v(x) - \sqrt{D(x)}}{F_1\sqrt{D(x)}}\right) - \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{D(x)}}.$$

Поэтому условие $\frac{dv(T(0,A),x)}{dx} \geqslant 0$ равносильно неравенству:

$$v'(x)((F_1 - F_2)v(x) + F_2\sqrt{D(x)}) \geqslant F_1(F_1 - F_2).$$

Тем самым утверждение полностью доказано.

Докажем третье утверждение теоремы.

Прежде чем доказывать теорему, мы бы хотели неформально объяснить почему возможна ситуация, когда две бесконечно близкие частицы $x_1 = x, x_2 = x + dx$ не столкнутся после того, как траектория левой точки x_1 достигнет A. В предположении, что $F_2 < F_1$, расстояние между точками будет сокращаться линейно с течением времени после момента $T_1 = T(x_1, A)$ со скоростью $w = u(T_1, x_1) - u(T_1, x_2)$. Так как точки бесконечно близки, то $w = a\ dx$ для некоторой константы $a = a(x_1, x_2) > 0$. С другой стороны, $D = y(T_1, x_1) - y(T_1, x_2) = b\ dx$ — расстояние между точками в момент T_1, для некоторой константы $b = b(x_1, x_2) > 0$. Поэтому, время необходимое левой частице для того, чтобы догнать правую равно $t = t(x_1, x_2) = D/w = \frac{b}{a}$. Таким образом, это время уже не является бесконечно малой величиной. Оказывается, что это время отделено от нуля некоторой константой t^* для всех $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, поэтому нам достаточно выбрать длину интервала $B - A$, где действует сила F_2, таким образом, чтобы любая точка из $[0, 1]$ проходила отрезок $[A, B]$ за время меньшее t^*. Далее остаётся выбрать силу F_3 достаточно большой.

Пусть $T = T(0, B)$. Очевидно, что на отрезке $[0, +\infty]$ не будет столкновений в том и только в том случае, если $u(T, x)$ является неубывающей функцией по $x \in [0, 1]$. Имеем очевидные равенства:

$$u(T, x) = u(T(x, B), x) + F_3(T - T(x, B)),$$

$$u(T(x, B), x) = u(T(x, A), x) + F_2(T(x, B) - T(x, A)), \quad u(T(x, A), x) = F_1T(x, A).$$

Откуда получаем:

$$u(T, x) = F_1T(x, A) + F_2(T(x, B) - T(x, A)) + F_3(T - T(x, B)).$$

$$\frac{du(T,x)}{dx} = F_1\frac{dT(x,A)}{dx} + F_2(\frac{dT(x,B)}{dx} - \frac{dT(x,A)}{dx}) - F_3\frac{dT(x,B)}{dx} =$$
$$= (F_1 - F_2)\frac{dT(x,A)}{dx} - (F_3 - F_2)\frac{dT(x,B)}{dx}.$$

Вычислим время $T(x, B)$. Ясно, что

$$y(T(x, A) + s, x) = A + T(x, A)F_1s + \frac{s^2}{2}F_2,$$

при $0 \leqslant s \leqslant T(x, B) - T(x, A)$. Поэтому из условия $y(x, T(x, A) + s) = B$ находим, что

$$s = s(x) = \frac{-T(x, A)F_1 + \sqrt{D(x)}}{F_2},\ D(x) = T^2(x, A)F_1^2 + 2(B - A)F_2.$$

Значит,

$$T(x, B) = T(x, A) + s(x) = \frac{-T(x, A)(F_1 - F_2) + \sqrt{D(x)}}{F_2}.$$

Вычислим производную:

$$\frac{dT(x,B)}{dx} = \frac{-\frac{dT(x,A)}{dx}(F_1 - F_2) + \frac{T(x,A)\frac{dT(x,A)}{dx}F_1^2}{\sqrt{D(x)}}}{F_2} = -\frac{dT(x,A)}{dx}\frac{(F_1 - F_2) - \frac{T(x,A)F_1^2}{\sqrt{D(x)}}}{F_2}.$$

Откуда получаем:

$$\frac{du(T,x)}{dx} = \frac{dT(x,A)}{dx}\left((F_1 - F_2) + (F_3 - F_2)\frac{(F_1 - F_2) - \frac{T(x,A)F_1^2}{\sqrt{D(x)}}}{F_2}\right) =$$

$$= \frac{dT(x,A)}{dx}\left(\frac{(F_1 - F_2)F_3}{F_2} - (F_3 - F_2)\frac{T(x,A)F_1^2}{F_2\sqrt{D(x)}}\right)$$

Так как, $\frac{dT(x,A)}{dx} < 0$, то условие $\frac{du(T,x)}{dx} \geqslant 0$ равносильно выполнению неравенству:

$$\frac{dT(x,A)}{dx} \geqslant \beta\sqrt{D(x)},\ \ \beta = \frac{(F_1 - F_2)F_3}{(F_3 - F_2)F_1^2}.$$

Возводя в квадрат последнее неравенство и преобразуя слагаемые получаем эквивалентное неравенство:

$$T(x,A) \geqslant \frac{2(B-A)F_2\beta^2}{1-\beta^2 F_1^2}. \tag{10}$$

Последнее условие должно выполнятся для всех $x \in [0,1]$. Но $T(x,A) \geqslant T(1,A)$ для всех $x \in [0,1]$. Следовательно, (10) равносильно неравенству:

$$T(1,A) \geqslant \frac{2(B-A)F_2\beta^2}{1-\beta^2 F_1^2}.$$

Подставляя выражение для $T(1,A)$ в последнее неравенство, получаем:

$$(A-1)\frac{(1-\beta^2 F_1^2)}{F_1F_2\beta^2} \geqslant B - A.$$

Преобразуем множитель с силами в последнем неравенстве:

$$\alpha = \frac{(1-\beta^2 F_1^2)}{F_1F_2\beta^2} = \frac{1}{F_1F_2}\left(\frac{1}{\beta} - F_1\right)\left(\frac{1}{\beta} + F_1\right) =$$

$$= \frac{F_1^2}{F_1F_2(F_1-F_2)^2F_3^2}\left((F_3 - F_2)F_1 - (F_1 - F_2)F_3\right)\left((F_3 - F_2)F_1 + (F_1 - F_2)F_3\right) =$$

$$= \frac{F_1}{(F_1-F_2)^2F_3^2}\left(F_3 - F_1\right)\left((F_3 - F_2)F_1 + (F_1 - F_2)F_3\right)$$

Что и завершает доказательство.

3.2. Многомерные системы

Доказатальство теоремы 4

Для двух различных точек $x_1, x_2 \in \Lambda$ рассмотрим функцию:

$$r(t) = ||y(t,x_2) - y(t,x_1)||^2 = (y(t,x_2) - y(t,x_1), y(t,x_2) - y(t,x_1)).$$

Дифференцируя, имеем

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = 2(F(y(t,x_2)) - F(y(t,x_1)), y(t,x_2) - y(t,x_1)) + 2||v(t,x_2) - v(t,x_1)||^2.$$

В силу сделанных предположений на силу F заключаем, что

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} \geqslant 0.$$

С другой стороны, для начальных условий имеем:

$$r(0) = ||x_2 - x_1||^2 > 0, \frac{dr}{dt}(0) = 2(v(x_2) - v(x_1), x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

Из этих трех неравенств и следует утверждение.

Линейная сила — доказательство теоремы 5

Докажем, что для всех x квадратичная форма

$$Q(x) = (Ax, x) \geq 0 \tag{11}$$

Так как любой $x \in \mathbb{R}^d$ можно единственным образом представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i u_i,\ x_i \in \mathbb{R}.$$

то можно определить симметрическую матрицу $S = (s_{i,j})$ как

$$s_{i,j} = \frac{1}{2}(\lambda_i(u_i, u_j) + \lambda_j(u_j, u_i)) = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)(u_i, u_j).$$

Так как

$$Q(x) = \sum_{i,j} \lambda_i(u_i, u_j) x_i x_j = (Sx, x),$$

то можно записать

$$S = \Lambda U + U\Lambda,$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ — диагональная матрица, $U = ((u_i, u_j))$. Следовательно матрица S неотрицательно определена, откуда получаем (11). Далее, воспользуемся теоремой 4 и получим окончательное утверждение.

Кусочно-постоянная сила. Доказательство леммы 1

Имеем очевидно равенство для постоянной силы

$$y(t,x) = x + v(x)t + \frac{Ft^2}{2}.$$

и значит

$$y(t,x_2) - y(t,x_1) = V(x_1,x_2)t + R(x_1,x_2).$$

Откуда и следует утверждение.

Доказательство теоремы 6

Из теоремы 1 для одномерного случая следует, что необходимым условием существования столкновений является условие $F_1^d > F_2^d$. Для точки $x = (x^1, \ldots, x^d) \in \Lambda$ обозначим через

$$T(x) = \sqrt{\frac{2(A - x^d)}{F_1^d}},$$

момент времени, когда $(y(t,x), e_d) = A$.

Рассмотрим две точки $x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^d) \in \Lambda$, $x_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^d) \in \Lambda$. Предположим, что $x_2^d > x_1^d$. В силу сделанных предположений имеем $T(x_1) > T(x_2)$. Кроме того, ясно, что до момента времени $T(x_1)$ сталкиваться точки x_1, x_2 не могут. Начиная с момента $T(x_1)$ мы находимся в ситуации леммы 1. Действительно, вычислим разности скоростей и координат в момент времени $T(x_1)$:

$$y(T(x_1), x_1) = x_1 + (A - x_1^d)e_d, \quad v(T(x_1), x_1) = F_1 T(x_1).$$

$$y(T(x_1), x_2) = y(T(x_2), x_2) + sv(T(x_2), x_2) + \frac{F_2 s^2}{2}, \quad v(T(x_1), x_2) = v(T(x_2), x_2) + F_2 s,$$

где

$$s = T(x_1) - T(x_2),\ v(T(x_2), x_2) = F_1 T(x_2),\ y(T(x_2), x_2) = x_2 + (A - x_2^d)e_d.$$

Откуда получаем:

$$V(x_1, x_2) = v(T(x_1), x_2) - v(T(x_1), x_1) = F_1(T(x_2) - T(x_1)) + F_2 s = s(F_2 - F_1).$$

$$R(x_1, x_2) = y(T(x_1), x_2) - y(T(x_1), x_1) = x_2 - x_1 - (x_2^d - x_1^d)e_d + sF_1 T(x_2) + \frac{F_2 s^2}{2}.$$

Используя равенство $T(x_2) = T(x_1) - s$ и обозначая $r = x_2 - x_1 - (x_2^d - x_1^d)e_d$, получаем:

$$R(x_1, x_2) = r + (sF_1 T(x_1) - \frac{F_1 s^2}{2}) - \frac{F_1 s^2}{2} + \frac{F_2 s^2}{2} = r - \frac{F_1}{2}((s - T(x_1))^2 - T^2(x_1)) + \frac{s}{2}V(x_1, x_2) =$$

$$= r - \frac{F_1}{2}(T^2(x_2) - T^2(x_1)) + \frac{s}{2}V(x_1, x_2) = r - \frac{F_1}{F_1^d}(x_1^d - x_2^d) + \frac{s}{2}V(x_1, x_2) =$$

$$= (x_2 - x_1) + \frac{(x_2^d - x_1^d)}{F_1^d}\hat{F}_1 + \frac{s}{2}V(x_1, x_2),$$

где мы ввели обозначение:

$$\hat{F}_1 = (F_1^1, F_1^2, \ldots, F_1^{d-1}, 0).$$

Рассмотрим два случая.

1. $\hat{F}_1 = 0$. Этот случай соответствует тому, что вектор F_1 направлен вдоль вектора e_d. Получаем равенство:

$$R(x_1, x_2) = x_2 - x_1 + \frac{s}{2}V(x_1, x_2).$$

Следовательно векторы R, V параллельны в том и только в том случае, если $x_2 - x_1$ параллелен вектору $F_2 - F_1$. Предположим, что x_1 внутренняя точка области Λ. Положим

$x_2 = x_1 + h(F_2 - F_1)$, где $h < 0$, так как $x_2^d > x_1^d$, $F_2^d < F_1^d$. Ясно, что для всех достаточно малых $|h|$ точка x_2 будет лежать в области Λ. Имеем равенство:

$$(R,V) = s\left(h||F_2 - F_1||^2 + \frac{s^2}{2}||F_2 - F_1||^2\right) = s||F_2 - F_1||^2\left(h + \frac{s^2}{2}\right) = s||F_2 - F_1||^2\,(h + \bar{\bar{o}}(h))$$

при $h \to 0-$. Откуда заключаем, что существует $h < 0$ такой, что $(R,V) < 0$. Следовательно, точки x_1, x_2 столкнутся.

2. $\hat{F}_1 \neq 0$. Если векторы R, V параллельны, то $x_2 - x_1$ лежит в линейной оболочке векторов $\hat{F}_1$ и $F_2 - F_1$. Предположим, что

$$x_2 - x_1 = u\hat{F}_1 + w(F_2 - F_1),$$

для некоторых $u \in \mathbb{R}$ и $w < 0$. Умножая последнее равенство скалярно на e_d получаем:

$$x_2^d - x_1^d = w(F_2^d - F_1^d).$$

Следовательно,

$$R(x_1, x_2) = (u + w\frac{(F_2^d - F_1^d)}{F_1^d})\hat{F}_1 + (w + \frac{s^2}{2})(F_2 - F_2).$$

Значит, векторы R, V параллельны в том и только в том случае, если

$$u + w\frac{(F_2^d - F_1^d)}{F_1^d} = 0.$$

Откуда заключаем, что векторы R, V параллельны в том и только в том случае, если $x_2 - x_1$ параллелен вектору

$$L = \frac{(F_1^d - F_2^d)}{F_1^d}\hat{F}_1 + F_2 - F_1.$$

В случае параллельности R, V имеем:

$$(R,V) = s||F_2 - F_1||^2(w + \frac{s^2}{2}) = s||F_2 - F_1||^2(w + \bar{\bar{o}}(w))$$

при $w \to 0-$. Откуда заключаем, что существует $w < 0$ такой, что $(R,V) < 0$. Следовательно точки x_1, x_2 столкнутся. Тем самым утверждение полностью доказано.

Центральное поле на плоскости

Доказательство теоремы 7

Напомним некоторые известные факты о движении точки в центральном поле. Величина

$$M(t,x) = M(x) = M(|x|) = r^2(t,x)\frac{d\phi(t,x)}{dt},$$

называемая кинетическим моментом, не зависит от времени и равна, в соответствии с нашими обозначениями:

$$M(x) = |x|^2 h(|x|). \tag{12}$$

Динамика радиуса вектора точки x описывается уравнением:

$$\frac{d^2r(t,x)}{dt^2} = -\frac{\partial E}{\partial r},\ r(0,x) = |x|,\ \frac{dr(0,x)}{dt} = g(|x|), \tag{13}$$

где

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dr(t,x)}{dt}\right)^2 + V(r(t,x)),$$

и эффективная потенциальная энергия определяется равенством:

$$V(r(t,x)) = V(r(t,x),x) = U(r(t,x)) + \frac{M^2(x)}{2r^2(t,x)} = V(r(t,x),|x|).$$

Возьмем две точки $x_1, x_2 \in \Lambda$. Рассмотрим два случая:

1. $|x_1| = |x_2| = r$. Заметим, что в силу сделанных предположений в любой момент времени $t \geqslant 0$ имеет место равенство $r(t,x_1) = r(t,x_2)$. Действительно, в силу равенства (12) функции $r(t,x_1)$ и $r(t,x_2)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (13) по t с одинаковыми начальными условиями. С другой стороны, в силу сохранения кинетического момента имеем равенства:

$$\phi(t,x_i) = M(r)\int_0^t \frac{1}{r^2(s,x_i)}ds + \phi(0,x_i),\ i = 1,2.$$

   Следовательно, углы между точками x_1, x_2 сохраняются с течением времени и столкновений быть не может.

2. $|x_1| < |x_2|$. В данном случае рассуждения аналогичны рассмотренному одномерному случаю отрезка. В силу условия 3) и 4) норма точки x монотонно увеличивается. Обозначим $T_{r_1}(r_2)$ момент времени когда частица при движении в поле эффективной потенциальной энергии $V(r,|r_1|)$ с начальными условиями $r(0) = r_1,\ \frac{dr(0)}{dt} = g(r_1)$ достигнет точки r_2. Как и раньше имеем формулу:

$$T_{r_1}(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dz}{\sqrt{2\left(E_0(r_1) - V(z,M(r_1))\right)}}, \quad E_0(r) = \frac{1}{2}g^2(r) + V(r,r).$$

   Ясно, что если $T_{r_1}(r_2)$ убывает по r_1 для всех $r_1 \leqslant r_2$ и $R_1 < r_1 < R_2$, тогда пересечений не будет. Для производной имеем:

$$\frac{T_{r_1}(r_2)}{dr_1} = -\frac{1}{g(r_1)} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr_1}\frac{1}{\sqrt{2\left(E_0(r_1) - V(z,M(r_1))\right)}}\ dz.$$

   Откуда следует утверждение.

4. Заключение

Здесь мы сделаем несколько замечаний о дальнейших перспективах работы: о плотности, взаимодействии и уравнении Эйлера.

Плотность

Рассмотрим случай когда $F_x(y) = F(y)$ не зависит от x. Плотность в момент $t = 0$ определяется как произвольная положительная гладкая функция $\rho(0, x)$ на Λ_0, а плотность в момент t на Λ_t как

$$\rho(t, y) = \rho(0, U_t^{-1} y)$$

Хорошо известно, что она удовлетворяет известному закону сохранения (уравнение Лиувилля)

$$\rho_t + (u\rho)_x = \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \tag{14}$$

Заметим, что во всех наших примерах плотность убывает до нуля. Приведем примеры когда наоборот, она возрастает до бесконечности.

Пусть $z(t), t \in [0, \infty)$, — произвольная гладкая кривая такая, что выполнены условия: $z(0) = 1$, $z(t) > 0$ для всех $t \in [0, \infty)$, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и $z'(t) < 0$, то есть кривая $z(t)$ строго убывает.

Тогда построим систему с $\Lambda_0 = (0, 1]$, положив

$$v(x) = z'(t), F(y) = z''(t)$$

где t единственным образом определяется из условия $z(t) = x$. Иначе говоря, положительная сила действует на частицы и уменьшает их скорости до нуля. Более того, частицы никогда не достигают точки $x = 0$.

О более общих регулярных системах

Функцию $m(x)$ на Λ_0 можно представлять как плотность массы или заряда, что привязывает наше определение к реальным физическим силам. гравитационным и электростатическим. Случай произвольной же силы $F_x(y)$ пока не очень интересен ввиду следующего утверщдения.

Предположим, что выполнено следующее условие невозвращаемости: для любой пары точек x, z траектория $y(t, x)$ проходит через точку z не более одного раза.

Proposition 1. *Тогда регулярная континуальная система может быть представлена как система без взаимодействия с некоторой внешней силой $F_x(y)$.*

Действительно, возьмем произвольную траекторию $y(t, x) = U_t x$ с начальными условиями (1). Тогда, достаточно силу в точке $y = y(t, x)$ траектории определить как

$$F_x(y) = \frac{d^2 y(t, x)}{dt^2}$$

чтобы система с диффеоморфизмами U_t стала системой без взаимодействия.

Скажем теперь кратко что такое системы с взаимодействием. Взаимодействие в континуальных системах частиц может быть локальным, когда сила, действующая на частицу в точке y в момент t, имеет вид

$$F(y) = f(\rho(y), \nabla\rho(y)) \tag{15}$$

и нелокальным с силой

$$F(y) = \int g(|z|, \rho(y), \rho(y + z))dz \tag{16}$$

для некоторых функций f и g.

Конечно, введенные здесь системы являются приближениями соответствующих систем конечного но очень большого числа N точечных частиц. Интуитивно ясно, что в случае (15) речь идет о приближении системами N частиц с убывающим в бесконечности парным взаимодействием (где играет роль взаимодействие лишь с ограниченным числом частиц, не зависящим от N). В то же время в случае (16) речь идет о взаимодействии типа mean field, где каждая частица одинаково взаимодействует с числом частиц порядка N. Некоторые примеры мы рассмотрим в последующих работах.

О связи с уравнением Эйлера

В случае регулярности системы для заданных $t, y \in \Lambda_t$, найдется ровно одна точка $x \in \Lambda_0$, что

$$u(t,y) = u(t,y(x)) = \frac{dy(t,x)}{dt}$$

Легко показать тогда, что определенное таким образом поле скоростей, для регулярной системы без взаимодействия, удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial u(t,y)}{\partial y_\alpha} u_\alpha(t,y) = F(y) \tag{17}$$

Действительно, ускорение частицы с траекторией $y(t,x)$ равно

$$\frac{du_i(t,y(t,x))}{dt} = \frac{\partial u_i(t,y(t,x))}{\partial t} + \sum \frac{\partial u_i(t,y(t,x))}{\partial y_j} u_j(t,y(t,x)) \tag{18}$$

и приравнивается к силе $F(y(t,x)$. Подчеркнем еще раз, что именно отсутствие столкновений является необходимым для подобного вывода уравнения Эйлера.

Задаче Коши для простейшего уравнения Эйлера, где $t \in [0,\infty), y = (y_1,...,y_d) \in R^d$, с начальными условиями

$$u(0,x) = v(x)$$

посвящено много работ, часть которых вошла во многие учебники и монографии, см. [1–12].

Пусть теперь Λ_0 есть вся вещественная ось $\mathbb{R}$, причем движение точки x описывается тем же уравнением (1) в тех же предположениях на функции $F(y), v(x)$ для всех $y, x \in \mathbb{R}$.

Хорошо известно, что характеристики $y(t,x)$ этого уравнения параметризуются точками $x \in R^d$ и удовлетворяют уравнению Ньютона, описывая таким образом движение частиц под действием силы $F(y)$. Более того, структура множества характеристик (точнее, проекции этого множества на x-пространство) определяет существование и единственность решения задачи Коши. Однако, условия отсутствия столкновений в общем случае совсем нетривиальны и пока можно говорить только о примерах такой структуры.

Рассмотрим следующий пример (см. [5]): $F(y) = 0$ для всех $y \in \mathbb{R}$ и $v(x) = -\operatorname{arctg}(x)$. Доказывается, что в данном случае решение $u(t,y)$ уравнения (17) существует при всех $t \leqslant 1,\ y \in \mathbb{R}$, но его нельзя непрерывно продолжить на область $t > 1$. С другой стороны, можно доказать, что столкновения в системе (1) впервые возникнут в момент $t = 1$.

Этот вид $v(x)$ фактически есть частный случай нашего замечания в начале раздела 2.1, касающегося монотонности $v(x)$. А следующий более общий результат следует из нашей теоремы 2.

Теорема 8. *Пусть $v(x) \geq 0, F(y) \in C^2(\mathbb{R})$ и $F(y) > 0$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Уравнение (17) имеет гладкое решение $u(t,y)$ при $t \geqslant 0,\ y \in \mathbb{R}$ с начальным условием $u(0,x) = v(x)$ в том и только в том случае, если для всех $x < y$ выполняется неравенство:*

$$H_0'(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(y))}}\frac{1}{F(y)} + \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(z))}}\frac{F'(z)}{F^2(z)}dz\right) < \frac{v'(x)}{F(x)}$$

Можно рассматривать также задачу Коши в конечной области с фиксированной границей с некоторыми граничными условиями на ней, а также (как в наших примерах) со свободной границей без всяких граничных условий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. 1995. Москва.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 1978. Москва.
3. Кружков С. Н. Избранные труды. 2000. Физматлит. Москва.
4. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка (учебное пособие). 1999.
5. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. 2007. Москва.
6. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. 1945, Изд-во АН УССР, Киев.
7. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. 1967. Москва.
8. Chorin A., Marsden J.. A mathematical introduction to fluid mechanics. Springer. 1992.
9. Marchioro C., Pulvirenti M. Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids. Springer. 1993.
10. Temam R., Miranville A. Mathematical modeling in continuum mechanics. Cambridge Univ. Pfress, 2005.
11. Talman R. Geometric mechanics. WILEY, Second ed. 2007.
12. Слезкин Н. А. Лекции по молекулярной гидродинамике. Изд. МГУ. 1981.

REFERENCES

1. Arnold V. I., 1995, *Lectures on partial differential equations*, Moscow.
2. Arnold V. I., 1978, *Additional chapters of the theory of ordinary differential equations*, Moscow
3. Kruzhkov S. N., 2000, *Selected works*, FIZMATLIT, Moscow.
4. Goritsky A. Y., Kruzhkov S. N. Chechkin G. A., 1999, *Partial differential equations of the first order.*
5. Filippov A. F., 2007, *Introduction to the theory of differential equations*, Moscow
6. Bogolyubov N. N., 1945, *On some statistical methods in mathematical physics*, Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev.
7. Rashevskii P. K., 1967, *Riemann geometry and tensor analysis*, Moscow.
8. Chorin A., Marsden J., 1992, *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer.
9. Marchioro C., Pulvirenti M., 1993, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer.

10. Temam R., Miranville A., 2005, *Mathematical modeling in continuum mechanics*, Cambridge Univ. Pfress.

11. Talman R., 2007, *Geometric mechanics*, WILEY, Second ed.

12. Slezkin N. A., 1981, *Lectures on Molecular Hydrodynamics*, Ed. Moscow State University.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
Получено 22.05.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 511.36

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОЧТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ РЯДОВ

В. Ю. Матвеев (г. Москва)

Аннотация

Статья посвящена исследованию арифметической природы значений в целых точках рядов, принадлежащих так называемому классу F– рядов, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами — рациональными функциями от z.

Рассматривается подкласс F- рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n ,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, ...$, где c_1- некоторая постоянная. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел d_n таких, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \dots, n$. При этом $d_n = d_{0,n} d^n$, $d_{0,n} \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \dots$, $d \in \mathbb{N}$ и для любого n число $d_{0,n}$ делится только на простые числа p, для которых выполнено неравенство $p \leq c_2 n$. Предполагаем также,что степень, в которой число p входит в разложение числа $d_{0,n}$, обозначаемая $ord_p n$, удовлетворяет при всех n неравенству

$$ord_p n \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении этих условий говорим, что рассматриваемый ряд принадлежит классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$.

Ряды такого вида сходятся в точке $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$, если рассматривать их, как p–адические числа при любом простом p, кроме быть может конечного числа простых p.

Прямое произведение колец целых p– адических чисел по всем простым p называется кольцом целых полиадических чисел. Его элементы

$$\mathfrak{a} = \sum a_n \cdot n!$$

можно рассматривать, как бесконечномерные векторы, координаты которых, соответствующие полю $\mathbb{Q}_p$, представляют собой сумму $\mathfrak{a}^{(p)}$ ряда $\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!$ в поле $\mathbb{Q}_p$.

Для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами определим $P(\mathfrak{a})$ как вектор, координаты которого в поле $\mathbb{Q}_p$ равны $P(\mathfrak{a}^{(p)})$. Следуя классификации введенной в работах В.Г. Чирского, назовем полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m$ бесконечно алгебраически независимыми, если для любого многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел p таких, что $P\left(\mathfrak{a}_1{}^{(p)}, \dots, \mathfrak{a}_m{}^{(p)}\right) \neq 0$ в поле $\mathbb{Q}_p$.

В статье доказана теорема, утверждающая, что если F–ряды $f_1, \dots, f_m$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений вида

$$P_{1,i} y_i' + P_{0,i} y_i = Q_i, i = 1, \dots, m$$

где $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i$– рациональные функции от z и если $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, ξ отлично от полюсов всех этих рациональных функций, то при условии

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)} \right) dz \right) \notin \mathbb{C}(z)$$

$f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$– бесконечно алгебраически независимые почти полиадические числа.

Используется модификация метода Зигеля–Шидловского и подход В. Х. Салихова к доказательству алгебраической независимости функций, составляющих решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: алгебраическая независимость, почти полиадические числа.

Библиография: 30 названий.

ALGEBRAIC INDEPENDENCE OF CERTAIN ALMOST POLYADIC SERIES

V. Yu. Matveev (Moscow)

Abstract

The paper describes the arithmetic nature of the values at integer points of series from the so-called class of F–series which constitute a solution of a system of linear differential equations with coefficients — rational functions in z.

We consider a subclass of the series consisting of the series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!\, z^n$$

where $a_n \in \mathbb{Q}$, $|a_n| \le e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, \ldots$ with some constant c_1. Besides there exists a sequence of positive integers d_n such that $d_n\ a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \ldots, n$ and $d_n = d_{0,n} d_n$, $d_{0,n} \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \ldots, d \in \mathbb{N}$ and for any n the number $d_{0,n}$ is divisible only by primes p such that $p \leqslant c_2 n$. Moreover

$$ord_p n \le c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

We say then that the considered series belongs to the class $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$. Such series converge at a point $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$ in the field $\mathbb{Q}_p$ for almost all primes p.

The direct product of the rings $\mathbb{Z}_p$ of p–adic integers over all primes p is called the ring of polyadic integers. It's elements have the form

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}$$

and they can be considered as vectors with coordinates $\mathfrak{a}^{(p)}$ which are equal to the sum of the series $\mathfrak{a}$ in the field $\mathbb{Q}_p$ (This direct product is infinite).

For any polynomial $P(x)$ with integer coefficients we define $P(\mathfrak{a})$ as the vector with coordinates $P(\mathfrak{a}^{(p)})$ in $\mathbb{Q}_p$. According to the classification, described in V. G. Chirskii's works we call polyadic numbers $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ infinitely algebraically independent, if for any nonzero polynomial $P(x_1, \ldots, x_m)$ with integer coefficients there exist infinitely many primes p such that

$$P\left(\mathfrak{a}_1^{(p)}, \ldots, \mathfrak{a}_m^{(p)}\right) \neq 0$$

in $\mathbb{Q}_p$.

The present paper states that if the considered F–series $f_1, \ldots, f_m$ satisfy a system of differential equations of the form

$$P_{1,i} y_i' + P_{0,i} y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m$$

where the coefficients $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i$ are rational functions in z and if $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, ξ is not a pole of any of these functions and if

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)} \right) dz \right) \notin \mathbb{C}(z)$$

then $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ are infinitely algebraically independent almost polyadic numbers.

For the proof we use a modification of the Siegel-Shidlovsky's method and V. G. Chirskii's. Salikhov's approach to prove the algebraic independence of functions, constituting a solution of the above system of differential equations.

Keywords: algebraic independence, almost polyadic numbers. *Bibliography:* 30 titles.

1. Введение и формулировка теоремы

Напомним основные понятия теории полиадических чисел.

Элементы кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{1}$$

где $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Кольцо целых полиадических чисел является прямым произведением колец целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом кольце $\mathbb{Z}_{p_i}$. Действительно, степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n — сумма цифр в p-ичном разложении числа n. Следовательно, для любого p_i при $n \to \infty$

$$|a_n \cdot n!|_{p_i} \to 0,$$

что является достаточным условием сходимости ряда (1) в $\mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующую сумму будем обозначать $a^{(p_i)}$.

Таким образом, бесконечный набор элементов $a^{(p_i)} \in \mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующих всем простым числам p_i, можно рассматривать, как совокупность координат элемента $\mathfrak{a}$ кольца целых полиадических чисел, представленного в виде вектора. Поэтому для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ имеет в кольце $\mathbb{Z}_p$ координату $P(a^{(p)})$.

В работе [1] предложена следующая классификация полиадических чисел.

Назовем полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, то есть для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом.* В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathfrak{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p.

Назовем полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ *алгебраически зависимыми*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) = 0$.

Полиадические числа $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_m$ называются *алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1,\dots,x_m)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)},\dots,a_m^{(p)})\neq 0$.

Будем называть полиадические числа *бесконечно алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1,\dots,x_m)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)},\dots,a_m^{(p)})\neq 0$.

Наконец, будем называть полиадические числа *глобально алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1,\dots,x_m)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)},\dots,a_m^{(p)})\neq 0$.

Термин почти полиадическое число использован для обозначения того случая, когда рассматриваемый ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$, кроме быть может конечного их числа.

На почти полиадические числа переносятся все введенные выше понятия: алгебраическое полиадическое число, трансцендентное полиадическое число, бесконечно трансцендентное полиадическое число, глобально трансцендентное полиадическое число, алгебраически зависимые полиадические числа, алгебраически независимые полиадические числа, бесконечно алгебраически независимые полиадические числа, глобально алгебраически независимые полиадические числа.

Теорема 1. *Пусть*

$$f_1(z),\dots,f_m(z) \tag{2}$$

представляют собой трансцендентные F–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$\begin{gathered} P_{1,i}y_i'+P_{0,i}y_i=Q_i, i=1,\dots,m\\ \text{где } P_{0,i},P_{1,i},Q_i\in\mathbb{Q}(z). \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть $\xi\in\mathbb{Z}$, $\xi\neq 0$, а также выполняются следующие условия:

$$\exp\left(\int\left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)}-\frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right)dz\right)\notin\mathbb{C}(z),\quad i\neq j. \tag{4}$$

Тогда почти полиадические числа $\alpha_1=f_1(\xi),\dots,f_m(\xi)=\alpha_m$ бесконечно алгебраически независимы.

Доказательство. [Доказательство теоремы 1] Для доказательства используется модифицированный метод Зигеля–Шидловского для F–рядов [2].

Здесь мы ограничимся рассмотрением подкласса F-рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n!z^n\,,$$

у которых $a_n\in\mathbb{Q}$ и $|a_n|\le e^{c_1n}$, $n=0,1,...$, где c_1- некоторая постоянная. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел d_n таких, что $d_na_k\in\mathbb{Z},\ k=0,\dots,n$. При этом $d_n=d_{0,n}d^n,\ d_{0,n}\in\mathbb{N},\ n=0,1,\dots,\ d\in\mathbb{N}$ и для любого n число $d_{0,n}$ делится только на простые числа p, для которых выполнено неравенство $p\le c_2n$. Предполагаем также,что степень, в которой число p входит в разложение числа $d_{0,n}$, обозначаемая ord_pn, удовлетворяет при всех n неравенству

$$ord_pn\le c_3\left(\log_p n+\frac{n}{p^2}\right).$$

При выполнении этих условий говорим, что рассматриваемый ряд принадлежит классу $F\left(\mathbb{Q},c_1,c_2,c_3,d\right)$.

Сформулируем теорему (теорема 1 из [3]), которая будет применена к значениям рядов (2).

Теорема 2. *Пусть ряды* $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ *принадлежат некоторому классу*

$$F\left(\mathbb{Q},C_1,C_2,C_3,d_0\right).$$

Пусть $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ *составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений*

$$Y_i'=\sum_{j=1}^{m}B_{i,j}(z)Y_i,\ i=1,\ldots,m, \tag{4}$$

$B_{i,j}\in\mathbb{Q}(z)$. *Пусть* $T_0(z)\in\mathbb{Z}[z]$ *и* $T_0(z)\cdot B_{i,j}(z)\in\mathbb{Z}[z]$, $i,j=1,\ldots,m$, *причем пусть степень* $T_0(z)$*- наименьшая возможная, а коэффиценты* $T_0(z)$ *– взаимно простые целые числа. Тогда полиадические числа* $f_1(\xi),\ldots,f_m(\xi)$ *бесконечно алгебраически независимы.*

Пусть трансцендентные формальные степенные ряды $y_1,\ldots,y_m$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$P_{1,i}y_i'+P_{0,i}y=Q_i,\quad i=1,\ldots,m. \tag{5}$$

Для доказательства теоремы 1 нужно доказать алгебраическую независимость над $\mathbb{Q}(z)$ рядов $f_1(z),\ldots,f_m(z)$. Она следует из доказываемой ниже теоремы 3. Доказательство теоремы 3 имеет ту же схему, что и доказательства теорем В.Х. Салихова [5], (см. также [4], стр.198,199).

Теорема 3. *Пусть*

$$f_1(z),\ldots,f_m(z) \tag{6}$$

представляют собой трансцендентные F*–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида*

$$\begin{gathered}P_{1,i}y_i'+P_{0,i}y_i=Q_i, i=1,\ldots,m\\ \text{где } P_{0,i},P_{1,i},Q_i\in\mathbb{Q}(z).\end{gathered} \tag{7}$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$\exp\left(\int\left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)}-\frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right)dz\right)\notin\mathbb{C}(z),\quad i\neq j. \tag{8}$$

тогда ряды $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Лемма 1. *Пусть трансцендентные ряды* y_i *удовлетворяют системе уравнений (5) и пусть выполняется условие (8) . Тогда ряды* $y_1,\ldots,y_m$ *и 1 линейно независимы над* $\mathbb{Q}\left(z\right)$.

Доказательство. Предположим противное и пусть размерность векторного пространства над $\mathbb{Q}(z)$, порожденного этими рядами, равна k, $k<m$. Так как среди рядов $y_1,\ldots,y_m$ нет рациональных функций, $k\geqslant 2$. Предположим, что $1,y_1,\ldots,y_{k-1}$ линейно независимы, а $1,y_1,\ldots,y_k$ — линейно зависимы и имеет место равенство

$$q_0+q_1y_1+\ldots+q_ky_k=0,\quad \text{где}\quad q_i\in\mathbb{Q}(z),i=0,1,\ldots,k. \tag{9}$$

Заметим, что по выбору k функция $q_k\neq 0$. Кроме того, так как среди $y_1,\ldots,y_k$ нет рациональных функций, существует номер l, $1\leqslant l\leqslant k-1$ такой, что $q_l\neq 0$.

Кроме того, так как среди $y_1,\ldots,y_k$ нет рациональных функций, существует номер l, $1\leqslant l\leqslant k-1$ такой, что $q_l\neq 0$.

Продифференцируем равенство (9), используя систему (5):

$$\begin{aligned}
&\Big(q_0{}' + q_1{}' y_1 + q_1\left(-\frac{P_{0,1}}{P_{1,1}} y_1 + \frac{Q_1}{P_{1,1}}\right) + \ldots + \\
&+ q_l{}' y_l + q_l\left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} y_l + \frac{Q_l}{P_{1,l}}\right) + \ldots + \\
&+ q_k{}' y_k + q_k\left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}} y_k + \frac{Q_k}{P_{1,k}}\right)\Big) = 0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&q_0{}' + \frac{Q_i}{P_{1,i}}(q_1 + \ldots + q_k) + \left(q_1{}' + q_1\left(-\frac{P_{0,1}}{P_{1,1}}\right)\right) y_1 + \ldots + \left(q_l{}' + q_l\left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right)\right) y_l + \ldots + \\
&\left(q_k{}' + q_k\left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right)\right) y_k = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что в поле рациональных функций выполняется равенство

$$\frac{q_l{}'}{q_l} - \frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} = \frac{q_k{}'}{q_k} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}, \tag{11}$$

иначе бы из этих двух уравнений можно было бы исключить переменную y_k и получить нетривиальное уравнение, связывающие над $\mathbb{Q}(z)$ ряды $1, y_1, \ldots, y_{k-1}$. Равенство (11) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
&q_l{}' + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) q_l = q_k{}' + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) q_k \\
&\frac{q_l' + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) q_l}{q_l} = \frac{q_k' + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) q_k}{q_k} \\
&\frac{q_l'}{q_l} + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) = \frac{q_k'}{q_k} + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
&\frac{q_l'}{q_l} - \frac{q_k'}{q_k} = \frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}} \\
&(\ln q_l)' - (\ln q_k)' = \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) - \left(\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
&\left(\ln \frac{q_l}{q_k}\right)' = \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
&\ln \frac{q_l}{q_k} = \int \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) dz + \ln C \\
&\frac{q_l}{q_k} = e^{\int \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) dz} \cdot C
\end{aligned} \tag{12}$$

Из условия (8) следует , что правая часть этого равенства не является рациональной функцией и не может быть равна $\frac{q_l}{q_k}$. Лемма 1 доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы по индукции. Пусть $m > 1$, пусть ряды

$$f_1 = f_1(z), \ldots, f_m = f_m(z) \tag{13}$$

алгебраически зависимы над $\mathbb{Q}(z)$, а число l таково, что любые $l-1$ среди этих рядов алгебраически независимы, но существуют l рядов таких, что они алгебраически зависимы. Так как нумерация рядов (13) в нашем распоряжении, можно считать, что $f_1, \ldots, f_{l-1}$ алгебраически независимы, а $f_1, \ldots, f_l$ алгебраически зависимы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений которой удовлетворяют ряды $f_1, \ldots, f_l$

$$w_i{}' = P_{0,i} w_i - Q_i, \quad i = 1, \ldots, l \tag{14}$$

и соответствующий системе (14) дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{l} \left(P_{0,i} w_i - Q_i\right) \frac{\partial}{\partial w_i} \tag{15}$$

Пусть $P = P\left(z, w_1, \ldots, w_l\right) \in \mathbb{Q}\left[z, w_1, \ldots, w_l\right]$ отличный от тождественного нуля и неприводимый многочлен такой, что

$$P\left(z, f_1, \ldots, f_l\right) = 0. \tag{16}$$

Применяя лемму 4 из книги [4] (глава 4, стр 161–162) получаем, что с некоторым $Q(z) \in \mathbb{Q}(z)$ выполнено равенство многочленов из $\mathbb{Q}\left[z, w_1, \ldots, w_l\right]$

$$DP = QP. \tag{17}$$

Пусть степень многочлена P по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_l$ равна s. Представим многочлен P в виде

$$P = \sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} P_{\overline{k}} \cdot w_1{}^{k_1} \ldots w_l{}^{k_l}, \tag{18}$$

где $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_l)$, $P_{\overline{k}} \in \mathbb{Q}[z]$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$. Из (14) – (18) следует, что

$$D\left(\sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}\right) = Q\left(\sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}\right),$$

откуда

$$\begin{gathered} \sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} \left(P'_{\overline{k}} w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l} + \sum_{i=1}^{l} P_{\overline{k}} \left(k_i w_1^{k_1} \ldots w_i^{k_i - 1} \ldots w_l^{k_l}\right) \cdot \left(P_{0,i} w_i - Q_i\right)\right) = \\ = \sum_{k_1 + \ldots + k_l \leqslant s} Q P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}. \end{gathered} \tag{19}$$

Рассмотрим произвольный отличный от нуля член многочлена P, имеющий наибольшую степень s по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_l$. Пусть он имеет вид $P_{\overline{r}}\, w_1^{r_1} \ldots w_l^{r_l}$, где $r_1 + \ldots + r_l = s$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_l)$, $P_{\overline{r}} \neq 0$.

Из (19) следует, что $P_{\overline{r}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} r_i P_{0,i}\right) y. \tag{20}$$

Аналогичное равенство с заменой r_i на t_i выполняется для любого коэффициента $P_{\overline{t}}$ с индексом $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_l)$, удовлетворяющим условию $t_1 + \ldots + t_l = s$.

Пусть j выбрано так, что $r_j > 0$ и пусть $P_{\overline{k}}$ – коэффициент многочлена P с индексом $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_l)$, для которого выполнены равенства: $k_i = r_i$, $i \neq j$, $k_j = r_j - 1$. Из (19) следует, что

$$\begin{gathered} P_{\overline{k}}{}' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i}\right) P_{\overline{k}} + \\ \sum_{j=1}^{l} \left(k_j + 1\right) Q_i P_{\overline{k}} \end{gathered} \tag{21}$$

где
$$\overline{k}_j = (k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \ldots, k_l) \tag{22}$$
Рассмотрим ряд
$$\Phi = \overline{\Phi}(z) = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1)\, P_{\overline{k}_j} f_j \tag{23}$$
и вычислим, используя (20), (23) (т.к. для $P_{\overline{k}_j}$ сумма индексов равна s)
$$\begin{gathered}\Phi' = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left(P_{\overline{k}_j}{}' f_j + P_{\overline{k}_j} f_j{}' \right) = \\ = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left(f_j \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} - P_{0,j} \right) P_{\overline{k}_j} + P_{\overline{k}_j} \left(P_{0,j} f_j \right) - Q_j P_{\overline{k}_j} \right),\end{gathered} \tag{24}$$
$$\Phi' = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} \right) P_{\overline{k}_j} f_j + \sum_{j=1}^{l} (k_j + 1)\, Q_j P_{\overline{k}_j}$$
Из уравнений (21), (24) следует, что
$$P_{\overline{k}}{}' - \Phi' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} \right) \left(P_{\overline{k}} - \Phi \right). \tag{25}$$
Обозначим $Y_{\overline{k}} = P_{\overline{k}} - \Phi$. Пусть
$$w = \frac{Y_{\overline{k}}}{P_{\overline{k}_j}},$$
где $P_{\overline{k}_j} = P_{\overline{r}} \neq 0$ по определению $\overline{k}_j$. Тогда согласно (20), (25)
$$\frac{w'}{w} = \frac{Y'_{\overline{k}}}{Y_{\overline{k}}} - \frac{P'_{\overline{k}_j}}{P_{\overline{k}_j}} = \left(Q - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l} k_i P_{0,i} \right) - \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} - P_{0,j} \right) = P_{0,j},$$
Следовательно,
$$w' = P_{0,j} w. \tag{26}$$
Рассмотрим ряд
$$\begin{gathered}\Omega = f_j - \frac{1}{k_j + 1} w = f_j - \frac{1}{k_j + 1} \left(\frac{P_{\overline{k}} - \Phi}{P_{\overline{r}}} \right) = \frac{1}{(k_j + 1)\, P_{\overline{r}}} \left(P_{\overline{r}} f_j{}^{(k_j+1)} - P_{\overline{k}} + \Phi \right) = \\ \frac{1}{(k_j + 1)\, P_{\overline{r}}} \left(P_{\overline{r}} f_j{}^{(k_j+1)} - P_{\overline{k}} + \sum_{i=1}^{l} (k_i + 1)\, P_{\overline{k}_i} \cdot f_i \right) = -\frac{1}{(k_j + 1)\, P_{\overline{r}}} \left(P_{\overline{k}} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l} (k_i + 1)\, P_{\overline{k}_i} f_i \right),\end{gathered} \tag{27}$$
так как $\overline{r} = \overline{k}_j$, ввиду определения $\overline{k}$ и равенства (22).

Поскольку, ввиду (14) и (26)
$$\begin{gathered}f_j{}' = P_{0,j} f_j - Q_{0,j}, \\ w' = P_{0,j} w, \\ \frac{w'}{k_j + 1} = \frac{w P_{0,j}}{k_j + 1},\end{gathered}$$

получаем

$$\Omega' = \left(f_j - \frac{1}{k_j+1}w\right)' = f_j' - \frac{1}{k_j+1}\cdot P_{0,j}w =$$
$$= P_{0,j}f_j - Q_{0,j} - P_{0,j}\cdot\frac{w}{k_j+1} =$$
$$= P_{0,j}\left(f_j - \frac{w}{k_j+1}\right) - Q_{0,j},$$

то есть Ω является решением того же уравнения, что и f_j, но равенство (27) означает, что ряды $\Omega, 1, f_1, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots, f_l$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}(z)$. Но это противоречит лемме 1. Теорема доказана. □

2. Заключение

В работах [1] – [30] развита теория арифметических свойств p–адических и полиадических чисел. Полученные в настоящей работе результаты продолжают исследования, проведенные в работах автора и В. Г. Чирского [13–15, 18, 19].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. (2014), ”Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами”, *Доклады Академии наук, математика*, том 439, № 6, с. 677–679.

2. Bertrand D., Chirskii V. G, Yebbou Y. (2004), ”Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann.Fac.Sci.Toulouse.-V.XIII.*, № 2, pp. 241–260.

3. Чирский В. Г. (2015), ”Арифметические свойства целых полиадических чисел”, *Чебышевский сборник*, том 16, выпуск 1, с. 254–264.

4. Шидловский А. Б. (1987), ”Трансцендентные числа”, М. *Наука*, 417с.

5. Салихов В. Х. (1973), ”Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка”, *Матем. заметки.*, т.13., № 1, с. 29–40.

6. Чирский. В. Г. (1990), ”О глобальных соотношениях”, *Матем. заметки*, том.48, вып. 2. с. 123–127 .

7. Нестеренко Ю. В. (1994), ”Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций”, *Матем. сборник*, т.185, № 10, 48–72 .

8. Чирский В. Г. (2015), ”Об арифметических свойствах ряда Эйлера”, *Вестник Московского Университета.*, Серия 1: Математика. Механика. № 1, с. 59–61 .

9. Постников А. Г. (1971), ”Введение в аналитическую теорию чисел”, М. *Наука.*

10. Понтрягин Л. С. (1984), ”Непрерывные группы”, М. *Наука.*

11. Новоселов Е. В. (1960), ”Топологическая теория делимости целых чисел”, *Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та* 3, с. 3–23.

12. Чирский В. Г., Шакиров Р. Ф. (2013), ”О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований”, М. *Чебышевский сборник.*, № 1.

13. Матвеев В. Ю., Чирский В. Г. (2013), ”О ряде из произведений членов арифметической прогрессии”, *Преподаватель XXI век.*, № 4, ч. 2., с. 249–254.

14. Матвеев В. Ю. (2013), ”О значениях некоторого ряда в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами”, *Преподаватель XXI век.*, № 4, ч. 2., с. 255–259.

15. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. (2013), ”О некоторых свойствах полиадических разложений”, *Чебышевский сборник*, том 14 выпуск 2, с. 164–172 .

16. Чирский В. Г. (2011), ”Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел”, *Чебышевский сборник*, том 12, № 4, 129–134.

17. Чирский В. Г. (2012), ”Полиадические оценки для F-рядов”, *Чебышевский сборник*, том 13, вып.2, 131–136.

18. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. (2013), ”О представлении натуральных чисел”, *Чебышевский сборник.*, том 14. вып.1, с. 92–101.

19. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. (2013), ”О представлении натуральных чисел”, *Вестник МГУ*, сер.1, матем., механ., № 6, 57–59.

20. Чирский В. Г. (2014), ”Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами”, *Известия РАН*, Серия математическая., том 78, выпуск 6, стр. 193–210.

21. Чирский В. Г. (1989), ”О нетривиальных глобальных соотношениях”, *Вестник Московского ун-та.*, сер.1, матем., механ., № 5, с. 33–36

22. Чирский В. Г. (1990), ”Об алгебраических соотношениях в локальных полях”, *Вестник Московского ун-та.*, сер.1, матем., механ., № 3, с. 92–95.

23. Чирский В. Г. (1991), ”Глобальные соотношения и гипергеометрические ряды”, *Успехи матем. наук.*, том.46, вып.6(282), с. 221–222.

24. Чирский В. Г. (1992), ”Об алгебраических соотношениях в неархимедовски нормированных полях”, *Функциональный анализ и прилож.*, том 26, вып.2, с. 41–50.

25. Чирский В. Г. (1994), ”О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях”, *Вестник Московского ун-та.*, сер.1, матем., механ., № 3, с. 93–95.

26. Чирский В. Г. (1994), ”Оценки многочленов и линейных форм в прямых произведениях полей”, *Вестник Московского ун-та.*, сер.1, матем., механ., № 4, с. 35–39.

27. Чирский В. Г., Bundschuh P. (2004), ”Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$”, II, *ActaArithmetica*, 113.4, с. 309–326.

28. Чирский В. Г. (2005), ”Метод Зигеля в p–адической области”, *Фундам. и прикл. Матем*, том 11, № 6, 221–230.

29. Чирский В. Г. (2005), ”Обобщение понятия глобального соотношения”, *Записки научных семинаров ПОМИ*, том 322, с. 220–238.

30. Чирский В. Г., Bundschuh P. (2002), ”Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$”, *Arch.der Math.*, 79, 345–352.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chirskii V. G. (2014), "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, v.90, no.3, pp. 766–768.

2. Bertrand D., Chirskii V. G, Yebbou Y. (2004), "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann.Fac.Sci.Toulouse.-V.XIII.*, no. 2, pp. 241–260.

3. Chirskii V. G. (2015), "Arithmetic properties of polyadic integers", *Tchebyshevskiy sbornik*, v. 16, no. 1, pp. 254–264.(Russian)

4. Shidlovskii A. B. (1989), "Transcendental numbers", *W.de Gruyter*.

5. Salikhov V. Kh. (1973), "On algebraic independence of the values of E-functions which satisfy first order linear differential equations", *Mat. Zametki*, v.13, no. 1, pp. 29–40.

6. Chirskii V. G. (1990), "Global relations", *Math.Notes*, 48, pp. 795–798.

7. Nesterenko Yu. V. (1995), "Hermite-Pade approximations of generalized hypergeometric functions", Engl.transl. Russ.Acad.Sci.Sb.Math, 85, pp. 189–219.

8. Chirskii V. G. (2015), "On the arithmetic properties Euler series", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 1, pp. 59–61.(Russian)

9. Postnikov A. G. (1971), "Introduction to analytic number theory", Moscow, *Nauka*, 416 p. (Russian)

10. Pontryagin L. S. (1984), "Continious groups", Moscow, *Nauka*, 529 p. .(Russian)

11. Novoselov E. V. (1960), "Topological theory of divisibility", *Uchen.zapiski Elabugh. Ped. Inst*, 8, pp. 3–23.

12. Chirskii V. G., Shakirov R. F. (2013), "On representations of integers in DBNS", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.14, no. 1 (20153), pp. 254–264.(Russian)

13. Matveev V. Yu., Chirskii V. G. (2013), "On a series of products of terms of an arithmetic progression", *Prepodavatel 21 veka*, no. 4, pp. 245–254.(Russian)

14. Matveev V. Yu. (2013), "On the values of a certain series at polyadic points, well approximable by positive integers", *Prepodavatel 21 veka*, no. 4, pp. 339–354 .(Russian)

15. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. (2013), "On certain properties of polyadic expansions", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.14, no. 2, pp. 163–172.(Russian)

16. Chirskii V. G. (2011), "Estimates of linear forms and polynomials in polyadic integers", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.12, no. 4, pp. 129–134.(Russian)

17. Chirskii V. G. (2012), "Polyadic estimates for F-series", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.13, no. 2, pp. 131–136.(Russian)

18. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. (2013), "On a representation of positive integers", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.14, no. 6 , pp. 92–101.(Russian)

19. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. (2013), "On a representation of positive integers", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 1, pp. 57–59.(Russian)

20. Chirskii V. G. , "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya:Mathematics*, 78:6, pp. 1244–1260.

21. Chirskii V. G. (1989), "On nontrivial global relations", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 5, pp. 33–36.(Russian)

22. Chirskii V. G. (1990), "On algebraic relations in local fields", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 3,pp. 92–95.(Russian)

23. Chirskii V. G. (1991), "Global relations and hypergeometric series", *Uspekhi Mat.Nauk*, v. 48, no. 6, pp. 221–222.

24. Chirskii V. G. (1992), "On algebraic relations in non-archimedean fields", *Funct.Anal.Appl.*, 26, pp. 108–115.

25. Chirskii V. G. (1994), "On series which are algebraically independent in all local fields", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 3, pp. 93–95.(Russian)

26. Chirskii V. G. (1994), "Estimates of polynomials and linear forms in direct products of fields" , *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 4, pp. 35–39.(Russian)

27. Chirskii V. G., Bundschuh P. (2004), "Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$", II, *ActaArithmetica*, 113.4, c. 309–326.

28. Chirskii V. G. (2005), "Siegel's method in p–adic domain", *Fundam I prikl.matem.*, v.11, no. 6, pp. 221–230.

29. Chirskii V. G. (2006), "A generalization of the notion of global relation", *Zapiski nauch. Semin POMI*, 322, pp. 220–238.

30. Chirskii V. G., Bundschuh P. (2002), "Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$", *Arch.der Math.*, 79, 345–352.

Получено 30.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 519.17+512.54

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (1276,50,0,2)

В. В. Носов (г. Оренбург)

Аннотация

Пусть Γ сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 0, 2)$. Тогда $k = u^2 + 1$, $v = (u^4 + 3u^2 + 4)/2$ для $u \equiv 1, 2, 3(mod4)$. Если $u = 1$, то Γ имеет параметры $(4, 2, 0, 2)$ — граф четырёхугольника. Если $u = 2$, то Γ имеет параметры $(15, 5, 0, 2)$ — граф Клебша. Если $u = 3$, то Γ имеет параметры $(56, 10, 0, 2)$ — граф Гевиртца. Если $u = 5$ тогда, гипотетический сильно регулярный граф Γ имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$ [4]. Если $u = 6$ тогда, гипотетический сильно регулярный граф Γ имеет параметры $(704, 37, 0, 2)$ [5]. Если $u = 7$, тогда Γ имеет параметры $(1276, 50, 0, 2)$. Пусть G группа автоморфизмов гипотетического сильно регулярного графа с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$. Найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек элементов простых порядков группы G. С использованием теории характеров конечных групп были найдены возможные порядки подграфы неподвижных точек автоморфизмов графа с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$. Доказано, что если граф с параметрами (1276,50,0,2) существует, то порядок его группы автоморфизмов делит $2^l \cdot 3 \cdot 5^m \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$. В частности, G — разрешимая группа.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизмы простых порядков сильно регулярного графа, подграфы неподвижных точек.

Библиография: 17 названий.

ON AUTOMORPHISMS OF STRONGLY REGULAR GRAPH WITH THE PARAMETRS (1276,50,0,2)

V. V. Nosov (Orenburg)

Abstract

Let Γ be a strongly regular graph with parameters $(v, k, 0, 2)$. Then $k = u^2 + 1$, $v = (u^4 + 3u^2 + 4)/2$ and $u \equiv 1, 2, 3(mod4)$. If $u = 1$, then Γ has parametrs $(4, 2, 0, 2)$ — tetragonal graph. If $u = 2$, then Γ has parametrs $(15, 5, 0, 2)$ — Clebsch graph. If $u = 3$, then Γ has parametrs $(56, 10, 0, 2)$ — Gewirtz graph. If $u = 5$ then hypothetical strongly regular graphΓ has parametrs $(352, 26, 0, 2)$ [4]. If $u = 5$ then hypothetical strongly regular graphΓ has parametrs $(704, 37, 0, 2)$ [5]. Let $u = 7$, then Γ has parametrs $(1276, 50, 0, 2)$. Let G be the automorphism group of a hypothetical strongly regular graph with parameters $(1276, 50, 0, 2)$. Possible orders are found and the structure of fixed-point subgraphs is determined for elements of prime order in G. With the use of theory of characters of finite groups we find the possible orders and the structures of subgraphs of the fixed points of automorphisms of the graph with parameters $(1276, 50, 0, 2)$. It proved that if the graph with parametrs (1276,50,0,2) exist, its automorphism group divides $2^l \cdot 3 \cdot 5^m \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$. In particulary, G — solvable group.

Keywords: strongly regular graph, prime order automorphisms of strongly regular graph, fixed-point subgraphs.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Граф Γ называется *сильным с параметрами* (λ,μ), если каждое ребро из Γ лежит точно в λ треугольниках и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) *λ-подграфом.* Ректаграфом называется вполне регулярный граф с $\lambda=0, \mu=2$. Если Δ — подграф графа Γ и $a,b\in\Delta$, то через $d_\Delta(a,b)$ обозначим расстояние между a и b в графе Δ.

Если X — подмножество группы автоморфизмов графа Γ, то через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначим подграф на множестве вершин, остающихся неподвижными под действием любого автоморфизма из X. Подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с малыми значениями параметров λ и μ имеют жестко заданное строение. Так подграф неподвижных точек автоморфизма графа Мура сам является графом Мура или звездой (см. лемму 1 [1]).

Хорошо известно (предложение 1.1.2 [2]), что сильный граф с $\mu\geqslant 2$ регулярен. Поэтому связные компоненты непустых подграфов неподвижных точек $2'$-автоморфизмов сильно регулярного графа с $\max\{\lambda,\mu\}\leqslant 2$ либо являются кликами, либо сильно регулярны с этими же параметрами. Автоморфизмы графов Мура, т.е. сильно регулярных графов с параметрами $(v,k,0,1)$ изучались в [1]. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(v,k,1,2)$ рассматривались в [3]. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(v,k,0,2)$ изучались в [4] и в [5]. Этот класс графов — единственный из классов связных сильно регулярных графов с $\max\{\lambda,\mu\}\leqslant 2$, имеющий бесконечное множество допустимых параметров.

В данной работе изучаются автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1276,50,0,2)$. Кроме обычных теоретико-графовых методов, применявшихся в работах [1,3], в данной статье используется метод Дональда Хигмена, позволяющий уточнить возможные порядки автоморфизмов и строение подграфов их неподвижных точек с помощью теории характеров конечных групп (см. §2).

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(v,k,0,2)$. Используя равенство $(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)=n^2$, получим $n^2=4k-4$, поэтому $n=2u$, $k=u^2+1$, $n-m=u-1$, $-m=-u-1$. Из прямоугольного соотношения $k(k-\lambda-1)=\mu(v-k-1)$ находим $v=(u^4+3u^2+4)/2$. Кратность собственного значения $n-m$ равна

$$f=(m-1)k(k+m)/(n\mu)=u(u^2+1)(u^2+u+2)/(4u),$$

следовательно, u нечетно или $u\equiv 2(4)$.

Для небольших u получим следующие графы: $u=1$ — четырехугольник; $u=2$ — граф Клебша с параметрами $(16,5,0,2)$; $u=3$ — граф Гевиртца с параметрами $(56,10,0,2)$. Существование графов с $u>3$ неизвестно. При $u=5$ получается гипотетический граф с наименьшими параметрами $(352,26,0,2)$. Автоморфизмы этого графа изучались в [4]. При $u=6$

граф имеет параметры $(704, 37, 0, 2)$. Автоморфизмы этого графа изучались в [5]. При $u = 7$ граф имеет параметры $(1276, 50, 0, 2)$. Граф с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$ имеет собственные значения $n - m = 6$ и $-m = -8$ с кратностями $f = 725$ и $g = 550$ соответственно.

Основным результатом работы являются следующая теорема.

Теорема. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 2$ и либо Δ — пустой граф, 26-коклика или связный граф степени 6 на 44 вершинах, либо Δ имеет семь связных компонент, являющиеся четырехугольниками, либо Δ — регулярный граф, степени 8 на 58 вершинах;*

(2) *$p = 3$ и Δ является графом Клебша;*

(3) *$p = 5$ и Δ — одновершинный граф, либо граф Клебша;*

(4) *$p = 7$ и Δ — двухвершинная клика;*

(4) *$p = 11$ или 29 и Δ — пустой граф.*

Из теоремы следует, что порядок группы автоморфизмов G графа Γ с параметрами (1276,50,0,2) делит $2^l \cdot 3 \cdot 5^m \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$. В частности, G — разрешимая группа.

2. Автоморфизмы простых порядков графа с параметрами (1276,50,0,2)

Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(v, k, 0, 2)$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ — группа автоморфизмов Γ. Выберем подгруппу X нечетного порядка из G. Пусть $\Omega = \mathrm{Fix}(X)$ — множество вершин графа Γ, неподвижных относительно X. Если a, b — несмежные вершины из Ω, то $[a] \cap [b]$ — подграф, допустимый относительно X, поэтому $[a] \cap [b] \subset \Omega$. Значит Ω — либо пустой граф, либо сильно регулярный граф с $\lambda = 0, \mu = 2$, либо является кликой с числом вершин, не большим 2.

Пусть t — инволюция из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(t)$, $a, b \in \Delta$. Тогда, $[a] \cap [b] = c, d$ и либо $c, d \in \Delta$, либо $c^t = d$. Если $[b] \cap \Delta$ содержит различные вершины e, f, то вторая вершина подграфа $[e] \cap [f]$ также попадает в Δ. В частности, связные компоненты графа Δ являются вполне регулярными графами с $\lambda = 0$ и $\mu = 2$.

Лемма 2.1. *Пусть Σ — связная компонента графа Δ и β — степень некоторой вершины a в графе Σ. Тогда*

(1) *$|\Delta| = (\beta^2 + k + 2)/2$, в частности, Δ — регулярный граф степени β;*

(2) *вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна не более чем с двумя вершинами из Δ.*

Доказательство. Это лемма 2.1 из [4].

Доказательство теоремы разобъём на два предложения и ряд лемм.

Предложение 1. *Пусть Γ — сильно регулярный графа с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, X — группа нечетного порядка из $\mathrm{Aut}\ \Gamma$. Тогда для множества неподвижных точек $\Omega = \mathrm{Fix}(X)$ возможны следующие случаи:*

(1) *Ω — пустой граф и $|X|$ делит 319;*

(2) *$|\Omega| = 1$, $|X|$ делит 25;*

(3) *Ω является двухвершинной кликой и $|X|$ делит 49;*

(4) *Ω является четырехугольником и $|X| = 3$;*

(5) *Ω является графом Клебша и $|X|$ делит 45.*

Доказательство. Если Ω — пустой граф, то $|X|$ делит 319, так как $v = 2^2 \cdot 11 \cdot 29$.

Если $\Omega = \{a\}$ является одновершинным графом, то X действует без неподвижных точек на $[a]$, причем $|[a]| = 50$. Поэтому $|X|$ делит 25.

Если Ω является ребром $\{a, b\}$, то $|[a] - \{b\}| = 49$ и $|X|$ делит 49.

Если Ω является четырехугольником $\{a, b; c, d\}$, то $|[a] - \Omega| = 48$ и $|X| = 3$.

Если Ω является графом Клебша, $a \in \Omega$, то $|[a] - \Omega| = 45$ и $|X|$ делит 45.

Заметим, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $|\Omega|(u^2 + 1 - k(\Omega))$ и не превосходит $v - |\Omega|$. Поэтому Ω не может быть ни графом Гевирца, ни графом с параметрами $(352, 26, 0, 2)$, ни графом с параметрами $(704, 37, 0, 2)$ Предложение 1 доказано.

Выясним теперь строение подграфов неподвижных точек инволютивных автоморфизмов графа Γ. Пусть t — инволюция из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(t)$, $\delta = |\Delta|$.

Предложение 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, имеющий инволютивный автоморфизм t. Тогда для $\Delta = \mathrm{Fix}(t)$ выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Δ — пустой граф;*

(2) *Δ является 26-кокликой;*

(3) *Δ имеет семь связных компонент, являющихся четырехугольниками;*

(4) *Δ — связный граф степени 6 на 44 вершинах;*

(5) *Δ — связный граф степени 8 на 58 вершинах.*

Доказательство. Предположим, что Δ не является пустым графом. Пусть Δ — регулярный граф степени β, $\delta = |\Delta|$. Так как $k = 50$, то β четно. Число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно $\delta(50 - \beta)$. Ввиду леммы 1.1. указанное число не больше $2(1276 - \delta)$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Тогда $x_0 + x_1 + x_2 = 1276 - \delta$ и $x_1 + 2x_2 = \delta(50 - \beta)$. Поэтому $\beta \leqslant 8$.

Если $\beta = 0$, то ввиду леммы 1.1 граф Δ является 26-кокликой.

Если $\beta = 2$, то $\delta = 28$ и Δ имеет семь связных компоненты, являющихся четырехугольниками.

Если $\beta = 4$, то $\delta = 34$ и Δ является связным графом диаметра, большего 2. Но по предложению 1.13.1 [2] число вершин в ректаграфе степени k не больше 2^k, противоречие.

Если $\beta = 6$, то $\delta = 44$ и Δ является связным графом диаметра, большего 2.

Если $\beta = 8$, то $\delta = 58$ и Δ является связным графом диаметра, большего 2. В этом случае $\delta(50 - \beta) = 2(1276 - \delta)$ и каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с двумя вершинами из Δ. Предложение 2 доказано.

Доказательство теоремы опирается на метод Дональда Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [8]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с двумя классами. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, g$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пусть π_i — ортогональное проектирование $\mathbf{C}^v$ на i-ое собственное подпространство W_i, χ_i — характер представления группы G, полученного при этом проектировании. Тогда для любого $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{2}(Q)_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, поэтому если $\chi_i(g)$ — число рациональное, то оно должно быть целым.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(v, u^2+1, 0, 2)$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u^2+1 & -u-1 & u-1 \\ u^2(u^2+1)/2 & u & -u \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (u^2+1)(u^2-u+2)/4 & -(u^2+u+2)/4 & (u^2-u+2)/(2u) \\ (u^2+1)(u^2+u+2)/4 & (u^2+u-2)/4 & (-u^2-u-2)/(2u) \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $(u^2+1)(u^2-u+2)/4$ равно

$$\chi_1(g) = \frac{1}{v}((u^2+1)(u^2-u+2)\alpha_0(g)/4 - (u^2+u+2)\alpha_1(g)/4 + (u^2-u+2)\alpha_2(g)/(2u)).$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим

$$\chi_1(g) = \frac{1}{2u}((u-1)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + (u^2-u+2)).$$

При $u = 7$ имеем

$$\chi_1(g) = \frac{1}{14}(6\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 44).$$

Особую сложность в методе Хигмена вызывает подсчет значения параметра $\alpha_1(g)$. Если Γ — граф без треугольников и $|g| = 3$, то $\alpha_1(g) = 0$.

Уточним, теперь предложения 1 и 2 с помощью теории характеров.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, t — инволюция из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$.

Если Δ — пустой граф, то $\chi_1(t) = (-\alpha_1(t) + 44)/14$. Далее, $\alpha_2(t)$ делится на 4, поэтому $\alpha_1(t) = 4w$ и $w - 2$ делится на 7.

Если Δ является 26-кокликой, то $\chi_1(t) = (-\alpha_1(t) + 200)/14$. Так как $\alpha_1(t) = 4w + 2$, то $2w + 3$ делится на 7.

Если Δ имеет 7 связных компонент, являющихся четырехугольниками, то $\chi_1(t) = (-\alpha_1(t) + 212)/14$, $\alpha_1(t) = 4w$ и $2w - 1$ делится на 7.

Если Δ является графом степени 6 на 44 вершинах, то $\chi_1(t) = (-\alpha_1(t) + 308)/14$.

Если Δ является графом степени 8 на 58 вершинах, то каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с двумя вершинами из Δ, поэтому $\alpha_1(t) = 0$ и $\chi_1(t) = 392/14 = 28$.

Пусть g — элемент нечетного простого порядка из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 2.1. *Пусть g — элемент порядка 3. Тогда Ω — граф Клебша.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 3 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда $\alpha_1(g) = 0$ и $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) + 44)/14$.

Если Ω является четырехугольником, то $\alpha_0(g) = 4$ и $\chi_1(g) = 68/14$. Противоречие.

Если Ω является графом Клебша, $a \in \Omega$, то $\alpha_0(g) = 16$ и $\chi_1(g) = 140/14 = 10$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть g — элемент порядка 5. Тогда*

(1) *Если $\Omega = \{a\}$ является одновершинным графом, то число 5-угольных орбит равно $2(7t-5)$ при некотором целом t;*

(2) *Если Ω является графом Клебша, то число 5-угольных орбит кратно 70.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 5 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Если $\Omega = \{a\}$ является одновершинным графом, то $\alpha_0(g) = 1$, тогда $\chi_1(g) = (-\alpha_1(g)+ +50)/14$. Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро. Тогда $\langle g\rangle$-орбита точки a является 5-угольником и $\alpha_1(g)$ кратно 5. Положим $\alpha_1(g) = 5w$. Тогда 14 делит $50 - 5k$, тогдачисло 5-угольных орбит равно $2(7t-5)$ при некотором целом t.

Если Ω является графом Клебша, то $\alpha_0(g) = 16$, тогда $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) + 140)/14$ и $\alpha_1(g)$ кратно 14. Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро, тогда $\alpha_1(g)$ кратно 5. Поэтому $\alpha_1(g)$ кратно 70. Лемма 2.2. доказана.

Лемма 2.3. *Пусть g — элемент порядка 7. Тогда число 7-угольных орбит кратно 14.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 7 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. В этом случае Ω является является ребром и $\chi_1(g) = (-\alpha_1(g) + 56)/14$. Поэтому $\alpha_1(g)$ кратно 14. Лемма 2.3. доказана.

Лемма 2.4. *Пусть g — элемент порядка 11. Тогда число 11-угольных орбит равно 4 и число 11-кокликовых орбит равно 112.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 11 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро. Тогда $\langle g\rangle$-орбита точки a является 11-угольником, либо графом, степени 4 на 11 вершинах. В последнем случае, мы имеем сильно регулярный граф с параметрами $(11, 4, 0, 2)$. Противоречие. Поэтому любая 11-орбита — это либо 11-угольник, либо 11-коклика. $\alpha_1(g)$ кратно 11. Положим $\alpha_1(g) = 11w$. Тогда 14 делит $-11w + 44$. Общее число орбит, динны 11 равно $1276/11 = 116$. Следовательно, число 11-угольных орбит равно 4 и число 11-кокликовых орбит равно 112. Лемма 2.4. доказана.

Лемма 2.5. *Пусть g — элемент порядка 29. Тогда число 29-угольных орбит равно либо 2, либо 16, либо 30, либо 44.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 29 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда, общее число 29-орбит равно 44. Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро и $\alpha_1(g)$ кратно 29. Положим $\alpha_1(g) = 29w$. Тогда $\chi_1 = (44 - 29w)/14$. Следовательно, $w \in \{2, 16, 30, 44\}$ Лемма 2.5. доказана.

3. Заключение

Итак, доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 2$ и либо Δ — пустой граф, 26-коклика или связный граф степени 6 на 44 вершинах, либо Δ имеет семь связных компонент, являющиеся четырехугольниками, либо Δ — регулярный граф, степени 8 на 58 вершинах;*

(2) *$p = 3$ и Δ является графом Клебша;*

(3) *$p = 5$ и Δ — одновершинный граф, либо граф Клебша;*

(4) *$p = 7$ и Δ — двухвершинная клика;*

(4) *$p = 11$ или 29 и Δ — пустой граф.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Махнев А. А., Падучих Д. В. Об автоморфизмах графа Ашбахера // Алгебра и логика 2001, т. 40, №2, 125–134.

2. Brouwer A. E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag – 1989.

3. Махнев А. А., Минакова И.М. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами $\lambda = 1$ $\mu = 2$ // Дискретная математика, 2004, Т. 16, №1, С. 95–104.

4. Махнев А. А., Носов В. В. Об автоморфизмах графов с $\lambda = 0, \mu = 2$. // Математический сборник. Том 195, №3, 2004, С. 47–68.

5. Носов В. В. Об автоморфизмах графа с параметрами $(704, 37, 0, 2)$ // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 36-й Регион. молод. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. С 55–60.

6. Brouwer A. E., Haemers W. H. The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993, v. 14, pp. 397–407.

7. Willbrink H. A., Brouwer A. E. A (57, 14, 1) strongly regular graph does not exist // Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser. A, 1983. Vol. 45, N 1. pp. 117–121.

8. Cameron P. Permutation Groups, London Math. Soc. Student Texts 45, Cambridge Univ. Press. — 1999.

9. Баннаи Э., Ито. Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 375 с.

10. Cameron P., Van Lint J. Designs, Graphs, Codes and their Links. London Math. Soc. Student Texts 22, 1981. Cambr. Univ. Press. 240 p.

11. Higman D. G. Finite permutation groups of rank 3. — Math. Z., 1964, v. 86, pp. 145–156.

12. Higman D. G. Primitive rank 3 groups with a prime subdegree. — Math. Z., 1966, v. 91, pp. 70–86.

13. Higman D. G. Intersection matricies for finite permutation groups.— J. Algebra, 1967, v. 6, pp. 22–42.

14. Higman D. G. On finite affine planes of rank 3. — Math. Z., 1968, v. 104, pp. 147–149.

15. Higman D. G. A survey of some questions and resalts about rank 3 permutation groups.— Actes, Cjngres Int. Math. Rome, 1970, v. 1, pp. 361–365.

16. Higman D. G. Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees I, II.— Arth. Math., 1970, v. 21, pp. 151–156; pp. 353–361.

17. Nakagawa N. On strongly regular graphs with parameters $(k, 0, 2)$ and their antipodal double cover // Hokkaido Math. Soc. 2001, v. 30, pp. 431–450.

REFERENCES

1. Makhnev A. A., Paduchikh D.V. 2001, "Automorphisms of Aschbacher Graphs", *Algebra and logic*, vol. 40, no. 2, pp. 69–74.
2. Brouwer A. E., Cohen A.M., Neumaier A. 1989. *Distance-regular graphs.* Springer-Verlag. Berlin.
3. Makhnev A. A., Minakova I.M. 2004. "On automorphisms of strongly regular graphs with the parameters $\lambda = 1$ and $\mu = 2$", *Diskr. Mat.*, vol. 16, no. 1, pp. 95–104.
4. Makhnev A. A.,Nosov V.V. 2004. "On automorphisms of strongly regular graphs with $\lambda = 0$, $\mu = 2$,", *SB MATH.*, no. 195(3), pp. 347–367.
5. Nosov V. V. 2005. "On automorphisms graph with the parameters $(704, 37, 0, 2)$", *Problemy teorticheskoj i prikladnoj matematiki: trudy 36th Regionalnoy molodejnoy conferencii.* Ekaterinburg, UB of RAS. pp. 55–60.
6. Brouwer A. E., Haemers W.H. 1993. "The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra", *Europ. J. Comb.* vol. 14. pp. 397–407.
7. Willbrink H. A., Brouwer A. E. A 1983. "(57, 14, 1) strongly regular graph does not exist", *Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser. A.* Vol. 45, no 1. pp. 117–121.
8. Cameron P. 1999. *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts 45, Cambridge Univ. Press.
9. Eiichi Bannai, Tatsuro Ito. 1984 *Algebraic combinatorics I: Association schemes.* Menlo Park, CA: The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc.
10. Cameron P., Van Lint J. 1981 *Designs, Graphs, Codes and their Links.* London Math. Soc. Student Texts 22. Cambr. Univ. Press. 240 pp.
11. Higman D. G. 1964. "Finite permutation groups of rank 3", *Math. Z.*, vol. 86, pp. 145–156.
12. Higman D. G. 1966. "Primitive rank 3 groups with a prime subdegree", *Math. Z.* vol. 91, pp. 70–86.
13. Higman D. G. 1967. "Intersection matricies for finite permutation groups", *J. Algebra*, vol. 6, pp. 22–42.
14. Higman D. G. 1968. "On finite affine planes of rank 3", *Math. Z.* vol. 104, p. 147–149.
15. Higman D. G. 1970. "A survey of some questions and resalts about rank 3 permutation groups". *Actes, Cjngres Int. Math.* Rome, vol. 1, p. 361–365.
16. Higman D. G. 1970 "Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees I, II", *Arth. Math.*, vol. 21, p. 151 — 156; 353–361.
17. Nakagawa N. 2001. "On strongly regular graphs with parameters $(k, 0, 2)$ and their antipodal double cover", *Hokkaido Math. Soc.* vol. 30, 431–450.

Оренбургский государственный университет.
Получено 19.05.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 511.3

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ СРАВНЕНИЙ АРХИПОВА–КАРАЦУБЫ

Х. М. Салиба

Аннотация

Доказано, что система сравнений Архипова–Карацубы по любому простому модулю, большему степени форм в ней, разрешима при любых правых частях и при числе переменных, превосходящих величину $8(n+1)^2\log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$, где n — степень форм этой системы.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, сравнения Архипова–Карацубы.

Библиография: 9 названий.

ON ONE ARKHIPOV–KARATSUBA'S SYSTEM OF CONGRUENCIES

H. M. Saliba

Abstract

The Arkhipov–Karatsuba's system of congruencies by arbitrary modulo, greater than a degree of forms in it, has a solution for any right-hand parts, and for the number on unknowns exceeding the value $8(n+1)^2\log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$, where n is the degree of forms of this system.

Keywords: diophantine equations, Arkhipov–Karatsuba's system.

Bibliography: 9 titles.

Настоящую статью автор посвящает памяти выдающихся математиков Геннадия Ивановича Архипова (12.12.1945–14.03.2013) и Анатолия Алексеевича Карацубы (31.01.1937–28.09.2008), образ которых у автора тесно связан с Московским университетом.

1. Введение

Мы продолжаем исследования аддитивных проблем теории чисел [1] – [9]. В качестве аддитивных слагаемых в них берутся простейшие формы степени n от двух независимых переменных x и y вида $x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n$. Г. И. Архипов и А. А. Карацуба [2] изучали вопрос о разрешимости системы диофантовых уравнений

$$\begin{cases} x_1^n + \cdots + x_k^n = N_0, \\ x_1^{n-1}y_1 + \cdots + x_k^{n-1}y_k = N_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1y_1^{n-1} + \cdots + x_ky_k^{n-1} = N_{n-1}, \\ y_1^n + \cdots + y_k^n = N_n, \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ при фиксированном числе слагаемых $k = k(n)$.

Как известно, необходимые и достаточные условия для существования решений системы диофантовых уравнений состоят из арифметических условий, связанных с разрешимостью соответствующей системы сравнений по любому модулю и условий порядка, отвечающих за разрешимость подобной системы уравнений в вещественных числах (см., например, [1], [3], [4], [5], [7]). В работе [2] в основном обсуждаются условия порядка. Здесь изучаются некоторые аспекты арифметических условий.

Пусть $n \geq 2, k, \nu, N_0, \dots, N_n$ — натуральные, $p > n$ — простое число, T_ν — число решений системы сравнений Архипова – Карацубы

$$\begin{cases} x_1^n + \dots + x_k^n \equiv N_0, \\ x_1^{n-1}y_1 + \dots + x_k^{n-1}y_k \equiv N_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (\text{mod } p^\nu) \\ x_1y_1^{n-1} + \dots + x_ky_k^{n-1} \equiv N_{n-1}, \\ y_1^n + \dots + y_k^n \equiv N_n, \end{cases} \tag{1}$$

где неизвестные $x_1, \dots, x_k$ пробегают полную систему вычетов по модулю p^ν. Заметим,что разрешимость системы сравнений (1) при $\nu = 1$ влечет ее разрешимость при любом натуральном числе ν.

В настоящей статье доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $p > n$. Тогда при $k \geq k \geq 8(n+1)^2 \log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$ и при любых $N_0, \dots, N_n$ система сравнений* (1) *разрешима.*

2. Доказательство теоремы

Будем следовать схеме рассуждений, предложенной А. А. Карацубой [6]. Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $n < p < 8n^2, k \geq k \geq 8(n+1)^2 \log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$. Тогда $T_1 \geq 1$.*

Доказательство. Пусть, как и раньше, переменные $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ пробегают полную систему вычетов по модулю p, переменные $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$ — натуральные числа от 1 до $U = 2(n+1)$, в следующей системе сравнений

$$\begin{cases} (u_1+v_1)x_1^n + \dots + (u_k+v_k)x_k^n \equiv N_0, \\ (u_1+v_1)x_1^{n-1}y_1 + \dots + (u_k+v_k)x_k^{n-1}y_k \equiv N_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (\text{mod } p^\nu) \\ (u_1+v_1)x_1y_1^{n-1} + \dots + (u_k+v_k)x_ky_k^{n-1} \equiv N_{n-1}, \\ (u_1+v_1)y_1^n + \dots + (u_k+v_k)y_k^n \equiv N_n. \end{cases} \tag{2}$$

Число решений T системы (2) запишем в виде

$$T = p^{-(n+1)} \sum_{a_0=1}^{p} \sum_{a_1=1}^{p} \cdots \sum_{a_{n-1}=1}^{p} \sum_{a_n=1}^{p} W^k(a_0, \dots, a_n) \times$$
$$\times \exp\left(-2\pi i \frac{a_0N_0 + a_1N_1 + \dots + a_{n-1}N_{n-1} + a_nN_n}{p}\right),$$

где

$$W(a_0, \dots, a_n) = \sum_{u=1}^{U} \sum_{v=1}^{U} \sum_{x=1}^{p} \sum_{y=1}^{p} \exp\left(2\pi i \frac{(u+v)(a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n)}{p}\right).$$

Очевидно, имеем $W(0,\dots,0)=U^2p^2$. Пусть теперь $(a_0,\dots,a_n)\neq(0,\dots,0)$. Тогда для $|W(a_0,\dots,a_n)|$ справедлива оценка

$$|W(a_0,\dots,a_n)|\le\sum_{x=1}^{p}\sum_{y=1}^{p}1\times$$

$$\times\left|\sum_{u=1}^{U}\sum_{v=1}^{U}\exp\left(2\pi i\frac{(u+v)(a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\dots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n)}{p}\right)\right|=W_1.$$

Обозначим символом $J(\lambda)$ число решений следующего сравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\dots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n\equiv\lambda\pmod p$. Имеем

$$W_1=\sum_{\lambda=1}^{p}J(\lambda)\left|\sum_{u=1}^{U}e^{2\pi i\frac{\lambda u}{p}}\right|^2.$$

Для величины $J(\lambda)$ находим оценку $J(\lambda)\le p+n(p-1)$.

Далее, получим

$$W_1\le(p(n+1)-n)\sum_{\lambda=1}^{p}\left|\sum_{u=1}^{U}e^{2\pi i\frac{\lambda u}{p}}\right|^2=p(p(n+1)-n)U.$$

Таким образом

$$T=(U^2p^2)^kp^{-(n+1)}+\theta((n+1)p^2U)^k=U^{2k}p^{2k-n-1}\left(1+\theta p^{n+1}((n+1)U^{-1})^k\right),\quad|\theta|\le1.$$

Достаточно доказать, что $p^{n+1}2^{-k}\le2^{-1}$ или $(n+1)\log_2p\le k-1$. Поскольку $p\le8n^2$, последнее неравенство будет следовать из оценки $k-1\ge(n+1)\log_2(8n^2)$, то есть.

$$k\ge2(n+1)\log_2n+3(n+1)+1.$$

Следовательно, при $k\ge2(n+1)\log_2n+3(n+1)+1$ имеем $T\ge1$. Наконец, отсюда находим, что при $k\ge8(n+1)^2\log_2n+12(n+1)^2+4(n+1)$ величина $T_1\ge1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *При $p\ge8n^2$ и при $k\ge4(n+1)\left(\log_2n+\frac{3}{2}\right)+2$ имеем $T_1\ge1$.*

Доказательство. Для величины T_1 справедлива формула

$$T_1=p^{-(n+1)}\sum_{a_0=1}^{p}\cdots\sum_{a_n=1}^{p}S^k(a_0,\dots,a_n)\exp\left(\frac{a_0N_0+\dots+a_nN_n}{p}\right),$$

где

$$S(a_0,\dots,a_n)=\sum_{x=1}^{p}\sum_{y=1}^{p}\exp\left(\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\dots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n}{p}\right)$$

Отсюда получим $S(0,\dots,0)=p^2$. Пусть теперь $(a_0,\dots,a_n)\neq(0,\dots,0)$. Тогда оценим $|S(a_0,\dots,a_n)|$. Производя замену переменной $y=zx$, а затем используя оценку А.Вейля, найдем

$$|S(a_0,\dots,a_n)|\le p+\sum_{x=1}^{p-1}\left|\sum_{y=0}^{p}\exp\left(2\pi ix^n(a_0+a_1z+\dots+a_nz^n)\right)\right|\le p+(p-1)n\sqrt{p},\quad|\theta_1|\le1.$$

Стало быть,

$$T_1 = p^{2k-(n+1)} + \theta_1(p + (p-1)n\sqrt{p})^k = p^{2k-n-1}(1 + \theta_1 p^{n+1}(p^{-1} + np^{-1/2})^k).$$

Докажем, что $p^{n+1}(p^{-1} + np^{-1/2})^k \leq 1/2$. Имеем следующую цепочку неравенств

$$p^{n+1}(2np^{-1/2})^k \leq \frac{1}{2}, \quad k + 1 + (n + 1 - \frac{k}{2}) \log_2 p + k \log_2 n \leq 0.$$

Поскольку $n + 1 - k/2 < 0$ и $p \leq 8n^2$, достаточно проверить неравенство

$$k + 1 + (n + 1 - \frac{k}{2}) \log_2 (8n^2) + k \log_2 n \leq 0,$$

или

$$\frac{k}{2} \geq 2(n+1)\left(\log_2 n + \frac{3}{2}\right) + 1, \quad k \geq 4(n+1)\left(\log_2 n + \frac{3}{2}\right) + 2.$$

Лемма доказана.

Утверждение теоремы есть непосредственное следствие лемм 1 и 2.

3. Заключение.

Отметим также, что нами для системы сравнений (1) при достаточно большом k и при $p > n$ показана разрешимость ее для любых $N_0, \ldots, N_n$, то есть при $p > n$ отсутствуют арифметические условия разрешимости. Их наличие для $p \leq n$ является интересной задачей.

В заключение автор приносит глубокую благодарность своему учителю профессору В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел . 2-е изд., исправл. и доп. — М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1980, 144 с.

2. Архипов Г. И., Карацуба А. А. Многомерный аналог проблемы Варинга// Докл. АН СССР, 1987, **295,** №3, с.75-77.

3. Архипов Г. И. О значении особого ряда в проблеме Гильберта – Камке// Докл. АН СССР, 1981, **259,** №2, с.265-267.

4. Архипов Г. И. О проблеме Гильберта – Камке// Изв. АН СССР. Сер.мат., 1984, **48,** №1, с.3-52.

5. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об арифметических условиях разрешимости нелинейных систем диофантовых уравнений// Докл. АН СССР, 1985, **284,** №1, с.16-21.

6. Карацуба А. А. Об одной системе сравнений// Матем. заметки, 1976, **19,** №3, с.389-392.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter Expositions in Mathematics;39. — Berlin-New York.: Walter de Gruyter, 2004, pp 554.

8. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 5-е изд., перераб. — М.: Дрофа, 2007, 640 с.

9. Салиба Х. М., Чубариков В. Н. Об одном обобщении суммы Гаусса // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Мат.,Мех., 2009, №2, с.76-80.

Lebanon, Notre Dame University–Louaize (NDU)
Получено 17.04.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 511.36

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. Г. Чирский (г. Москва)

Аннотация

При исследовании генераторов псевдослучайных чисел одна из проблем — является ли периодической вырабатываемая генератором последовательность? Некоторые генераторы в принципе дают периодическую последовательность.

Для того, чтобы избавиться от периодичности или увеличить длину периода, применяются различные методы. Упомянем фильтрующие или комбинирующие генераторы. Однако их использование может привести к тому, что общая длина вырабатываемой последовательности сократится.

Выразим общую идею предлагаемого другого подхода следующими словами: требуется указать простой способ, который вносит беспорядок в изначально упорядоченное множество. Представим себе, что заданная периодическая последовательность состоит из цифр в некоторой позиционной системе счисления. Сопоставим этим цифрам новое число, полученное в результате некоторого, достаточно простого, преобразования этой последовательности цифр. Если это новое число является иррациональным, то последовательность его цифр является непериодической.

Например, если рассматривать натуральные числа $a_1, \ldots, a_T$ как элементы периодической цепной (непрерывной) дроби, то по теореме Лагранжа, полученное число является квадратичной иррациональностью. Отметим, что это число является плохо приближаемым рациональными числами.

Другой способ, основанный на той же основной идее состоит в рассмотрении рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$$

с периодической последовательностью целых чисел $\{a_n\}, a_{n+T} = a_n$ возможность получения оценки порядка приближения этих чисел.

Однако для вычисления цифр числа такого вида требуется много операций деления. Можно рассмотреть ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$$

с периодической последовательностью натуральных чисел $\{a_n\}, a_{n+T} = a_n$. Описываются некоторые свойства таких рядов.

Ключевые слова: периодические последовательности, полиадические числа.

Библиография: 15 названий.

ON TRANSFORMATIONS OF PERIODIC SEQUENCES

V. G. Chirskii (Moscow)

Abstract

One of essential problems in generating pseudo-random numbers is the problem of periodicity of the resulting numbers. Some generators output periodic sequences. To avoid it several ways are used.

Here we present the following approach: supposed we have some order in the considered set. Let's invent some algorithm which produces disorder in the set. E.g. if we have a periodic sequence of integers, let's construct an irrational number implying the given set. Then the figures of the resulting number form a non-periodic sequence.

Here we can use continued fractions and Lagrange's theorem asserts that the resulting number is irrational.

Another approach is to use series of the form $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}$ with a periodic sequence of integers $\{a_n\}, a_{n+T}=a_n$ which is irrational.

Here we consider polyadic series $\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!$ with a periodic sequence of positive integers $\{a_n\}, a_{n+T}=a_n$ and describe some of their properties.

Keywords: periodic sequences, polyadic integers.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение и постановка задачи

При исследовании генераторов псевдослучайных чисел одна из проблем — является ли периодической вырабатываемая генератором последовательность? Некоторые генераторы в принципе дают периодическую последовательность, например, линейный конгруэнтный метод [1].

Для того, чтобы избавиться от периодичности или увеличить длину периода, применяются различные методы. Упомянем фильтрующие или комбинирующие генераторы. Однако их использование может привести к тому, что общая длина вырабатываемой последовательности сократится.

2. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей

Выразим общую идею предлагаемого другого подхода следующими словами: требуется указать простой способ, который вносит беспорядок в изначально упорядоченное множество. Представим себе, что заданная периодическая последовательность состоит из цифр в некоторой позиционной системе счисления. Сопоставим этим цифрам новое число, полученное в результате некоторого, достаточно простого, преобразования этой последовательности цифр. Если это новое число является иррациональным, то последовательность его цифр является непериодической.

Например, если рассматривать натуральные числа $a_1,\dots,a_T$ как элементы периодической цепной (непрерывной) дроби, то по теореме Лагранжа [2], полученное число является квадратичной иррациональностью. Отметим, что это число является плохо приближаемым рациональными числами [3].

Другой способ, основанный на той же основной идее, приведен в статье [4]. Там рассматривались ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!} \tag{1}$$

с периодической последовательностью целых чисел $\{a_n\}, a_{n+T} = a_n$ и была доказана иррациональность таких чисел, если хотя бы одно из чисел $a_1, \ldots, a_T$ отлично от 0. Кроме того, использование метода Зигеля–Шидловского дает имеется возможность получения оценки порядка приближения этих чисел рациональными числами (1). рациональными числами. Более точные оценки можно получить, например, используя аппроксимации Эрмита–Паде [5].

Однако для вычисления цифр числа вида (1) требуется много операций деления. В работе [5] рассматривались ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! \tag{2}$$

с периодической последовательностью натуральных чисел $\{a_n\}, a_{n+T} = a_n$. Вычисление частичных сумм таких рядов значительно легче. Их можно строить, используя только операцию сложения. Разумеется, ряды вида (2) расходятся в поле действительных чисел, однако сходятся в любом поле p-адических чисел. Действительно, для сходимости таких чисел требуется, чтобы $|a_n n!|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Справедливо равенство $|n!|_p = p^{-\frac{n-S_n}{p-1}}$, где S_n обозначает сумму цифр в p-ичном разложении числа n, так что $S_n \leq (p-1)\log_p n$. Ввиду неравенства $|a_n|_p \leq 1$ (число a_n — целое), получаем требуемое: $|a_n n!|_p \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство иррациональности чисел вида (2) в каждом конкретном поле p-адических чисел представляет собой очень трудную задачу. Однако если рассматривать всю совокупность полей p-адических чисел, можно установить определенные арифметические свойства рядов (2).

В работе [5] предложена классификация, учитывающая всю совокупность полей p-адических чисел. Пусть $\mathbb{Z}_p$ обозначает кольцо целых чисел поля p-адических чисел. Рассмотрим прямое произведение этих колец по всем простым числам p. Это прямое произведение называется кольцом целых полиадических чисел [6], [7]. Оно изоморфно канторову множеству. Кстати, рассматриваемые ряды вида (2) образуют счетное множество. Действительно, выписав подряд все цифры десятичных разложений чисел $a_1, \ldots, a_T$ мы получим некоторое натуральное число, цифры которого можно считать периодом разложения некоторого рационального числа. Каждому такому числу соответствует конечное число возможных различных наборов натуральных чисел, цифры которых дают это число. (Например, числу 123 соответствуют наборы $\{1, 2, 3\}$,{12,3},{1,23},123).

Элементы $\mathfrak{a}$ этого кольца — целые полиадические числа — имеют каноническое представление в виде $\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Рассмотренные выше ряды (2) не являются каноническими разложениями, так как для начальных членов ряда неравенство $a_n \leq n$ может не выполняться, однако суммы этих рядов — целые полиадические числа и преобразовав начальную часть ряда к каноническому виду мы получим полиадическое число, каноническое разложение которого является периодическим, начиная с некоторого места.

Так как ряд (2) сходится в любом кольце $\mathbb{Z}_p$, обозначим $\mathfrak{a}^{(p)}$ сумму ряда в этом кольце. Таким образом, полиадическое число a можно рассматривать как вектор с координатами $\mathfrak{a}^{(p)}$. На прямом произведении колец вводится покоординатное сложение и умножение элементов. Поэтому многочлену $P(x)$ с целыми коэффициентами сопоставляется его полиадическое значение в точке $\mathfrak{a}$, обозначаемое $P(a)$ и представляющее собой полиадическое число с координатами $P(\mathfrak{a}^{(p)})$ в каждом кольце $\mathbb{Z}_p$. Если для полиадического числа a существует отличный от тождественного нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P\left(\mathfrak{a}^{(p)}\right) = 0$ в каждом кольце $\mathbb{Z}_p$, то это полиадическое число $\mathfrak{a}$ называется алгебраическим. В противном случае оно называется трансцендентным. Это означает, что для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует кольцо $\mathbb{Z}_p$ такое, что в нем $P\left(\mathfrak{a}^{(p)}\right) \neq 0$. Число называем бесконечно трансцендентным, если для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество колец $\mathbb{Z}_p$ таких, что в них $P\left(\mathfrak{a}^{(p)}\right) \neq 0$. Глобальная трансцендентность означает, что для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого кольца $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P\left(\mathfrak{a}^{(p)}\right) \neq 0$.

Как уже отмечено выше, доказательство глобальной трансцендентности — трудная задача. Однако в работе [5] установлена бесконечная трансцендентность чисел вида (2), в частности, бесконечная трансцендентность числа Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!$.

В работе [8] приведена общая теорема о бесконечной трансцендентности полиадических значений $\mathfrak{a}$ некоторого подкласса F-рядов. В ней также даны зависящие от параметров многочлена $P(x)$ границы бесконечного множества интервалов, в каждом из которых есть хотя бы одно простое число p такое, что $P\left(\mathfrak{a}^{(p)}\right) \neq 0$ в кольце $\mathbb{Z}_p$. Отметим работы [9] – [14], в которых устанавливаются.

Хотя из приведенных выше результатов не следует иррациональность ряда (2) в каком-то кольце $\mathbb{Z}_p$ (означающая непериодичность соответствующего p-ичного разложения), практические вычисления [15] показали, что даже для простейшего ряда Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ цифры десятичных разложений его частичных сумм $\sum_{n=0}^{N} n!$ распределены достаточно случайно.

Это наблюдение, как и приведенные выше сведения о периодических цепных дробях и рядах вида (1) с периодическими коэффициентами, поддерживает гипотезу о том, что наличие периодичности коэффициентов в некоторых непозиционных способах представлений приводит к отсутствию периодичности в позиционных разложениях этих чисел.

В заключение приведем еще одно соображение. Позиционную q-ичную систему счисления часто изображают в виде дерева, из каждой вершины которого выходит q ветвей, соответствующих цифрам этой системы счисления. Это дает самоподобную фрактальную структуру. Если же рассматривать полиадические разложения, то это приведет к дереву, у которого количество ветвей на каждом следующем уровне на единицу больше, чем было на предыдущем уровне. Это, конечно, не доказывает, что если число имело периодическое полиадическое разложение (2), то в позиционной системе счисления его представление не является периодическим, но служит некоторым пояснением к этой гипотезе.

3. Заключение

Статья дает краткий обзор задачи о преобразовании периодической последовательности в непериодическую.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Кнут. Искусство программирования для ЭВМ. (том 2). -М. : Мир. -1977. -724 с.
2. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. -М. :Физматгиз. -1961
3. С. Ленг. Введение в теорию диофантовых приближений. -М. : Мир. -1979. -104с.
4. Чирский В. Г.,Нестеренко А. Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискретная математика. 2015, том 27, выпуск 4, 150–157.
5. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций. // Матем. сб. 1994,т. 185, № 3,с. 39–72.
6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук. Математика. 2014. т. 439, № 6,с. 677–679
7. Новоселов Е. В. Введение в полиадический анализ. -Петрозаводск,-1982. -112 с.
8. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. -М. : Наука. -1971. -416с.

9. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышевский сборник. т. 16,вып. 1(2015),с. 254–264.

10. Чирский В. Г.,Матвеев В. Ю. О ряде из произведений членов арифметической прогрессии. // Преподаватель 21 века, № 4, 2013, стр. 245–254

11. В. Ю. Матвеев «О значениях некоторого ряда в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами», Преподаватель 21 век, № 4, 2013, стр. 339–354

12. Матвеев В. Ю. О бесконечной алгебраической независимости некоторых полиадических чисел. // Материалы международной конференции «Математика и информатика», Москва, 13-17 марта 2016. с. 125–126.

13. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей. // Материалы международной конференции «Математика и информатика», Москва, 13-17 марта 2016. с. 143–144.

14. Лужина Л. М., Макаров Ю. Н. Достаточное условие алгебраической зависимости полиадических рядов // Материалы международной конференции «Математика и информатика», Москва, 13-17 марта 2016. с. 123–124.

15. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник. т. 14,вып. 2(2013),с. 163–172.

REFERENCES

1. Knuth. D., 1969, "The art of computer programming", *Addison-Wesley.*

2. Khintchin A. Ya., 1964, "Continued fractions", *Univ. Chicago Press.*

3. Lang S., 1966, "Introduction to Diophantine approximation", *Addison-Wesley.*

4. Chirskii V. G., Nesterenko A. Yu., 2015) , O"n an approach to transforming periodic sequences", *Discretnaya matematica*, v. 27, no. 4, pp. 150–157 (Russian)

5. Nesterenko Yu. V., 1995, "Hermite-Pade approximations of generalized hypergeometric functions", *Engl. transl. Russ. Acad. Sci. Sb. Math*, 85, pp. 189–219.

6. Chirskii V. G., 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, v. 90, no. 3, pp. 766–768.

7. Novoselov E. V., 1982, "Introduction to polyadic calculus", *Petrozavodsk*, 112 p. (Russian)

8. Postnikov A. G., 1971, "Introduction to analytic number theory", Moscow, *Nauka*, 416 p. (Russian)

9. Chirskii V. G., 2015, "Arithmetic properties of polyadic integers", *Tchebyshevskiy sbornik*, v. 16, no. 1, pp. 254–264. (Russian)

10. . Chirskii V. G., Matveev V. Yu., 2013, "On a series of products of terms of an arithmetic progression", *Prepodavatel 21 veka*, no. 4, pp. 245–254. (Russian)

11. Matveev V. Yu., 2013, "On the values of a certain series at points, well approximable by positive integers", *Prepodavatel 21 veka*, no. 4, pp. 339–354. (Russian)

12. Matveev V. Yu., 2016, "On the infinite algebraic independence of certain polyadic numbers", *Proceedings of an international conference "Matematica I informatica"*, Moscow, March 13-17, pp. 125–126. (Russian)

13. Chirskii V. G., 2016, "On transformations of periodic sequences", *Proceedings of an international conference "Matematica I informatica"*, Moscow, March 13-17, pp. 143–144. (Russian)

14. Luzhina L. M., Makarov Yu. N., 2016, "A sufficient condition of the algebraic dependence of polyadic series", *Proceedings of an international conference "Matematica I informatica"*, Moscow, March 13-17, pp. 123–124. (Russian)

15. Chirskii V. G., Matveev V. Yu., 2013, "On certain properties of polyadic expansions", *Chebyshevskiy sbornik*, v. 14, no. 2, pp. 163–172. (Russian)

Московский педагогический государственный университет.
Получено 30.06.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 511.31

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛУГРУПП НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ II.[1]

Ю. Н. Штейников (г. Москва)

Аннотация

Пусть имеется подмножество A натуральных чисел из отрезка $[1, q]$ со следующим условием. Если элементы a, b из A и ab не превосходит q, то ab принадлежит A. Пусть также известно, что $|A| < q^{\nu}$, ν- некоторое фиксированное число не превосходящее 1. В данной работе ставится вопрос о числе элементов A на отрезке длины существенно меньше чем q, — на отрезке $[1, x]$, где x существенно меньше чем произвольная степень q.

В этой задаче в случае, когда A — множество специального вида и при некоторых ограничениях на $|A|$ и x, уже получены определенные результаты. Так, из работы Ж. Бургейна, С. Конягина и И. Шпарлинского вытекают нетривиальные оценки в случае когда A — некоторая мультипликативная подгруппа группы обратимых элементов системы вычетов по простому модулю.

Исходная задача обобщает ее на случай полугрупп вместо мультипликативных подгрупп. Отметим, что имеются вполне определенные результаты по этой задаче. Основной результат данной работы — выведена новая оценка на число элементов полугруппы натуральных чисел заданном коротком интервале от 1 до x. Полученные оценки содержательны, когда x существенно меньше чем любая степень q. Более точно, пусть A — наша полугруппа, $g := \frac{\log\log x}{\log\log q}, x = q^{o(1)}$, при q стремящемся к бесконечности. Тогда число элементов A в интервале $(1, x)$ не превосходит $x^{1-C(g,\nu)+o(1)}$, где $C(g, \nu)$ — некоторая явно выписываемая положительная функция. Предыдущие результаты относились к оценке функции $C(g, \nu)$, найденная новая оценка для $C(g, \nu)$ улучшает предыдущий результат для некоторой области параметров (g, ν).

При доказательстве существенно используются свойства распределения гладких чисел, чисел с большой гладкой частью, оценки на число делителей фиксированно числа в заданном диапазоне. В работе используются некоторые результаты Ж. Бургейна, С. Конягина и И. Шпарлинского.

Ключевые слова: полугруппа, распределение, гладкие числа, делимость, делители.
Библиография: 15 названий.

ON THE DISTRIBUTION OF ELEMENTS SEMIGROUPS OF NATURAL NUMBERS II.

Yu. N. Shteinikov (Moscow)

Abstract

Suppose there is subset A of positive integers from the interval $[1, q]$ with the following condition. If the elements a, b of A and ab is at most q, then ab belongs to A. In additition let also know that $|A| < q^{\nu}$, ν - is some fixed number, not exceeding 1. In this paper we consider the question of the number of elements belonging to A on the interval with length substantially less than q, - on the interval $[1, x]$, where x is much smaller than an arbitrary power of q.

In this task, in the case when A - is a special set and with certain restrictions on $|A|$ and x, there exists some results. So, from the work of J. Bourgain, S. Konyagin and I. Shparlinskii there

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00332

are nontrivial estimates in the case when A - a multiplicative subgroup of invertible elements of the residue ring modulo prime.

The initial problem generalize it to the case of semigroups instead of multiplicative subgroups. It should be noted that there are quite definite results on this task. The main result of this work is to derived a new estimate on the number of elements of the semigroup of natural numbers given short interval from 1 to x. These estimates are meaningful when x is much smaller than any power of q. More precisely, let A - our semigroup, $g := \frac{\log\log x}{\log\log q}, x = q^{o(1)}$ for q tends to infinity. Then the number of elements of A in the interval $(1, x)$ does not exceed $x^{1-C(g,\nu)+o(1)}$, where $C(g, \nu)$ - some clearly written positive function. Previous result relates to the estimation of function $C(g, \nu)$, a new estimate for the $C(g, \nu)$ improves the previous result for a certain range of parameters (g, ν).

We essentially use in the proof the distribution of smooth numbers, the numbers with a large part of the smooth part, estimates on the number of divisors of a fixed number in a given interval. We use some results of J. Bourgain, S. Konyagin and I. Shparlinski.

Keywords: semigroup, distribution, smooth numbers, divisibility, divisors.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Пусть $A \subset \mathbb{N}$ — множество, замкнутое относительно операции умножения, то есть если $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 a_2 \in A$. Такие множества A называют полугруппами. В частности, можно взять множество $A = \{n \in \mathbb{N} : n \in G \pmod m\}$, где $m \in \mathbb{N}$, а G — мультипликативная подгруппа группы $\mathbb{Z}_m^*$.

Нас будет интересовать случай, когда для некоторого натурального q и $0 < \nu < 1$ справедливо неравенство:

$$|\{n \in A; n \leq q\}| < q^{\nu}. \tag{1}$$

Пусть для $x > 0$ определим :

$$f(x) = |A \cap [1, x]|.$$

В работе [3] получены оценки на количество чисел не превосходящих n, которые принадлежат подгруппе порядка t группы $\mathbb{Z}_p^*$. Эти оценки содержательны, когда t мало по сравнению с p. Из нашей работы вытекают оценки в случае, когда t растет как степень p, а n мало. В работе [6] были уже получены нетривиальные верхние оценки на $f(n)$, когда n растет медленнее, чем произвольная степень q. Целью данной работы является доказать более сильный вариант теоремы, доказанной в [6].

Приведем утверждение, доказанное в [6].

Теорема 1. *Пусть A — множество, замкнутое относительно операции умножения и удовлетворяет условию (1) для некоторого фиксированного $\nu \in (0, 1)$ и задано x. Если $\gamma := \frac{\log\log x}{\log\log q}$ и $\log x = o(\log q)$, то*

$$f(x) \leq x^{1-max\{L_\gamma, M_\gamma\}+o(1)}, q \to \infty, \tag{2}$$

где

$L_\gamma = \gamma(\frac{1-\nu}{1-\gamma+\sqrt{(1-\gamma)^2+\gamma(1-\nu)}})^2$ *и* $M_\gamma = \frac{(1-\nu)^2\gamma}{4(1-\gamma)}$, *если* $\gamma \leq \frac{2}{3-\nu}$ *и* $M_\gamma = 2 - \nu - \frac{1}{\gamma}$, *если* $\gamma > \frac{2}{3-\nu}$.

Основной результат этой статьи — доказать следующий более сильный вариант теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть A — множество, замкнутое относительно операции умножения и удовлетворяет условию (1) для некоторого фиксированного $\nu \in (0, 1)$ и задано x. Если $\gamma := \frac{\log\log x}{\log\log q}$ и $\log x = o(\log q)$, то*

$$f(x) \leq x^{1-C_\gamma+o(1)}, q \to \infty, \tag{3}$$

где

$C_\gamma = \gamma(\frac{\gamma-1+\sqrt{\gamma^2+\nu-2\gamma\nu}}{2\gamma-1})^2$ *если* $\gamma \neq \frac{1}{2}$ *и* $C_{\frac{1}{2}} := \lim_{\gamma\to\frac{1}{2}} C_\gamma = \frac{1}{2}(1-\nu)^2$.

Схема доказательства теоремы 2 совпадает со схемой доказательства теоремы 1. Но при этом в доказательстве будем пользоваться одной более точной оценкой, которая и приводит к результату теоремы 2.

2. Вспомогательные утверждения

Введем некоторые определения и обозначения аналогичные в статье [6]. Нам потребуются оценки для множеств чисел, у которых все простые делители малы. Для натурального n пусть $P^+(n)$ обозначает наибольший простой делитель числа n, $P^+(1) = 1$. Для $x \geqslant y \geqslant 2$ полагаем:

$$\psi(x,y) = |\{n \leqslant x : P^+(n) \leqslant y\}| \tag{4}$$

Известна следующая теорема. Ее формулировку можно найти в работе [1].

Теорема A [1]. *Пусть* $x \geq y \geq 2, v = \frac{\log x}{\log y}$ *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *на множестве* $v \leq y^{1-\varepsilon}$ *имеет место неравенство:*

$$\psi(x,y) = xv^{-v(1+o(1))},$$

если $v \to \infty$.

Предположим, что задано целое y. Каждое натуральное n представим в виде $n = n_1n_2$, так что если простое p делит n_1, то $p \leq y$, а если делит n_2, то $p > y$. Пусть также даны x, z. Определим множество:

$$N(x,y,z) = \{n \leq x : n_1 > z\}.$$

Мы хотим оценить сверху количество элементов множества $N(x,y,z)$. На довольно большой области изменения x, y, z была получена ассимптотика $N(x,y,z)$ в работе [4]. Следуя схеме, предложенной в [4] в работе [6] был получен более грубый результат, но при еще слабых ограничениях на параметры x, y, z. Ниже приводится его формулировка.

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *фиксировано,* q, x *— достаточно большие. Пусть положительные вещественные* $\alpha, \beta, \gamma := \frac{\log\log x}{\log\log q}$ *удовлетворяют условиям*

$$\beta < 1, \gamma \leq \alpha(1-\varepsilon), \varepsilon \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

и также

$$y := (\log q)^\alpha \geq 2, z := x^\beta.$$

Если $\frac{\log x}{\log\log q} \to \infty$ *при* $q \to \infty$, *то*

$$|N(x,y,z)| \leq x^{1-\frac{\beta\gamma}{\alpha}+o(1)}. \tag{5}$$

Нам также понадобится утверждение, доказанное в [6]. Оно приводится ниже.

Лемма 2. *Количество делителей числа* $n < Q$, *не превосходящих* z, *не превосходит* $\psi(z,(1+o(1))\log Q), Q \to \infty$..

Теперь все готово для доказательства теоремы 2.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\gamma := \frac{\log\log x}{\log\log q}$ Введем положительные вещественные параметры $\alpha > 1, \beta$; удовлетворяющие условию леммы 1 для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и соответственно $y = (\log q)^{\alpha}, z = x^{\beta}$. Каждое натуральное n представим в виде $n = n_1 n_2$, так что если простое p делит n_1, то $p \le y$, а если p делит n_2, то $p > y$. Разделим элементы множества $A \cap [1,x]$ на два подмножества A' и A'', $A \cap [1,x] = A' \cup A''$. По определению полагаем $A'' := \{n \in A \cap [1,x] : n_1 > z\}$, $A' := \{A \cap [1,x]\} \setminus A''$. Совершенно ясно, что $f(x) = |A'| + |A''|$.

I)Оценим размер множества A''. По лемме 1 получаем

$$|A''| \le N(x,y,z) \le x^{1-\frac{\beta\gamma}{\alpha}+o(1)}, q \to \infty. \tag{6}$$

II)Теперь перейдем к оценке $|A'|$. Для этого рассмотрим множество $B =: \{m_1 \dots m_r\}$, где $r = [\frac{\log q}{\log x}] = [(\log q)^{1-\gamma}]$ и $m_1, \dots, m_r \in A'$. Из определения r следует, что если $m \in B$, то $m \le q$. Так как произведение чисел из A' является числом из A то легко видеть, что $|B| \le |A \cap [1,q]| \le q^{\nu}$. Теперь оценим снизу $|B|$. Пусть каждый $m_i \in A'$ по аналогии представим в виде $m_i = m_{1,i} m_{2,i}$, так что если простое p делит $m_{1,i}$, то $p \le y$, а если p делит $m_{2,i}$, то $p > y$. Определим из равенства $N_1, N_2 : m = m_1 \dots m_r = m_{1,1} \dots m_{1,r} m_{2,1} \dots m_{2,r} = N_1 N_2$, где $N_1 = m_{1,1} \dots m_{1,r}$ и $N_2 = m_{2,1} \dots m_{2,r}$.

Возьмем конкретный представитель, например элемент $m \in B$ и оценим сверху число представлений его в виде произведения r множителей, где каждый принадлежит A'.

Пусть $m = N_1 N_2$, оценим количество представлений для N_2 в виде произведения r чисел $m_{2,1} \dots m_{2,r}$, $N_2 = m_{2,1} \dots m_{2,r} = p_1 \dots p_s$,где все $p_i > y$ и являются простыми числами. Видим, что $s \le [\frac{\log N_2}{\log y}] \le \frac{\log N_2}{\alpha \log\log q}$.

Каждый делитель $p_i, i = 1, \dots, s$ может входить в разложение некоторого $m_{2,j}, j = 1, \dots, r$. Значит количество представлений числа N_2 не превосходит $r^s \le N_2^{\frac{1-\gamma}{\alpha}}$.

Теперь оценим количество представлений для фиксированного N_1 в виде $N_1 = m_{1,1} \dots m_{1,r}$, когда $m_{1,i} \in A'$ Покажем, что число таких представлений числа N_1 не превосходит $N_1^{1-\gamma} q^{o(1)}, q \to \infty$. Возьмем и зафиксируем достаточно большое натуральное число J. Введем по определению интервалы $\triangle_j := [z^{\frac{j-1}{J}}, z^{\frac{j}{J}}), j \in [1,J]$. Каждый из множителей $m_{1,i}, i = 1, \dots, r$ попадает в один из интервалов $\triangle_j, j = 1, \dots, J$. Число способов распределения r чисел $m_{1,i}, i = 1, \dots, r$ по интервалам $\triangle_j$ не превосходит $J^r = q^{o(1)}, q \to \infty$. Пусть теперь каждый $m_{1,i}, i = 1, \dots, r$ относится к какому-то из $\triangle_j, j = 1, \dots, J$. Если, например $m_{1,1} \in \triangle_j$, то $m_{1,1} \le z^{\frac{j}{J}}$ и $m_{1,1}$ является делителем числа $N_1 < q$. По лемме 2 количество таких $m_{1,1}$ не превосходит $\psi(z^{\frac{j}{J}}, (1+o(1))\log q)$. Пользуясь теоремой A, получаем $\psi(z^{\frac{j}{J}}, (1+o(1))\log q) = z^{\frac{j}{J}(1-\gamma+o(1))}, q \to \infty$. Таким образом, если $m_{1,i} \in \triangle_j$ то число число возможностей для числа $m_{1,i}$ не превосходит $z^{\frac{j}{J}(1-\gamma+o(1))}$ и

$$z^{\frac{j}{J}(1-\gamma+o(1))} \le z^{(\frac{j-1}{J}+\frac{1}{J})(1-\gamma+o(1))} \le m_{1,i}^{1-\gamma+o(1)} z^{\frac{1}{J}(1-\gamma+o(1))}. \tag{7}$$

Поэтому если фиксировано, что каждый из $m_{1,i}, i = 1, \dots, r$ принадлежит какому-то из $\triangle_j$, то число представлений числа N_1 в виде произведения чисел $m_{1,i}$ не превосходит $N_1^{1-\gamma+o(1)} q^{\frac{\beta}{J}(1-\gamma+o(1))}$. Умножив эту величину на число способов распределения чисел $m_{1,i}$ по интервалам $\triangle_j$, которое равно $q^{o(1)}$ получим верхнюю оценку на искомое число представлений N_1 в виде произведения $m_{1,1} \dots m_{1,r}$. Оно не превосходит $N_1^{1-\gamma+o(1)} q^{\frac{\beta}{J}(1-\gamma)+o(1)}$. В силу произвольности J эта величина есть $N_1^{1-\gamma+o(1)} q^{o(1)}, q \to \infty$.

Итак, мы оценили количество представлений чисел N_1 и N_2 в виде произведения $m_{1,1} \dots m_{1,r}$ и соответственно $m_{2,1} \dots m_{2,r}$. Число же представлений элемента $m \in B$ в виде произведения $m_1 \dots m_r$, где $m_i \in A'$ не превосходит произведения числа представлений для

N_1 и N_2, то есть $N_1^{1-\gamma}N_2^{\frac{1-\gamma}{\alpha}}$. При $\alpha > 1$ наибольшее значение, которое эта величина может принимать равно $q^{(1-\gamma)(\beta+\frac{1-\beta}{\alpha})+o(1)}$.

Отсюда получается и нижняя оценка для B :

$$\frac{|A'|^r}{q^{(1-\gamma)(\beta+\frac{1-\beta}{\alpha})+o(1)}} \leq |B| \leq q^{\nu}. \tag{8}$$

Отсюда следует оценка для $|A'|$:

$$|A'| \leq x^{\nu+(1-\gamma)(\beta+\frac{1-\beta}{\alpha})+o(1)}.$$

Вспоминаем, что

$$|A''| \leq x^{1-\frac{\beta\gamma}{\alpha}+o(1)}.$$

Оценка для $f(x)$ складывается из оценок для $|A'|$ и $|A''|$. Теперь осталось выбрать параметры $\alpha > 1, \beta$ для оптимизации финальной оценки. Если $\gamma \neq \frac{1}{2}$ то возьмем следующие параметры $\beta := \frac{\gamma-1+\sqrt{\gamma^2-2\gamma\nu+\nu}}{2\gamma-1}, \alpha := \frac{1}{\beta}$. Если $\gamma = \frac{1}{2}$ то $\beta = \frac{1}{\alpha} = 1-\nu$. Подставляя такие параметры, мы завершаем доказательство теоремы 2.

4. Заключение

Получим нижние оценки на величину $f(x)$, когда $x = exp\{(\log q)^{\gamma}\}$.

Возьмем любое число $0 < \nu < 1$ и положим A_q- полугруппа y — гладких чисел, где

$$y = (\log q)^{\lambda},$$

где $\lambda = \frac{1}{1-\nu+\varepsilon}$, где ε — малое число.

Пользуясь теоремой [A] о количестве гладких чисел при при $q \geq q(\nu, \varepsilon)$ получаем,

$$|A_q \bigcap [1,q]| < q^{\nu}.$$

Тогда выполнено неравенство (1).

Пользуясь вновь теоремой [A], получаем

$$|A_q \bigcap [1, e^{(\log q)^{\gamma}}]| = x^{1-\gamma+\gamma\nu-\varepsilon'\gamma+o(1)}, q \to \infty,$$

где $\varepsilon' > 0$ — некоторое малое число.

Поэтому верхняя оценка для функции C_γ с точностью до слагаемых малых порядков такая $\gamma-\gamma\nu$. Оценка, которая получена в теореме 2 для функции C_γ хуже чем эта. Возможно именно она и является правильной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hildebrand A., Tenenbaum G. Integers without large prime factors // J Theorie des Nombres de Bordeaux. 1993. Vol 5, № 2. P. 411-484.

2. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967, 512 с.

3. Bourgain J., Konyagin S., Shparlinski I. Distribution of elements of cosets of small subgroups and applications // International Math Research Notices. 2012. Vol 201, №9. P. 1968–2009.

4. Banks W., Shparlinski I. Integers with a large smooth divisor // Electronic journal of combinatorial number theory. 2007 Vol. 7.

5. Tenenbaum G. Introduction to analytic and probabilistic number theory. Cambridge Universit Press, Cambridge, UK, 1995.

6. Штейников Ю.Н. О распределении элементов полугрупп натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, № 3. С. 91–99.

7. Малыхин Ю. В. Оценки тригонометрических сумм по модулю p^2 // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, № 6. С. 81–94.

8. Малыхин Ю. В. Оценки тригонометрических сумм по модулю p^r // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 5, С. 793–796.

9. Bourgain J., Konyagin S., Shparlinski I. Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm // Int. Math Research Notices. 2008. rnn 090, P. 1–29.

10. Bourgain J., Ford K. , Konyagin S., Shparlinski I. On the divisibility of Fermat Quotients // Michigan J. Math. 2010. Vol.59, № 2, P. 313–328.

11. Bourgain J., Konyagin S. Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2003. Vol. Vol.337, № 2, P. 75–80.

12. Heath-Brown D. R., Konyagin S. New bounds for Gauss sums derived from kth powers, and for Heilbronn's exponential sum // Q. J. Math., 2000. Vol. 51, №2, P. 221–235.

13. Konyagin S., Shparlinski I. Character sums with exponential functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

14. Shkredov I. On Heilbronn's exponential sum // Q. J. Math., 2013. Vol. 64, № 4, P. 1221–1230.

15. Zhou B. A note on exponential sums over subgroups of $\mathbb{Z}_{p^2}^*$ and their applications // J. Number Theory, 2010. Vol. 130, № 11, P. 2467–2479.

REFERENCES

1. Hildebrand, A., & Tenenbaum, G. 1993, "Integers without large prime factors J Theorie des Nombres de Bordeaux, 5, 2. pp. 411–484.

2. Prachar, K. 1967, "Raspredelenie prostich chisel (Russian) [Distribution of prime numbers] Mir, Moscow, pp. 1–512.

3. Bourgain, J., Konyagin. S., & Shparlinski. I. 2012, "Distribution of elements of cosets of small subgroups and applications"Int. Math Research Notices, 201, 9. pp. 1968–2009.

4. Banks, W., & Shparlinski, I. 2007, "Integers with a large smooth divisor Electronic journal of combinatorial number theory, 7.

5. Tenenbaum, G. 1995, "Introduction to analytic and probabilistic number theory Cambridge Universit Press, Cambridge, pp. 1–466.

6. Shteinikov, Y.N. 2012, "On the distribution of semigroups of natural numbers Chebishev's sbornik, 13, 3, pp. 91–99.

7. Malykhin, Y. V. 2005, "Estimates of exponential sums modulo p^2 Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, 11, 6, pp. 81–94.

8. Malykhin, Y. V. 2006, "Estimates of exponential sums modulo p^r Mathematical Notes, 80, 5, pp. 793–796.

9. Bourgain, J. Konyagin, S. & Shparlinski I. 2008, "Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm Int. Math Research Notices, rnn 090, pp. 1–29.

10. Bourgain, J. Ford, K. Konyagin, S. & Shparlinski, I. 2010, "On the divisibility of Fermat Quotients Michigan J. Math., 59, 2, pp. 313–328.

11. Bourgain, J. & Konyagin, S. 2003, "Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 337, 2, pp. 75–80.

12. Heath-Brown, D. R. & Konyagin, S. 2000, "New bounds for Gauss sums derived from kth powers, and for Heilbronn's exponential sum Q. J. Math., 51, 2, pp. 221–235.

13. Konyagin, S., & Shparlinski, I. 1999, "Character sums with exponential functions Cambridge University Press, Cambridge, pp. 1–163.

14. Shkredov, I.D. 2013, "On Heilbronn's exponential sum Q. J. Math., 64, 4, pp. 1221–1230.

15. Zhou, B. 2010, "A note on exponential sums over subgroups of $\mathbb{Z}_{p^2}^*$ and their applications J. Number Theory, 130, 11, pp. 2467–2479.

ФГУ ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук
Получено 9.03.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 514.174.5

ОЦЕНКА ЧИСЛА P2–РАЗБИЕНИЙ ПЛОСКОСТИ НА ПОЛИМИНО ЗАДАННОЙ ПЛОЩАДИ[1]

А. В. Шутов (г. Владимир), Е. В. Коломейкина (г. Москва)

Аннотация

В работе рассматривается задача о числе $p2$–разбиений плоскости на полимино заданной площади. Полимино представляет собой связную фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам. В настоящее время активно исследуются различные перичислительные комбинаторные задачи, связанные с полимино. Представляет интерес подсчет числа полимино определенных классов, а также подсчет числа разбиений конечных фигур или всей плоскости на полимино определенного типа. Разбиение называется $p2$–разбиением, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом или центральной симметрией, причем это преобразование переводит все разбиение в себя. $p2$-разбиения являются частным случаем правильных разбиений плоскости. Пусть $t(n)$ – число $p2$–разбиений плоскости на полимино площади n, решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$. Доказано, что справедливо неравенство $C_1 2^n \leq t(n) \leq C_2 n^4 (2.68)^n$. При доказательстве нижней оценки использована явная конструкция, позволяющая построить требуемое число $p2$–разбиений плоскости. Доказательство верхней оценки основано на критерии Конвея существования $p2$–разбиений плоскости, а также на теории самонепересекающихся блужданий на квадратной решетке. Ранее аналогичные результаты были получены авторами в задаче подсчета числа решетчатых разбений плоскости на полимино заданной площади, а также в задаче подсчета числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино.

Ключевые слова: разбиения, правильные разбиения, кристаллографические группы, $p2$-разбиения, полимино, самонепересекающиеся блуждания.

Библиогафия: 28 названий

THE ESTIMATION OF THE NUMBER OF P2–TILINGS OF A PLANE BY A GIVEN AREA POLYOMINO

A. V. Shutov, E. V. Kolomeykina

Abstract

We consider the problem about a number of $p2$–tilings of a plane by a given area polyominoes. A polyomino is a connected plane geometric figure formed by joining one or more unit squares edge to edge. At present, various combinatorial enumeration problems connected to the polyomino are actively studied. There are some interesting problems on enuneration of various classes of polyominoes and enumeration of tilings of finite regions or a whole plane by polyominoes. The tiling is called $p2$–tiling, if each tile can be mapped to any other tile by the translation or the central symmetry, and this transformation maps the whole tiling to itself. $p2$-tilings are special case of regular plane tilings. Let $t(n)$ be a number of $p2$–tilings of a plane by a n-area polyomino such that the lattices of periods of these tilings are sublattices of $\mathbb{Z}^2$. It is proved that following inequality is true: $C_1 2^n \leq t(n) \leq C_2 n^4 (2.68)^n$. To prove the lower

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РНФ, грант $\mathcal{N}$ 14–11–00433.

bound we use the exact construction of required tilings. The proof of the upper bound is based on the Conway criterion of the existence of $p2$–tilings of a plane. Also, the upper bound depends on the theory of self-avoiding walks on the square lattice. Earlier similar results were obtained by authors for the number of lattice tilings of a plane by a given area polyomino (it's more simple type of a plane tilings by polyomino), and for the number of lattice tilings of the plane by centrosimmetrical polyomino.

Keywords: tilings, regular tilings, crystallographic groups, $p2$-tilings, polyomino, self-avoiding walks.

Bibliography: 28 titles.

1. Введение

Полимино, как известно, представляет собой фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов (клеток), которая сильно связна, то есть из любой клетки в любую другую клетку этого полимино можно попасть, переходя по общим сторонам смежных клеток.

Пример полимино изображен на рис. 1.

Это понятие и сам термин полимино были введены в 1953 году С. В. Голомбом [9], [22], и с тех пор привлекли внимание как любителей занимательной математики, так и профессиональных исследователей всего мира.

Большой вклад в популяризацию математических задач, связанных с полимино, внес М. Гарднер, который в своей рубрике "Математические игры"в журнале Scientific American опубликовал серию статей, обсуждающих эти проблемы, а затем включил соответствующие главы в свои книги [18]- [21].

Одной из основных задач было определение числа a_n всевозможных полимино (разных с точностью до трансляции) заданной площади n и числа b_n всевозможных типов полимино (разных с точностью до движения — трансляций, поворотов, отражений), состоящих из заданного числа клеток. Легко понять, что $b_n \leq a_n \leq 8b_n$. Кларнер доказал [11] существование отличной от нуля константы роста $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$, что означает экспоненциальный характер роста чисел a_n и b_n. Сейчас доказано, что $\alpha > 4$ [2] и $\alpha < 4,65$ [12]. В работе [10] вычислены точные значения a_n для $n \leq 56$.

Учитывая сложность задачи оценки a_n или b_n, были предприняты попытки выделить классы полимино особого вида, для которых такие оценки возможны. Подробный обзор работ по подсчету числа классов полимино можно найти в [3].

Одной из самых важных и пока не решенных задач, связанных с полимино, является нахождение необходимого и достаточного условия существования разбиения плоскости на заданные полимино. В работе [21] найдены все классы полимино, разбивающие плоскость, с числом клеток $n \leq 7$. Позднее для $n \leq 9$ аналогичное исследование было проведено в [16]. В работах [15] и [14] для всех полимино площади n с $n \leq 14$ и $n \leq 25$ соответственно найдены периодические разбиения плоскости на данное полимино с минимальным числом клеток в фундаментальной области решетки периодов или доказано отсутствие периодических разбиений на заданное полимино.

Хорошо известно, что задача о существовании алгоритма, позволяющего установить, существует ли разбиение плоскости из данного конечного набора фигур-прототайлов, тесно связана с задачей о существовании непериодичекого разбиения из заданного набора прототайлов. Амман, Грюнбаум и Шепард [1] показали, что существует набор из 3 полимино, разбивающих плоскость только непериодически. Как следствие, ими было показано, что задача об определении того, существует ли разбиение плоскости на полимино из заданного набора, алгоритмически неразрешима. Неизвестно, является ли алгоритмически разрешимой задача о существовании разбиения плоскости на заданное полимино. Это связано с тем, что в настоящее время неизвестно, существует ли полимино, разбивающее плоскость только непериодически.

Поскольку мы не можем решать общую задачу, связанную с разбиениями на полимино, возникает задача об изучении разбиений отдельных типов, простейшими из которых являются решетчатые разбиения.

Определение 1. *Разбиение называется решетчатым, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом, причем это преобразование переводит все разбиение в себя.*

Без ограничения общности можно считать, что все вершины полимино являются точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$. Можно доказать, что любое решетчатое разбиение плоскости топологически эквивалентно (гомеоморфно) одному из двух разбиений, а именно: правильному разбиению плоскости на квадраты или на правильные шестиугольники. Пусть n — площадь полимино, то есть полимино состоит из n квадратов площадью 1 квадратная единица каждый. Возникает задача подсчитать число $T(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади n, решетка периодов которых является подрешеткой $\mathbb{Z}^2$. Числа $T(n)$ для малых значений n были вычислены в работах Роудса [16] и Малеева [23]. В работе [24] была рассмотрена задача подсчета числа решетчатых разбений плоскости на полимино заданной площади с заданными решетками. Задача о числе решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади, топологически эквивалентных правильному разбиению плоскости на квадраты, рассмотрена в работе Брлеко и Фросини [4]. Кроме того в работе [8] был предложен алгоритм сложности $O(n^2)$ позволяющий определить, порождает ли полимино площади n решетчатое разбиение плоскости. Позднее данный алгоритм был усовершенствован в работе [5].

В работах [26], [27] было показано, что для числа $T(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади n, решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$, верна следующая оценка

$$2^{n-3}+2^{[\frac{n-3}{2}]}\leq T(n)\leq C(n+1)^3(2,7)^{n+1}. \tag{1}$$

Позже в работе [28] было показано, что для числа $T_c(n)$ решетчатых разбиений плоскости на центрально–симметричные полимино заданной площади n справедлива оценка

$$c_1(\sqrt{2})^n\leq T_c(n)\leq c_2(n+1)^2(\sqrt{2.68})^n. \tag{2}$$

Следующим по сложности после решетчатых разбиений являются правильные разбиения плоскости.

Определение 2. *Разбиение называется правильным, если для любых двух его фигур существует движение из группы симметрий этого разбиения, переводящее одну фигуру в другую и при этом все разбиение в себя.*

Очевидно, что решетчатые разбиения являются частным случаем правильных разбиений. Правильные разбиения классифицируются по группам симметрии ячейки разбиения, которых всего 17 (кристаллографические группы). Решетчатым разбиениям соответствует группа $p1$, следующей по сложности является группа $p2$, порожденная решеткой и преобразованием центральной симметрии. Изучению разбиений, правильных относительно конкретных кристаллографических групп посвящен целый ряд работ. Например, в работах [6], [7] представлен компьютерный алгоритм перечисления правильных разбиений на полимино с конкретной кристаллографической группой $p4$ с ограничением на количество клеток в полимино.

Мы будем рассматривать $p2$–разбиения плоскости на гомеоморфные диску полимино. Также мы будем предполагать, что решетка периодов разбиения является подрешеткой целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.

Определение 3. *Разбиение называется p2–разбиением, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом или центральной симметрией, причем это преобразование переводит все разбиение в себя.*

Пример $p2$-разбиения плоскости на полимино изображен на рис. 2.

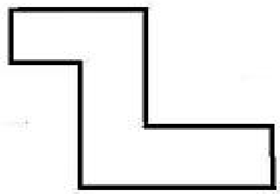


Рис. 1. Полимино.

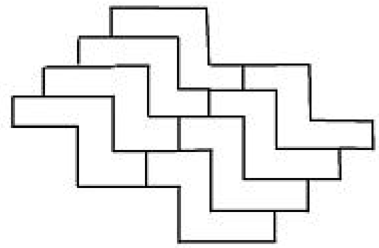


Рис. 2. Пример $p2$–разбиения.

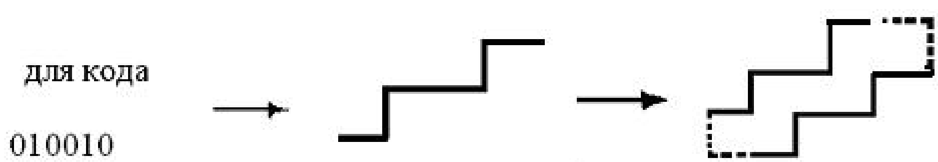
В настоящей статье мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для числа $t(n)$ p2–разбиений плоскости на полимино заданной площади n, решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$, имеет место следующая оценка:*

$$C_1 2^n \leq t(n) \leq C_2 n^4 (2.68)^n. \tag{3}$$

2. Нижняя оценка на число $p2$–разбиений на полимино заданной площади

Рассмотрим оценку снизу. Пусть n — площадь полимино. Берем произвольную последовательность w из нулей и единиц длины $n-1$. Строим по ней ломаную следующим образом: 0 в последовательности соответствует сдвигу вправо, 1 в последовательности соответствует сдвигу вверх. Далее сдвигаем ломаную на вектор $(-1;1)$. Полученная ломаная с исходной не пересекаются. Дополняем эти две ломаные двумя "уголками"до образования полимино. Легко видеть, что получили полимино площади n (см. рис. 3).



код ломаная полимино

Рис. 3. Пример образования полимино из кода.

В работах [26], [27] было показано, что все полимино, получаемые таким образом, дают решетчатые разбиения плоскости с решеткой периодов, порождаемой векторами $(-1;1)$ и $(n;1)$. Более того, среди данных разбиений имеется не менее $c_1 2^n$ различных (появление константы c_1 объясняется тем, что соответствующие разным последовательностям w полимино иногда могут совпадать с точностью до движения).

Возьмем полимино f_1 площади n, построенное по последовательности w. Пристыкуем к f_1 полимино, полученное из него центральной симметрией относительно середины вертикального отрезка "правого уголка"в случае, когда последовательность w заканчивается на 0, и центральной симметрией относительно середины гризонтального отрезка "правого уголка", в случае, когда последовательность w заканчивается на 1(см. рис. 4). Полученное полимино f_2 будет центрально–симметричным полимино площади $2n$.

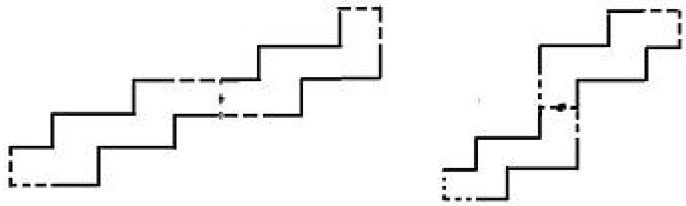


Рис. 4. Построение полимино f_2 по f_1.

Легко видеть, что если f_1 соответствует последовательности $w = w_1w_2\dots w_{n-1}w_n$, то f_2 может быть получено из последовательности $w' = w_1w_2\dots w_{n-1}w_nw_nw_nw_{n-1}\dots w_2w_1$. Следовательно, f_2 порождает решетчатое разбиение плоскости. Поскольку f_2 состоит из двух центрально симметричных копий f_1, полимино f_1 порождает $p2$-разбиение плоскости, что и дает нам нижнюю оценку

$$C_1 2^n \leq t(n). \tag{4}$$

3. Верхняя оценка на число $p2$–разбиений на полимино заданной площади

Вместо площади будем теперь фиксировать периметр полимино. Обозначим через $t'(p)$ число $p2$–разбиений плоскости на полимино полупериметра p. Данное определение корректно, так как периметр любого полимино — четное число.

Для $p2$–разбиения существует критерий Конвея [17], устанавливающий при каких условиях полимино задает $p2$–разбиение, а именно:

Теорема 2. *Полимино порождает $p2$–разбиение плоскости тогда и только тогда, когда граница полимино может быть разбита на 6 частей $abcdef$ таких, что a переходит в d параллельным переносом, остальные части b, c, e, f центрально симметричны, причем некоторые части могут быть пустыми. При этом различным разбиениям границы полимино соответствуют различные $p2$-разбиения плоскости на данное полимино.*

Разъясним геометрический смысл разбиения границы $abcdef$. Граница полимино рассматривается как замкнутая ломаная длины $2p$ без самопересечений (поскольку полимино имеет несамопересекающуюся границу) с отмеченными точками. Точки нужны для того, чтобы мы могли найти границы частей a, b, c, d, e, f, то есть восстановить полимино и разбиение. Отметим, что параллельный перенос, переводящий a в d и центральные симметрии, относительно центров частей b, c, e и f представляют собой преобразования, порождающие группу симметрий разбиения и позволяющие однозначно восстановить все разбиение по одному полимино и разбиению его границы (см. рис. 5). Поэтому число $p2$–разбиений на полимино заданного периметра не превосходит числа таких ломаных. Отметим, что ломаная d однозначно восстанавливается по ломаной a. Кроме того, каждая из ломаных b, c, e, f, в силу их центральной симметричности, восстанавливается по половине этой ломаной. Пусть длины ломаных a, b, c, d, e, f соответственно равны l_a, l_b, l_c, l_d, l_e и l_f. Ясно, что $l_a = l_d$. Кроме того, учитывая, что b, c, e, f центрально–симметричны, получаем

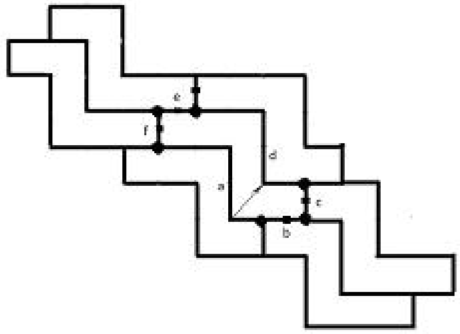


Рис. 5. Восстановление разбиения плоскости по разбиению границы полимино.

$$l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f) = p. \tag{5}$$

Рассмотрим не имеющие самопересечений ломаные, вершины которых есть вершины квадратной решетки, а ребра направлены вертикально или горизонтально. Такие ломаные называются *самонепересекающимися блужданиями* (*self-avoiding walks*). Известно, что число $m(l)$ самонепресекающихся блужданий длины l на квадратной решетке не превосходит $C(\varepsilon)(\mu+\varepsilon)^l$, где μ — так называемая *константа связности* квадратной решетки [13]. Пусть $m_c(l)$ — число самонепересекающихся центрально симметричных ломаных длины l. Ясно, что такая ломаная полностью определяется своей половиной, которая также является самонепересекающейся. Таким образом, справедлива оценка

$$m_c(l) \leq \begin{cases} m((l+1)/2), & l\text{– нечетно;} \\ m(l/2), & l\text{– четно.} \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$m_c(l) \leq m((l+1)/2) \leq C'(\varepsilon)(\mu+\varepsilon)^{l/2} \tag{6}$$

для всех l.

Исходя из сказанного выше, для числа $t'(p)$ $p2$-разбиений плоскости на равные полимино полупериметра p справедлива оценка

$$t'(p) \leq \sum_{\substack{l_a+\frac{1}{2}(l_b+l_c+l_e+l_f)=p,\\ l_a,l_b,l_c,l_e,l_f\geq 0}} m(l_a)m_c(l_b)m_c(l_c)m_c(l_e)m_c(l_f) \leq \tag{7}$$

$$\leq C'(\varepsilon) \sum_{\substack{l_a+\frac{1}{2}(l_b+l_c+l_e+l_f)=p,\\ l_a,l_b,l_c,l_e,l_f\geq 0}} (\mu+\varepsilon)^{l_a}(\mu+\varepsilon)^{l_b/2}(\mu+\varepsilon)^{l_c/2}(\mu+\varepsilon)^{l_e/2}(\mu+\varepsilon)^{l_f/2} \leq \tag{8}$$

$$\leq C'(\varepsilon) \sum_{\substack{l_a+\frac{1}{2}(l_b+l_c+l_e+l_f)=p,\\ l_a,l_b,l_c,l_e,l_f\geq 0}} (\mu+\varepsilon)^{l_a+\frac{1}{2}(l_b+l_c+l_e+l_f)} \leq C'(\varepsilon)(\mu+\varepsilon)^p \sum_{\substack{l_a+\frac{1}{2}(l_b+l_c+l_e+l_f)=p,\\ l_a,l_b,l_c,l_e,l_f\geq 0}} 1 \leq \tag{9}$$

$$\leq C''(\varepsilon)(\mu+\varepsilon)^p \cdot p^4. \tag{10}$$

Последняя оценка связана с тем, что

$$\sum_{\substack{l_a+\frac{1}{2}(l_b+l_c+l_e+l_f)=p,\\ l_a,l_b,l_c,l_e,l_f\geq 0}} 1$$

является количеством решений линейного диофантова уравнения $l_a+\frac{1}{2}(l_b+l_c+l_e+l_f)=p$, их количество асимптотически эквивалентно $16p^4$ [25].

Итак, мы получили, что число $p2$–разбиений на полимино с полупериметром p не превосходит

$$t'(p)\leq C''(\varepsilon)p^4(\mu+\varepsilon)^p. \tag{11}$$

Осталось перейти к площади. Методом математической индукции легко получить неравество, связывающее площадь и полупериметр полимино: $p\leq n+1$. Для получения верхней оценки числа $p2$–разбиений плоскости на полимино остается просуммировать предыдущую оценку по p от 1 до $n+1$:

$$t(n)\leq\sum_{p=1}^{n+1}t'(p)\leq\sum_{p=1}^{n+1}C''(\varepsilon)p^4(\mu+\varepsilon)^p. \tag{12}$$

Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int_0^{n+1}C''(\varepsilon)x^4(\mu+\varepsilon)^x dx$ и учитывая, что

$$\int x^4e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^5}(a^4x^4-4a^3x^3+12a^2x^2-24ax+24), \tag{13}$$

получаем оценку

$$t(n)\leq C'''(\varepsilon)n^4(\mu+\varepsilon)^n. \tag{14}$$

В настоящее время лучшие доказанные оценки для μ имеют вид

$$2.625622\leq\mu\leq 2.679193. \tag{15}$$

Ограничимся неравенством $\mu\leq 2.68$, которое и доказывает теорему.

4. Заключение

В работе получены верхние и нижние оценки для числа $p2$-разбиений плоскости на полимино заданной площади. Эти оценки аналогичны полученным ранее авторами оценкам для числа решетчатых разбиений.

Отметим несколько нерешенных проблем, возникающих в связи с полученными оценками.

1) Явно вычислить значения $t(n)$ для малых значений n, например для $n\leq 20$.

2) Устранить разрыв между полученными оценками сверху и снизу. В дальнейшем интересно было бы вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{t(n)}.$$

Некоторые вычисления из [23], [24] наводят на мысль о том, что значение данного предела равно 2, что делает особенно актуальной задачу улучшения верхней оценки.

3) Выяснить, каких разбиений при больших n асимптотически больше: решетчатых или $p2$-разбиений.

4) Получить оценки для числа разбиений плоскости на полимино заданной площади, правильных относительно других кристаллографических групп, например, относительно группы

$p4$. Здесь нужно заметить, что не все кристаллографические группы реализуются как группы симметрий разбиений плоскости на полимино. Это связано с тем, что разбиения плоскости на полимино не могут обладать поворотными симметриями порядков 3 и 6.

5) Перенести имеющиеся оценки для числа разбиений плоскости на полимино на случай разбиений плоскости на полигексы и полиамонды, а также разбиений трехмерного пространства на поликубы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ammann R., Grunbaum B., Shephard G. Aperiodic tiles // Discrete and Computational Geometry. 1991. Vol. 6, no. 1, P. 1–25.

2. Barequet G., Rote G., Shalah M. $\lambda > 4$ // Algorithms – ESA 2015 Proceedings, Springer, 2015, P. 83–94.

3. Bousquet-Melou M., Brak R. Exactly solved models // Polygons, Polyominoes and Polycubes. 2009. Springer. P. 43–78.

4. Brlek S., Frosini A., Rinaldi S., Vuillon L. Tilings by translation: enumeration by a rational language approach // The electronic journal of combinatorics. 2006. Vol. 13, R15.

5. Brlek S., Provencal X., Fedou J.-M. On the tiling by translation problem // Discrete Applied Mathematics. 2009. Vol. 157, no. 3, P. 464–475.

6. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D., A method to generate polyominoes and polyiamonds for tilings with rotational symmetry // Graphs and Combinatorics. 2007. Vol. 23, Supplement 1, P. 259–267.

7. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D. Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry // Computational Geometry and Graph Theory - International Conference, KyotoCGGT 2007, Kyoto, Japan, June 11-15, 2007. Revised Selected Papers. Springer. 2008. P. 68–78.

8. Gambini I., Vuillon L. An algorithm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations // RAIRO Theoretical Informatics and Applications. 2007. Vol. 41, no. 2, P. 147–155.

9. Golomb S.W. Checker boards and polyominoes // American Mathematical Monthly. 1954. Vol. 61. P. 672–682.

10. Jensen I. Counting polyominoes: a parallel implementation for cluster computing, Computational Science – ICCS 2003 Proceedings, Part III. Springer, 2003. P. 203–212.

11. Klarner D. A cell growth problems // Cand. J. Math. 1967. Vol. 19. P. 851–863.

12. Klarner D. A., Rivest R. L. A procedure for improving the upper bound for the number of n-ominoes // Canad. J. Math. 1973. Vol. 25. P. 585–602.

13. Madras N., Slade G. The self-avoiding walk. Springer, 1996. 427 pp.

14. Myers J. Polyomino, polyhex and polyiamond tiling. https://www.polyomino.org.uk/mathematics/polyform-tiling/. 2016

15. Rhoads G. C. Planar tilings and the search for an aperiodic prototile. PhD dissertation. Rutgers University. 2003.

16. Rhoads G.C. Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. Vol. 174. no. 2, P. 329–353.

17. Schattschneider D. Will it tile? Try the Conway criterion! // Mathematics Magazine. 1980. vol. 53, no. 4, P. 224–233.

18. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. 2-е изд. М.: Мир. 1999. 447 с.

19. Гарднер М. Математические досуги М.: Мир, 1972. 496 с.

20. Гарднер М. Математические новеллы. М.: Мир. 1974. 456 с.

21. Гарднер М. Путешествие во времени. М.: Мир, 1990. 341 с.

22. Голомб С. Полимино М.: Мир. 1975. 207 с.

23. Малеев А. В. Алгоритм и компьютерная программа перебора вариантов упаковок полимино в плоскости // Кристаллография. 2013. Т. 58, вып. 5, С. 749–756.

24. Малеев А. В., Шутов А. В. О числе трансляционных разбиений плоскости на полимино// Труды IX Всероссийской научной школы "Математические исследования в естественных науках". Апатиты. 2013. P. 101–106.

25. Нестеренко Ю. В., Галочкин А. И., Шидловский А. Б. Введение в теорию чисел. М.: Издательство Московского Университета. 1984. 152 с.

26. Шутов А. В., Коломейкина Е. В. О числе решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади // Труды XI Всероссийской научной школы "Математические исследования в естественных науках". Апатиты. 2014. P. 147–152.

27. Шутов А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, вып. 5, С. 148–157.

28. Шутов А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально–симметричные полимино заданной площади // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, вып. 2, С. 295–303.

REFERENCES

1. Ammann R. & Grunbaum B. & Shephard G. 1991, "Aperiodic tiles", *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 6, no. 1, pp. 1–25. doi: 10.1007/BF02293033.

2. Barequet G., Rote G. & Shalah M. 2015, "λ>4", *Algorithms – ESA 2015 Proceedings*, Springer, pp. 83–94. doi: 10.1007/978-3-662-48350-3.

3. Bousquet-Melou M. & Brak R. 2009, "Exactly Solved Models", *Polygons, Polyominoes and Polycubes*, Springer, pp. 43–78. doi:10.1007/978-1-4020-9927-4.

4. Brlek S., Frosini A., Rinaldi S. & Vuillon L. 2006, "Tilings by translation: enumeration by a rational language approach", *The electronic journal of combinatorics*, Vol. 13, R15.

5. Brlek S., Provencal X. & Fedou J.-M. 2009, "On the tiling by translation problem", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 157, no. 3, pp. 464–475. doi:10.1016/j.dam.2008.05.026.

6. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G. & Schattschneider D. 2007, "A method to generate polyominoes and polyiamonds for tilings with rotational symmetry", *Graphs and Combinatorics*, Vol. 23, Supplement 1, pp. 259–267. doi: 10.1007/s00373-007-0719-y.

7. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G. & Schattschneider D. 2008, "Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry", *Computational Geometry and Graph Theory - International Conference, KyotoCGGT 2007, Kyoto, Japan, June 11-15, 2007. Revised Selected Papers*, Springer, pp. 68–78. doi:10.1007/978-3-540-89550-3_7.

8. Gambini I. & Vuillon L. 2007, "An algorothm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations", *RAIRO Theoretical Informatics and Applications*, Vol. 41, no. 2, pp. 147–155.

9. Golomb S. W. 1954, "Checker boards and polyominoes", *American Mathematical Monthly*, Vol. 61, pp. 672–682. doi: 10.2307/2307321.

10. Jensen I. 2003, "Counting polyominoes: a parallel implementation for cluster computing", *Computational Science – ICCS 2003 Proceedings, Part III*, Springer, pp. 203–212.

11. Klarner D. 1967, "A cell growth problems", *Cand. J. Math.*, Vol. 19, pp. 851–863. doi: 10.4153/CJM-1967-080-4.

12. Klarner D. A. & Rivest R.L. 1973, "A procedure for improving the upper bound for the number of n-ominoes", *Canad. J. Math.*, Vol. 25, pp. 585–602. doi:/10.4153/CJM-1973-060-4.

13. Madras N. & Slade G. 1996, *The self-avoiding walk*, Springer, 427 pp. doi:10.1007/978-1-4614-6025-1.

14. Myers J. 2016, "Polyomino, polyhex and polyiamond tiling", Available at: https://www.polyomino.org.uk/mathematics/polyform-tiling/

15. Rhoads G. C. 2003, *Planar Tilings and the Search for an Aperiodic Prototile*, PhD dissertation, Rutgers University.

16. Rhoads G. C. 2005, "Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 174, no. 2, pp. 329–353. doi:10.1016/j.jcam.2004.05.002.

17. Schattschneider D. 1980, "Will it tile? Try the Conway criterion!", *Mathematics Magazine*, Vol. 53, no. 4, pp. 224–233.

18. Gardner M. 1999, *Mathematical puzzles and diversions*, 2nd edition, Dover, 447 pp.

19. Гарднер M. 1966, *New mathematical diversions from Scientific American*, Simon and Shuster, 496 pp.

20. Gardner M. 1974, *Mathematical games from Scientific American*, Simon and Shuster, 456 pp.

21. Gardner M. 1988, *Time travel and other mathematics bewilderments*, Freeman and Co., New York, 341 pp.

22. Golomb S. W. 1994, *Polyominoes*, 2nd edition, Princeton University Press, New Jercey. 196 pp.

23. Maleev A. V. 2013, "Algorithm and computer-program search for variants of polyomino packings in plane", *Kristallografija*, Vol. 58, no. 5, pp. 749–756. (Russian). translation in Crystallography Reports, 2015, Vol. 60, no. 6, pp. 986–992. doi:10.7868/S0023476113040140.

24. Maleev A. V. & Shutov A. V. 2013, "On the number of translational plane tilings by polyomino", *Trudy IX Vserossiiskoi nauchnoi shkoly "Matematicheskie issledovaniya v estestvennyh naukah" (Proc. IX All-Russian scientfic school "Mathematical Research in Natural sciences")*, Apatity, pp. 101–106.

25. Nesterenko Ju. V., Galochkin A. I. & Shidlovskij A. B. 1984, *Vvedenie v teoriju chisel [Introduction in number theory].* Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moskow, 152 pp.

26. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2014, "On the number of lattice tilings of a plane by a given area polyomino", *Trudy IX Vserossiiskoi nauchnoi shkoly "Matematicheskie issledovaniya v estestvennyh naukah"(Proc. IX All-Russian scientfic school "Mathematical Research in Natural sciences")*, Apatity, pp. 147–152.

27. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2013, "The estimation of the number of lattice tilings of a plane by a given area polyomino ", *Modelirovanie i Analiz Informacionnyh Sistem (Modeling and Analysis of Information Systems)*, Vol. 20, no. 5, pp. 148–157.

28. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2015, "The estimating of the number of lattice tilings of a plane by a given area centrosymmetrical polyomino", *Modelirovanie i Analiz Informacionnyh Sistem (Modeling and Analysis of Information Systems)*, Vol. 22, no. 2, pp. 295–303.

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Получено 12.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 511.3

ПОЛВЕКА НА КАФЕДРЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

А. В. Жмулева (г. Москва)

Аннотация

В статье рассказано об истории, традициях кафедры теории чисел Московского педагогического государственного университета, о людях, работавших на кафедре.

1. Введение

Кафедра теории чисел МПГУ ведёт своё начало от двух кафедр: кафедры алгебры и теории чисел Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина и кафедры высшей алгебры и элементарной математики Московского городского педагогического института им. В. П. Потёмкина.

Кафедру алгебры и теории чисел МПГИ им. В. И. Ленина возглавлял профессор Александр Адольфович Бухштаб и на кафедре работали доценты Дицман А. П.,Рубцов Н. Ф., Смирнова Г. Н., Щестопал Г. А. и др.

Кафедрой алгебры и элементарной математики МПГИ им. В. П. Потёмкина руководил доцент (а затем профессор) Василий Ильич Нечаев, сменивший на этом посту в 1949 году по рекомендации И. М Виноградова проф. Гребенчу М. К. На кафедре тогда работали доценты Алексахин С. П., Гаркави Е. Г., Лемлейн В. Г., Полякова Т. Н. и др.

В 1960 году произошло объединение упомянутых вузов, объединённая кафедра стала называться кафедрой алгебры и теории чисел, возглавил её проф А. А. Бухштаб.

2. Становление кафедры

А я, окончив с отличием МПГИ им. В.П. Потёмкина в 1959 году, была направлена на работу в Московскую среднюю школу 406 (в те годы каждый выпускник вуза должен был отработать три года там, куда его распределили).

В 1961 году Василий Ильич нашёл меня, хотя у меня уже была другая фамилия и другой адрес, и пригласил на беседу с Александром Адольфовичем на предмет перейти на преподавательскую работу в институт. Александр Адольфович подготовился к встрече, у него в руках был вкладыш к моему диплому с перечнем изученных предметов и оценками. Я собеседование выдержала и стала ассистентом кафедры. Но так как я отработала в школе только два года, вместо положенных трёх, возникли проблемы с уходом из школы, но Александр Адольфович их решил. Первые два года вела практические занятия в основном по алгебре.

В 1962 году на кафедру пришёл профессор Леонид Яковлевич Куликов, и вскоре из нашей кафедры выделилась кафедра алгебры под руководством проф. Л. Я. Куликова, а кафедра проф. Бухштаба А. А. стала называться кафедрой теории чисел и вычислительной математики. Кроме семинаров по теории чисел, занятий по элементарной математике мне приходилось вести практикум по вычислительной математике: учила студентов считать на арифмометре и на логарифмической линейке.

Это было время, когда в нашу жизнь входила электронно-вычислительная техника. Александр Адольфович обратился с письмом в газету «Правда», в котором убедительно доказал, что подготовка современного учителя невозможна без ЭВМ, и факультет получил машину «Минск». Тогда лишь немногие вузы имели ЭВМ. Этот агрегат был чрезвычайно громоздким и занимал целую аудиторию. Именно тогда по инициативе А. А. Бухштаба на факультете образовалась кафедра вычислительной математики и программирования, основной состав которой составили преподаватели нашей кафедры: Смирнова Г. Н., Шахов Ю. Н., Шестопал Г. А., и др. Руководить новой кафедрой был приглашён проф. Владимир Вениаминович Щенников. Наша кафедра стала называться кафедрой теории чисел.

Традиционно все годы существования кафедры с ней сотрудничали известные учёные математики : Андрей Борисович Шидловский, Николай Михайлович Коробов, Сергей Михайлович Воронин и другие.

Андрей Борисович Шидловский начал работать в МГПИ ещё обучаясь в аспирантуре МГУ и продолжил работать по совместительству уже будучи преподавателем, а потом и заведующим кафедрой теории чисел МГУ. Доктор физико-математических наук, профессор, всемирно известный математик, Андрей Борисович читал лекции по теории чисел и вёл спецкурсы для слушателей ФПК. В те годы существовала такая замечательная форма повышения квалификации преподавателей педвузов страны. Преподаватель командировался на семестр в Ленинский пединститут, где он слушал лекции, сдавал зачёты и экзамены. Мне посчастливилось вести за ним семинарские занятия по теории чисел. Андрей Борисович поражал коллег своим оптимизмом. Всегда вместе с ним на кафедру входили улыбки, жизнерадостность, хорошее настроение. И это при том, что он прошёл очень суровую школу жизни: работал токарем, проходчиком при строительстве первой линии метрополитена, учёба его на мехмате МГУ прерывалась войной.

На кафедре в течение нескольких лет работал профессор МГУ доктор физико-математических наук Николай Михайлович Коробов. Он читал лекции по теории чисел нашим студентам и вёл спецкурс «Метод тригонометрических сумм» для слушателей ФПК. Я вела за Николаем Михайловичем семинарские занятия по теории чисел и не переставала восхищаться его исключительно грамотной речью, чётким почерком и порядком на доске. А семинары по тригонометрическим суммам я посещала вместе со слушателями ФПК. До сих пор я сохранила эти конспекты и не раз использовала их в своей работе при проведении спецкурсов для студентов. Николай Михайлович также руководил аспирантами кафедры, его ученицей была Елена Борисовна Гладкова, замечательный человек, преподаватель, математик, долгие годы проработавшая на кафедре.

3. 1976 — 1999

В 1976 году А. А. Бухштаб переходит на должность профессора-консультанта, а заведующим кафедрой становится В. И. Нечаев, защитивший уже к тому времени докторскую диссертацию. Одновременно Василий Ильич являлся научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова.

Василий Ильич внес огромный вклад в совершенствование педагогического образования страны. Его подвиги в Великой Отечественной войне и достижения в области прикладной математики отмечены правительственными наградами, а вот заслуги в области педагогического образования не оценены должным образом.

Он был автором программы курса «Числовые системы» для педвузов и написал уникальный, удивительный по своей глубине, учебник по этому курсу. Он был автором программы курса «Дискретная математика» и инициатором включения этого курса в программу математического образования. На кафедре было подготовлено учебное пособие по этому курсу (авторы преподаватели кафедры, выпускники факультета Деза Е. И. и Модель Д. Л.).

Василий Ильич уделял исключительное внимание подготовке кадров для кафедры. На кафедре работали выпускники факультета Баулина Ю. Н., Гладкова Е. Б., Деза Е. И., Иконникова Т. К., Киселёва Л. В., Котова Л. В., Степанова Л. Л., Топунов В. Л., Юрченко А. Л. Все они закончили аспирантуру на кафедре и большинство из них защитили диссертации.

Преподаватели кафедры кроме занятий по теории чисел и числовым системам вели практикум по решению задач, который включал три раздела: комбинаторику, теорию делимости целых чисел и системы счисления. По всем этим разделам были подготовлены учебные пособия: сборник задач по комбинаторике (Топунов В. Л.) и арифметика-практикум по решению задач (Жмулёва А. В., Степанова Л. Л.).

Следует вспомнить и о том, что проф. Нечаев В. И. был инициатором введения в программу высшей школы нового курса «Основы криптографии и теория защиты информации», он же и написал первый учебник по этому курсу.

Успешно работая в области прикладной математики, Василий Ильич уделял большое внимание школьной математике: писал статьи в журнал «Математика в школе», статьи в детскую математическую энциклопедию.

Василий Ильич создал первую программу для ЭВМ, проверяющую вычислительные навыки школьников и студентов, за что был награждён золотой медалью ВДНХ.

Когда постановлением правительства в практику школы были введены факультативные занятия, первым рекомендованным курсом по математике был курс «Теория делимости целых чисел». Московский городской институт усовершенствования учителей обратился на кафедру теории чисел с просьбой разработать материалы для учителей для ведения этого курса, и я была направлена в МГИУУ для чтения лекций. По материалам этих лекций под руководством В. И. Нечаева была подготовлена и защищена кандидатская диссертация.

Василий Ильич продолжил традицию кафедры сотрудничать с выдающимися математиками, и на кафедру был приглашён Сергей Михайлович Воронин — доктор физико-математических наук, сотрудник института им. В. А. Стеклова.

Сергей Михайлович читал курс лекций по теории чисел для студентов математического факультета. Василий Ильич считал, что Сергей Михайлович сильно переоценивал математическую подготовку наших студентов и предложил мне вести за ним семинарские занятия, чтобы при необходимости разъяснять некоторые разделы программы. И я регулярно посещала лекции С. М. Воронина. Какие же оригинальные это были лекции, какие новые для меня, неожиданные доказательства предлагал Сергей Михайлович, какие красивые задачи составлял по теории чисел.

Но больше всего Сергей Михайлович поразил всех нас своими глубокими знаниями и широкой эрудицией в области истории математики Он прочитал для студентов курс лекций по истории математики. Как интересно было беседовать с Сергеем Михайловичем на темы культуры, истории, философии.

4. 1999 — 2007

После смерти В. И. Нечаева с 1999 года и до последних дней своей жизни (2007 год) кафедрой теории чисел руководил профессор, доктор физико-математических наук Дмитрий Алексеевич Митькин, молодой талантливый математик.

Дмитрий Алексеевич был исключительным руководителем кафедры, вместе с высокой принципиальностью и требовательностью к себе и другим, он сумел создать на кафедре доброжелательную, комфортную для работы и научного роста обстановку.

Профессор Митькин Д. А. несколько лет возглавлял совет математического факультета по защите кандидатских диссертаций по специальности алгебра, теория чисел, математическая логика. До последних дней жизни он вёл семинар по аналитической теории чисел, который посещали не только аспиранты МРГУ, но и аспиранты и преподаватели других вузов. Своих аспиранток Андрееву Т. Ю. и Орлову С. В. он довёл до защиты диссертаций будучи тяжело больным и прикованным к постели.

Активно работая в науке, Дмитрий Алексеевич уделял большое внимание математическому образованию школьников. С 1991 года он входил в состав предметной методической комиссии всероссийских математических олимпиад.

Следуя традициям, он пригасил на кафедру читать курс истории математики известного специалиста в этой области Надежду Вячеславовну Александрову. Самые тёплые воспоминания остались у всех членов кафедры об этом человеке.

5. Кафедра в настоящее время

После безвременной кончины Д. А. Митькина с 2007 года кафедрой руководит профессор МГУ доктор физико-математических наук Владимир Григорьевич Чирский. В период очередных реформ образования, когда сливаются вузы, уменьшается число ставок, увеличивается нагрузка преподавателей, обстановка на кафедре остаётся спокойной, рабочей. Это прежде всего заслуга нашего заведующего. Человек исключительно доброжелательный, уравновешенный, Владимир Григорьевич успешно разрешает все назревающие противоречия.

Продолжая традиции кафедры, Владимир Григорьевич уделяет огромное внимание подготовке смены кадрового состава кафедры из выпускников факультета. Его аспиранты Баженова О. Ю. и Крупицын Е. С., выпускники факультета, подготовили кандидатские диссертации. Олеся Юрьевна некоторое время успешно работала ассистентом кафедры, а Евгений Станиславович не только работает старшим преодавателем и ведёт занятия по всем дисциплинам кафедры, но и является заместителем заведующего, выполняя значительную часть организационно-административной работы.

Владимир Григорьевич не только руководит аспирантами, читает спецкурсы по аналитической теории чисел для студентов и магистрантов, но и уделяет значительное внимание подготовке выпускников к работе в школе, обучая магистрантов решению олимпиадных нестандартных задач повышенной сложности.

Следуя традициям кафедры, Владимир Григорьевич продолжает привлекать к работе на кафедре ведущих специалистов разных разделов математики. На кафедре несколько лет преподавал Алексей Юрьевич Нестеренко, специалист в области теории защиты информации. Он работал в основном с магистрантами и сумел создать на своих занятиях удивительную творческую обстановку при высокой требовательности. По приглашению Владимира Григорьевича на кафедре работает научный сотрудник математического института им. В. А. Стеклова Морис Евгеньевич Чанга, он читает различные спецкурсы для студентов и магистрантов.

Многие годы кафедра сотрудничает с Тульским государственным педагогическим университетом в лице доктора физико-математических наук профессора Николая Михайловича Добровольского. Он руководил аспирантами кафедры, являлся членом совета математического факультета по защите кандидатских диссертаций, неоднократно входил в состав итоговых аттестационных комиссий.

6. Заключение

Заканчивая свой рассказ, скажу, что мне в жизни очень повезло, так как я имела возможность общаться со многими выдающимися математиками, замечательными педагогами, прекрасными людьми и многому у них учиться.

А кафедра теории чисел, несмотря ни на что, продолжает жить, развиваться, укреплять и развивать свои традиции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. Теория чисел, издание 3-е. — М.: «Лань» 2008.

2. Деза Е. И., Модель Д. Л. Основы дискретной математики. Упражнения и задачи. — М.: НИИТЭХМ. 2006.

3. Деза Е. И., Котова Л. В. Сборник задач по теории чисел. — М.,URSS, 2012.

4. Жмулёва А. В., Степанова Л. Л. Арифметика. Практикум по решению задач. — М., МГПИ

5. Жмулёва А. В. Сборник задач по теории чисел. — М.: ЦПИ при мехмате МГУ 2009.

6. Нечаев В. И. Числовые системы. — М.: Просвещение 1975.

7. Нечаев В. И. Элементы криптографии. Основы теории защиты информации. — М.: Высшая школа, 1999.

8. Степанова Л. Л., Жмулёва А. В., Деза Е. И. Практикум по элементарной математике. Арифметика. — М.: МЦНМО, 2008.

9. Степанова Л. Л. Избранные главы жлементарной теории чисел. — М.: Прометей, 2001.

10. Топунов В. Л. Комбинаторика. Практикум по рещению задач. — М.: МГПИ, 1988.

Московский педагогический государственный университет.
Получено 4.08.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.

УДК 511.3

АЛЕВТИНА ВАСИЛЬЕВНА ЖМУЛЁВА (к 80–летию со дня рождения)

Н. М. Добровольский, Е. И. Деза, Т. К. Иконникова, С. А. Жданов, Л. В. Котова, Е. С. Крупицын, Ю. В. Нестеренко, А. Ю. Нестеренко, С. А. Поликарпов, И. Ю. Реброва, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков

12 августа 2016 года исполняется 80 лет со дня рождения профессора кафедры теории чисел Московского педагогического государственного университета, кандидата педагогических наук Алевтины Васильевны Жмулёвой.

Вся жизнь Алевтины Васильевны тесно связана с кафедрой теории чисел математического факультета МПГУ (МГПИ имени В. И. Ленина). Она заинтересовалась теорией чисел ещё в студенческие годы. Все ее курсовые работы, выполненные под руководством известного математика, специалиста по теории чисел и криптографии, В. И. Нечаева, были посвящены теоретико-числовой тематике.

В 1959 году Алевтина Васильевна окончила с отличием Московский городской педагогический институт им. В. П. Потемкина и два года работала в школе по распределению.

В 1961 году, после объединения Московского городского педагогического института им. В. П. Потемкина и Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина, она, по рекомендации В. И. Нечаева, была принята ассистентом на кафедру высшей алгебры, элементарной математики и теории чисел, которой руководил профессор А. А. Бухштаб.

На ней Алевтина Васильевна работает — старшим преподавателем, доцентом, профессором — до сих пор.

Когда в практику работы школы были введены факультативные курсы, А. В. Жмулёва была направлена в институт усовершенствования учителей читать лекции для учителей Москвы и Московской области по темам факультативов, рекомендованных министерством просвещения для 7 класса средней школы. Это были факультативы по теории делимости целых чисел и по системам счисления. В 1980 году по материалам этих лекций ею была защищена диссертация «Теория делимости целых чисел. Факультативный курс» на соискание учёной степени кандидата педагогических наук. Научным руководителем был В. И. Нечаев. Алевтина Васильевна Жмулёва имеет звание доцента по кафедре теории чисел.

Более полувека Алевтина Васильевна ведет активную преподавательскую и научно-исследовательскую деятельность в стенах Московского педагогического государственного университета. За это время она внесла огромный вклад в развитие преподавания арифметики и теории чисел не только в МПГУ, но и в системе отечественного педагогического образования в целом.

Она была одним из основных авторов разработанного на кафедре теории чисел курса «Практикум по решению задач: арифметика и комбинаторика», принимала активное участие в разработке и внедрению в учебный процесс таких классических сегодня курсов, как «Теория чисел» и «Числовые системы». По этой тематике ею было опубликовано несколько учебных пособий, в том числе книги «Теория делимости целых чисел» (1980 г.), «Арифметика. Практикум по решению задач» (в соавторстве с Л. Л. Степановой, 1986 г.), «Практикум по элементарной математике: арифметика» (в соавторстве с Л. Л. Степановой и Е. И. Деза, 2008 г.), «Сборник задач по теории чисел» (2009 г.).

Начиная с девяностых годов прошлого века при ее участии в практику работы кафедры теории чисел МПГУ начали вводить новые для отечественной высшей школы курсы: «Криптография (основы защиты информации)», «Дискретная математика» и др. За годы работы на кафедре Алевтина Васильевна прочитала и много специальных курсов, посвященных актуальным проблемам элементарной и высшей арифметики, аналитической теории чисел, вопросам методики преподавания арифметики и теории чисел в общеобразовательной и высшей школе. А. В. Жмулева сотрудничала с такими выдающимися математиками, как А. А. Бухштаб, А. Б. Шидловский, Н. М. Коробов, В. И. Нечаев, С. М. Воронин, Д. А. Митькин. Все они высоко оценивали работу Алевтины Васильевны и как математика, и как педагога.

За 55 лет работы в МПГУ(ранее МГПИ им. В. И. Ленина) А. В. Жмулёва внесла большой вклад в подготовку многих поколений учителей математики. Любовь к своей профессии, блестящее владение материалом, уважительное и бережное отношение к студентам всегда позволяли ей заинтересовывать теоретико-числовой тематикой широкую аудиторию. На факультете в настоящее время работает немало преподавателей, которых она учила. Есть они и среди авторов этой статьи — возможно, именно лекции А. В. Жмулевой стали для них когда-то первой ступенькой как в науку, так и в профессию педагога.

Алевтина Васильевна — опытный и чуткий научный руководитель исследовательской работой студентов. Под ее началом подготовлено огромное число курсовых работ, более ста выпускных квалификационных работ бакалавра, дипломных работ и магистерских диссертаций. Ряд методических разработок, выполненных в ходе таких исследований, оказались востребованными и нашли свое применение в практике работы современной школы.

Алевтину Васильевну отличают искреннее желание научить, высокая требовательность и доброжелательность к студентам. А уровень её педагогического мастерства невозможно переоценить. Из отзывов студентов:

— А. В. Жмулева заставила нас выучить предмет, поэтому вопросы по теории чисел на государственном экзамене оказались для нас самыми легкими;

— добрая, все объясняет досконально, часто индивидуально, даже задерживается после занятий — пусть и ради одного студента; одним словом, золотой человек.

А. В. Жмулёва много сил отдавала общественной работе как в стенах университета, так и вне его. В течение ряда лет она была членом методического совета по математике при министерстве просвещения РСФСР. Много лет пела в хоре преподавателей математического факультета. Всегда принимала активное участие в работе профсоюзной организации университета, Совета ветеранов.

Её труд отмечен несколькими медалями. Она награждена знаком «Отличник народного просвещения».

Алевтина Васильевна пользуется заслуженным уважением и любовью студентов и преподавателей факультета. Доброжелательность, готовность поддержать и прийти на помощь в сочетании с элегантностью, подтянутостью и истинным аристократизмом — визитная карточка Алевтины Васильевны до сих пор.

Своим главным достижением жизни Алевтина Васильевна считает свою семью. Это две дочери: одна – кандидат физико-математических наук, специалист по дифференциальной геометрии, другая — подполковник МВД; три взрослые внучки, все с высшим образованием, и одна замечательная правнучка!

Мы от всей души поздравляем дорогую Алевтину Васильевну со славным юбилеем и желаем ей здоровья, бодрости духа и успехов в её благородном служении на ниве отечественного математического образования!

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ ЖМУЛЁВОЙ А. В.

№	Название	Издательство, Журнал	Количество печ. листов	Фамилии соавторов
1	Сборник задач по комбинаторике	МГПИ им. В. И. Ленина, 1968 г.	2	Зубова Н. М.
2	О факультативном курсе «Дополнительные главы арифметики» в средней школе.	Вопросы методики преподавания математики. Сб. трудов, МГПИ им. В. И. Ленина 1978 г.	0,8	
3	Некоторые вопросы методики преподавания факультативного курса «Дополнительные главы арифметики» в средней школе.	Методические рекомендации по преподаванию математики в средней школе. Сб. трудов МГПИ им. В. И. Ленина 1979 г.	0,5	
4	В помощь учителю, ведущему факультативный курс в средней школе.	Журнал «Математика в школе» №3, 1979	0,8	

5	Теория делимости целых чисел. Учебное пособие.	МГПИ им. В. И. Ленина	5,75	
6	О вступительных экзаменах в МГПИ им. В. И. Ленина	Журнал «Математика в школе» №1, 1985	0,5	
7	Арифметика. Практикум по решению задач. Пособие для педвузов.	МГПИ им. В. И. Ленина, 1986 г.	8	Степанова Л. Л. Разделы 1 и 3 написаны Жмулёвой, раздел 2 — Степановой
8	О применении ЭВМ в процессе изучения курса теории чисел в педвузе.	Тезисы доклада в сб. всесоюзной конференции по проблемам высшего педагогического образования. Тирасполь, 1986 г.	0,25	
9	Организация и контроль самостоятельной работы студентов в процессе изучения курсов теории чисел и числовые системы.	Тезисы доклада на межвузовской конференции. Тобольск, 1987 г.	0,25	
10	Роль курса теории чисел в формировании мировоззрения учителя математики.	Тезисы доклада на международной конференции «Современные проблемы теории чисел» Тула, 1993 г.	0,25	
11	Некоторые вопросы постановки курса «Элементарная математика»	Тезисы доклада на международной конференции «Подготовка преподавателей математики и информатики для высшей и средней школы» МПГУ, 1994 г.	0,2	
12	К вопросу об организации процесса изучения математических дисциплин в вузе.	Тезисы доклада на межвузовской конференции «Педагогические технологии в высшей школе» Рязань, 1995 г.	0,2	
13	Культурологическая роль математики в образовании.	Тезисы доклада на межвузовской конференции «Общепедагогические проблемы образовательного процесса в высшей школе» Рязань, 1996 г.	0,2	
14	Интегративное и специальное образование	Тезисы доклада на 4 Рязанских педагоги-	0,2	

		ческих чтениях «Интегративные процессы в подготовке студента на основе государственного образовательного стандарта высшего профобразования» Рязань, 1997 г.		
15	Анализ типичных ошибок абитуриентов.	Журнал «Математика в школе» №1, 1998 г.	0,25	
16	Математика. Пособие для поступающих в МПГУ, выпуск 1	МПГУ, 1989 г.	4,5	Карасёв Г. А., Чернецов М. М.
17	О тестовом контроле при обучении математике	Юбилейный сборник научных трудов математического факультета, МПГУ, 2000 г.	0,25	
18	Математика. Пособие для поступающих в МПГУ, выпуск 2.	МПГУ, 2000 г.	4,5	Карасёв Г. А., Пантелеева Е. И., Чернецов М. М.
19	К 100-летию профессора Бухштаба А. А.	Чебышевский сборник. Тульский педуниверситет, 2006 г.	0,25	
20	Пособие по математике для подготовительных курсов. Часть 1.	АБиК, 2006 г.	10	Власова Л. И., Казей И. С., Марков В. Т., Янченко Т. Л.
21	Занимательные задачи для школьников.	Журнал «Математика в школе», №2, 2008 г.	0,25	
22	Свойства десятичных периодов простых чисел.	Журнал «Математика в школе», №6, 2009 г	0,25	
23	Арифметика. Практикум по решению задач. Пособие для педвузов.	МЦНМО, 2008	15	Степанова Л. Л., Деза Е. И.
24	Сборник задач по теории чисел.	Издательство МГУ, 2009 г.	8	
25	Памяти профессора Митькина Д. А.	Чебышевский сборник, Тульский педуниверситет, 2008	0,25	Архипов Г. И., Чубариков В. Н.
26	Девяносто пять лет со дня рождения Василия Ильича Нечаева	Чебышевский сборник, Тульский педуниверситет, 2015	1	М. П. Минеев, В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, Е. И. Деза, Ю. Н. Баулина, В. С. Ванькова, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Л. Рощеня
27	К 65–летию со дня рожде-	Чебышевский сбор-	0,65	В. А. Быковский,

	ния Дмитрия Алексеевича Митькина (25.04.1951–09.04.2007)	ник, Тульский педуниверситет, 2016		Н. М. Добровольский, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
Московский педагогический государственный университет.
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
Получено 4.08.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Том 17 Выпуск 3

Батхин Александр Борисович — кандидат физико-математических на- ук, доцент, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.
e-mail: batkhin@gmail.com

Бессонов Леонид Валентинович — старший преподаватель кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского.
e-mail: lexx@sgu.ru

Брюно Александр Дмитриевич — доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.
e-mail: abruno@keldysh.ru

Галаев Сергей Васильевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского.
e-mail: sgalaev@mail.ru

Гольцов Дмитрий Владимирович — аспирант кафедры алгебры и математической логики, Ивановский государственный университет.
e-mail: goltsov_89@mail.ru

Деза Елена Ивановна — кандидат физико-математических, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики Московского педагогического государственного университета.
e-mail: Elena.Deza@gmail.com

До Дык Там — аспирант Белгородского государственного национального исследовательского университета.
e-mail: doductam140189@gmail.com

Добровольская Лариса Петровна — кандидат физико-математических, руководитель Научно-исследовательского и редакционно-издательского сектора Института экономики и управления.
e-mail: dobrovolskaya.lar@yandex.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Жмулёва Алевтина Васильевна — кандидат педагогических наук, доцент, профессор Московского педагогического государственного университета.
e-mail: alevtin-z@yandex.ru

Иконникова Татьяна Константиновна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории чисел Московского педагогического государственного университета.
e-mail: tk.math@gmail.com

Котова Лидия Владимировна — старший преподаватель кафедры теории чисел Московского Педагогического Государственного Университета
e-mail: kolv@inbox.ru

Крупицын Евгений Станиславович — старший преподаватель кафедры теории чисел Московского педагогического государственного университета.
e-mail: krupitsin@gmail.com

Кузнецов Валентин Николаевич — д.т.н., профессор, зав. кафедрой компьютерной алгебры и теории чисел Саратовского государственого университета им. Н. Г. Чернышевского.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

Кузнецова Татьяна Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
e-mail: mexmat_KA@info.sgu.ru

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета.
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лыков Александр Андреевич — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: Alekslyk@yandex.ru

Малышев Вадим Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: 2malyshev@mail.ru

Матвеева Ольга Андреевна — к.ф.-м.н., ассистент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел Саратовского государственого университета им. Н. Г. Чернышевского.
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Мешка Лаймонас — докторант факультета математики и информатики Вильнюсского университета.
e-mail: laimonas.meska@mif.vu.lt

Нестеренко Алексей Юрьевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной безопасности НИУ ВШЭ.
e-mail: anesterenko@hse.ru

Носов Виталий Валерьевич — кандидат физика-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и дискретной математики Федерального государственного бюджетного учреждения высшего образования "Оренбургский государственный университет"
e-mail: puncker1978@mail.ru

Поликарпов Сергей Алексеевич — кандидат физика-математических наук, и. о. декана математического факультета, Московского педагогического государственного университета
e-mail: sa.polikarpov@mpgu.edu

Салиба Холем Мансур — университет Нотр–Дам — Луэз.
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Соболев Дмитрий Константинович — аспирант кафедры дискретной математики и информатики Московского педагогического государственного университета
e-mail: coбojib@gmail.com

Соболева Валентина Николаевна — аспирант кафедры теории чисел Московского педагогического государственного университета
e-mail: printsessa@gmail.com

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2009@live.ru

Чумакова Светлана Валентиновна — кандидат технических наук, доцент кафедры математики и математического моделирования, Саратовский государственный аграрного университет имени Н. И. Вавилова.
e-mail: ch-sv@yandex.ru

Штейников Юрий Николаевич — Математический институт имени В. А. Стеклова, ФГУ ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук.
e-mail: yuriisht@yandex.ru

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры управления и информатики в технических и экономических системах, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
e-mail: a1981@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Volume 17 Issue 3

Batkhin Alexander Borisovich — candidate of fisical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS.
e-mail: batkhin@gmail.com

Bessonov Leonid Valentinovich — Saratov State University.
e-mail:lexx@sgu.ru

Bruno Alexander Dmitrievich — doctor of physico-mathematical Sciences, professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS.
e-mail: abruno@keldysh.ru

Galaev Sergei — Saratov State University.
e-mail: e-mail: sgalaev@mail.ru

Goltsov Dmitriy — graduate student kafedra of algebra and mathematics of logic, Ivanovo State University.
e-mail: goltsov_89@mail.ru

Deza Elena Ivanovna — Full Professor, Associate professor(Dotsent), Doctor of Pedagogical Sciences, Candidat of Physical-Mathematical Sciences, Professor of Chair of the Theoretical Informatics and Discrete Mathematics, Department of Mathematics, Moscow State Pedagogical University.
e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Do Duc Tam — postgraduate. Belgorod National Research University.
e-mail: doductam140189@gmail.com

Dobrovol'skaya Larisa — candidate of physics and mathematics sciences, head of research and of the publishing sector of the Institute of Economics and Management.
e-mail: dobrovolskaya.lar@yandex.ru

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University.
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Gmuleva Alevtina Vassil'evna — candidate of pedagogical science, associate professor, professor the Moscow pedagogical state University.
e-mail: alevtin-z@yandex.ru

Ikonnikova Tatiana Konstantinovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Moscow State Pedagogical University.
e-mail: tk.math@gmail.com

Kotova Lidia Vladimirovna — a senior lecturer in the theory of numbers the Moscow Pedagogical State University.
e-mail: kolv@inbox.ru

Krupitsin Evgenii Stanislavovich — Senior Lecturer of the Moscow State Pedagogical University.
e-mail: krupitsin@gmail.com

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. of techical science, Professor, Head of Department of Computer Algebra and Number Theory, Saratov State University.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

Kuznetsova Tatiana Alexandrovna — Saratov State University.
e-mail: mexmat_KA@info.sgu.ru

Laurinčikas Antanas — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Lykov Aleksandr Andreevich — Lomonosov Moscow State University *e-mail: Alekslyk@yandex.ru*

Malyshev Vadim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University
e-mail: 2malyshev@mail.ru

Matveeva Olga Andreevna — Ph.d. in Physical Mathematical Sciences, assistant at Department of Computer Algebra and Number Theory, Saratov State University.
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Meska Laimonas — doctoral student of the Faculty of Mathematics and Informatics of Vilnius University
e-mail: laimonas.meska@mif.vu.le

Nesterenko Alexey Yurevich — andidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Higher School of Economics.
e-mail: anesterenko@hse.ru

Nosov Vitaliy Valrjevich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor at the Department of Algebra and Discrete Mathematics Federal State budget institution of higher education "Orenburg State University"
e-mail: puncker1978@mail.ru

Polikarpov Sergei Alekseevich — Candidat of Physical-Mathematical Sciences, Dean of Department of Mathematics, Moscow State Pedagogical University
e-mail: sa.polikarpov@mpgu.edu

Saliba Holem Mansour — Notre Dame University–Louaize (NDU).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Sobolev Dmitry Konstantinovich — PhD student, Department of discrete mathematics and informatics, Moscow Pedagogical State University
e-mail: co6ojib@gmail.com

Sobolev Valentina Nikolaevna — PhD student, Department of number theory, Moscow State Pedagogical University
e-mail: printsessa@gmail.com

Chirskii Vladimir Grigorievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, head of chair of theory of numbers of the Moscow pedagogical state University.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: chubarik2009@live.ru

Chumakova Svetlana Valentinovna — Saratov State Vavilov Agrarian University.
e-mail: ch-sv@yandex.ru

Shteinikov Yuriy Nikolaevich — Steklov Mathematical Institute of RAS, Scientific Research Institute of System Analysis.
e-mail: yuriisht@yandex.ru

Shutov Anton Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Management and Informatics in Technical and Economic Systems, Vladimir State University named after Alexander G. and Nicholay G. Stoletovs.
e-mail: a1981@mail.ru

THE EDITORIAL BOARD

Volume 17, Issue 3

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал "Чебышевский сборник" является общематематическим. В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики и информатики на русском или английском языке.

Журнал "Чебышевский сборник" выходит четыре раза в год в одном томе из четырех выпусков.

Редакция журнала "Чебышевский сборник" предлагает авторам ознакомиться с данными правилами и придерживаться их при подготовке рукописей, направляемых в журнал.

1. Общие положения

1.1. Рукопись сопровождается краткой аннотацией на русском и английском языках, которая должна содержать не менее 250 слов, как на русском, так и на английском языках. Ключевые слова входят в анотацию, но отделяются одной строкой.

Все материалы представляются в редакцию в двух экземплярах.

1.2. Текст статьи начинается с шифра УДК, затем следуют заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Затем идет перевод на английский язык заглавия статьи, фамилия и инициалы авторов в латинской транскрипции, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Статья должна иметь следующую структуру: Введение, Основная часть из одного или нескольких разделов, Заключение.

Статья должна быть тщательно выверена и подписана всеми авторами "в печать".

Все страницы рукописи, включая таблицы, список литературы, рисунки и подписи к рисункам, следует пронумеровать. После списка литературы приводятся названия учреждений, в которых выполнена работа.

1.3. На отдельном листе указываются сведения о каждом из авторов: фамилия, имя, отчество — полностью, ученая степень, звание, должность, полное название учреждения, полный почтовый адрес, номер телефона с кодом города, адрес электронной почты (e-mail). Обязательно следует указать автора, ответственного за переписку и переговоры с редакцией.

1.4. Российские авторы представляют в редакцию акт комиссии, о том что статья не содержит сведений, связанных с государственной тайной, и может публиковаться в открытой печати.

1.5. Отклонения в оформлении рукописи от приведенных правил позволяют редколлегии принять решение о снятии с публикации статьи в текущем томе журнала (статья может быть опубликована в следующем томе).

2. Требования к оформлению рукописей

2.1. Редакция принимает к публикации статьи, подготовленные только в системе LaTeX2$_\varepsilon$; при этом в редакцию одновременно с распечаткой статьи представляются также соответствующие файлы. Статьи, подготовленные на компьютере в других текстовых редакторах, а также машинописный или рукописный варианты не принимаются.

2.2. При подготовке статьи в LaTeX2$_\varepsilon$ следует использовать класс *article* (см. пример в конце).

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения. Пример подготовки статьи находится на Web-странице
http://cheb.tsput.ru

2.3. Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку. Номер формулы ставится у правого края страницы. Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки. Запрещаются прямые ссылки по номеру на формулы из других работ. Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита.

2.4. Все рисунки и таблицы должны иметь подпись. Файлы с рисунками необходимо представить в формате *.eps. Максимальный размер рисунка или таблицы вместе с подписью не должен превышать 80% размера А4. Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

2.5. Список цитированной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Сокращение слов и словосочетаний на русском языке оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.12-2011, сокращение слов и словосочетаний на иностранных европейских языках — ГОСТ 7.11-2004.

2.6. Раздел REFERENCES оформляется в соответствии с Гарвардским стандартом (см. раздел 4 данных правил).

3. Пример оформления списка цитированной литературы

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985. 510 с.

2. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2001. Т. 2, вып. 1.
С. 41—53.

3. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.

4. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об аддитивной проблеме И. М. Виноградова // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 325—339.

5. Archipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. Exponential sums in some binary additive problems over prime parameters // Materials of international scientific workshop on analytic number theory and its applications. Moscow: MSU, 1997. P. 12—13.

6. Голод Е. С. Комплекс Шафаревича и его применения: дис. … д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1999. 68 с.

4. Список использованных источников (Reference) по Harvard Standard

Наиболее значимыми составляющими в библиографических ссылках являются фамилии авторов и названия журналов , поэтому

- в описание статьи вносят всех авторов, не сокращая их тремя, четырьмя и т.п.

- названия журналов приводят обязательно.

Ссылки на публикации оформляются по Harvard Citation Standard
Оформление ссылок на публикации на русском языке

- Запись всегда начинается с фамилии автора, затем инициалы, за которыми следует дата.
- Фамилии и инициалы авторов приводят в транслитерации (иностранных авторов — в оригинале).
- Если более чем одна запись одного и того же автора, сортировать по датам.
- Название публикации, книга или журнал, всегда выделяется курсивом.
- Выдержки из публикаций, то есть главы в книгах или журнальные статьи, всегда в английских "кавычках", начиная с первого слова.
- Имя издателя ставится перед местом издания (как это было бы в адресе). Место издания — город, страна. Сокращения для штатов США должны быть с большой буквы, и должны быть добавлены по мере необходимости.
- Ссылки на электронные ресурсы следуют тем же правилам, а в конце ставится "Available at:" и URL-адрес ресурса. Недопустимо указывать только URL-адрес.
- Название статьи переводят на английский язык.
- Название книги приводят в транслитерации и в квадратных скобках переводят на английский язык. У англоязычных книг приводят только оригинальное английское название.
- Название периодического издания приводят в транслитерации. Если издание имеет официальное англоязычное название, то это название приводят в круглых скобках.
- Название издательств и организаций приводят в транслитерации.
- Название города, названия конференций, пояснительные слова, словосочетания переводят на английский язык. Для международных конференций, имеющих второе англоязычное название, приводят это название.
- Сокращения заменяют англоязычными аналогами:

  part 2; volume 3; Vol. 3; pp. 10–19; 323p.; no.1; issue;

  Abstract of the dissertation;

  International conference proceedings (Int. Conf. Proc.);

  Scientific-and-technical (Sci.-Tech.) collected articles; dated 19 December 2013;

  monograph; Annals — Ann.; Annual — Annu.; Colloquium — Colloq.;

  Conference — Conf.; Congress — Congr.; Technical Paper — Tech. Paper;

  First; Second; Third; Fourth/nth... -1st; 2nd; 3rd; 4th/nth...;

  Convention — Conv.; Digest — Dig.; Exposition — Expo.;

  International — Int.; National — Nat.; Proceedings — Proc.; Record — Rec.;

  Symposium — Symp.; Technical Digest — Tech. Dig.

Базовая схема описания

Автор, А.А., Автор, В.В. & Автор, С.С. Год публикации, "Заглавие статьи в переводе", *Название журнала в транслитерации или перевод заглавия, если журнал переводной*, том., номер, страницы.

Примеры описания статей из журналов:

Polyanchikov, Yu. N., Bannikov, A. I. & Kurchenko, A. I. 2007, "Improved Performance of Thermofrictional Cutting Disks", *Vestnik Saratovskogo Gos. Tekhn. Univ.*, vol. 67, no. 1 (23), pp. 21–24.

Danilovich, A. S. & Koltyshev, S. M. 2009, "Setup for radiometric separation of contaminated soil", *Pribory*, no. 12, pp. 56–59.

Пример описания статьи из электронного журнала:

Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B. P. 1999, "Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange", *Journal of ComputerMediated Communication*, vol. 5, no. 2, Available at:

www.ascusc.org/ jcmc/vol5/ issue2/.

при наличии в статье DOI, в списке литературы желательно указывать ее doi - идентификатор:

Zhang, Z & Zhu, D 2008, "Experimental research on the localized electrochemical micromachining", *Russian Journal of Electrochemistry*, no. 44 (8), pp. 926–930.

doi: 10.1134/S1023193508080077/.

Пример описания монографии:

Автор, А. А. Год, "Заглавие", Издание – если не первое, Издатель, Место публикации, страницы (pp.)

Jones, J. 2002, "Managing small teams", Penguin, Sydney.

Smith, P. & Benn, J. 2012, "Report of the University of Western Australia", Small Business Working group, University of Western Australia, W. A.

Пример описания материалов конференций

Usmanov T. S., Gusmanov A. A., Mullagalin I. Z., Muhametshina R. Ju., Chervyakova A. N., Sveshnikov A. V. 2007, "Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing", *Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"*
(Proc. 6th Int. Technol. Symp. "New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact"), Moscow, pp. 267–272.

Пример описания Интернет-ресурса:

"APA Style", 2011, Available at: http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx (accessed 5 February 2011).

5. Шаблон структуры статьи

Задание колонтитулов

```
\levkolonttl{ И. О. ФАМИЛИЯ}

\prvkolonttl{НАЗВАНИЕ СТАТЬИ }

\thispagestyle{empty}
\input{shapka.tex}
```

Заголовок на русском

```
УДК ?????
\begin{center}
{\Large\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ  }\footnote
{Работа выполнена по гранту РФФИ
........}

\medskip
{\large
И. О. Фамилия (г. ????????)}
\end{center}
```

Аннотация на русском

```
\begin{abstract}
В данной работе .........

\medskip
{\it Ключевые слова:}  .

\medskip
{\it Библиография:} ?? названий.
\end{abstract}
```

Заголовок на английском

```
\begin{center}
{\Large\bf ?????????}

\medskip
{\large
  I. O. Family (???????????)}
\end{center}
```

Аннотация на английском

```
\begin{engabstract}
In~this paper ......

\medskip
{\it Keywords:} ......

\medskip
{\it Bibliography:} ?? titles.
\end{engabstract}
```

Текст статьи на русском или английском

```
\section{Введение}
\section{}
```

```
.....
\section{Заключение}
\begin{thebibliography}{19}
\bibitem{Gru1} Оформляется по ГОСТу.
\end{thebibliography}
\begin{engbibliography}{19}
\bibitem{eGru1} Оформляется по Гарвардскому стандарту.
\end{engbibliography}
\noindent Организация.

\noindent  Поступило 30.04.2015
```

6. Пример оформления статьи

```
\levkolonttl{О. А. МАТВЕЕВА}
\prvkolonttl{О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ \ldots}
\thispagestyle{empty}
\input{shapka.tex}
%
УДК 511.3
\begin{center}
{\Large \bf О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ В КРИТИЧЕСКОЙ
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
ПОЛОСЕ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ}
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\large О.~А.~Матвеева (г. Саратов)}
\end{center}
%
\begin{abstract}
Получены плотностные теоремы о нулях полиномов Дирихле,
аппроксимирующих L-функции Дирихле в критической области.
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\it Ключевые слова}: полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, нули
полиномов Дирихле.
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\it Библиография:} 21 название.
\end{abstract}
%
\begin{center}
{\Large \bf ZEROS OF DIRICHLET POLYNOMIALS
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
APPROXIMATING DIRICHLET L-FUNCTIONS
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
```

```
IN THE CRITICAL STRIP}
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\large O.~A.~Matveeva}
\end{center}
%

\begin{engabstract}
Density theorems about zeros of dirichlet polynomials approximating
Dirichlet L-fuctions in the critical strip are obtained.
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\it Keywords}: Dirichlet polynomials, Dirichlet L-fuctions,
zeros  of Dirichlet polynomials.
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\it Bibliography:} 21 titles.
\end{engabstract}
%
\section{Введение}
В работе \cite{KorotkovMatveeva} была приведена
вычислительная схема построения полиномов Дирихле
$Q_n(s),\; s = \sigma + it$, которые в прямоугольнике
$0<\sigma<1,\; 0<t<T$ аппроксимируют целые функции,
заданные рядами Дирихле с периодическими коэффициентами,
с показательной скоростью. В частности, эта схема позволяет
эффективно вычислять нули L-функций Дирихле, лежащие в критической
полосе. В данной работе показано, что, с одной стороны,
известные факты о нулях L-функций Дирихле дают возможность получить
результаты о нулях аппроксимирующих полиномов Дирихле; с другой
стороны, поведение в критической полосе аппроксимирующих полиномов
Дирихле определяет поведение L-функций Дирихле.
%
\section{Конструкция полиномов Дирихле, аппроксимирующих
в критической полосе L-функции Дирихле}
Рассмотрим L-функцию Дирихле
\begin{equation}
L(s,\chi)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s=\sigma+it,
\end{equation}
и соответствующий степенной ряд
\begin{equation}\label{powerseries}
g(z)=\sum_{1}^{\infty}\chi(n)t^n.
\end{equation}
.....
Для оценки величины \eqref{Meq10} сверху необходимо применить
численную схему, которая связана с вычислением полиномов $Q_n(s)$.
.....
\section{Заключение}
В заключении отметим, что аналогичные факты будут иметь место
и в случае рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.
```

```
.....
```

Оформление списка цитированной литературы по ГОСТу

```
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{KorotkovMatveeva} А. Е. Коротков, О. А. Матвеева \,
Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций,
определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами  //
Научные ведомости  Белгородского государственного  университета.
Сер. Математика. Физика. --- Белгород: Изд-во
НИУ "Белгу", 2011. Вып.24, № 17(112). С. 47--53.
.....
\bibitem{Prahar}
Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар. --- М.:
Мир, 1967. --- 513 с.
.....
\end{thebibliography}
```

Оформление раздела REFERENCES по Гарвардскому стандарту

```
\begin{engbibliography}{99}
\bibitem{eKorotkovMatveeva} Korotkov, A. E. \& Matveeva, O. A.
2011, "On a numerical algorithm for determining zeros of
entire functions defined by  series Dirichlet series with
periodic coefficients"\,, {\it Scientific statements
Belgorod State   University. Ser. Mathematics. Physics.
--- Belgorod Univ.   NIU "Belgu"\,}, issue 24, № 17(112),
pp. 47--53.
.....
\bibitem{ePrahar}
Prahar, K. 1967, "{\cyr Raspredelenie prostykh chisel.}"\,,
(Russian) [Distribution of prime numbers]
Translated from the German by A. A. Karacuba.
Edited by A. I. Vinogradov.
With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov,
and N. M. Korobov {\it Izdat. ‘‘Mir’’, Moscow}  511 pp.
\end{engbibliography}
%
\noindent Саратовский государственный университет им.
Н. Г. Чернышевского.
% пустая строка  здесь обязательна
\noindent Получено 10.03.2013
```

Адрес редакции: г. Тула, пр. Ленина, 125, учебный корпус № 4 ТГПУ им. Л. Н. Толстого, комната 310, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии.

Электронные адреса (e-mail): dobrovol@tsput.ru,

TABLE OF CONTENTS

Volume 17 Issue 3