

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 512.554.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-311-351

Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли

А. Н. Благовисная

Благовисная Анна Николаевна — старший преподаватель, аспирант кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет, г. Оренбург.

e-mail: matmet@bk.ru

Аннотация

Работа относится к области изучения структуры алгебр Ли с помощью специальных объектов, позволяющих свести исследование исходных систем к более простым.

Структура данной работы выглядит следующим образом:

1. в первом разделе описываются понятия классических радикалов алгебр Ли, приводятся основные определения и свойства радикалов;
2. второй раздел посвящён слабо артиновым алгебрам Ли. Приведены примеры слабо артиновых алгебр Ли. Основными результатами являются доказательство свойства локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли, а также решение проблемы А. В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли;
3. в третьем разделе рассматриваются вопросы применения центроида Мартиндейла к исследованию структуры нётеровых специальных алгебр Ли. Основным результатом является решение проблемы вложения любой нётеровой полупервичной специальной алгебры Ли в алгебру матриц над коммутативным кольцом, являющимся прямой суммой полей;
4. в четвёртом разделе рассмотрены свойства первичного радикала градуированных Ω -групп.

Результаты исследований отражены в 10 публикациях автора в период с 2015 по 2018 годы, которые выполнены во время обучения в аспирантуре под руководством доктора физико-математических наук, профессора С. А. Пихтилькова (02.03.1953–24.12.2015) и кандидата физико-математических наук, доцента О. А. Пихтильковой.

Ключевые слова: радикалы алгебр Ли, первичный радикал алгебр Ли, нильпотентные радикалы алгебр Ли, радикал Джекобсона, слабо артиновы алгебры Ли, проблема А. В. Михалёва, нётеровы алгебры Ли, центроид Мартиндейла алгебр Ли, проблема М. В. Зайцева, первичный радикал градуированных Ω -групп.

Библиография: 70 названий.

Для цитирования:

А. Н. Благовисная. Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 311–351.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 512.554.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-311-351

Classical radicals and the Martindale centroid of Artin and Noetherian Lie algebras

A. N. Blagovisnay

Blagovisnay Anna Nikolaevna — Senior lecturer, Postgraduate Student, Department of Algebra and discrete mathematics, Orenburg state University, Orenburg.

e-mail: matmet@bk.ru

Abstract

The work relates to the study of the structure of Lie algebras.

The structure of this work is as follows:

- the first section describes the concepts of classical radicals of Lie algebras, the basic definitions and properties of radicals;
- the second section is devoted to the weakly artinian Lie algebras. The main results are the proof of the local nilpotence property of the prime radical of the weakly artinian Lie algebra and the solution of the A.V. Mikhalev problem;
- the third section deals with the application of the Martindale centroid to the study of the structure of Noetherian special Lie algebras. The main result is a solution to the problem of embedding Any Noetherian semiprime special Lie algebra into algebra of matrices over commutative ring which is the direct sum of fields;
- in the fourth section, the properties of the prime radical of graded Ω -groups are considered.

The research results are reflected in the 10 publications of the author in the period from 2015 to 2018, which were completed during graduate studies at the guidance of doctor of physical-mathematical Sciences, Professor S. A. pikhtil'kova (02.03.1953–24.12.2015) and candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor O. A. Pikhtilkova.

Keywords: radicals of Lie algebras, prime radical of Lie algebras, nilpotent radicals of Lie algebras, Jacobson radical, weakly Artinian Lie algebras, A.V. Mikhalev problem, Noetherian lie algebras, Martindale centroid of Lie algebras, M. V. Zaitsev problem, prime radical of graded Ω -groups.

Bibliography: 70 titles.

For citation:

A. N. Blagovisnay, 2019, "Classical radicals and the Martindale centroid of Artin and Noetherian Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 311–351.

Введение	313
1. Классические радикалы алгебр Ли	317
1.1 Понятие классических радикалов алгебр Ли	317
1.2 Первичный радикал алгебр Ли и его соотношения с разрешимыми радикалами	318
1.3 Нильпотентный и локально нильпотентный радикалы алгебр Ли	320
1.4 Радикал Джекобсона и связанные с ним радикалы алгебр Ли	323
2. Слабо артиновы алгебры Ли	324
2.1 Понятие и примеры слабо артиновых алгебр Ли	324
2.2 Локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли	327
2.3 О проблеме А. В. Михалёва	329

3. Нётеровы алгебры Ли	333
3.1 Основные определения и свойства	333
3.2 Центроид Мартиндейла алгебр Ли	333
3.3 О проблеме М. В. Зайцева	336
4. Первичный радикал градуированных Ω -групп	337
4.1 Градуированные Ω -группы	337
4.2 О свойствах градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп	339
Заключение	341
Список цитированной литературы	342
REFERENCES	347
Приложение А Список обозначений	351

Светлой памяти Сергея Алексеевича Пихтилькова посвящается.

Введение

Область исследования. Работа относится к области изучения структуры алгебр Ли. В теории алгебраических систем разработаны различные объекты, которые можно применять при построении структурной теории. К их числу относятся радикалы и центроид Мартиндейла, рассматриваемые в данной работе.

Актуальность темы диссертации. Изучение алгебраических систем является существенной частью современных исследований в общей алгебре. Одной из основных задач, возникающих при исследовании алгебраических систем, является построение структурной теории, позволяющей свести изучение исходной системы к более простой. Радикал является важным инструментом построения структурной теории алгебраических систем. С тех пор, как А. Г. Курош и С. Амицур ввели понятие радикала для колец и алгебр, теория радикалов распространилась и на другие алгебраические структуры, в числе которых алгебры Ли.

Результаты, получаемые при исследовании радикалов алгебр Ли, находят своё применение в различных областях математики, механики, что подтверждает **актуальность** изучения свойств радикалов и построения структурной теории алгебр Ли.

Теории групп и алгебр Ли посвящены исследования многих математиков. Начало создания структурной теории конечномерных алгебр Ли относится к концу XIX века и связано с классическими работами С. Ли, Ф. Энгеля, Э. Картана, В. Киллинга [7]. В XX веке началось изучение бесконечномерных алгебр Ли, возникающих при изучении векторных полей гладких многообразий. Вопросами теории бесконечномерных алгебр Ли занимались А. И. Кострикин, Ю. П. Размыслов, Ю. А. Бахтурин, С. П. Мищенко, М. В. Зайцев, А. В. Михалёв, Е. И. Зельманов.

Построение общей структурной теории для произвольных алгебр Ли затруднительно, поэтому выделяются специальные классы алгебр, для которых такую теорию построить возможно. Исследуются алгебры Ли, удовлетворяющие каким-либо условиям. В качестве дополнительных условий, накладываемых на алгебры Ли, рассматриваются условия обрыва возрастающих или убывающих цепей идеалов, подалгебр, подпространств (нётеровость и артиновость), выполнение полиномиального тождества и другие.

Понятие радикала позволяет из класса алгебраических систем выделить полупростые и радикальные системы, описать структуру которых значительно проще, чем исходную систему. Построение и исследование различных радикалов алгебр Ли проводилось в работах [2, 4, 5, 16, 17, 21, 27, 30, 31, 34, 35, 43, 53, 54, 59, 60].

Одним из радикалов, рассматриваемых в теории конечномерных алгебр Ли и отвечающих требованиям структурной теории, является наибольший разрешимый идеал [13]. В силу того,

что не всегда сумма разрешимых идеалов будет разрешимым идеалом в теории бесконечномерных алгебр Ли, такой подход к пониманию радикала не может быть верным.

В качестве аналога разрешимого радикала для бесконечномерных алгебр Ли можно было бы рассматривать локально разрешимый радикал. Однако в работе [20] представлено доказательство того, что локально разрешимый радикал не может быть единым для всех алгебр Ли.

Проблемой построения единого радикала для всех классов алгебр Ли занимался В. А. Парфёнов. В качестве такого радикала он предложил рассматривать наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли и показал корректность его использования [27].

Кроме слабо разрешимого радикала, были найдены и другие радикалы алгебр Ли, удовлетворяющие требованиям структурной теории. Одним из таких радикалов является первичный радикал.

Исследование первичного радикала проводилось для алгебр Ли, удовлетворяющих различным дополнительным условиям. Так, в работах [2, 4, 5] проведено исследование свойств первичного радикала специальных алгебр Ли. Публикации [21, 37, 58] посвящены изучению свойств первичного радикала различных артиновых алгебр Ли.

Интерес представляют соотношения первичного радикала алгебр Ли с разрешимыми радикалами. В работе [34] доказано, что первичный радикал произвольной специальной алгебры Ли содержит локально нильпотентный радикал. Для обобщённо специальных алгебр Ли С. А. Пихтильниковым и К. И. Бейдаром было показано совпадение первичного радикала с наибольшим локально разрешимым идеалом и слабо разрешимым идеалом [4, 5].

Исследуются и свойства первичного радикала алгебр Ли. Особое внимание уделяется вопросам разрешимости первичного радикала. Так, в монографии [36, с. 111] представлено доказательство разрешимости первичного радикала нётеровой алгебры Ли, в статье [21] рассматривается доказательство разрешимости первичного радикала алгебр Ли, удовлетворяющих различным условиям артиновости. Разрешимость первичного радикала специальной артиновой алгебры Ли доказана в [33]. Публикация [37] посвящена доказательству свойства локальной разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

Таким образом, исследование свойств первичного радикала является одной из **актуальных задач** теории радикалов алгебр Ли.

В теории конечномерных алгебр Ли рассматриваются также нильпотентный радикал, радикал Джекобсона.

Применение нильпотентного радикала и радикала Джекобсона в теории бесконечномерных алгебр Ли также вызывает затруднения в силу невыполнения определённых требований, которым должен удовлетворять радикал алгебраической системы [35]. Поэтому **актуальным** является вопрос о том, какие радикалы бесконечномерных алгебр Ли будут удовлетворять свойствам, аналогичным свойствам нильпотентного радикала и радикала Джекобсона теории конечномерных алгебр Ли.

Другой конструкцией, используемой при изучении строения алгебр Ли, является центроид Мартиндейла. Полезной конструкцией центроида Мартиндейла оказалась при исследовании специальных алгебр Ли. Согласно работе [42] рассмотрение первичных специальных алгебр Ли над центроидом Мартиндейла может выступать как условие конечности. Благодаря этому, возможно исследование структуры первичных специальных алгебр Ли, а также применение первичного радикала при решении задач теории радикалов алгебр Ли. Например, поиск условий, при которых присоединённая алгебра AdL является первичной ассоциативной PI -алгеброй [36, с. 34], или существования наибольшего локально нильпотентного идеала в обобщённо специальной алгебре Ли [36, с. 59].

В настоящей работе продолжается изучение радикалов алгебр Ли, начатое С. А. Пихтильниковым. В частности, особое внимание уделено решению проблем А. В. Михалёва о разрешимо-

сти первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли и М. В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц.

Цель работы — исследовать свойства объектов, применяемых при построении структурной теории артиновых и нётеровых алгебр Ли.

Задачи:

1. доказать локальную нильпотентность первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли;
2. решить проблему А. В. Михалёва для слабо артиновых алгебр Ли;
3. решить проблему М. В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц;
4. исследовать свойства градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп как более общего понятия первичного радикала алгебр Ли.

Научная новизна. В научно-квалификационной работе получены следующие основные результаты:

1. Доказана локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновых алгебр Ли.
2. Решена проблема А. В. Михалёва для слабо артиновых алгебр Ли.
3. Решена проблема М. В. Зайцева для полупервичных специальных нётеровых алгебр Ли.
4. Доказана локальная нильпотентность градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп.

Практическая и теоретическая ценность. Работа имеет теоретическую направленность. Полученные результаты работы могут быть использованы для развития теории радикалов алгебр Ли, а также использоваться при решении проблем и задач, возникающих в теории алгебр Ли.

Апробация результатов. Результаты научно-квалификационной работы докладывались на следующих конференциях:

1. Всероссийской научно-практической конференции «Университет XXI века: научное измерение», Тула, Россия, 20–21 мая 2016 г.;
2. Международной научно-практической конференции «Алгебра и логика: теория и приложения», посвящённая 70-летию В. М. Левчука, Красноярск, Россия, 24–29 июля 2016 г.;
3. XIV международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова и С. М. Воронина, Саратов, Россия, 12–15 сентября 2016 г.;
4. Шестой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, Россия, 30 января – 6 февраля 2017 г.;
5. Всероссийской научно-практической конференции «Университетский комплекс как региональный центр развития образования, науки и культуры», Оренбург, Россия, 1–3 февраля 2017 г.;

6. Международной научно-практической конференции «Вопросы современных научных исследований», Омск, Россия, 27 декабря 2018 г.

Список публикаций состоит из 10 работ [61–70] (5 тезисов и 5 статей, две из которых опубликованы в журналах из перечня ВАК, одна – в журнале, индексируемом в Scopus) и приведён в конце работы.

Структура научно-квалификационной работы. Научно-квалификационная работа состоит из введения, четырёх разделов, разбитых на подразделы, заключения, списка литературы и приложения.

Первый раздел (стр. 317) носит вспомогательный характер и необходим для введения основных понятий теории классических радикалов алгебр Ли и систематизации сведений о них. Рассматриваются основные понятия теории классических радикалов алгебр Ли, которые в дальнейшем будут использоваться в работе при получении основных результатов.

В подразделе 1.1 (стр. 317) поясняется термин «классические радикалы».

В подразделе 1.2 (стр. 318) рассматривается первичный радикал алгебр Ли, формулируются свойства первичного радикала и приводятся известные факты о соотношениях первичного радикала и разрешимых радикалов алгебр Ли.

В подразделе 1.3 (стр. 320) рассматриваются понятия нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли и локально нильпотентного радикала бесконечномерных алгебр Ли. Приводится пример 2 (стр. 321) бесконечномерной локально нильпотентной алгебры Ли, которая не является нильпотентной. Данный пример показывает естественность введения локально нильпотентного радикала в теории бесконечномерных алгебр Ли.

Подраздел 1.4 (стр. 323) посвящён вопросам определения радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли, приводятся определения естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли: неприводимо представленного радикала, PI -неприводимо представленного радикала и конечно неприводимо представленного радикала.

Второй раздел (стр. 324) посвящен слабо артиновым алгебрам Ли.

В подразделе 2.1 (стр. 324) приведены примеры бесконечномерных слабо артиновых алгебр Ли.

Главными результатами являются доказательство свойства локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли (подраздел 2.2 (стр. 327)) и решение проблемы А. В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли (подраздел 2.3 (стр. 329)).

Основные результаты второго раздела сформулированы в виде следующих теорем.

ТЕОРЕМА 4 (стр. 327) *Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ – локально нильпотентен.*

ТЕОРЕМА 6 (стр. 330) *Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ – разрешим.*

В третьем разделе (стр. 333) рассматриваются вопросы применения центроида Мартиндейла к исследованию структуры нётеровых специальных алгебр Ли.

В подразделе 3.1 (стр. 333) сформулированы общие определения, используемые в главе.

В подразделе 3.2 (стр. 333) рассматриваются основные понятия и результаты, связанные с конструкцией центроида Мартиндейла.

В подразделе 3.3 (стр. 336) сформулирован и доказан основной результат раздела 3, заключающийся в решении проблемы вложения любой нётеровой полупервичной специальной алгебры Ли в алгебру матриц над коммутативным кольцом, являющемся прямой суммой полей.

В третьем разделе сформулированы и доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 11 (стр. 336) *Пусть L – первичная специальная алгебра Ли. Тогда*

1. L – матричная алгебра Ли;
2. если L имеет сложность n , то она конечномерна над своим центроидом Мартиндейла размерности не выше n^2 .

ТЕОРЕМА 12 (стр. 337) Пусть алгебра Ли L – полупервичная нётерова специальная. Тогда L вложена в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.

Четвёртый раздел (стр. 337) является дополнением, в котором приведены результаты исследования первичного радикала градуированных Ω -групп.

Основным результатом является доказательство свойства локальной нильпотентности градуированного первичного радикала градуированной Ω -группы.

ТЕОРЕМА 13 (стр. 340) Пусть A – градуированная Ω -группа с условием конечности, удовлетворяющая условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов. Тогда градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω -группы A – локально нильпотентен.

1. Классические радикалы алгебр Ли

1.1. Понятие классических радикалов алгебр Ли

В работах, посвящённых структурной теории алгебр Ли, встречаются различные определения понятия радикала. Это обусловлено исследованием алгебр Ли многими авторами с разных точек зрения. Наиболее разработанной является теория конечномерных алгебр Ли, начало которой в конце XIX века положили работы С. Ли, Э. Картана, Ф. Энгеля, В. Киллинга. Тогда же появляется понятие радикала для конечномерных алгебр Ли, описанное в трудах В. Киллинга.

Радикал конечномерных алгебр Ли связан с понятием разрешимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ([13, с. 17]) Пусть L – алгебра Ли. Рассмотрим следующий ряд идеалов алгебры L :

$$L' = [L, L], \quad L'' = [L', L'], \quad \dots, \quad L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}], \quad \dots$$

Скажем, что L – разрешимая алгебра Ли, если $L^{(n)} = 0$ для некоторого натурального n .

Известно, что сумма конечного числа разрешимых идеалов алгебры Ли является разрешимым идеалом. Поэтому в конечномерной алгебре Ли существует наибольший разрешимый идеал.

Согласно современному пониманию объектов структурной теории алгебр Ли, радикал Киллинга – это наибольший разрешимый идеал в алгебре Ли.

В бесконечномерных алгебрах Ли сумма всех разрешимых идеалов не всегда является разрешимым идеалом. Существуют многочисленные публикации, в которых исследуются вопросы построения структурной теории алгебр Ли с помощью различных радикалов, как для конечномерных, так и для бесконечномерных случаев.

Естественным обобщением понятия разрешимого идеала является локально разрешимый идеал.

В 30-40 годах XX века в процессе исследования произвольных (бесконечномерных) колец и алгебр найдено несколько радикалов, удовлетворяющих требованиям структурной теории и совпадающих в классическом случае с классическим нильпотентным радикалом. К наиболее распространенным относятся нижний ниль-радикал Бэра, локально нильпотентный радикал Левицкого, верхний ниль-радикал Кёте и квазирегулярный радикал Перлиса–Джекобсона.

Перечисленные радикалы нашли применение в разных областях современной теории алгебраических систем. Они встречаются почти в любой монографии по теории колец или алгебр,

начиная с монографии Джекобсона [10]. Поэтому можно сказать, что указанные радикалы стали классическими. Такое название оправдывается и тем, что в классическом случае конечномерных алгебр и колец с условием минимальности все эти радикалы совпадают с классическим нильпотентным радикалом [1].

По аналогии с данным определением классических радикалов для произвольных алгебраических систем, рассмотрим радикалы, которые можно отнести к классическим радикалам алгебр Ли.

Далее рассмотрим необходимые сведения об определениях и свойствах радикалов алгебр Ли, которые можно относить к классическим.

1.2. Первичный радикал алгебр Ли и его соотношения с разрешимыми радикалами

Рассмотрение первичного радикала ряда алгебраических структур показало себя как один из плодотворных подходов к построению структурной теории алгебраических систем. Существуют многочисленные публикации, посвящённые изучению свойств первичного радикала таких алгебраических систем, как групп, колец, алгебр, решеток. В 1949 году Н. Маккой ввёл понятия первичного кольца и первичного идеала, с помощью которых определил первичный радикал как пересечение всех первичных идеалов кольца [55]. Далее теория первичного радикала была распространена и на другие алгебраические системы. В 1960 г. К. К. Шукин в работе « RI^* -разрешимый радикал групп» ввёл определение первичных нормальных делителей, первичной группы, а также первичного радикала группы [45]. Первичный радикал Ω -групп исследовался в работах А. В. Михалёва, С. А. Пихтилькова, И. Н. Балабы и других [26, 27, 49]. Рассматривались определения и свойства первичного радикала для таких алгебраических структур, как решёточно упорядоченные алгебраические системы [24, 25, 26, 28, 29], лупы и Ω -лупы [8, 9]. С. А. Пихтильковым, И. Н. Балабой и К. И. Бейдаром рассмотрен первичный радикал и его свойства для супералгебр Ли, специальных алгебр Ли [4, 5, 36, 37]. Ряд работ посвящён исследованиям первичного радикала алгебр Ли, на которые накладываются дополнительные условия: артиновость, нётеровость, локальная нильпотентность [21, 36, 37, 39].

Рассмотрим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ([37]) Алгебра Ли L называется *первичной*, если для любых двух её идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. ([37]) Идеал P алгебры Ли L называется *первичным*, если факторалгебра L/P – первична.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. ([37]) Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех её первичных идеалов или сама алгебра, если их нет.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим алгебру Ли $L = L_1 \oplus L_2$, где L_1 и L_2 – простые алгебры Ли. Тогда алгебра Ли L имеет только два нетривиальных собственных идеала: $I = \{(x_1, 0) : x_1 \in L_1\}$ и $J = \{(0, x_2) : x_2 \in L_2\}$.

Алгебра Ли L является первичной. Кроме того, первичными являются и идеалы I и J . При этом первичный радикал $P(L)$ равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. ([36, с. 154]) Алгебра называется *полупервичной*, если для любого её идеала I из того, что $I^2 = 0$ следует, что $I = 0$.

Определение 5 относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли. Оно эквивалентно равенству нулю первичного радикала.

Отметим некоторые свойства первичного радикала алгебр Ли.

Ш. Амицур [47] показал, что *если A – ассоциативная алгебра и $A[x]$ – кольцо многочленов над A , то $P(A[x]) = P(A)[x]$.*

Аналогичный результат получен и в случае, когда L – алгебра Ли и $L[x]$ – кольцо многочленов над L . В работе [40] доказано, что $P(L[x]) = P(L)[x]$. Кроме того, для кольца многочленов над L от n коммутирующих переменных $L[x_1, \dots, x_n]$ справедливо равенство $P(L[x_1, \dots, x_n]) = P(L)[x_1, \dots, x_n]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. ([7, с. 12]) *Идеал алгебры Ли, устойчивый относительно всех дифференцирований, называется характеристическим.*

Первичный радикал $P(L)$ произвольной алгебры Ли L над полем характеристики нуль является характеристическим [36, с. 43].

Актуальным является вопрос о разрешимости первичного радикала алгебр Ли. Исследования разрешимости первичного радикала алгебр Ли, на которые накладываются дополнительные условия, отражены в работах [2, 21, 39, 58].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. ([36, с. 30]) *Рассмотрим систему многочленов:*

$$f_0(x_1) = x_1, \quad f_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2], \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]], \dots, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_{2^{k+1}}) = [f_k(x_1, \dots, x_{2^k}), f_k(x_{2^k+1}, \dots, x_{2^{k+1}})], \dots$$

Алгебра Ли L называется разрешимой степени s , если она удовлетворяет тождеству $f_s = 0$ и не удовлетворяет тождеству $f_{s-1} = 0$.

Алгебра Ли называется разрешимой, если она является разрешимой алгеброй некоторой степени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. ([36, с. 41]) *Алгебра Ли L называется слабо разрешимой, если для любого конечномерного подпространства $V \subseteq L$ существует такое k , что полином разрешимости f_k степени k обращается в нуль при подстановке любых элементов из V .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. ([36, с. 30]) *Алгебра Ли называется локально разрешимой, если любая её конечная подалгебра – разрешима.*

В. А. Парфёнов ввёл в рассмотрение для алгебр Ли слабо разрешимый радикал [30]. В работе [30] показано, что *расширение слабо разрешимой алгебры Ли при помощи слабо разрешимой является слабо разрешимой*. Тогда для произвольной алгебры Ли сумма слабо разрешимых идеалов является слабо разрешимым идеалом. В. А. Парфёнов также доказал, что *класс всех слабо разрешимых алгебр Ли является радикальным в универсальном классе всех алгебр Ли*.

Наибольший слабо разрешимый идеал $T(L)$ алгебры Ли L называется верхним слабо разрешимым радикалом алгебры Ли.

Как и для ассоциативных алгебр, для алгебр Ли определяются верхний и нижний ниль-радикалы.

Обозначим через $\rho(L)$ сумму разрешимых идеалов алгебры Ли L .

Сумма разрешимых идеалов является разрешимым идеалом, поэтому идеал $\rho(L)$ является локально разрешимым.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha)$ следующим образом.

1. $\rho(0) = 0$.
2. Предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом:

- а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ – это такой идеал алгебры L , что $\rho(\beta)/\rho(\gamma) = \sigma(L/\rho(\gamma))$;
- б) если β – предельное порядковое число, то

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \rho(\gamma).$$

Расширение локально разрешимой алгебры Ли с помощью локально разрешимой алгебры не может быть локально разрешимым [46], но оно будет слабо разрешимым [30].

Из соображений мощности $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$ для некоторого β . Скажем, что $\rho(\beta)$ – нижний слабо разрешимый радикал алгебры Ли L .

Слабо разрешимые алгебры Ли являются аналогом локально нильпотентных ассоциативных алгебр.

Известно, что для произвольной алгебры Ли выполняется соотношение, согласно которому первичный радикал содержится в наибольшем слабо разрешимом идеале. В монографии [36] получен результат о соотношении первичного радикала и слабо разрешимого радикала для произвольных алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 1. ([36, с. 43]) *Первичный радикал произвольной алгебры Ли над полем F совпадает с нижним слабо разрешимым радикалом.*

1.3. Нильпотентный и локально нильпотентный радикалы алгебр Ли

Нильпотентный радикал алгебры Ли играет важную роль в теории полупростых конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуля.

Нильпотентный радикал алгебр Ли относится к классическим радикалам структурной теории конечномерных алгебр Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. ([13, с. 20]) *Определим по индукции нижний центральный ряд алгебры Ли L : $L_1 = L$, $L_2 = [L, L]$, ..., $L_{n+1} = [L, L_n]$, ...*

Алгебра L нильпотентна, если члены нижнего центрального ряда обращаются в 0 на некотором конечном шаге. Наименьшее натуральное n , для которого $L_n = 0$, называется длиной нильпотентности.

Другими словами, алгебра Ли L нильпотентна, если существует конечная убывающая цепочка её идеалов J_i , $i = 1, \dots, n$, такая, что $J_1 = L$, $J_n = \{0\}$ и $[L, J_{i-1}] \subset J_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Примером нильпотентной алгебры Ли является коммутативная алгебра Ли. Известно [13], что если алгебра L нильпотентна, то она разрешима.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Идеал I алгебры Ли L называется нильпотентным, если он нильпотентен как алгебра Ли.*

Из классической теории конечномерных алгебр Ли ([7], [11]) известно, что в каждой конечномерной алгебре Ли существует единственный наибольший нильпотентный идеал. Однако он не является радикалом [36, с. 64].

Нильпотентный радикал алгебры Ли L вводится как пересечение ядер её неприводимых конечномерных представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. ([15]) *Если модуль M – конечномерный, то наибольший идеал U алгебры L такой, что эндоморфизм x_M , соответствующий элементу x , является нильпотентным для всех $x \in L$ в алгебре $\text{End}(M)$, – называется наибольшим идеалом нильпотентности представления.*

Для конечномерной алгебры Ли L нильпотентный радикал $N(L)$ характеризуется эквивалентным образом не только как пересечение ядер конечномерных представлений, но и как пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L [7].

ТЕОРЕМА 2. *(О нильпотентном радикале [7, с. 59]). Для произвольной конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = [R(L), L]$, где $R(L)$ – разрешимый радикал.*

Нас интересует существование наибольшего нильпотентного идеала в случае бесконечномерных алгебр Ли. В работе [41] рассматриваются конечно порождённые специальные алгебры, для которых доказывается, что наибольший нильпотентный идеал существует. Также доказано, что такой идеал существует для конечно порождённых универсальных алгебр конечной сигнатуры, удовлетворяющих системе тождеств Капелли некоторого порядка [12].

С другой стороны, для бесконечномерных алгебр Ли нильпотентный в смысле приведённого определения радикал может не быть нильпотентным. Рассмотрим пример бесконечномерной локально нильпотентной алгебры Ли, которая не является нильпотентной.

ПРИМЕР 2. Пусть L – это алгебра Ли бесконечных верхнетреугольных матриц по отношению к операции коммутирования над полем F характеристики нуль, содержащих лишь конечное число элементов, отличных от нуля.

Пусть N – подалгебра матриц алгебры Ли L с нулевыми элементами на диагонали.

Пусть матрица $A \in N$ содержит ненулевые слагаемые $a_{ij_1}e_{ij_1}, a_{ij_2}e_{ij_2}, \dots, a_{ij_k}e_{ij_k}, i \neq j_1, i \neq j_2, \dots, i \neq j_k$, где e_{ij} – матричная единица.

Элементы $e_{ii}, e_{j_1j_1}$ принадлежат L . Тогда

$$[e_{ii}, A] = \sum_{s=1}^k a_{ijs}e_{ijs} \Rightarrow \sum_{s=1}^k a_{ijs}e_{ijs} \in N,$$

$$[[e_{ii}, A], e_{j_1j_1}] = a_{ij_1}e_{ij_1} \Rightarrow a_{ij_1}e_{ij_1} \in N.$$

Итак, $N \subset [L, N]$.

С другой стороны, N – идеал алгебры Ли L , то есть $[L, N] \subset N$.

Таким образом, $N = [L, N]$.

Так как любое конечное множество матриц алгебры Ли L может быть вложено в алгебру Ли матриц конечного порядка (предполагается, что при вложении можно отбросить бесконечное множество нулевых элементов), можно утверждать, что алгебра Ли L является разрешимой, а N – локально нильпотентной.

Рассмотрим конечномерное представление M алгебры Ли L .

Пусть $\bar{L}$ и $\bar{N}$ – гомоморфные образы алгебр Ли L и N в алгебре Ли $End(M)$.

Алгебра Ли $\bar{L}$ является конечномерной. Согласно теореме 2, нильпотентный радикал алгебры Ли $\bar{L}$ равен $N(\bar{L}) = \bar{N}$. Согласно определению нильпотентного радикала, эндоморфизм x_M , соответствующий элементу x , является нильпотентным для всех $x \in \bar{L}$, в алгебре $End(M)$. Следовательно, алгебра Ли N содержится в наибольшем идеале нильпотентности представления M .

Учитывая произвольность конечномерного представления M , мы получили включение $N \subset N(L)$.

Покажем, что пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений совпадает с N .

Пусть для матрицы A алгебры L слагаемое $a_{ii}e_{ii}$ не равно нулю.

Алгебра Ли L представлена эндоморфизмами бесконечномерного векторного пространства V и запись её элементов в виде матриц получается после выбора базиса $t_1, t_2, \dots$.

После соответствующей перенумерации элементов базиса можно получить, что $a_{11}e_{11} \neq 0$.

Рассмотрим подпространство W , являющееся линейной оболочкой базисных элементов $t_2, t_3, \dots$. Пусть $\bar{V} = V/W$ фактор-пространство.

Пусть матрицы действуют справа на векторы V .

Покажем, что подпространство W инвариантно относительно алгебры Ли L .

Алгебра Ли L является линейной оболочкой матричных единиц e_{ij} , $i \leq j$.

Тогда $t_k e_{ij} = \delta_{ki} t_j$, где δ_{ki} – символ Кронекера, $k \leq j$.

Можно считать, что L действует на фактор-пространстве $\bar{V}$.

Тогда $\bar{t}_1 A = a_{11} \bar{t}_1$. Отсюда следует, что $\bar{t}_1 A^n = a_{11}^n \bar{t}_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, матрица A не лежит в наибольшем идеале нильпотентности представления алгебры Ли L в пространстве $\bar{V}$.

Так как A – произвольная матрица L с ненулевыми элементами на диагонали, то $N(L) \subset N$.

В результате получаем, что $N(L) = N$ и алгебра N не является нильпотентной.

Данный пример показывает естественность введения для бесконечномерных алгебр Ли понятия локально нильпотентного радикала. Такой радикал будет удовлетворять свойствам аналогичным свойствам нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Алгебра Ли называется локально нильпотентной, если любая её конечно порождённая подалгебра нильпотентна.*

Локально нильпотентным радикалом (или радикалом Левицкого) алгебры R называется её наибольший локально нильпотентный идеал [1]. Однако ситуация для бесконечномерных алгебр Ли в понимании подхода к определению локально нильпотентного радикала несколько иная.

Понятие локально нильпотентного радикала для бесконечномерных алгебр Ли является аналогом нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли.

В работе [35] введено понятие локально нильпотентного радикала специальной алгебры Ли.

Рассмотрим сначала понятие специальной алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. ([10, с. 323]) *Ассоциативная алгебра A называется PI-алгеброй, если существует некоммутативный полином $f(x_1, \dots, x_n) \in F(x)$, где $F(x)$ – свободная ассоциативная алгебра, такой, что*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \text{для произвольных } a_1, \dots, a_n \in A.$$

В 1963 г. В. Н. Латышев определил специальную алгебру Ли [19].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. ([19]) *Алгебра Ли L называется специальной алгеброй или SPI-алгеброй, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.*

Для PI-представлений алгебр Ли аналог наибольшего идеала нильпотентности вводится следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. ([36, с. 66-67]) *Пусть алгебра Ли L имеет PI-представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M . Тогда*

1. *все идеалы J алгебры L такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in L$, содержатся в одном из них, например U ;*

2. образ $\bar{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $\text{End}(M)$;
3. идеал U является множеством элементов $x \in L$ таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L .

Тогда по аналогии с конечномерными алгебрами идеал U называется наибольшим идеалом локальной нильпотентности PI -представления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. ([35]) *Локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F называется пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F .*

В работе [35] доказаны свойства локально нильпотентного радикала $N(L)$ специальной алгебры Ли L . В частности, показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным.

1.4. Радикал Джекобсона и связанные с ним радикалы алгебр Ли

Радикал Джекобсона – классический радикал, удовлетворяющий требованиям структурной теории и рассматриваемый для различных алгебраических систем. В теории радикалов колец известен также как квазирегулярный радикал Перлиса–Джекобсона. Как правило, вводится в рассмотрение с помощью модулей.

Радикалом Джекобсона в теории ассоциативных колец называется пересечение всех максимальных правых идеалов кольца [44]. Радикал Джекобсона ассоциативной алгебры R определяется как пересечение аннуляторов правых (левых) неприводимых R -модулей [1]. Определение, эквивалентное данному, может быть сформулировано следующим образом: радикал Джекобсона ассоциативной алгебры R есть пересечение ядер всех неприводимых представлений.

Аналогичным образом определяется радикал Джекобсона алгебры Ли. Впервые для алгебр Ли определение радикала Джекобсона дано Е. Маршаллом. Для случая бесконечномерных алгебр Ли уточнено Ф. Кубо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. ([15]) *Радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L называется пересечение максимальных идеалов или сама алгебра, если их нет.*

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [56].

Е. Маршалл нашел условие, при котором радикал Джекобсона $J(L)$ конечномерной алгебры Ли L над полем совпадает с $[L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ является разрешимым радикалом алгебры Ли L . Таким условием является разложение Леви алгебры Ли L в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, где S – полупростая алгебра [56].

Н. Камийя нашел условие представления радикала Джекобсона $J(L)$ не обязательно конечномерной алгебры Ли L в виде $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L . Для этого алгебра Ли L должна быть порождена конечномерными локальными подидеалами L [53]. Напомним, что идеал идеала алгебры Ли L называется подидеалом [15].

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал Ф. Кубо [54]. Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально конечных алгебр. Им также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

Один из способов изучения свойств алгебр, а также их идеалов предполагает гомологическое описание идеалов алгебр. Под гомологическим описанием идеалов колец, алгебр, алгебр

Ли понимается их задание через модули [23]. Актуальным является вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

В работе [31] рассмотрены определения естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли, а также приведены их сопоставления с радикалом Джекобсона. Приведем данные определения в соответствии с работой [31].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Обозначим через $\text{Irr}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L , если их нет, и назовём неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *Обозначим через $\text{IrrPI}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет, и назовём PI -неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Обозначим через $\text{IrrFin}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет, и назовём конечно неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.*

В работе [31] также исследованы свойства неприводимо представленных радикалов. В частности, доказано, что для произвольной алгебры Ли L неприводимо представленный радикал $\text{Irr}(L) = L \cap J(U(L))$, где $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебра.

В случае конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль PI -неприводимо представленный радикал совпадает с нильпотентным радикалом алгебры Ли L .

Также исследованы соотношения между всеми гомологически заданными радикалами. Показано, что в случае, когда у основного поля характеристика равна нулю, имеют место следующие включения: $\text{Irr}(L) \subset \text{IrrPI}(L) \subset \text{IrrFin}(L)$.

Изучение свойств разрешимости PI -неприводимо представленного радикала показало, что в общем случае $\text{IrrPI}(L)$ не является локально разрешимым даже для специальных алгебр Ли.

В работе [31] сделан вывод о представлении радикала Джекобсона через модули, согласно которому для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль PI -неприводимо представленный радикал алгебры Ли совпадает с радикалом Джекобсона. Следовательно, радикал Джекобсона алгебры Ли L можно определить как пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли и саму алгебру L , если их нет.

2. Слабо артиновы алгебры Ли

2.1. Понятие и примеры слабо артиновых алгебр Ли

Одним из условий конечности, накладываемых на алгебры Ли, является свойство артиновости.

Э. Артин впервые рассмотрел кольца с условием минимальности.

Для ассоциативных колец рассматривается понятие правой или левой артиновости. Если в ассоциативном кольце R любая убывающая цепочка его правых (левых) идеалов стабилизируется, то кольцо R называется право (лево) артиновым. Ассоциативное кольцо не обязательно обладает свойствами правой и левой артиновости одновременно. Известен пример Смолла [18, с. 122] кольца, которое является право артиновым, но не является лево артиновым.

Артиновость ассоциативных колец также может определяться и только для двусторонних идеалов. В этом случае возникает понятие слабой артиновости, которое слабее артиновости.

Заметим, что в алгебрах Ли все идеалы являются двусторонними идеалами, поэтому для алгебр Ли не вводятся понятия правой или левой артиновости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть L – алгебра Ли. Если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется слабо артиновой.

Кроме подхода к определению артиновости для алгебр Ли, при котором используются идеалы алгебр Ли, существует подход, когда артиновость можно определить через подалгебры, внутренние идеалы. В работе [22] Е. В. Мещериной рассмотрены различные понятия артиновости для алгебр Ли.

В публикации [22] слабо артинова алгебра называется i -артиновой. Также в статье [22] рассмотрены понятия артиновости в случае обрыва убывающей цепочки алгебр и цепочки внутренних идеалов. Доказано, что из артиновости в смысле обрыва цепочки внутренних идеалов следует слабая артиновость алгебр Ли, из артиновости в смысле обрыва убывающей цепочки алгебр также следует слабая артиновость алгебры Ли.

Рассмотрим примеры слабо артиновых алгебр Ли.

Рассмотрим примеры бесконечномерных простых алгебр.

Любая простая алгебра будет слабо артиновой, так как у неё только два идеала – тривиальный и сама алгебра.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим поле F . Пусть $\text{char} F = 0$. Пусть K – бесконечномерное расширение поля F . Известно, что алгебра $sl_2(K)$ является простой и бесконечномерной.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство V над полем F . Пусть $L = L(V)^{(-)}$ – алгебра Ли, полученная из полной алгебры линейных отображений V с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Известно, что L – простая алгебра.

Приведём другие примеры слабо артиновых алгебр Ли.

ПРИМЕР 5. Пусть F – поле характеристики нуль, $K = F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ – поле рациональных функций от счётного числа коммутирующих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Обозначим через L_1 алгебру Ли матриц порядка 2 над полем K со следом нуль $L_1 = sl_2(K)$. Будем рассматривать L_1 как алгебру Ли над полем K .

Пусть L_2 – любая неизоморфная L_1 алгебра Ли.

Рассмотрим алгебру Ли $L = L_1 \oplus L_2$. В алгебре L , кроме неё самой и нуля, существуют только 2 идеала, один из которых изоморфен L_1 , а другой – L_2 , тогда любая цепь идеалов обрывается, то есть алгебра Ли L является слабо артиновой.

ПРИМЕР 6. Пусть F – поле произвольной характеристики. M – простая алгебра Ли.

Известно, что простые алгебры Ли конечномерные и бесконечномерные существуют для полей любой характеристики.

Обозначим через M_i , $i = 1, 2, \dots$ алгебры Ли, изоморфные M .

Пусть $P = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} \dots \dot{+} M_n \dot{+} \dots$ – прямая сумма векторных пространств.

Обозначим через x_k элемент $x \in M_k$.

Введём на P структуру алгебры с помощью операции

$$[a_i, b_j] = [a, b]_{\min(i,j)-1}.$$

Если $\min(i, j) - 1 < 1$, то произведение считается равным нулю.

На суммы $\sum_{i \in I} a_i$ и $\sum_{j \in J} b_j$ произведение распространяется по дистрибутивности.

Проверим антикоммутативность.

Пусть $i \leq j$. Тогда

$$[a_i, b_j] = [a, b]_{i-1} = -[b, a]_{i-1} = -[b_j, a_i].$$

Аналогично проверяется случай, когда $i > j$.

Проверим тождество Якоби.

Рассмотрим случай, когда $i \leq j \leq k$. Получим

$$[[a_i, b_j], c_k] + [b_j, [c_k, a_i]] + [[c_k, a_i], b_j] = [[a, b], c]_{i-1} + [b, [c, a]]_{i-1} + [[c, a], b]_{i-1} = 0.$$

Аналогично проверяются остальные случаи.

Итак, алгебра P является алгеброй Ли.

Определим действие алгебры M на P по формуле $[x, a_i] = [x, a]_i$, где $x \in M$.

Действие алгебры M на P задаёт гомоморфизм

$$\varphi: M \rightarrow \text{Der}P.$$

Действительно,

$$\varphi([x, y])(a_i) = [[x, y], a_i] = [[x, a]_i, [y, a]_i].$$

Пусть алгебра Ли $L = M \odot P$ является полупрямым произведением алгебр M и P . Данная алгебра L является слабо артиновой. Покажем это.

Покажем, что все идеалы алгебры Ли L имеют вид

$$L, \quad P = M_1 + M_2 + \dots + M_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть I – идеал алгебры Ли L , $a \in I$, a имеет вид

$$a = x + m_1 + \dots + m_k, \quad x \in M, \quad m_i \in M_i.$$

1. Предположим, что $x = 0$. Тогда $a = x + m_1 + \dots + m_k$, где $m_k \neq 0$.

Имеет смысл рассматривать только ненулевые элементы a . Произведём преобразования в несколько шагов.

Можно выбрать такой элемент $m \in M_k$, что $[m_i, m] \neq 0$. Тогда $[a, m] = x_1 + \dots + x_{k+1}$, где $x_i \in M_i$, $x_{k-1} \neq 0$. Отметим, что $[a, m] \in I$. И так далее, пока не придём к элементу $y \in M_1$, $y \neq 0$, $y \in I$.

Действуя на y элементами из M , получим все элементы M_1 . Здесь используется простота алгебры M и её неприводимость как модуля над M .

Итак, получили включение $M_1 \subset I$.

В качестве промежуточного элемента у нас был $z_1 + z_2 \in I$, $z_i \in M_i$, $z_2 \neq 0$. Мы уже установили, что $z_1 \in I$. Следовательно, $z_2 \in I$. Действуя на z_2 элементами из M , получим включение $M_2 \subset I$.

Продолжая аналогичные рассуждения, получим

$$M_1 + M_2 + \dots + M_k \subset I.$$

2. Предположим теперь, что $x \neq 0$. То есть $a = x + m_1 + \dots + m_k$.

Подберём $m \in M_k$ такое, что $[x, m] \neq 0$. Получим

$$[a, m] = [x, m] + [m_1, m] + \dots + [m_k, m].$$

Отметим, что $[a, m] \in M_k$, $[m_i, m] \in M_{i-1}$. Следовательно, $[a, m] \in I$ представимо в виде

$$[a, m] = x + m_1 + \dots + m_k, \quad x_i \in M_i, \quad x_k \neq 0.$$

Согласно 1, справедливо включение $M_1 + M_2 + \dots + M_k \subset I$. Получим $x = a - m_1 - \dots - m_k \in I$. Действуя на x элементами из M , получим включение $M \subset I$. Следовательно,

$$M_n = [M, M_n] \subset I$$

для $n = 1, 2, \dots$.

Итак, доказано включение $L \subset I$. Таким образом, алгебра L – слабо артинова. $\square$

2.2. Локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. ([3, с. 34]) Алгебра Ли L называется нильпотентной степени s , если она удовлетворяет тождеству нильпотентности степени s

$$[x_1, \dots, x_s] = 0$$

с левонормированной расстановкой скобок и не удовлетворяет тождеству

$$[x_1, \dots, x_{s-1}] = 0.$$

Напомним, что алгебра Ли L называется локально нильпотентной, если любое её конечное множество элементов порождает в L нильпотентную подалгебру.

Приведём пример локально нильпотентной алгебры Ли.

ПРИМЕР 7. Пусть F – поле произвольной характеристики. Обозначим через $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ базис счётномерного векторного пространства V .

Рассмотрим систему векторных пространств $M_k = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. Эти подпространства образуют возрастающую последовательность

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots$$

Рассмотрим алгебру A линейных отображений конечного ранга $f: V \rightarrow V$, удовлетворяющих условию $f(M_1) = 0$, $f(M_k) \subset M_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$.

Обозначим через P алгебру Ли $A^{(-)}$, полученную из A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

Можно представлять себе элементы алгебры Ли P как бесконечные матрицы, у которых только конечное число столбцов отлично от нуля:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Построенная таким образом алгебра Ли P является локально нильпотентной.

ТЕОРЕМА 4. Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ – локально нильпотентен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы нам потребуется представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала, которое рассмотрено в пункте 1.2 данной работы.

Пусть $\sigma(L)$ – это любой ненулевой абелев идеал из $P(L)$. Такой идеал существует, так как идеал $\sigma(L)$ содержится в первичном радикале.

Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует, согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(L) \neq 0$ [27] (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено).

Как известно [11], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.
2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\tau(\beta) = P(L)$.

Построим ещё одно представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\sigma(L)$ – это сумма всех ненулевых абелевых идеалов из $P(L)$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что их конечное число.

В [11] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли – нильпотентна. Следовательно, идеал $\sigma(L)$ – нильпотентен.

Также как и раньше, с помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\sigma(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\sigma(0) = 0$.
2. Предположим, что $\sigma(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\sigma(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\sigma(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\sigma(\beta)/\sigma(\gamma) = \sigma(L/\sigma(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\sigma(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \sigma(\gamma).$$

Из соображений мощности $\sigma(\beta) = \sigma(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\sigma(\beta) = P(L)$.

Обозначим через $N(\sigma(L))$ степень нильпотентности идеала $\sigma(L)$.

Пусть $X \subset P(L)$ – непустое конечное множество. Докажем, что все произведения $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}]$, где $x_{i_k} \in X$ с левой расстановкой скобок равны 0 для некоторого натурального r .

Для каждого $x \in X$ обозначим через $\alpha(X)$ порядковое число α такое, что $x \in \sigma(\alpha) \setminus \sigma(\alpha - 1)$, если $\alpha - 1$ определено и α , если $x \in \sigma(\alpha)$ и $\alpha - 1$ не определено.

Введём множество $X_1 = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}] | x_{i_k} \in X, 1 \leq k \leq m\}$. Пусть

$$\alpha_1 = \max(\alpha([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}] | x_{i_k} \in X)), \quad m_1 = N(\sigma(\alpha_1)).$$

Рассмотрим все произведения $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}]$. Они удовлетворяют условию

$$\alpha([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}]) < \alpha_1.$$

Введём множество $X_2 = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m_1}}] | x_{i_k} \in X, 1 \leq k \leq m_1\}$. Пусть $\alpha_2 = \max_{x \in X_2}(\alpha(x))$, $m_2 = N(\sigma(\alpha_2))$. Из сказанного выше следует, что $\alpha_2 < \alpha_1$.

Введём множество $X_3 = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m_2}}] | x_{i_k} \in X, 1 \leq k \leq m_2\}$. Получим последовательность множеств $X_1, X_2, \dots$ и убывающую последовательность ординальных чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, которая не может быть бесконечной.

Следовательно, для некоторого r все элементы множества X_r равны нулю.

Это означает нильпотентность алгебры Ли, порождённой множеством X , и локальную нильпотентность первичного радикала $P(L)$. $\square$

2.3. О проблеме А. В. Михалёва

Проблема А. В. Михалёва связана с вопросом разрешимости первичного радикала артиновых алгебр Ли.

Первичный радикал алгебры Ли L разрешим, если он является разрешимым как алгебра Ли некоторой степени.

Вопрос о разрешимости первичного радикала алгебр Ли рассматривался в работах [2, 21, 33, 39].

В случае произвольных алгебр Ли исследована слабая и локальная разрешимость первичного радикала.

Первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L является слабо разрешимым, если для любого конечномерного подпространства $V \subseteq P(L)$ существует такое k , что полином разрешимости f_k степени k обращается в нуль при подстановке любых элементов из V .

В работе [27] доказано, что первичный радикал алгебры Ли слабо разрешим.

Первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L является локально разрешимым, если любая её конечная подалгебра – разрешима.

В работе [27] показано, что первичный радикал алгебры Ли может не быть локально разрешимым.

Вопросам разрешимости первичного радикала, удовлетворяющего дополнительным условиям, посвящены работы [21, 36, 39].

Известно, что первичный радикал нётеровой алгебры Ли над полем является разрешимым [36, с. 111]. Возникает вопрос: *существует ли артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?* Вопрос о существовании слабо артиновой алгебры Ли, первичный радикал которой не является разрешимым, сформулирован А. В. Михалёвым в 2001 году на семинаре «Кольца и модули», проводимом на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

В процессе решения данной проблемы А. В. Михалёва получены следующие результаты. С. А. Пихтильков показал, что первичный радикал специальной слабо артиновой алгебры – разрешим [33]. Также разрешимость первичного радикала доказана для артиновых обобщённо специальных алгебр Ли. Данное свойство первичного радикала доказано и для супералгебр Ли [2]. Разрешимость первичного радикала также доказана для слабо артиновых локально нильпотентных алгебр Ли [39]. Ослабленная проблема А. В. Михалёва решена для первичного радикала алгебры Ли, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек внутренних идеалов или подалгебр [21].

Сначала отметим следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть I – ненулевой идеал слабо артиновой алгебры Ли L . Если I не является разрешимым, то существует нетривиальный идеал R , содержащийся в I , для которого $[R, R] = R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – слабо артинова алгебра Ли, I – её ненулевой идеал. Рассмотрим производный ряд $I' = [I, I], \dots, I^{(n+1)} = [I^n, I^n], \dots$

Имеют место включения $I \supset I' \supset I'' \supset \dots \supset I^{(n)} \supset \dots$

Так как алгебра Ли L является слабо артиновой, убывающая последовательность идеалов стабилизируется, то есть $R = I^{(n+1)} = I^{(n)}$. Получаем $[R, R] = R$.

Если $R = 0$, то $R = I^{(n)} = 0$, а это означает, что I является разрешимым идеалом, что противоречит условию. Тогда $[R, R] = R \neq 0$. $\square$

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 5. ([13, с. 21]) Пусть I – идеал в алгебре Ли L . Предположим, что элемент $x \in L$ является произведением k элементов из L (при некоторой расстановке скобок), причём r из этих элементов содержатся в I . Тогда $x \in I^r$.

СЛЕДСТВИЕ 1. ([13, с. 21]) Для любого нильпотентного идеала I алгебры Ли L степени нильпотентности r произведение k элементов алгебры Ли при любой расстановке скобок равно нулю, если оно содержит r элементов из I .

ТЕОРЕМА 6. Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ – разрешим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Рассмотрим производный ряд первичного радикала P

$$P' = [P, P], \dots, P^{(n+1)} = [P^{(n)}, P^{(n)}], \dots \quad (1)$$

Имеют место включения $P \supset P' \supset P'' \supset \dots \supset P^{(n)} \supset \dots$. Так как алгебра Ли является слабоартиновой, то убывающая последовательность идеалов стабилизируется, т.е. $R_1 = P^{(n+1)} = P^{(n)}$. Получаем $[R_1, R_1] = R_1$.

Если $R_1 = 0$, то первичный радикал P разрешим и утверждение имеет место.

Предположим, что $R_1 \neq 0$. Пусть идеал R_1 содержит собственный неразрешимый идеал P_1 .

Строим для P_1 производный ряд (1) и так же показываем существование идеала R_2 такого, что $[R_2, R_2] = R_2$.

Равенство $R_2 = 0$ противоречит неразрешимости P_1 .

Получили убывающую последовательность различных ненулевых идеалов

$$R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots,$$

удовлетворяющих условию $[R_k, R_k] = R_k$, $k = 1, 2, \dots$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что убывающая последовательность идеалов не может быть бесконечной.

Пусть $K = R_m$ – последний идеал убывающей цепи идеалов. Из построения идеалов $R_1, R_2, \dots$ следует, что $[K, K] = K$ и каждый собственный идеал K – разрешим.

2. Для доказательства теоремы нам потребуется представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала, которое было рассмотрено в разделе 1.2 данной работы.

Пусть $\sigma(L)$ – это любой ненулевой абелев идеал из L . Такой идеал существует, если первичный радикал ненулевой $P(L) \neq 0$, то есть алгебра L не является полупервичной [27].

Абелев идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(L) \neq 0$ [27] (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено).

Как известно [27], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.
2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\tau(\beta) = P(L)$.

3. Покажем, что построенный в пункте 1 неразрешимый идеал $K = [K, K]$ равен $K = \tau(\omega)$, занумерован первым бесконечным порядковым числом.

Идеал K не может равняться $K = \tau(n)$, где n – натуральное. В этом случае идеал K разрешим как конечное последовательное расширение абелевых идеалов.

Заметим, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым и $K = \tau(\omega)$ – первый неразрешимый идеал в возрастающей последовательности идеалов $\tau(0) \subset \tau(1) \subset \dots$.

Разрешимый идеал S_1 слабо артиновой алгебры Ли ступени k является последовательным расширением конечного числа идеалов. У него конечное число n_1 абелевых идеалов, иначе нарушается слабая артиновость. Обозначим через J_1 сумму абелевых идеалов S_1 .

Рассмотрим фактор-алгебру $S_2 = S_1/J_1$. Обозначим через J_2 сумму n_2 абелевых идеалов S_2 .

Снова рассмотрим фактор-алгебру $S_3 = S_2/J_2$.

Нам придётся факторизовать по абелевым идеалам k раз, после чего получим нулевую алгебру.

Пересчитывая количество абелевых идеалов, получим

$$K = \tau(n), \tag{2}$$

где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Равенство (2) противоречит предположению $K = \tau(\omega)$.

Итак, мы доказали, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым.

4. Построим ещё одно представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\varphi(L)$ – это сумма всех ненулевых абелевых идеалов из $P(L)$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что их конечное число.

В [13] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли – нильпотентна. Следовательно, идеал $\varphi(L)$ – нильпотентен.

Также как и раньше, с помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\rho(0) = 0$.

2. Предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом:

- а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\rho(\beta)/\rho(\gamma) = \sigma(L/\rho(\gamma))$;
- б) если β – предельное порядковое число, то

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \rho(\gamma).$$

Из соображений мощности $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\rho(\beta) = P(L)$.

Расширение нильпотентной алгебры Ли при помощи нильпотентной является нильпотентной алгеброй Ли [13].

Так как идеалы $\{\rho(n) | n \in N\}$ являются конечной последовательностью расширений нильпотентных алгебр Ли, то все они нильпотентны.

Мы получили представление идеала K как последовательности возрастающих нильпотентных идеалов

$$\rho(0) \subset \rho(1) \subset \dots \subset \rho(n) \subset \dots,$$

при этом $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho(i)$.

Обозначим через $N(\rho(n))$ степень нильпотентности идеала $\rho(n)$.

Для каждого $x \in K$ обозначим через $\alpha(x)$ натуральное число α такое, что $x \in \rho(\alpha) \setminus \rho(\alpha - 1)$.

5. Далее будем использовать рассуждение из работы [39] и применим теорему 5 (стр. 330) и следствие 1 (стр. 330).

Напомним, что для идеала K выполнено условие $[K, K] = K$.

Пусть $b \in K$ – ненулевой элемент. Тогда $b = \sum_{i=1}^n [b_i, b'_i]$, где все элементы $b_i, b'_i \in K$. Тогда $[b_i, b'_i] \neq 0$ для некоторого i . Обозначим этот коммутатор $[b_1, b'_1]$.

Представляя далее b'_1 в виде суммы коммутаторов элементов из K и рассуждая аналогично, получим ненулевой коммутатор $[b_1, [b_2, b'_2]]$, где $b_1, b_2, b'_2 \in I$. В силу равенства $[b_1, [b_2, b'_2]] = [[b_1, b_2], b'_2] - [[b_1, b'_2], b_2]$, одно из слагаемых отлично от нуля. Обозначим его элементы $[b_1, [b_2, b'_2]]$.

Действуя аналогично, получим бесконечную последовательность $b_1, b_2, \dots \in K$ такую, что все конечные коммутаторы с левой расстановкой отличны от нуля $[b_1, b_2, \dots, b_n] \neq 0, n = 1, 2, \dots$

Рассмотрим цепочку идеалов J_k , порождённых элементами

$$J_k = ([b_1, \dots, b_k]), \quad k = 1, 2, \dots, \quad J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq J_k \supseteq \dots$$

Из слабой артиновости алгебры Ли L следует существование натурального n такого, что $J_n = J_{n+1}$.

Введём обозначение $a = [b_1, b_2, \dots, b_n]$.

Пусть $\beta = \max(\alpha(a), \alpha(b_{n+1}))$. Обозначим через $m = N(\rho(\beta))$ степень нильпотентности идеала $\rho(\beta)$.

Отметим, что элемент a отличен от нуля.

Существуют натуральное число r и элементы

$$c_{ij} \in L, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, k_i$$

такие, что

$$a = \sum_{i=1}^r [a, b_{n+1}, c_{i1}, \dots, c_{ik_i}].$$

Подставляя выражение элемента a в правую часть, получим

$$a = \sum_{i,j=1}^r [a, b_{n+1}, c_{i1}, \dots, c_{ik_i}, b_{n+1}, c_{j1}, \dots, c_{jk_j}].$$

Продолжая этот процесс m раз, получим в каждом коммутаторе под знаком суммы не менее m элементов вида a, b_{n+1} .

Напомним, что элементы a, b_{n+1} лежат в нильпотентном идеале $\rho(\beta)$ степени нильпотентности m .

Согласно следствию 1, все коммутаторы под знаком суммы и, следовательно, элемент a равны нулю.

Это противоречит предположению, сделанному выше о том, что элемент a – ненулевой, что и доказывает разрешимость первичного радикала. $\square$

3. Нётеровы алгебры Ли

3.1. Основные определения и свойства

В этом разделе рассмотрено решение проблемы вложения любой нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц над конечно порождённым коммутативным кольцом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. *Алгебра Ли называется нётеровой, если в ней стабилизируется любая возрастающая цепочка идеалов.*

Также, как и в случае со слабо артиновыми алгебрами Ли, очевидными примерами нётеровых алгебр Ли являются простые алгебры Ли, у которых только два идеала – тривиальный и сама алгебра Ли (примеры 3 (стр. 325) и 4 (стр. 325) данной работы).

Пусть $M = V \otimes_F C$, где V – конечномерное пространство над полем F , $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n$ – прямая сумма полей.

Введём понятие размерности над C . Каждый C -подмодуль W однозначно представим в виде прямой суммы подпространств $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ над полями C_k . Каждое подпространство W_k конечномерно над полем C_k .

Определим $\dim_C W = \dim_{C_1} W_1 + \dots + \dim_{C_n} W_n$.

ЛЕММА 1. *Пусть $M = V \otimes_F C$, где V – конечномерное пространство над полем F , $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n$ – прямая сумма полей. Пусть $K \subset L \subset M$ – C -подпространства.*

Тогда $K = L \iff \dim_C K = \dim_C L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $K = L \iff \dim_C K_i = \dim_C L_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Отличие подпространств K и L возможно только при отличии размерностей $\dim_C K = \dim_C L$. $\square$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется понятие центроида Мартиндейла.

3.2. Центроид Мартиндейла алгебр Ли

Конструкция центроида Мартиндейла используется при исследовании структуры специальных алгебр Ли. Для решения задач данного раздела также рассмотрим понятие центрального замыкания. При введении данных понятий будем использовать подход, единый, как для алгебр Ли, так и для ассоциативных алгебр. Результаты в неассоциативном случае рассмотрены в работах [42, с. 40], [48]. Вслед за Ю. П. Размысловым будем следовать подходу, описанному при рассмотрении универсальных алгебр [42, с. 51].

Для начала рассмотрим понятия инъективного модуля и инъективной оболочки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Модуль M над ассоциативной алгеброй с единицей A называется инъективным, если для любых двух модулей M_1, M_2 , любого мономорфизма $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ и любого гомоморфизма $\psi : M_1 \rightarrow M$ существует гомоморфизм $\rho : M_2 \rightarrow M$, для которого $\rho \circ \varphi = \psi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Подмодуль M модуля P называется большим в P , если любой ненулевой подмодуль в P имеет с M ненулевое пересечение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. A -модуль P называется инъективной оболочкой A -модуля M , если выполнены условия:

1. P – инъективный A -модуль;
2. M – подмодуль в P ;
3. M – большой подмодуль в P .

Инъективная оболочка существует для каждого модуля M , и она единственна с точностью до изоморфизма.

Ю. П. Размыслов для каждой F -алгебры L сигнатуры Ω определил связанную с ней ассоциативную подалгебру $A = A(L)$ в $End_F A$ ([42], с. 40). В случае лиевых алгебр алгебра $A(L)$ является присоединенной алгеброй AdL алгебры L , порождённой в $End_F L$ всеми внутренними дифференцированиями adx ($x \in L$). Если L – ассоциативная F -алгебра, то $A(L)$ является алгеброй умножений алгебры L , порождённой в $End_F L$ элементами вида r_a, l_b ($a, b \in L$), где

$$a, x \in L, \quad r_a(x) = xa, \quad l_a(x) = ax.$$

Пусть L – F -алгебра сигнатуры Ω и $A = A(L)$ – связанная с ней ассоциативная подалгебра в $End_F A$. Пусть P – инъективная оболочка A -модуля L . $E = End_A P$ – алгебра всех эндоморфизмов A -модуля P , $S = EL$ – A -подмодуль в P .

Далее относительно введённых объектов рассмотрим некоторые утверждения (без доказательства).

ЛЕММА 2. ([42, с. 42, лемма 3.1]) Пусть L – полупервичная F -алгебра сигнатуры Ω . Тогда ограничение ρ действия алгебры E на A -модуль S коммутативно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение первичных и полупервичных алгебр для случая универсальных алгебр определяется аналогично этим понятиям в случае алгебр Ли и ассоциативных алгебр. Так как в дальнейшем эти понятия применяются только в случае ассоциативных алгебр и алгебр Ли, то отдельно для универсальных алгебр определения рассматривать нет необходимости.

Так как по определению $S = EL$ и согласно лемме 2 алгебра $C(L) = E/Ker \rho$ коммутативна, то мы можем продолжить все операции сигнатуры Ω по C -линейности с алгебры L на алгебру S и наделить S структурой Z -алгебры сигнатуры Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Алгебра $C = C(L)$ называется центроидом Мартиндейла полупервичной алгебры L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. C -алгебра S называется центральным замыканием алгебры L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. ([42, предложение 3.1]) Если L – полупервичная F -алгебра сигнатуры Ω , то центроид $C = C(L)$ и центральное замыкание $S = S(L)$ являются полупервичными алгебрами, характеризующимися следующими свойствами:

1. C – коммутативная F -алгебра с единицей и $S = CL$;
2. произвольный ненулевой A -подмодуль в S пересекается с L по ненулевому идеалу алгебры L ;
3. для любого A -гомоморфизма φ ненулевого A -подмодуля I и A -модуля S в S существует элемент $c \in C$, для которого $ci = \varphi(i)$, где i – произвольный элемент модуля I . Более того, если I – большой A -подмодуль в S , то элемент c однозначно определяется гомоморфизмом φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. ([42, предложение 3.2]) Если L – первичная F -алгебра сигнатуры Ω , то центроид $C(L)$ является полем, $S(L)$ – первичной F -алгеброй и C -алгебра S характеризуется следующими свойствами:

1. $S = CL$;
2. произвольный ненулевой A -подмодуль в S имеет ненулевое пересечение с L ;
3. любой частичный A -эндоморфизм φ ненулевого идеала I алгебры L в L однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на I совпадает с φ .

Нам потребуется также теорема Познера.

ТЕОРЕМА 7. (Познера [52]). Пусть A – первичная ассоциативная PI -алгебра, K – поле частных центра $Z(A)$, $Q(A) = K \otimes_{Z(A)} A$ – алгебра центральных частных A . Тогда $Q(A)$ – простая алгебра, конечномерная над своим центром, и $Z(Q(A)) = K$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть A – первичная PI -алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d . Тогда A конечномерна над своим центроидом Мартиндейла $C(A)$, и её размерность над C не превосходит $[d/2]^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. K – поле частных центра $Z(A)$, $Q(A) = K \otimes_{Z(A)} A$ – алгебра центральных частных A .

Так как $Q(A)$ является тензорным произведением алгебры A на коммутативную алгебру K , она удовлетворяет тому же тождеству степени d , что и A . Следовательно, согласно теореме Капланского, размерность $Q(A)$ над K не превосходит $[d/2]^2$. Так как $K \subseteq C(A)$, то размерность A над $C(A)$ также не превосходит $[d/2]^2$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Пусть A – ассоциативная PI -алгебра или алгебра Ли, удовлетворяющая тождественному соотношению. Назовём сложностью $n(A)$ алгебры A наименьший из порядков матричных алгебр, всем тождествам которой удовлетворяет фактор алгебры A по первичному радикалу. Скажем, что алгебра A нематричная, если $n(A) = 1$.

Аналог теоремы Познера для специальных алгебр Ли следует из теоремы Ю. П. Размылова о ранге. Хотя теорема о ранге справедлива даже для универсальных алгебр ([42, с. 47]), мы будем иметь в виду ассоциативные алгебры или алгебры Ли.

Пусть A – алгебра Ли или ассоциативная алгебра над полем F . Любой полином

$$d_k(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$$

из свободной алгебры Ли $F(X)$ или ассоциативной соответственно, который полилинеен и кососимметричен относительно $x_1, \dots, x_k$, называется полиномом Капелли порядка k . Пусть V – произвольное векторное F -подпространство в алгебре A . Скажем, что на V выполнены

все тождества Капелли порядка k , если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов

$$v_1, \dots, v_k \in V, \quad a_1, \dots, a_l \in A$$

в алгебре A выполняются равенства

$$d_k(v_1, \dots, v_k, a_1, \dots, a_l) = 0.$$

Рангом векторного F -подпространства V относительно алгебры A называется наименьшее число k , для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k . Это число обозначается $\text{rank}(A, V)$.

Легко заметить, что для конечномерной алгебры A размерности n над F ранг любого подпространства относительно алгебры A не превосходит $n + 1$. То же можно сказать и про все алгебры, лежащие в многообразии, порождённом алгеброй A .

ТЕОРЕМА 9. ([6]) Пусть L – специальная алгебра Ли.

1. Если L – первичная, то у неё существует первичная PI -оболочка, которая может быть получена как гомоморфный образ любой PI -оболочки.
2. У простой специальной алгебры Ли существует простая PI -оболочка, которая может быть получена как гомоморфный образ любой PI -оболочки.

ТЕОРЕМА 10. (Размыслова о ранге, [42, с. 47, теорема 4.1]) Пусть V – векторное F -подпространство в первичной ассоциативной алгебре A или алгебре Ли.

Если $\text{rank}(A, V) < \infty$, то в центральном замыкании $S(A)$ алгебры A справедливо равенство

$$\dim_{C(A)} C(A)V = \text{rank}(A, V) - 1.$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть L – первичная специальная алгебра Ли. Тогда

1. L – матричная алгебра Ли;
2. если L имеет сложность n , то она конечномерна над своим центроидом Мартиндейла размерности не выше n^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. По условию теоремы L – специальная алгебра Ли. Тогда из теоремы 9 следует, что у алгебры L существует первичная PI -оболочка A .

Из теоремы Познера следует, что алгебра A удовлетворяет всем тождествам алгебры матриц некоторого порядка. Следовательно, и алгебра L удовлетворяет левым тождествам некоторой алгебры матриц, то есть является матричной алгеброй.

2. Пусть алгебра L имеет сложность n . Тогда она удовлетворяет всем левым тождествам алгебры матриц порядка n . Ранг любого подпространства V алгебры $sl_n(F)$ не превосходит $n^2 + 1$.

Согласно теореме 10, справедливо неравенство $\dim_{C(L)} L \leq n^2$. $\square$

3.3. О проблеме М. В. Зайцева

Пусть U – подмножество в алгебре Ли L . Ясно, что аннулятор $Z_L(U)$ – подалгебра в L .

Более того, если U – идеал в L , то $Z_L(U)$ также является идеалом в L .

Идеал U в L называется аннуляторным, если существует такой ненулевой идеал V в L , что $U = Z_L(U)$.

Если V – идеал в L и $U = Z_L(U)$, то $Z_L(Z_L(U)) = U$.

Действительно, $V \subseteq Z_L(U)$ и поэтому $U = Z_L(V) \supseteq Z_L(Z_L(U))$. С другой стороны, $[U, Z_L(U)] = 0$ и, следовательно, $U \subseteq Z_L(Z_L(U))$. $\square$

Пусть L – полупервичная алгебра Ли и V – идеал в L . Тогда $V \cap Z_L(V)$ – идеал с нулевым умножением. Следовательно, $V \cap Z_L(V) = 0$ в силу полупервичности L .

Аннуляторный идеал алгебры Ли L называется максимальным, если он не является собственным подмножеством любого другого аннуляторного идеала.

В [38] получен критерий представимости специальной алгебры Ли в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр.

ЛЕММА 3. Пусть L – полупервичная алгебра Ли. Тогда следующие условия эквивалентны:

- i. L не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов;
- ii. L не содержит бесконечных множеств ненулевых попарно непересекающихся идеалов;
- iii. L удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей аннуляторных идеалов;
- iv. каждый максимальный аннуляторный идеал в L является первичным;
- v. множество максимальных аннуляторных идеалов в L конечно и их пересечение равно нулю;
- vi. L представимо в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр Ли.

Проблема М. В. Зайцева формулируется следующим образом: верно ли, что любая нётерова специальная алгебра Ли вложена в алгебру матриц?

ТЕОРЕМА 12. Пусть алгебра Ли L – полупервичная нётерова специальная. Тогда L вложена в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По условию алгебра L – полупервичная и нётерова. Применяя пункт iii леммы 3 получим разложимость алгебры L в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр Ли.

Эти первичные алгебры являются SPI-алгебрами, поскольку лежат в многообразии, порождённом специальной алгеброй Ли и имеют тривиальные центры ([3, следствие 6.3.5]).

Тогда центроид $C(L)$ алгебры Ли L представим в виде прямой суммы центроидов первичных алгебр Ли, то есть полей.

Согласно теореме 11, размерности всех первичных алгебр над своими центроидами Мартиндейла не превосходят некоторой константы $m = [d/2]^2$, где d – степень тождества выполненного в PI-оболочке.

Можно считать, что L вложена в матричную алгебру порядка не выше m над центроидом Мартиндейла $C(L)$.

Таким образом, проблема М. В. Зайцева решена для полупервичных нётеровых специальных алгебр Ли. $\square$

4. Первичный радикал градуированных Ω -групп

4.1. Градуированные Ω -группы

Некоторые свойства первичного радикала слабо артиновых алгебр Ли верны и в более общей ситуации – для градуированных Ω -групп.

Далее рассмотрим изложение элементов теории Ω -групп в соответствии с работами [14], [27].

Нам потребуются следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. *Градуированной Ω -группой называется группа A с аддитивной записью и нейтральным элементом 0 , градуированная группой G , в которой задана помимо сложения еще система n -арных алгебраических операций Ω (при некоторых n , удовлетворяющих условию $n \geq 1$), причем для всех $\omega \in \Omega$ должно выполняться условие*

$$(0, 0, \dots, 0)\omega = 0.$$

Множество операций Ω – не пустое и содержит хотя бы одну n -арную операцию, у которой $n \geq 2$.

Группа A раскладывается в прямую сумму нормальных подгрупп A_g , $g \in G$, называемых однородными компонентами.

Для всех $a_1 \in A_{g_1}$, $a_2 \in A_{g_2}, \dots, a_n \in A_{g_n}$ и любой n -арной операции $\omega \in \Omega$ выполнено условие $(a_1, a_2, \dots, a_n)\omega \in A_{g_1 g_2 \dots g_n}$.

Если в дополнение к указанным свойствам выполнено следующее условие: для любого конечного множества $X \subseteq A$, для всех

$$n \geq 2, a_1, a_2, \dots, a_n \in X, \omega \in \Omega$$

множество элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n)\omega$ – конечно, то скажем, что градуированная Ω -группа A удовлетворяет условию конечности.

Элементы множества $h(A) = \bigcup_{g \in G} A_g$ называются однородными элементами градуированной Ω -группы A , а отличный от 0 элемент $a_g \in A_g$ называется однородным элементом степени g .

Любой, отличный от 0 , элемент $a \in A$ имеет единственное представление в виде конечного произведения ненулевых однородных элементов, то есть

$$a = a_{g_1} + a_{g_2} + \dots + a_{g_n}, \quad \text{где } a_g \in A_g.$$

Элементы a_{g_i} в таком разложении называются однородными компонентами элемента a .

Градуированные Ω -группы могут удовлетворять также условиям, превращающим её в группу, ассоциативную алгебру, неассоциативную алгебру, супералгебру, конформную или вёртексную алгебры.

Для градуированных Ω -групп можно ввести понятие градуированного идеала, градуированного первичного радикала, разрешимой, нильпотентной, локально разрешимой и локально нильпотентной градуированных Ω -групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. *Пусть A – градуированная Ω -группа. Непустое подмножество $I \subseteq A$ называется градуированным идеалом, если выполнены следующие условия:*

1. *подмножество I является нормальной подгруппой аддитивной группы A ;*
2. *для всякой n -арной операции $\omega \in \Omega$, любого элемента $a \in I$ и любых элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ при $i = 1, 2, \dots, n$ должно иметь место включение*

$$-(x_1, x_2, \dots, x_n)\omega + (x_1, \dots, x_{i-1}, a + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\omega \in I;$$

3. *если элемент $x \in I$ является суммой однородных элементов, то есть*

$$x = x_{g_1} + x_{g_2} + \dots + x_{g_n}, x_{g_i} \in A_{g_i}, g_i \in G,$$

4. *то все x_{g_i} принадлежат I .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Пусть $I, J \subseteq A$ – градуированные Ω -подгруппы градуированной Ω -группы A . Взаимным коммутантом $[I, J]$ называется Ω -подгруппа Ω -группы A , порождённая в ней множеством элементов $(c_1, c_2, \dots, c_n)\omega$, где $n \geq 2$, $\omega \in \Omega$, элементы c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, принадлежат I или J , при этом элементы как I , так и J обязательно встречаются среди c_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Назовём градуированную Ω -группу A разрешимой степени k , если существует такое натуральное k , что $A^{(k)} = 0$, $A^{(k-1)} \neq 0$, где

$$A^{(0)} = A, \quad A^1 = [A^{(0)}, A^{(0)}], \quad \dots, \quad A^{(i+1)} = [A^{(i)}, A^{(i)}], \quad \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. Назовём градуированную Ω -группу A нильпотентной степени k , если существует такое натуральное k , что $A_k = 0$, $A_{k-1} \neq 0$, где

$$A_0 = A, \quad A_1 = [A_0, A_0], \quad \dots, \quad A_{i+1} = [A_0, A_i], \quad \dots$$

4.2. О свойствах градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Градуированная Ω -группа A называется первичной, если для любых двух градуированных идеалов $I, J \subseteq A$ из равенства $[I, J] = 0$ следует, что $I = 0$ или $J = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Градуированный идеал P градуированной Ω -группы A называется первичным, если Ω -фактор-группа A/P является первичной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Назовём градуированным первичным радикалом $P(A)$ градуированной Ω -группы A пересечение всех градуированных первичных идеалов градуированной Ω -группы A .

Свойства градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп рассмотрены в статье [27]. В частности, доказано, что градуированный первичный радикал произвольной градуированной Ω -группы с условием конечности совпадает с нижним градуированным слабо разрешимым радикалом, следовательно, является слабо разрешимым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Градуированная Ω -группа A называется абелевой, если $[A, A] = 0$.

ЛЕММА 4. Любой ненулевой разрешимый градуированный идеал градуированной Ω -группы A содержит ненулевой абелев градуированный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – ненулевой разрешимый градуированный идеал градуированной Ω -группы A .

Так как I – разрешимый, то существует такое натуральное k , что $I^{(k)} = 0$. То есть $I^{(k)} = [I^{(k-1)}, I^{(k-1)}] = 0$, причём $I^{(k-1)} \neq 0$. Таким образом, $I^{(k-1)}$ является ненулевым абелевым градуированным идеалом. $\square$

ЛЕММА 5. Сумма нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω -группы A – нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай для суммы двух нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω -группы A .

Пусть I и J – нильпотентные градуированные идеалы градуированной Ω -группы A . Тогда существуют натуральные n и m , что $I_n = 0$, $I_{n-1} \neq 0$, $J_m = 0$, $J_{m-1} \neq 0$.

Пусть $l = \max(n, m)$. Рассмотрим градуированный идеал B . Для любой операции ω , элемент

$$(x_1^p, x_2^p, \dots, x_{k-1}^p (\dots (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega) \dots)\omega,$$

в котором s сомножителей из B , а остальные – из градуированной Ω -группы A , содержится в B_s . Тогда идеал $(I + J)_{2l}$ содержится в сумме элементов вида

$$y = (x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l} (\dots (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1) \omega) \omega) \dots) \omega, \quad (3)$$

где x_i^j либо содержится в I , либо в J .

Каждый элемент y вида (3) содержит или l раз сомножителем I , или l раз сомножителем J . То есть y содержится в I_l или J_l . Отсюда следует, что

$$(I + J)_{2l} \subseteq I_l + J_l.$$

Так как $I_l = 0$ и $J_l = 0$, то $(I + J)_{2l} = 0$, то есть $I + J$ – нильпотентна. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39. Градуированная Ω -группа называется локально нильпотентной, если любая её конечно порождённая градуированная Ω -подгруппа нильпотентна.

ТЕОРЕМА 13. Пусть A – градуированная Ω -группа с условием конечности удовлетворяющая условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов. Тогда градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω -группы A – локально нильпотентен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы нам потребуется представление градуированного первичного радикала градуированной Ω -группы как нижнего градуированного слабо разрешимого радикала, которое рассмотрено в [27].

Пусть $\sigma(A)$ – это любой ненулевой абелев градуированный идеал из $P(A)$. Такой идеал существует, так как идеал $\sigma(A)$ содержится в градуированном первичном радикале.

Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом градуированном идеале градуированного первичного радикала $P(A)$, который существует, согласно конструкции нижнего градуированного слабо разрешимого идеала, если $P(A) \neq 0$ (в случае равенства $P(A) = 0$ утверждение теоремы выполнено).

Любой ненулевой разрешимый градуированный идеал содержит ненулевой абелев градуированный идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α градуированный идеал $\tau(\alpha) \subset P(A)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.
2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(A/\tau(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\tau(\beta) = P(A)$.

Построим ещё одно представление градуированного первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\sigma(A)$ – это сумма всех ненулевых абелевых градуированных идеалов из $P(A)$. Из того, что градуированная Ω -группа A удовлетворяет условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов следует, что их конечное число.

Согласно лемме 5 (стр. 339) сумма нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω -группы A – нильпотентна. Следовательно, идеал $\sigma(A)$ – нильпотентен.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\sigma(\alpha) \subset P(A)$ следующим образом.

1. $\sigma(0) = 0$.
2. Предположим, что $\sigma(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\sigma(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\sigma(\beta)$ это такой идеал алгебры A , что $\sigma(\beta)/\sigma(\gamma) = \sigma(L/\sigma(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\sigma(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \sigma(\gamma)$$

Из соображений мощности $\sigma(\beta) = \sigma(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\sigma(\beta) = P(A)$.

Обозначим через $N(\sigma(A))$ степень нильпотентности идеала $\sigma(A)$.

Пусть $X \subset P(A)$ – непустое конечное множество. Докажем, что все операции $\omega \in \Omega$ над элементами $x_1, x_2, \dots, x_l$ множества равны 0 для некоторого натурального l .

Для каждого $x \in X$ обозначим через $\alpha(X)$ порядковое число α такое, что $x \in \sigma(\alpha) \setminus \sigma(\alpha - 1)$, если $\alpha - 1$ определено и α , если $x \in \sigma(\alpha)$ и $\alpha - 1$ не определено.

Пусть

$$\alpha_1 = \max(\alpha((x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l}(\dots(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega)\dots)\omega) | x_i^j \in X)),$$

$$m = N(\sigma(\alpha_1)).$$

Рассмотрим все элементы вида

$$y = (x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l}(\dots(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega)\dots)\omega.$$

Они удовлетворяют условию

$$\alpha((x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l}(\dots(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega)\dots)\omega) < \alpha_1.$$

Введём множество

$$X_2 = \{(x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l}(\dots(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega)\dots)\omega | x_i^k \in X\}.$$

Пусть $\alpha_2 = \max_{x \in X_2}(\alpha(x))$, $m_2 = N(\sigma(\alpha_2))$. Из сказанного выше следует, что $\alpha_2 < \alpha_1$.

Аналогично введём множество X_3 . Получим последовательность множеств $X_1, X_2, \dots$ и убывающую последовательность ординальных чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, которая не может быть бесконечной.

Следовательно, для некоторого s все элементы множества X_s равны нулю.

Это означает нильпотентность градуированной Ω -группы A , порождённой множеством X и локальную нильпотентность градуированного первичного радикала $P(A)$. $\square$

5. Заключение

Проведённое исследование по теме «Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли» позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, классические радикалы, построенные в теории конечномерных алгебр Ли, не всегда могут рассматриваться и применяться в качестве радикалов бесконечномерных алгебр Ли. В различных исследованиях приводятся примеры, доказывающие несостоятельность такого применения. В данной работе также приведён пример, согласно которому нильпотентный

радикал не может отвечать необходимым требованиям для его применения в теории бесконечномерных алгебр Ли.

Во-вторых, свойства радикалов конечномерных и бесконечномерных алгебр Ли могут существенно отличаться. Более того, свойства радикалов бесконечномерных алгебр Ли могут отличаться и в случае наложения на алгебры Ли различных дополнительных условий. Поэтому исследование свойств радикалов является актуальной задачей в области структурной теории бесконечномерных алгебр Ли. В работе рассмотрены свойства первичного радикала алгебр Ли, удовлетворяющих условию обрыва убывающих цепей идеалов. Доказано, что первичный радикал слабо артиновых алгебр Ли является локально нильпотентным. При решении проблемы А. В. Михалёва установлено свойство разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

В-третьих, помимо радикалов, для изучения структуры алгебр Ли полезной оказывается конструкция центроида Мартиндейла, применение которой при решении проблемы М. В. Зайцева позволило доказать вложимость полупервичной нётеровой специальной алгебры Ли над полем F в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.

В-четвёртых, некоторые свойства радикалов могут быть верны и в более общей ситуации. Так, свойство первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли быть локально нильпотентным оказалось справедливым и для градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп.

Следует отметить, что в теории радикалов алгебр Ли остаются нерешёнными множество задач, среди которых интерес для дальнейших исследований представляют следующие:

1. Пусть $P(L)$ и $N(L)$ – первичный и локально нильпотентный радикалы специальной алгебры Ли L соответственно. Верно ли, что $N(L) \subset P(L)$?
2. Пусть $J(L)$ и $IrrPI(L)$ – радикал Джекобсона и неприводимо PI -представленный радикал алгебры Ли L соответственно. Для каких алгебр Ли верно, что $J(L) \subset IrrPI(L)$?
3. Можно ли привести пример алгебры Ли такой, что $N(L)$ не является локально разрешимым?
4. Является ли неприводимо PI -представленный радикал специальной алгебры Ли локально нильпотентным?
5. Является ли неприводимо PI -представленный радикал слабо артиновой (слабо нётеровой) алгебры Ли локально нильпотентным?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрунакиевич, В. А. Радикалы алгебр и структурная теория / В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин. – М.: Наука, 1979. – 495 с.
2. Балаба, И. Н. Первичный радикал специальных супералгебр Ли / И. Н. Балаба, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2003. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 51–60.
3. Бахтурин, Ю. А. Тожества в алгебрах Ли / Ю. А. Бахтурин. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
4. Бейдар, К. И. О первичном радикале специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Успехи матем. наук. – 1994. – № 1. – С. 233.
5. Бейдар, К. И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 643–648.

6. Бейдар, К. И. О PI -оболочках специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Тезисы докладов международной конференции «Универсальная алгебра и ее приложения». – Волгоград, 1999. – С. 18–19.
7. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли: часть I / Н. Бурбаки. – М.: Книга по требованию, 2012. – 496 с.
8. Грибов, А. В. Первичный радикал для альтернативных колец и луп / А. В. Грибов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2015. – Т. 20. – Вып. 1. – С. 145–166.
9. Грибов, А. В. Первичный радикал для луп и Ω -луп. I / А. В. Грибов, А. В. Михалёв // Фундаментальная и прикладная математика. – 2014. – Т. 19. – Вып. 2. – С. 25–42.
10. Джекобсон, Н. Строение колец / Н. Джекобсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 392 с.
11. Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. – М.: Мир, 1964. – 356 с.
12. Зубрилин, К. А. О наибольшем нильпотентном идеале в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли / К. А. Зубрилин // Математический сборник. – 1997. – Т. 188. – № 8. – С. 93–102.
13. Капланский, И. Алгебры Ли и локально компактные группы Ли / И. Капланский. – М.: Мир, 1974. – 150 с.
14. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
15. Кучеров, А. А. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли / А. А. Кучеров // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2013. – № 1. – С. 121–125.
16. Кучеров, А. А. О гомологическом описании локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли / А. А. Кучеров, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2010. – № 9. – С. 40–43.
17. Кучеров, А. А. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли / А. А. Кучеров, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2010. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 71–76.
18. Ламбек, И. Кольца и модули / И. Ламбек. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 283 с.
19. Латышев, В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями / В. Н. Латышев // Сибирский математический журнал. – 1963. – Т. 4. – № 4. – С. 821–829.
20. Латышев, В. Н. О сумме локально разрешимых идеалов алгебр Ли / В. Н. Латышев, А. В. Михалёв, С. А. Пихтильков // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2003. – № 3. – С. 29–32.
21. Мещерина, Е. В. О проблеме А. В. Михалёва для алгебр Ли / Е. В. Мещерина, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 4(2). – С. 84–89.
22. Мещерина, Е. В. Развитие понятия «артиновость» для алгебр Ли / Е. В. Мещерина, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19. – Вып. 1. – С. 167–175.

23. Михалёв, А. В. Гомологическая классификация колец / А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков // Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1977–1985. – Т.1: А-Г. – С. 1052.
24. Михалёв, А. В., Первичный радикал решёточно упорядоченных колец / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Сборник работ по алгебре. – М.: Изд-во Московского университета, 1989. – С. 178–184.
25. Михалёв, А. В. Первичный радикал решёточно-упорядоченных групп / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Вестник Московского университета. – 1990. – № 2. – С. 84–86.
26. Михалёв, А. В. Первичный радикал Ω -групп и Ω -I-групп / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4. – № 4. – С. 1405–1413.
27. Михалёв, А. В. Первичный радикал градуированных Ω -групп / А. В. Михалёв, И. Н. Балаба, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 159–174.
28. Михалёв, А. В. Первичные радикалы AO -групп / А. В. Михалёв, Е. Е. Ширшова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 8. – С. 197–206.
29. Михалёв, А. В. Первичный радикал pl -групп / А. В. Михалёв, Е. Е. Ширшова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 193–199.
30. Парфёнов, В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли / В. А. Парфёнов // Сибирский математический журнал. – 1971. – Т. 12. – № 1. – С. 171–176.
31. Пихтильков, С. А. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли и локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. А. Горелик, Л. Б. Усова / Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – Вып. 2. – С. 195–204.
32. Пихтильков, С. А. Об использовании разрешимого радикала в теории многообразий алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Межвузовский сборник «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». – Тула: Изд-во ТГПУ, 1990. – С. 60–65.
33. Пихтильков, С. А. Артиновы специальные алгебры Ли / С. А. Пихтильков // Межвузовский сборник «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». – Тула: Изд-во ТГПУ, 2001. – С. 189–194.
34. Пихтильков, С. А. О некоторых классических радикалах для специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2008. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 153–157.
35. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 769–782.
36. Пихтильков, С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков. – Оренбургский государственный университет, Оренбург – 2013. – 171 с.
37. Пихтильков, С. А. Локальная разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57. – № 3. – С. 697–699.

38. Пихтилькова, О. А. О специальных алгебрах Ли, имеющих точный модуль с размерностью Крулля / О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков // Известия РАН. Серия математика. – 2017. – Т. 81. – Вып. 1. – С. 93–100.
39. Поляков, В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли / В. М. Поляков, С. А. Пихтильков // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6. – Вып. 1. – С. 163–169.
40. Поляков, В. М. Об аналоге теоремы Амицура-Маккоя для алгебр Ли / В. М. Поляков, С. А. Пихтильков // Вестник ТГПУ им. Л.Н. Толстого. – 2005. – № 2. – С. 125–126.
41. Размыслов, Ю. П. О радикале Джекобсона в PI -алгебрах / Ю. П. Размыслов // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13. – № 3. – С. 337–360.
42. Размыслов, Ю. П. Тождества алгебр и их представления / Ю. П. Размыслов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
43. Симонян, Л. А. О радикале Джекобсона алгебры Ли / Л. А. Симонян // Латвийский математический ежегодник. – 1993. – Вып. 34. – С. 230–234.
44. Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. – М.: Мир, 1972. – 192 с.
45. Шукин, К. И. RI^* -разрешимый радикал групп / К. И. Шукин // Математический сборник. – 1960. – Т. 52. – № 4. – С. 1024–1031.
46. Amayo, R. Infinite dimensional Lie algebras / R. Amayo, I. Stewart. – Leyden: Noordhoof, 1974. – 436 p.
47. Amitsur, S. A. Radicals of polynomials rings / S. A. Amitsur // Canad. J. of Math. – 1956. – V. – 8. – P. 355–361.
48. Baxter, W. E. Central closure of semiprime nonassociative rings / W. E. Baxter, W. S. Martindale // Commun. of Algebra. – 1979. – V. 7. – N 11. – P. 1105–1132.
49. Buys, A. The prime radical for Ω -groups / A. Buys, G. K. Gerber // Commun. in Algebra. – 1982. – V. 10. – P. 1089–1099.
50. Cohen, M. Group-graded rings, smash products, and group action / M. Cohen, S. Montgomery // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 282. – № 1. – P. 237–258.
51. Hartley, B. Locally nilpotent ideals of a Lie algebra / B. Hartley // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1967. – V. 63, part 2. – P. 257–272.
52. Jacobson, N. PI -algebras / N. Jacobson. – Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, New York, 1975. – 120 p.
53. Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras / N. Kamiya // Hiroshima Math. J. – 1979. – V. 9. – P. 37–40.
54. Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical / F. Kubo // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. – 1991. – V. 38. – P. 23–30.
55. McCoy, N. H. Prime ideals in general rings / N. H. McCoy // Amer. J. Math. – 1949. – № 71. – P. 823–833.
56. Marshall, E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra / E. I. Marshall // J. London Math. Soc. – 1967. – V. 42. – P. 416–422.

57. Pikhilov, S. A., Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras / S. A. Pikhilov // Comm. in Algebra. – 2001. – V. 29. – № 10. – P. 3781–3786.
58. Pikhilov, S. On a prime radical of algebras and superalgebras Lie / S. Pikhilov, V. Polyakov // Abstracts of International conference on radicals dedicated to the memory of Prof. V. Andrunakievich. – August 2003. – Chisinau, Moldova. – P. 33.
59. Togo, S. Radicals of infinite-dimensional Lie algebras / S. Togo // Hiroshima Math. J. – 1972. – V. 2. – P. 179–203.
60. Togo, S. Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras / S. Togo, N. Kavamoto // Hiroshima Math. J. – 1972. – V. 2. – P. 253–261.

Работы автора по теме диссертации

61. Blagovisnaya, A. A prime radical of weakly artinian Ω -groups with finite condition is locally nilpotent / A. Blagovisnaya, S. Pikhilov, O. Pikhilkova // Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 2015. – Vol. 9. – Iss. 2.
62. Pikhilov, S. A. On the embeddability of Noetherian semiprime special Lie algebra in $sl_m(F) \otimes_F C$ / S. A. Pikhilov, O. A. Pikhilkova, A. N. Blagovisnaya // Алгебра и логика: теория и приложения: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию В. М. Левчука. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2016. – P. 110–111.
63. Пихильков, С. А. О локальной нильпотентности первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихильков, А. Н. Благовисная, О. А. Пихилькова // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. – 2016. – № 8. – С. 121–122.
64. Пихильков, С. А. О разрешимости первичного радикала слабоартиновых алгебр Ли / С. А. Пихильков, О. А. Пихилькова, А. Н. Благовисная // Университет XXI века: научное измерение: материалы Всероссийской конференции. – Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2016. – С. 134–136.
65. Благовисная, А. Н. О проблеме М. В. Зайцева для нётеровых специальных алгебр Ли / А. Н. Благовисная, О. А. Пихилькова, С. А. Пихильков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 5. – С. 26–31.
66. Пихильков, С. А. О различных радикалах алгебр Ли / С. А. Пихильков, А. Н. Благовисная, А. Н. Павленко // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы Всероссийской научно-методической конференции. – Оренбург: ОГУ, 2017. – С. 3174–3177.
67. Пихильков, С. А. О свойствах первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихильков, О. А. Пихилькова, А. Н. Благовисная // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – № 1(61). – С. 134–142.
68. Пихильков, С. А. Разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихильков, О. А. Пихилькова, А. Н. Благовисная // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов: тезисы докладов 6-й школы-конференции. – Москва: МЦНМО, 2017. – С. 65–67.

69. Blagovisnaya, A. N. On the A.V. Mikhalev Problem for Weakly Artinian Lie Algebras / A. N. Blagovisnaya, O. A. Pikhtilkova, S. A. Pikhtilov // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2018. – Vol. 233. – Issue 5. – С. 635–639.
70. Благовисная, А. Н. О примерах построения артиновых алгебр Ли / А. Н. Благовисная, А. А. Горелик, О. А. Пихтилькова // Вестник современных исследований. – 2018. – №12.14(27). – С. 65–67.

REFERENCES

1. Andrunakievich, V. A. & Ryabukhin, Y. M. 1979, Radicals of algebras and structure theory, Nauka, Moscow, 495 p.
2. Balaba, I.N. & Pikhtilov, S.A. 2003 , “Prime radicals of special Lie superalgebras”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 9, no. 1, pp. 51–60. doi: 10.1007/s10958-005-0273-1
3. Bahturin, Y. A. 1985, Identities in algebras Lie, Science, Moscow, 448 p.
4. Beidar, K. I. & Pikhtilov, S. A. 1994, “On the prime radical of special Lie algebras”, UMN, No. 1, P. 233. doi: 10.1070/RM1994v049n01ABEH002144
5. Beidar, K. I. & Pikhtilov, S. A. 2000, “The prime radical of the special Lie algebras”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 6, no. 3, pp. 643–648.
6. Beidar, K. I. & Pikhtilov, S. A. 1999, “On PI-shells of the special Lie algebras”, Tezisy dokladov megdunarodnoi konferentsii “Universal’naya algebra i prilogeniya”. Volgograd, pp. 18–19.
7. Bourbaki, N. 2012, Lie groups and Lie algebras: part I, Izdat. po treb., Moscow, 496 p.
8. Gribov, A. V. 2015, “The prime radical of alternative rings and loops”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 20, no. 1, pp. 145–166.
9. Gribov, A. V. & Mikhalev, A. V. 2014, “Prime radical of loops and Ω -loops. I”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 19, no. 2, pp. 25–42.
10. Jacobson, N. 1961, Structure of rings, Izdat. inostrannoi literatury, Moscow, 392 p.
11. Jacobson, N. 1964, Lie Algebras, Mir, Moscow, 356 p.
12. Zubrilin, K. A. 1997, “On the greatest nilpotent ideal in algebras satisfying Capelli identities”, Matematicheskii sb., Vol. 188. No. 8, pp. 93–102.
13. Kaplansky, I. 1974, Lie Algebras and Locally Compact Groups, Mir, Moscow, 150 p.
14. Kurosh, A. G. 1973, Lectures on General algebra, Science, Moscow, 150 p.
15. Kuchеров, А. А. 2013, “On almost locally solvable Lie algebras with zero Jacobson radical and locally nilpotent radical for Lie algebras”, Vestnik Orenburgskogo gos. univ., no. 1, pp. 121–125.
16. Kuchеров, А. А. & Pikhtilov, S. A. 2010, “On the homological description of a locally nilpotent radical for special Lie algebras”, Vestnik Orenburgskogo gos. univ., no. 9, pp. 40–43.
17. Kuchеров, А. А., Pikhtilov, S. A. & Pikhtilkova, O. A. 2010, “On the homological description of the Jacobson radical for Lie algebras”, Chebyshevskii sb., vol. 10, no. 2, pp. 71–76.
18. Lambec, J. 2005, Rings and modules, Faktorial Press, Moscow, 150 p.

19. Latyshev, V. N. 1963, "On Lie algebras with identical relations", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 4, no. 4, pp. 821–829.
20. Latyshev, V. N., Mikhalev, A.V. & Pikhtilov, S. A. 2003, "On the sum of locally solvable ideals of Lie algebras", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seria 1. Matematika. Mekhanika*, no. 3, pp. 29–32.
21. Mescherina, E. V., Pikhtilkova, O. A. & Pikhtilov S. A. 2013. "On the A. V. Mikhalev's Problem for Lie Algebras" // *Izvestia Saratov. Universiteta: New ser. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, no. 4(2), pp. 84–89.
22. Mescherina, E.V. & Pikhtilkova, O. A. 2018, "The development of the concept of «artinian» for Lie algebras", *Chebyshevskii sb.*, vol. 19, no. 1, pp. 167–175.
23. Mikhalev, A.V. & Skornjakov S. A. 1977–1985. "Homological classification of rings", *Mathematical encyclopedia*, vol. 1, p. 1052.
24. Mikhalev, A. V. & Shatalova, M. A. 1989, "Prime radical of lattice-ordered rings", in: *Collection of works on algebra*, Izdat. Mosk. univ., Moscow, pp. 178–184.
25. Mikhalev, A. V. & Shatalova, M. A. 1990, "Prime radical of lattice-ordered groups", *Vestnik Moskoivskogo univ.*, no. 2, pp. 84–86.
26. Mikhalev, A. V. & Shatalova, M. A. 1998, "Prime radical of Ω -groups and Ω -l-groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 4, no 4, pp. 1405–1413.
27. Mikhalev, A. V., Balaba, I. N. & Pikhtilov, S. A. 2006, "Prime radicals of graded Ω -groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 12, no. 2, pp. 159–174. doi: 10.1007/s10958-008-0053-9
28. Mikhalev, A. V. & Shirshova, E. E. 2006, "Prime radicals of AO-groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 12, no. 8, pp. 197–206. doi: 10.1007/s10958-008-9057-8
29. Mikhalev, A. V. & Shirshova, E. E. 2006, "The prime radical of pl-groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 12, no. 2, pp. 193–199. doi: /10.1007/s10958-008-0055-7
30. Parfenov, V. A. 1971, "On weakly solvable radical of Lie algebras", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 12, no. 1, pp. 71–176.
31. Pikhtilov, S. A., Pikhtilkova, O.A., Gorelik, A.A. & Usova L.B. 2017, "On the homological description of the Jacobson radical for Lie algebras and the locally nilpotent radical for special Lie algebras", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, no. 2, pp. 195–204. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-195-204
32. Pikhtilov, S. A. 1990, "On the use of the solvable radical in the theory of varieties of Lie algebras", in: *Algorithmic problems in group theory and semigroups*, Izdat. Tul'sk. Gos. Ped. Univ., Tula, pp. 60–65.
33. Pikhtilov, S. A. 2001, "Special Artinian Lie algebras", in: *Algorithmic problems in group theory and semigroups*, Izdat. Tul'sk. Gos. Ped. Univ., Tula, pp. 189–194.
34. Pikhtilov, S. A. & Pikhtilkova, O. A. 2008, "On some classical radicals for special Lie algebras", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 153–157.
35. Pikhtilov, S. A. 2002, "On locally nilpotent radical of special Lie algebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 8, no. 3, pp. 769–782.

36. Pikhtilov, S. A. 2013, Structural theory of special Lie algebras, Orenburg State University, Orenburg, 171 p.
37. Pikhtilova, O. A. & Pikhtilov, S. A. 2016, "Local solvability of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 57, no. 3, pp. 697–699. doi: 10.17377/smzh.2016.57.318
38. Pikhtilova, O. A. & Pikhtilov, S. A. 2017, "On special Lie algebras having a faithful module with Krull dimension", *Izv. Math.*, vol. 81, no. 1, pp. 93–100. doi: 10.4213/im8387
39. Polyakov, V. M. & Pikhtilov, S. A. 2005 "On locally nilpotent artinian Lie algebras", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 6, no. 1, pp. 163–169.
40. Polyakov, V. M. & Pikhtilov, S. A. 2005, "About the analogue of the Amitsur-McCoy theorem for Lie algebras", *Vestnik Tul'sk. Gos. Ped. Univ.*, no 2, pp. 125–126.
41. Razmyslov, Yu. P. 1974, "On the Jacobson radical in PI-algebras", *Algebra and Logic*, vol. 13, no 3, pp. 337–360.
42. Razmyslov, Yu. P. 1989, *Identities of Algebras and Their Representations*, Nauka, Moscow, 432 p.
43. Simonyan, L. A., 1993, "On the Jacobson radical of the Lie algebra", *Latvian Math. Yearbook*, no. 34, pp. 230–234.
44. Herstein, I. 1972, *Non-commutative Rings*, Mir, Moscow, 190 p.
45. Shchukin, K. K. 1960, "The RI^* -solvable radical of groups", *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 52(94), no. 4, pp. 1021–1031.
46. Amayo, R. & Stewart, I. 1974, *Infinite dimensional Lie algebras*, Leyden, Noordhoff, 436 p.
47. Amitsur, S. A. 1956 "Radicals of polynomials rings", *Canad. J. of Math.*, vol. 8, pp. 355–361.
48. Baxter, W. E. & Martindale, W. S. 1979, "Central closure of semiprime nonassociative rings", *Commun. Of Algebra*, vol. 7, no. 11, pp. 1105–1132.
49. Buys, A. & Gerber, G. K. 1982, "The prime radical for Ω -groups", *Commun. in Algebra*, vol. 10, pp. 1089–1099.
50. Cohen, M. & Montgomery, S. 1984, "Group-graded rings, smash products, and group action", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 282, no 1, pp. 237–258.
51. Hartley, B. 1967, "Locally nilpotent ideals of a Lie algebra", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 63, part 2, pp. 257–272.
52. Jacobson, N. 1975, *PI-algebras*. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, New York, 1975. 120 p.
53. Kamiya, N. 1979, "On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, vol. 9, pp. 37–40.
54. Kubo, F. 1991, "Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical", *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci.*, vol. 38, pp. 23–30.
55. McCoy, N. H. 1949, "Prime ideals in general rings", *Amer. J. Math.*, no. 71, pp. 823–833.
56. Marshall, E. I. 1967, "The Frattini subalgebras of a Lie algebra", *J. London Math. Soc.*, vol. 42, pp. 416–422.

57. Pikhtil'kov, S. A. 2001, "Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras", *Comm. in Algebra*, vol. 29, no 10, pp. 3781–3786.
58. Pikhtil'kov, S. & Polyakov, V. 2003, "On a prime radical of algebras and superalgebras Lie", *Abstracts of International conference on radicals dedicated to the memory of Prof. V. Andrunakievich*, August 2003. Chisinau, Moldova, pp. 33.
59. Togo, S. 1972. "Radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, vol. 2, pp. 179–203.
60. Togo, S. & Kavamoto, N. 1972, "Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebra", *Hiroshima Math. J.*, vol. 2, pp. 253–261.

Works of the author on the topic of the thesis

61. Blagovisnaya, A., Pikhtil'kov, S. & Pikhtilkova, O. 2015, "A prime radical of weakly artinian Ω -groups with finite condition is locally nilpotent", *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, vol. 9, iss. 2. doi: 10.4172/1736-4337.1000237
62. Pikhtil'kov, S. A., Pikhtilkova, O. A. & Blagovisnaya, A. N. 2016, "On the embeddability of Noetherian semiprime special Lie algebra in ", *Tezisy dokladov megdunarodnoi konferentsii, posvyachennoi 70-letiyu V. M. Levchuka "Algebra i logika: teoriya i prilozheniya"*, Krasnoyarsk, pp. 110–111.
63. Pikhtil'kov, S. A., Blagovisnaya, A. N. & Pikhtilkova, O. A. 2016, "On the local nilpotence of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Research in algebra, number theory, functional analysis and related topics*, no. 8, pp. 121–122.
64. Pikhtil'kov, S. A., Pikhtilkova, O. A. & Blagovisnaya, A. N. 2016, "On the solvability of the primary radical of weakly artinian Lie algebras", *Materialy Vserossiiskoi konferencii "Universitet XXI veka: nauchnoe izmerenie"* Tula, pp. 134–136.
65. Blagovisnaya, A. N., Pikhtilkova, O. A. & Pikhtil'kov, S. A. 2017, "On the M.V. Zaicev problem for a Noetherian special Lie algebras", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, no. 5, pp. 26–31. doi: 10.3103/S1066369X17050036
66. Pikhtil'kov, S. A., Blagovisnaya, A. N. & Pavlenko, A. N. 2017, "On various radicals of Lie algebras", *Materialy Vserossiiskoi nauchno-metodicheskoi konferencii "Universitetskii kompleks kak regionalny centr obrazovaniya, nauki i kultury"*. Orenburg, pp. 3174–3177.
67. Pikhtil'kov, S.A., Pikhtilkova, O.A. & Blagovisnaya, A.N. 2017, "On the properties of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 1, pp. 134–142. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-1-134-142
68. Pikhtil'kov, S.A., Pikhtilkova, O.A. & Blagovisnaya, A.N. 2017, "Solvability of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Theses of reports of the 6th school conference "Lie algebras, algebraic groups and invariant theory"*. Moscow, pp. 65–67.
69. Blagovisnaya, A. N., Pikhtilkova, O. A. & Pikhtil'kov, S. A. 2018, "On the A.V. Mikhalev Problem for Weakly Artinian Lie Algebras" *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, vol. 233, i. 5, pp. 635–639. doi: 10.1007/s10958-018-3949-z
70. Blagovisnaya, A. N., Gorelik, A. A. & Pikhtilkova, O. A. 2018, "On examples of artinian Lie algebras", *Vestnik sovremennykh issledovaniy*, no. 12.14 (27), pp. 65–67.

Приложение А

(справочное)

Список обозначений

- $[a, b]$ – коммутатор элементов в ассоциативной алгебре или алгебре Ли
- $A^{(-)}$ – ассоциативная алгебра A по отношению к операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$
- $A(M)$ – ассоциированная алгебра представления, порождённая элементами алгебры L в алгебре $End(M)$ как ассоциативная алгебра, где M – L -модуль
- $Ad L$ – присоединённая ассоциативная алгебра для алгебры Ли L
- $C(L)$ – центроид Мартиндейла алгебры Ли L
- D_n – алгебра матриц порядка n над алгеброй D
- $Irr(L)$ – неприводимо представленный радикал алгебры Ли L
- $IrrFin(L)$ – конечно неприводимо представленный радикал алгебры Ли L
- $IrrPI(L)$ – PI -неприводимо представленный радикал алгебры Ли L
- $J(D)$ – радикал Джекобсона алгебры D
- L' или L^2 – коммутант алгебры Ли L
- $L^{(n)}$ – элементы производного ряда алгебры Ли L
- L_n – элементы нижнего центрального ряда алгебры Ли L
- $P(L)$ – первичный радикал алгебры Ли L
- $sl_n(F)$ – специальная линейная алгебра порядка n над полем F
- $span(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – линейная оболочка векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$
- SPI -алгебра Ли – специальная алгебра Ли
- $U(L)$ – универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли L
- $Z(D)$ – центр алгебры D