ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-140-155

Конусы и многогранники обобщенных метрик

Е. И. Деза

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: elena.deza@gmail.com

Аннотация

В данной работе рассмотрены проблемы, связанные с построением и исследованием конусов и многогранников обобщенных метрических структур: конечных квазиполуметрик, которые являются несимметричными аналогами классических — симметричных — полуметрик, и конечных m-полуметрик, которые являются многомерными аналогами классических — двумерных — полуметрик.

Во введении рассмотрена история вопроса, приведены примеры использования метрик, квазиметрик и m-метрик в математике и ее приложениях, дан обзор основных идей и результатов, представленных в статье.

В первом разделе даны определения рассматриваемых в работе обобщенных метрических структур: конечных метрики и полуметрики, их ориентированных аналогов — конечных квазиметрики и квазиполуметрики, и их многомерных аналогов - конечных m-метрики и m-полуметрики.

Во втором разделе приведены классические примеры соответствующих обобщенных метрических структур. Именно, понятие метрики продемонстрировано на четырех базовых примерах (дискретная метрика — метрика Хаусдорфа - метрика симметрической разности — метрика пути связного графа). Для ориентированного случая представлены четыре соответствующих квазиметрики, в то время как для многомерного случая построены четыре соответствующих m-метрики.

В третьем разделе рассмотрен интересный пример одного специального случая квазиметрики: среднее время первого прохода для цепей Маркова. В ходе анализа свойств указанной структуры продемонстрирована ее связь со взвешиваемыми квазиметриками и частичными метриками, а также с другими, достаточно экзотичными, метрическими объектами.

В четвертом разделе введены понятия важнейших частных случаев полуметрики: разреза и мультиразреза. Построены их ориентированные и многомерные аналоги: ориентированные разрезы и ориентированные мультиразрезы, а также m-полуметрики разбиений.

В пятом разделе осуществлено построение конусов и многогранников рассмотренных обобщенных метрических структур. Рассмотрены метрический и разрезный конусы и многогранники на конечном числе точек. Построены ориентированные и многомерные аналоги указанных конусов и многогранников. Выделены свойства, связывающие указанные классы обобщенных дискретных метрических структур. Особое внимание уделено симметриям построенных конусов. Представлены результаты вычислений, посвященных конусам полуметрик, разрезов, квазиполуметрик, ориентированных разрезов, ориентировнных мультиразрезов, m-полуметрик и m-полуметрик разбиений на малом числе вершин (на $3, 4, 5$ и 6 точках). Указаны размерность объекта, число экстремальных лучей (вершин) и их орбит, число гиперграней и их орбит, диаметры скелетона и реберного графа.

В заключении представлены выводы исследования.

Ключевые слова: Полуметрика, разрез, мультиразрез, конусы и многогранники полуметрик и разрезов, квазиполуметрика, ориентрованные разрез и мультиразрез, конусы и многогранники квазиполуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов, m-полуметрика, m-полуметрика разбиения, конусы и многогранники m-полуметрик и m-полуметрик разбиений.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:
Е. И. Деза. Конусы и многогранники обобщенных метрик // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 140–155.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-140-155

Cones and polytopes of geleralized metrics

E. I. Deza

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical Sciences, candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Professor of the Department of theoretical Informatics and discrete mathematics, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: elena.deza@gmail.com

Abstract

In this paper the problems of construction and research of cones and polytopes of generalized metric structures are considered: finite quasisemimetrics, which are oriented analogs of classical — symmetric — case of semimetrics, and finite m-semimetrics, which are multidimensional analogs of classical — two-dimensional — case of semimetrics.

In the introduction the background of the research is considered, examples of use of metrics, quasimetrics and m-metrics in Mathematics and in Applications are given, a review of main ideas and results presented in the article is represented.

In the first section definitions of main generalized metric structures considered in the paper are given: finite metrics and semimetrics, their oriented analogs — finite quasimetrics and quasisemimetrics, and their multidimensional analogs — finite m-metrics and m-semimetrics.

In the second section classical examples of the corresponding generalized metric structures are given. The concept of a metric is shown by four basic examples (discrete metric — Hausdorff metric — symmetric difference metric — path metric of connected graphs). For the oriended case four corresponding quasimetrics are presented, while for the multidimensional case four corresponding m-metrics are constructed.

In the third section an interesting example of a special case of quasimetrics is reviewed: the mean first passage time for Markov's chains. During the analysis of properties of this special structure its connections with weightable quasimetrics, partial metrics and other, rather exotic, metric structures are shown.

In the fourth section the most important special cases of semimetrics are considered: cuts and multicuts. Their oriented and multidimensional analogs are constructed: oriented cuts, oriented multicuts and also partition m-semimetrics.

In the fifth section creation of cones and polytopes of the considered generalized metric structures is carried out. Metric and cut cones and polytopes on n points are considered. The oriented and multidimensional analogs of these cones and polytopes are constructed. The properties of these classes of generalized discrete metric structures are marked out.

Special attention is paid to the questions of symmetries of the constructed objects. Results of the calculations devoted to cones of semimetrics, cuts, quasisemimetrics, oriented cuts and multicuts, m-semimetrics and partition m-semimetrics on small number of points (3, 4, 5 and 6 points) are presented. In fact, the dimension of an object, the number of its extreme rays (vertices) and their orbits, the number of its facets and their orbits, the diameters of the skeleton and the the ridge graph of the constructed cones and polyhedrons are specified.

In the conclusion the main research results are presented.

Keywords: Semimetric, cut, multicut, cones and polytopes of semimetrics and cuts, quasi-semimetric, oriented cut and multicut, cones and polytopes of quasisemimetrics, oriented cuts and multicuts, m-semimetric, partition m-semimetric, cones and polytopes of m-semimetrics and partition m-semimetrics.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

E. I. Deza, 2019, "Cones and polytopes of geleralized metrics" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 140–155.

1. Введение

Понятие расстояния является одним из основных во всей человеческой деятельности. В повседневной жизни термин *расстояние* обычно означает некоторую степень близости двух физических объектов или идей, в то время как термин *метрика* чаще используется как стандартное понятие меры или измерения. В нашей работе рассматривается математическое значение этих терминов, которое представляет собой абстракцию измерения.

Математические понятия метрики на множестве X как функции $d(x, y)$ из $X \times X$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $d(x, y) \geq 0$ с равенством только при $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ и $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, и метрического пространства (X, d) были введены в обращение в начале двадцатого века М. Фреше (в 1906 г.) и Ф. Хаусдорфом (в 1914 г.), прежде всего - в качестве специального случая бесконечного топологического пространства. Впрочем, упомянутое выше неравенство треугольника $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ можно найти уже у Евклида. В дальнейшем те или иные бесконечные метрические пространства появлялись в различных приложениях обычно как обобщения естественной метрики $|x - y|$ на множестве действительных чисел. Основными их классами стали измеримые пространства (добавим меру) и банаховы пространства (добавим норму и полноту).

Однако, начиная с К. Менгера (который в 1928 г. ввел понятие метрического пространства в геометрию) и особенно Л. М. Блюменталя (1953 г.), резко повысился интерес к конечным метрическим пространствам. Другой тенденцией стало то, что многие математические теории в процессе их обобщения стабилизировались именно на уровне метрического пространства ([19, 13, 16, 27]).

Этот процесс продолжается и сейчас. Метрики и расстояния стали важным инструментом исследований в самых разных областях математики и ее приложений, включая геометрию, теорию вероятностей, статистику, теорию кодирования, теорию графов, кластерный анализ, анализ данных, распознавание образов, теорию сетей, математическую инженерию, компьютерную графику, машинное зрение, астрономию, космологию, молекулярную биологию и многие другие отрасли науки. Создание наиболее удобных метрик стало центральной задачей для многих исследователей. Особенно интенсивно ведутся поиски таких расстояний, в частности, в математической биологии, сфере распознавании речи и образов. Нередки случаи, когда одни и те же метрики появляются независимо друг от друга в совершенно разных сферах ([13]).

В частности, к центральным объектам дискретной математики принадлежат метрический и разрезной конусы ([19, 16]). *Проблема максимального разреза*, состоящая в нахождении для данного графа разреза максимального веса, является одной из наиболее значимых в комбинаторной оптимизации и имеет множество применений, в том числе в статистической механике.

Представляют значительный интерес и другие полиэдральные конструкции, связанные с конечными метриками, их аналогами и обобщениями: квазиметриками (несимметричный случай), m-метриками (многомерный случай) и т.д.

В данной статье мы даем обзор вопросов, касающиеся конусов и многогранников обобщенных метрических структур: конечных полуметрик и разрезов, квазиполуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов, других ориентированных объектов, родственных метрикам, и соответсвующую многомерную теорию, в том числе анализируем результаты машинных вычислений, полученные для таких конусов небольших размеров (см. [16, 19, 20, 17] и др.).

2. Основные определения: полуметрики и их ориентированные и многомерные аналоги

В этом разделе мы даем все основные определения, необходимые в дальнейшем.

• *Метрикой* на n точках называется функция $d : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех i, j, $k \in \{1,\dots,n\}$ удовлетворяющая условиям $d(i,i) = 0$; $d(i,j) \neq 0$ при $i \neq j$; $d(i,j) = d(j,i)$ (*симметричность*); $d(i,k) \leqslant d(i,j) + d(j,k)$ (*неравенства треугольника*).

При построении полиэдральных конструкций значительно удобнее пользоваться следующим ослабленным аналогом понятия метрики.

• *Полуметрикой* на n точках называется симметричная функция $d : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ удовлетворяющая условиям $d(i,j) = 0$ и неравенствам треугольника $d(i,k) \leqslant d(i,j) + d(j,k)$.

Говоря коротко, полуметрика - это метрика, позволяющая расстояние "ноль" между различными точками.

Метрики были введены в начале 20-го века Фреше и Хаусдорфом ([23], [25]; см. историю вопроса в [13]). Первое исследование конечных метрик принадлежит Блюменталю. Обширная библиорафия и детальный обзор имеющийся в этой области литературы дан в [19].

Одним из возможных обобщений метрик (полуметрик) являются квазиметрики (квазиполуметрики), представляющие собой аналогичные, но несимметричене конструкции.

• *Квазиметрикой* на n точках называется функция $q : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, для всех $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ удовлетворяющая условиям $q(i,i) = 0$; $q(i,j) \neq 0$ при $i \neq j$; $q(i,k) \leqslant$ $\leqslant q(i,j) + q(j,k)$ (*ориентированные неравенства треугольника*).

Другими словами, квазиметрика не обязана удовлетворять условияю симметричности $q(i,j) = q(j,i)$.

• *Квазиполуметрикой* q на n точках называется функция $q : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, для всех $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ удовлетворяющая условиям $q(i,i) = 0$ и ориентированным неравенствам треугольника $q(i,k) \leqslant q(i,j) + q(j,k)$.

Следовательно, квазиполуметрика - это "несимметричная полуметрика", или, что то же, "несимметричная метрика, позволяющая значение ноль на различных точках".

Квазметрики были введены Хаусдорфом([25]). Их топология рассматривалась, начиная с Вильсона ([29]). Конусы и многогранники квазиполуметрик изучались в [17, 14, 15, 20, 13].

Для нашего исследования представляет интерес еще одно обобщение метрик (полуметрик): так называемые m-метрики (m-полуметрики), являющиеся многомерными аналогами классического двумерного случая.

• *m-мерикой* на n точках называется функция $d : \{1,...,n\}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $x_1,...,x_{m+2} \in \{1,\dots,n\}$ удовлетворяющая условиям $d(x_1,...,x_1) = 0$ (*положительная определенность*); $d(x_1,...,x_{m+1}) = d(\pi(x_1),...,\pi(x_{m+1}))$ для любой перестановки π множества

$\{x_1, ..., x_{m+1}\}$ (*тотальная симметрия*); $d(x_1, ..., x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m+2})$ (*неравенства m-симплекса*).

Ослабленная версия m-метрики, более подходящая для построения полиэдральых конструкций, выглядит так.

• *m-полумерикой* на n точках называется функция $d : \{1, ..., n\}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $x_1, ..., x_{m+2} \in \{1, \ldots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d(x_1, ..., x_{m+1}) = 0$ в случае если $x_1, ..., x_{m+1}$ не являются попарно различными (*слабая положительная определенность*); $d(x_1, ..., x_{m+1}) = d(\pi(x_1), ..., \pi(x_{m+1}))$ для любой перестановки π множества $\{x_1, ..., x_{m+1}\}$ (*тотальная симметрия*); $d(x_1, ..., x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m+2})$ (*неравенства m-симплекса*).

m-полуметрики были введены в [21].

3. Классические примеры полуметрик и их ориентированных и многомерных аналогов

Рассмотрим ряд базовых примеров, иллюстрирующих формальные определения предыдущего раздела.

• *Дискретная метрика.* Для данного множества X, *дискретная метрика* — метрика на X, определенная как

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \neq y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

• *Метрика Хаусдорфа.* Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство и $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ — разбиение X. *Метрика Хаусдорфа* — метрика на $Y = \{X_1, \ldots, X_n\}$, определенная как

$$d(X_i, X_j) = \max_{x \in X_i, y \in X_j} D(x, y).$$

• *Метрика симмметрической разности.* Для заданной антицепи множеств

$$Z = \{x, y, z, ... \,|\, x \not\subset y \text{ для любых } x \neq y\},$$

метрика симметрической разности — метрика на Z, определенная как

$$d(x, y) = |x \triangle y|.$$

Она равна числу элементов в *симметрической разности* $x \triangle y = (x \backslash y) \cup (y \backslash x)$ множеств x и y из Z.

• *Метрика пути связного графа.* Для связного графа $G = (V, E)$ *метрика пути* d_{path} – метрика на множестве V его вершин, определенная для любых $u, v \in V$ как длина кратчайшего $(u{-}v)$ пути в G. *Взвешенная метрика пути* d_{wpath} – метрика на множестве вершин V связного взвешенного графа $G = (V, E)$ с положительными весами ребер $(w(e))_{e \in E}$, определенная как $\min_p \Sigma_{e \in P} w(e)$, где минимум берется по всем $(u - v)$ путям P в G.

Перейдем к рассмотрению соответствующих примеров для ориентированного случая.

• *Дискретная квазиполуметрика.* Пусть $X = \{1, 2, ..., n\}$. *Дискретная квазиполуметрика* – квазиполуметрика на X, определенная как

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

• *Квазиметрика Хаусдорфа.* Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство, и $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ — разбиение X. *Квазиметрика Хаусдорфа* — квазиметрика на $Y = \{X_1, \ldots, X_n\}$, определенная как

$$q(X_i, X_j) = \min_{x \in X_i} \max_{y \in X_j} D(x, y).$$

• *Квазиполуметика асимметричной разности.* Для заданной антицепи множеств

$$Z = \{x, y, z, ... \,|\, x \not\subset y \text{ для любых } x \neq y\},$$

квазиполуметрика симметрической разности – квазиполуметрика на Z, определенная как

$$q(x, y) = |x \backslash y|.$$

Она равна числу элементов в *в асимметрической разности* $x \backslash y$ множеств x и y из Z.

• *Квазиметрика пути в орграфе.* Для сильно связного ориентированного графа $\Gamma = (V, E)$ *квазиметрика пути* d_{orpath} – квазиметрика на множестве V его вершин, определенная для любых $u, v \in V$ как длина кратчайшего ориентированного $(u - v)$ пути в Γ.

Наконец, рассмотрим еще четыре примера – они иллюстрируют соответствующие метрические структуры для многомерного случая.

• *Дискретная 2-метрика.* Для заданного множества X, $|X| \geq 4$, *дискретная 2-метрика* – 2-метрика на X, определенная как

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \text{ или } y = z, \text{ или } x = z, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

• *2-метрика Хаусдорфа.* Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство, и $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ — разбиение X. *2-метрика Хаусдорфа* — 2-метрика на $Y = \{X_1, \ldots, X_n\}$, определенная как

$$d(X_i, X_j, X_k) = \frac{1}{3}\left(\max_{x \in X_i, y \in X_j} D(x, y) + \max_{x \in X_i, y \in X_k} D(x, y) + \max_{x \in X_k, y \in X_j} D(x, y)\right).$$

• *2-полуметрика симметрической разности.* Для заданной антицепи множеств

$$Z = \{x, y, z, ... \,|\, x \not\subset y \text{ для всех } x \neq y\},$$

2-метрика симметрической разности – 2-метрика на Z, определенная как

$$d(x, y, z) = \frac{1}{2}(|x \Delta y| + |y \Delta z| + |x \Delta z|);$$

это число элементов, которые принадлежат x, y или z, но не всем трем множествам x, y, z.

• 2-*метрика пути в гиперграфе.* Если перейти от понятия графа к понятию гиперграфа, в котором "гиперребрами" будут связаны не пары вершин, а их тройки, то мы получим естественное обобщение метрики пути в графе, представляющее собой 2-метрику. Предлагаем читателю проделать эту операцию самим.

Мы привели три группы примеров по четыре примера в каждой группе: для классического симметричеого двумерного случая, для ориентированного случая и для трехмерного (многомерного) случая. Заинтересованный читатель может рассмотреть свои примеры, в частности, l_1-, l_2- и l_∞-метрики на $\mathbb{R}^n$, и построить их ориентированные аналоги. Эти построения, как и множество других интересных объектов, можно найти в [16] и [13].

4. Специальный пример: среднее время первого прохода для цепей Маркова

В этом разделе мы рассмотрим одну обобщенную метрическую конструкцию, которая естественным образом, но тем не менее достаточно неожиданно, возникает в приложениях математической кибернетики.

Пусть $T = ((t_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – *матрица перехода* эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, ..., n$. Тогда T – стохастическая матрица (см., например, [2, 3, 4, 8]).

Определим *среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j как

$$m_{ij} = E(F_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(F_{ij} = k),$$

где $E(\cdot)$ – математическое ожидание, а $F_{ij} = \min\{p \geqslant 1 : X_p = j \,|\, X_0 = i\}$.

Среднее время первого прохода можно рассматривать как квазиметрику на множестве вершин орграфа Γ, соответствующего цепи Маркова с матрицей перехода T. Именно, пусть Γ – взвешенный орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, ..., n$, а веса дуг равны соответствующим вероятностям перехода в T. В этом случае мы говорим о *квазиметрике среднего времени первого прохода* m на $V = \{1, 2, ..., n\}$, такой, что $m(i, j) = m_{ij}$ – ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на Γ, начинающегося с i, для достижения j в первый раз; это 0 для $i = j$ (см. [8]).

Метрика коммутирующего времени первого прохода c на V определяется теперь как $c(i, j) = m(i, j)+m(j, i)$. Коммутирующее время $c(i, j)$ первого прохода – среднее число шагов, которые совершают при случайном блуждании, чтобы достичь j от i и вернуться к i.

Существует естественная связь между случайными блужданиями на графах и электрическими сетями (см., например, [22]). Пусть дан взвешенный связный неориентированный граф G; базовая электрическая сеть, соответствующая G, представляет собой сеть, полученную путем замены вершин и ребер даного графа узлами и электрическими резисторами, соответственно. Вес ребер соответствует проводимости. *Эффективное сопротивление* $\Omega(i, j)$ между любыми двумя узлами i и j определяется как напряжение, которое образуется между i и j, когда единица тока проходит через них (т.е. входит в один и покидает другой узел). Очевидно, что для всех узлов i, j, k имеют место следующие соотношения: $\Omega(i, j) \geqslant 0$, $\Omega(i, j) = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$, $\Omega(i, j) = \Omega(j, i)$. Легко показать ([28, 24]), что $\Omega(i, j) + \Omega(j, k) \geq \Omega(i, k)$. Таким образом, Ω является метрикой, называемой *метрикой сопротивления* ([26]).

Нетрудно доказать, что расстояние сопротивления на G тесно связано с квазиметрикой среднего времени первого прохода достаточно простой формулой, использующей *матрицу Лапласа* графа G (см., например, [8]).

Простейший пример квазиметрики среднего времени первого прохода может быть получен для *простого случайного блуждания* по связному невзвешенному графу G, в котором из любой вершины графа существует равная вероятность перемещения в любую соседнюю вершину.

Это означает, что мы строим из связного графа G с множеством вершин $V = \{1, 2, ..., n\}$ орграф Γ на том же множестве вершин V; две вершины i и j связаны дугами ij и ji в Γ тогда и только тогда, когда они образуют ребро ij в G. Если степень вершины $i \in V$ равна $d(i)$ в G, то вес всех дуг ik в Γ равен $\frac{1}{d(i)}$. Итак, Γ – взвешенный орграф без циклов, множество вершин которого совпадает с множеством состояний цепи Маркова простого случайного блуждания, а веса дуг равны соответствующим вероятностям перехода.

Оказывается, что в этом случае квазиметрика m является *взвешиваемой квазиметрикой* (см. [16, 14, 15, 13]), т.е. существует *весовая функция* $w : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такая, что для всех $i, j \in V$ имеет место сотношение $m(i, j) + w_i = m(j, i) + w_j$.

Метрика коммутирующего времени первого прохода c на V имеет теперь форму $c(i,j) = m(i,j) + m(j,i) = 2m(i,j) + w_i - w_j$. В этом случае пара (c, w) является *взвешенной метрикой* на V, т.е. метрикой с весовой функцией $w : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такой, что *условие взвешенности снизу* $c(i,j) \geqslant w_i - w_j$ выполнено ([16], глава 6). Кроме того, функция p, $p(i,j) = m(i,j) + w_i = \frac{c(i,j)+w_i+w_j}{2}$, окажется в этом случае *частичной метрикой* на V ([16]), поскольку для всех $i, j, k \in V$ имеют место следующие соотношения: $p(i,j) \geq 0$; $p(i,j) \geq p(i,i)$; $p(i,i) = p(j,j) = p(i,j) \Rightarrow i = j$; $p(i,j) = p(j,i)$ (*симметрия*); $p(i,j) \leq p(i,k) + p(k,j) - p(k,k)$ (*острое неравенство треугольника*).

Легко проверить, что

$$0,5(c(i,j) + c(i,k) - c(j,k)) = p(i,j) + p(i,k) - p(j,k) - p(i,i) =$$

$$= m(j,i) + m(i,k) - m(j,k),$$

т.е. неравенства треугольника эквивалентны на всех трех уровнях: взвешенной метрики c, частичной метрики p, и взвешиваемой квазиметрики m.

Более того,

$$m(i,j) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ c(i,j) \geqslant w_i - w_j \ \Leftrightarrow \ p(i,j) \geqslant p(i,i).$$

Таким образом, *условие неотрицательности* $m(i,j) \geqslant 0$ для (взвешиваемой) квазиметрики m эквивалентно *условию взвешиваемости снизу* $c(i,j) \geqslant w_i - w_j$ для взвешенной метрики c, и *условию маленьких саморасстояний* $p(i,j) \geqslant p(i,i)$ для частичной метрики p.

Квазиметрика среднего времени первого прохода m тесно связана с другими метрическими структурами на графах.

При $\alpha > 0$ связный взвешенный *мультиграф* (допускается использование параллельных ребер) $G = (V, E; w)$ с положительной реберной весовой функцией $w = (w(e))_{e \in E}$ обладает *α-метрикой леса* $forest^{\alpha}$ ([9, 10]). *Метрика леса* $forest$ ([11]) – это частный случай $\alpha = 1$ для α-метрики леса. С α-метрикой леса тесно связана и *нормализованная α-метрика леса* $\rho^{\alpha}(u,v)$; она пропорциональна α-метрике леса, но в ряде случаев более удобна для приложений.

Эти метрические структуры обладают рядом интересных и полезных свойств.

Так, можно показать ([9, 10]), что увеличенная в два раза α-метрика леса на G является *метрикой сопротивления* связного взвешенного мультиграфа $G' = (V', E'; w')$, где $V' = V \cup \{0\}$, $E' = E \cup \{u0 : u \in V\}$, а $w'(e) = \alpha w(e)$ для всех $e \in E$, и $w'(u0) = 1$ для всех $u \in V$.

Известно ([9]), что для $\alpha \to 0$ мы получаем из d^{α} *дискретную метрику* $d^0(i,i) = 0$, $d^0(i,j) = 1$, $i \neq j$; более того, мы получаем из ρ^{α} *недискретную полуметрику* $\rho^0(i,j) \equiv 0$. Для $\alpha \to +\infty$ мы получаем (в случае связного графа) из d^{α} *недискретную полуметрику* $d^0(i,j) \equiv 0$, и мы получаем из ρ^{α} метрику сопротивления.

В случае орграфов мы можем получить аналогичное построение. На самом деле, мы можем попытаться использовать рекуррентную процедуру построения матрицы среднего времени первого прохода ([8]) в качестве основы для построения *(q,α)-квазиметрики леса* $qforest^{\alpha}$ и *нормализованной (q,α)-метрики леса* $q\rho^{\alpha}$ на G.

5. Разрезы, мультиразрезы и их ориентированные и многомерные аналоги

Среди огромного числа различных полуметрик особую роль играют так называемые разрезы и мультиразрезы.

- *Разрезом* на n точках для множества $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ называется функция

$$\delta_S : \{1, \ldots, n\}^2 \to \mathbb{R},$$

определенная по закону

$$\delta_S(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |S \cap \{i,j\}| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой разрез является полуметрикой.

• *Мультиразрезом* (точнее, *m-мультиразрезом*) на n точках для разбиения

$$\cup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$$

называется функция $\delta_{S_1,\dots,S_m} : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta_{S_1,\dots,S_m}(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ i \in S_a, j \in S_b, \ \text{и} \ \ a \neq b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что 2-мультиразрезы совпадают с разрезами. Более того, любой мультиразрез можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации разрезов: $\delta_{S_1,\dots,S_m} = \sum_{i=1}^m \delta_{S_i,\overline{S_i}}$.

Число всех мультиразрезов на n точках представляет собой *число Белла* $B(n)$, то есть число всех разбиений n-множества.

Ориентированные разрезы и мультиразрезы являются, в свою очередь, специальным случаем квазиполуметрик, несимметричным аналогом разрезов и мультиразрезов.

• *Ориентированным разрезом* на n точках для множества $S \subseteq \{1,\dots,n\}$ называется функция $\delta'_S : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_S(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \in S, \ j \notin S, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой ориентированный разрез является квазиполуметрикой.

• *Ориентированным мультиразрезом* (точнее, *ориентированным m-мультиразрезом*) для ориентированного разбиения $\cup_{i=1}^m S_i = \{1,\dots,n\}$ множества $\{1,\dots,n\}$ на m частей $S_1,\dots,S_m$ называется функция $\delta'_{S_1,\dots,S_m} : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_{S_1,\dots,S_m}(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ i \in S_a, j \in S_b, \ \text{и} \ a < b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что ориентированные 2-мультиразрезы совпадают с ориентированными разрезами: $\delta'_S = \delta'_{S,\overline{S}}$. Однако, в отличие от симметричного случая, не каждый ориентированный мультиразрез (даже в простейшем случае $n = 3$) можно представить в виде линейной комбинации ориентированных разрезов.

Число всех ориентированных мультиразрезов на n точках представляет собой *число Фубини* (*упорядочное число Белла*) $p'(n)$, то есть число всех упорядоченных разбиений множества $\{1,\dots,n\}$; оно равно $\sum_{\pi \in Sym(n)} 2^{D(\pi)}$, где $D(\pi) = |\{i \leq n : a_i > a_{i+1}\}|$ для перестановки $\pi = (a_1,\dots,a_n) \in Sym(n)$.

m-полуметрики разбиений представляют собой многомерный аналог двумерного мультиразреза.

• Для $(m+1)$-разбиения $S_1,\dots,S_{m+1}$ множества $\{1,...,n\}$ *m-полуметрикой разбиения* называется функция $\alpha_{S_1,\dots,S_{m+1}} : \{1,\dots,n\}^{m+1} \to \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\alpha_{S_1,\dots,S_{m+1}}(i_1,...,i_{m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i_1 \in S_{\alpha_1},...,i_{m+1} \in S_{\alpha_{m+1}}, \alpha_k \neq \alpha_t \ \text{для} \ k \neq t, \\ 0, & \text{если} \quad i_k, i_t \in S_\alpha \ \text{для некоторого} \ k \neq t, 1 \leq \alpha \leq m+1. \end{cases}$$

Другими словами, величина $\alpha_{S_1,\dots,S_{m+1}}(i_1,...,i_{m+1})$ равна 1, если для всех $1 \leqslant j < l \leqslant m+1$ элементы i_j и i_l принадлежат разным подмножествам разбиения, и равна 0 во всех остальных случаях. Легко видеть, что $\alpha_{S_1,\dots,S_{m+1}}$ является m-полуметрикой. Для $m = 1$ она превращается в обычный разрез (см., например, [19]).

6. Конусы и многогранники обобщенных дискретных метрических структур

Центральным разделом теории конечных полуметрик являются задачи комбинаторной оптимизации, решаемые полиэдральным методом, ведущим к построению соответствующих конусов и многогранников.

В данной работе мы дадим обзор конусов и многогранников соответствующих конечных полуметрик и их ориентированных и многомерных аналогов. Более подробную информацию об этих и других обобщенных метрических структурах можно найти в [16].

• *Метрическим конусом* на n точках MET_n называется множество всех полуметрик на $\{1, \ldots, n\}$.

• *Разрезным конусом* (или *конусом разрезов*) на n точках CUT_n называется коническая оболочка (множество всех линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами) всех $2^{n-1} - 1$ ненулевых разрезов на $\{1, \ldots, n\}$.

Следует заметить, что разрезный конус CUT_n представляет собой множество n-точечных l_1-*полуметрик*, то есть полуметрик, изометрически вложимых в пространство

$$l_1 = (\mathbb{R}^m, ||x - y||_1)$$

с l_1-нормой $||z||_1 = \sum_{i=1}^m |z_i|$. В пространстве меры величине $||x - y||_1$ соответствует $\mu(A\Delta B)$, где A, B — множества, представляющие x и y ([19]).

Конусы MET_n и CUT_n представляют собой полноразмерные конусы в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Поскольку любой разрез является полуметрикой, то выполняется очевидное включение $CUT_n \subseteq MET_n$ с равенством лишь для $n = 3, 4$. Поскольку любой мультиразрез представляет собой неотрицательную линейную комбинацию разрезов, то говорить о конусе мультиразрезов смысла не имеет: коническая оболочка множества мультиразрезов является частью конуса CUT_n.

Полная группа симметрий конусов CUT_n и MET_n представляет собой группу $Sym(n)$ для $n \neq 4$ и группу $Sym(4) \times Sym(3)$ для $n = 4$.

• *Квазиметрическим конусом* на n точках $QMET_n$ называется множество всех квазиполуметрик на $\{1, \ldots, n\}$.

• *Конусом ориентированных мультиразрезов* на n точках $OMCUT_n$ называется коническая оболочка всех $p'(n){-}1$ ненулевых ориентированных мультиразрезов на $\{1, \ldots, n\}$. Пользуясь формулой $\delta_{S_1,\ldots,S_m} = \delta'_{S_1,\ldots,S_m} + \delta'_{S_m,\ldots,S_1}$, мы получаем, что $CUT_n = \{q + q^T : q \in OMCUT_n\}$.

• *Конусом ориентированных разрезов* на n точках $OCUT_n$ называется коническая оболочка всех $2^n - 2$ ненулевых ориентированных разрезов на $\{1, \ldots, n\}$.

Поскольку в несимметричном случае ориентированный мультиразрез может и не быть линейной комбинацией ориетированных разрезов, то конусы $OMCUT_n$ и $OCUT_n$ не совпадают.

Конус $OCUT_n$ представляет собой множество всех n-точечных l_1-*квазиполуметрик*, то есть квазполуметрик, вложимых в квазиметрическое пространство $(\mathbb{R}^m, ||x - y||_{or.;1})$ с *ориентированной* l_1-*нормой* $||z||_{or.;1} = \sum_{i=1}^m \max(z_i, 0)$. На пространстве меры величина $||x - y||_{or.;1}$ соответствует $\mu(B \setminus A)$, где множества B, A представляют x, y ([17, 5]).

Конусы $QMET_n$ и $OMCUT_n$ являются полномерными конусами в пространстве $\mathbb{R}^{n(n-1)}$.

Кроме очевидных строгих включений $OCUT_n \subset OMCUT_n$, мы имеем, с равенством только для $n = 3$, включения $OMCUT_n \subseteq QMET_n$.

В [18] показано, что конус $OCUT_n$ (определенный на множестве $\{1, \ldots, n\}$) есть проекция конуса CUT_{n+1} (определенного на $\{0, 1, \ldots, n\}$), на подпространство, ортогональное к $\delta_{\{0\}}$.

Экстремальные лучи конуса $QMET_n$ исследовались в [17]. Здесь было доказано, что они не являются симметричными и имеют по меньше мере $n - 1$ нулей, то есть не могут быть расстояниями на ориентированном графе. Ориентированные мультиразрезы соответствуют экстремальным лучам конуса $QMET_n$. Кроме того, расщепление экстремального луча вновь дает экстремальный луч.

В [17] была представлена и таблица несмежности гиперграней конуса $QMET_n$; было сделано предположение о том, что во всех остальных случаях гиперграни смежны, откуда следует, что диаметр скелетона дуального конуса $QMET_n^*$ равен 2. Диаметр скелетона $QMET_n$ равен 3 для $n = 4, 5$.

Существует предположение, что диаметры $OCUT_n$ и $OMCUT_n$ равны 1 и 2, соответственно. Более того, если $f \geq 0$ определяет гипергрань $OMCUT_n$, то нулевое расширение f в $OMCUT_{n+1}$ останется гипергранью, как и в классическом случае конуса разрезов CUT_n.

Группа $Sym(n)$ всех перестановок на n точках является группой симметрий конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$. Но существует и другая симметрия, называемая *реверселем*. Для осуществления операции реверселя нужно поставить в соответствие каждому лучу q луч q^T, определенный как $q^T_{ij} = q_{ji}$. (Другими словами, в матричных терминах реверсель соответствует транспонированию матриц.) Из этого факта следует, что группа $Z_2 \times Sym(n)$ также является группой симметрий для конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$. Мы предполагаем, что это их полная группа симметрий. Для конуса $OCUT_n$ этот факт доказан в [17].

• *Конусом m-полуметрик $HMET_n^m$* называется множество всех *m-полуметрик* на n точках.

• *Конусом m-полуметрик разбиений $HCUT_n^m$* называется коническая оболочка всех *m-полуметрик разбиений* на n точках.

Конусы $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$ являются полномерными конусами в пространстве $\mathbb{R}_n^{E^{m+1}}$.

Поскольку каждая m-полуметрика разбиений является m-полуметрикой, мы получаем, что

$$HCUT_n^m \subseteq HMET_n^m \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^{E_n^{m+1}}.$$

Очевидно, что все грани конусов $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$ сохраняются при любой перестановке вершин. Из этого следует, что любая такая перестановка порождает симметрию конусов $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$, то есть группа $Sym(n)$ является группой симметрий указанных двух конусов. Применяя компьютерные подсчеты, мы проверили, что $Sym(n)$ является полной группой симметрий для исследуемых конусов.

• *Метрическим многогранником* на n точках $METP_n$ называется множество всех полуметрик из MET_n, удовлетворяющих *неравенствам периметра* $d_{ik} + d_{ij} + d_{jk} \leq 2$.

• *Разрезным многогранником* (или *многогранником разрезов*) на n точках $CUTP_n$ называется выпуклая оболочка всех 2^{n-1} разрезов на $\{1, ..., n\}$.

• *Квазиметрическим многогранником* на n точках $QMETP_n$ называется множество квазиполуметрик из $QMET_n$, удовлетворяющих *неравенствам периметра* $q_{ki} + q_{ij} + q_{jk} \leq 2$.

• *Многогранником ориентированных мультиразрезов* на n точках $OMCUTP_n$ естественно назвать выпуклую оболочку всех $p^{'}(n)$ ориентированных мультиразрезов на $\{1, ..., n\}$, в то время как *многогранник ориентированных разрезов* на n точках $OCUTP_n$ будет обозначать выпуклую оболочку всех 2^n ориентированных разрезов на $\{1, ..., n\}$.

Многогранники $CUTP_n$ и $METP_n$ инвариантны, помимо перестановок, относительно так называемого *свичинга*, осуществляющегося по закону $(i, j) \to 1 - d_{ij}$, если $|S \cap \{i, j\}| = 1$, и $(i, j) \to d_{ij}$, иначе. В целом это дает группу порядка $2^{n-1} \times n!$. Для $n \neq 4$ это полная группа симметрий. Для $n = 4$ полная группа симметрий имеет порядок $2^3 \times 144$ ([16]).

Для многогранника $QMETP_n$ можно определить ориентированный аналог операции свичинга на $METP_n$, осуществляемый аналогичным образом: $(i, j) \to 1 - q_{ij}$, если $|S \cap \{i, j\}| = 1$, и $(i,j) \to q_{ij}$, иначе. Ориентированный свичинг, вместе с перестановками и реверселем, образует группу порядка $2^n \times n!$. Мы предполагаем, что эта группа является полной группой симметрий для многогранников $QMETP_n$ (проверено для $n \leq 9$, см. [16]).

7. Таблицы параметров рассматриваемых конусов и многогранников

В таблице 1 представлена информация о конусах ориентированных и многомерных обобщенных метрических структур на малом числе вершин. Для каждого конуса представлены его размерность, число экстремальных лучей и число их орбит, число его гиперграней (фасет) и число их орбит, наконец, диаметры 1-скелетон-графа и реберного графа (см. [16, 1]).

Конус	Размерность	Число экстр. лучей (орбит)	Число гиперграней (орбит)	Диаметры
$OMCUT_3$=$QMET_3$	6	12(2)	12(2)	2; 2
$OMCUT_4$	12	74(5)	72(4)	2; 2
$QMET_4$	12	164(10)	36(2)	3; 2
$OMCUT_5$	20	540(9)	35320(194)	2; 3
$QMET_5$	20	43590(229)	80(2)	3; 2
$OMCUT_6$	30	4682(19)	$\geqslant$ 217847040($\geqslant$ 163822)	2; ?
$QMET_6$	30	$\geqslant$ 182403032($\geqslant$ 127779)	150(2)	?; 2
$HCUT_5^2$	10	25(2)	120(4)	2; 3
$HMET_5^2$	10	37(3)	30(2)	2; 2
$HCUT_6^3$	15	65(2)	4065(16)	2; 3
$HMET_6^3$	15	287(5)	45(2)	3; 2
$HCUT_7^4$	21	140(2)	474390(153)	2; 3
$HMET_7^4$	21	3692(8)	63(2)	3; 2
$HCUT_8^5$	28	266(2)	$\geqslant$ 409893148($\geqslant$ 11274)	2; ?
$HMET_8^5$	28	55898(13)	84(2)	3; 2
$HMET_9^6$	36	864174(20)	108(2)	?; 2
$HCUT_6^2$	20	90(3)	2095154(3086)	2; ?
$HMET_6^2$	20	12492(41)	80(2)	3; 2
$HMET_7^2$	35	$\geqslant$ 454191608($\geqslant$ 91836)	175(2)	?; 2
$HMET_7^3$	35	$\geqslant$ 551467967($\geqslant$ 110782)	140(2)	?; 2

Таблица 1: Парметры конусов на n точках для малых n

В таблице 2 представлена информация о числе вершин и гиперграней для некоторых квазиметрических многогранников (см. [16, 1]).

Многогранник	Размерность	Число вершин (орбит)	Число гиперграней (орбит)
$OCUTP_3$	5	16(2)	16(2)
$OCUTP_4$	9	64(3)	40(2)
$OCUTP_5$	14	256(3)	1056(5)
$OCUTP_6$	20	1024(4)	1625068(97)
$OMCUTP_3$	6	22(3)	20(2)
$OMCUTP_4$	12	136(5)	1160(9)
$OMCUTP_5$	20	1016(7)	?(?)
$QMETP_4$	12	544(8)	56(2)
$QMETP_5$	20	155136(392)	120(2)

Таблица 2: Парметры многогранников на n точках для малых n

8. Заключение

Помимо несимметричных и многомерных обобщенных метрических структур, представляющих собой аналоги классического симметричного двумерного случая метрик, разрезов, мультиразрезов и других родственных конструкций, интерес представляют их специальные частные случаи: взвешиваемые квазиметрики, частичные метрики, m-суперметрики и др. Определения и примеры некоторых объектов такого рода были рассмотрены в третьем разделе работы. Построение и исследование соответствующих конусов и многогранников на малом числе точек можно провести по той же схеме (см., например, [14], [15] и др.). Однако в силу большого числа используемых параметров исследование поведения таких объектов, построенных на малом числе точек, очень быстро приводит к комбинаторному взрыву. Это затрудняет процесс построения и доказательства гипотез о поведении конусов и многогранников обобщенных метрических структур такого рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М. М., Деза Е. И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, выпуск 2. С. 79–92.

2. Кудряшов Б. Д. Теория информации: Учебник для вузов. – СПб.: Петир, 2009.

3. Лидовский В. В. Теория информации: Учебное пособие. – М.: Компания Спутник, 2004.

4. Шеннон К. Математическая теория связи. – М.: ИЛ, 1963.

5. Charikar M., Makarychev K., Makarychev V. Directed metrics and directed graph partitioning problem // Proc. of 11-th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms. 2006. P. 51–60.

6. Chebotarev P. Studying new classes of graph metrics // Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013), Lecture Notes in Computer Science, LNCS 8085. 2013. P. 207–214.

7. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications. 2002. No 356. P. 253–274.

8. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2018. URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11590-018-1314-2.

9. Chebotarev P., Shamis E. The forest metric for graph verticies // arXiv:060257v1. 2006.

10. Chebotarev P., Shamis E. Matrix forest theorems // arXiv:0602575v1. 2006.

11. Chebotarev P., Shamis E. On proximity measures for graph vertices // Automation and Remote Control. 1998. No 59. P. 1443-–1459.

12. Chebotarev P., Shamis E. The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups // Automation and Remote Control. 1997. No 58. P. 1505-–1514.

13. Deza M. M., Deza E. I. Encyclopedia of Distances, 4-rd edition. – Springer-Verlag, Berlin, 2016.

14. Deza M.M., Deza E.I. Cones of partial metrics // Contrib. Discrete Math. 2011. No 6(1). P. 26–47.

15. Deza M. M., Deza E. I., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics // Proceedings of the International Conference on Algebra. 2010. P. 177–197.

16. Deza M. M., Dutour M., Deza E. I. Generalizations of finite metrics and cuts. – World Scientific, 2016.

17. Deza M. M., Dutour M., Panteleeva E. I. Small cones of oriented semi-metrics // Forum for Interdisciplinary Mathematics Proceedings on Statistics, Combinatorics and Related Areas. 2002. Vol. 22. P. 199–225.

18. Deza M. M., Grishukhin V. P., Deza E. I. Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts // Mathematics of Distances and Applications, ITEA, Sofia. 2012. P. 31–53.

19. Deza M. M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. - Springer-Verlag, Berlin, 1997.

20. Deza M. M., Panteleeva E. I. Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra // European Journal of Combinatorics. 2000. No 21(6). P. 777–795.

21. Deza M. M., Rosenberg I. G. n-semimetrics // European Journal of Combinatorics, Special Issue *Discrete Metric Spaces*. 2000. No 21(6). P. 797–806.

22. Doyle P. G., Snell J. L. Random Walks and Electric Networks. - Mathematical Association of America, Washington D.C., 1984.

23. Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel // Rend. Circolo mat. Palermo. 1906. Vol. 22. P. 1–74.

24. Gvishiani A. D., Gurvich V. A. Metric and ultrametric spaces of resistances // Russian Mathematical Surveys. 1987. No 42. P. 235–236.

25. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. – Leipzig, 1914.

26. Klein D. J., Randic M. Resistance distance // Journal of Mathematical Chemistry. 1993. No 12. P. 81–95.

27. Seda A.K. Quasi-metrics and the semantic of logic programs // Fundamenta Informaticaem. 1997. Vol. 29. P. 97–117.

28. Sharpe G. E. Solution of the $(m+1)$-terminal resistive network problem by means of metric geometry // Proceedings of the First Asilomar Conference on Circuits and Systems, Pacific Grove, CA. 1967. P. 319–328.

29. Wilson W.A. On quasi-metric spaces // American J. of Math. 1931. Vol. 53. P. 575–681.

REFERENCES

1. Deza, M. M., Deza, E. I., Dutour Sikirić, M. 2015, ”Polyhedral structures associated with quasi-metrics“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2), P. 79–92.

2. Kudryashov, B. D. 2009, ”Information Theory“, *StPb.: Petir.*

3. Lidovskii, V. V. 2004, ”Information Theory“, *M.: Sputnik.*

4. Shannon, C. E. 1948, ”A Mathematical Theory of Communication“, *M.: IL.*

5. Charikar, M., Makarychev, K., Makarychev, V. 2006, ”Directed metrics and directed graph partitioning problem“, *Proc. of 11-th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, P. 51–60.

6. Chebotarev, P. 2013, ”Studying new classes of graph metrics“, *Proceedings of the SEE Conference ”Geometric Science of Information“ (GSI-2013)*, Lecture Notes in Computer Science, LNCS 8085, P. 207–214.

7. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, ”Forest matrices around the Laplacian matrix“, *Linear Algebra and its Applications*, No 356, P. 253–274.

8. Chebotarev, P., Deza, E. 2018, ”Hitting time quasi-metric and its forest representation“, *Optimization Letters*, URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11590-018-1314-2.

9. Chebotarev, P., Shamis, E. 2006, ”The forest metric for graph verticies“, *arXiv:060257v1.*

10. Chebotarev, P., Shamis, E. 2006, ”Matrix forest theorems“, *arXiv:0602575v1.*

11. Chebotarev, P., Shamis, E. 1998, ”On proximity measures for graph vertices“, *Automation and Remote Control*, No 59, P. 1443–1459.

12. Chebotarev, P., Shamis, E. 1997, ”The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups“, *Automation and Remote Control*, No 58, P. 1505–1514.

13. Deza, M. M., Deza, E. I. 2016, ”Encyclopedia of Distances“, 4-rd edition, *Springer-Verlag, Berlin.*

14. Deza, M. M., Deza, E. I. 2011, ”Cones of partial metrics“, *Contrib. Discrete Math.*, No 6(1), P. 26–47.

15. Deza, M. M., Deza, E. I., Vidali, J. 2010, ”Cones of weighted and partial metrics“, *Proceedings of the International Conference on Algebra*, P. 177–197.

16. Deza, M. M., Dutour, M., Deza, E. I. 2016, ”Generalizations of finite metrics and cuts“, *World Scientific.*

17. Deza, M. M., Dutour, M., Panteleeva, E. I. 2002, ”Small cones of oriented semi-metrics“, *Forum for Interdisciplinary Mathematics Proceedings on Statistics, Combinatorics and Related Areas*, Vol. 22, P. 199–225.

18. Deza, M. M., Grishukhin, V. P., Deza, E. I. 2012, ”Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts“, *Mathematics of Distances and Applications*, ITEA, Sofia, P. 31–53.

19. Deza, M. M., Laurent, M. 1997, ”Geometry of cuts and metrics“, *Springer-Verlag, Berlin.*

20. Deza, M. M., Panteleeva, E. I. 2000, ”Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra“, *European Journal of Combinatorics*, No 21(6), P. 777–795.

21. Deza, M. M., Rosenberg, I. G. 2000, ”n-semimetrics“, *European Journal of Combinatorics*, Special Issue *Discrete Metric Spaces*, No 21(6), P. 797–806.

22. Doyle, P. G., Snell, J. L. 1984, ”Random Walks and Electric Networks“, *Mathematical Association of America, Washington D.C.*.

23. Fréchet, M. 1906, ”Sur quelques points du calcul fonctionnel“, *Rend. Circolo mat. Palermo*, Vol. 22, P. 1–74.

24. Gvishiani, A. D., Gurvich, V. A. 1987, ”Metric and ultrametric spaces of resistances“, *Russian Mathematical Surveys*, No 42, P. 235–236.

25. Hausdorff, F. 1914, ”Grundzüge der Mengenlehre“, *Leipzig.*

26. Klein, D. J., Randic, M. 1993, ”Resistance distance“, *Journal of Mathematical Chemistry*, No 12, P. 81–95.

27. Seda, A. K. 1997, "Quasi-metrics and the semantic of logic programs", *Fundamenta Informaticaem*, Vol. 29, P. 97–117.

28. Sharpe, G. E. 1967, "Solution of the $(m+1)$-terminal resistive network problem by means of metric geometry", *Proceedings of the First Asilomar Conference on Circuits and Systems*, Pacific Grove, CA, P. 319–328.

29. Wilson, W. A. 1931, "On quasi-metric spaces", *American J. of Math.*, Vol. 53, P. 575–681.

Получено 28.05.2019 г.
Принято в печать 12.07.2019 г.