

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 1

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-238-254

Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями¹

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье получено аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на двух однородных упругих цилиндрах с радиально-неоднородными покрытиями, находящимися в идеальной жидкости. Волновые поля в содержащей среде и однородных упругих телах находятся аналитически, а для нахождения полей смещений в неоднородных покрытиях построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

С помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Задача представляет интерес для изучения дифракции звука на решетке цилиндрических тел, а также служит необходимым элементом решения методом мнимых источников задачи о дифракции звука на одиночном однородном упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи акустически мягкой или абсолютно жесткой плоской поверхности.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное покрытие.

Библиография: 31 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников. Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 238–254.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 1

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-238-254

Diffraction of a plane sound wave on two elastic cylinders with non-uniform coatings

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

In paper the analytical solution of a problem about diffraction of a plane sound wave on two uniform elastic cylinders with radially non-uniform coatings is received. Analytic expressions are obtained which describe the wave fields in the containing medium and the homogeneous elastic bodies. The boundary-value problem for the system of ordinary differential equations of the second order is constructed for determination of the displacement fields in non-uniform coatings.

By means of an continuous-non-uniform elastic coatings it is possible to change effectively scattering performances of bodies in determinate directions if to pick up corresponding the inhomogeneity laws for mechanical parametres of a coating. The problem is of interest for analysis of sound diffraction on a lattice of cylindrical bodies and also serves as a necessary element of solution by a method of imaginary sources of a problem about sound diffraction on the single homogeneous elastic cylinder with the non-uniform covering which is close to acoustically soft or absolutely rigid flat surfaces.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, non-uniform coating.

Bibliography: 31 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, 2018, "Diffraction of a plane sound wave on two elastic cylinders with non-uniform coatings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 238–254.

1. Введение

Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. Обычно покрытия применяются для повышения звукопоглощения и уменьшения отражения звука в определенном направлении. Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. Изменение звукоотражающих свойств упругих тел можно осуществить с помощью непрерывно-неоднородных покрытий. С помощью непрерывно-неоднородного упругого покрытия можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. При этом непрерывно-неоднородные покрытия можно реализовать с помощью многослойной системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров. С математической точки зрения такое представление эквивалентно аппроксимации непрерывных функций, характеризующих переменные параметры непрерывно-неоднородного слоя, кусочно-постоянными функциями.

Значительный интерес представляют рассеиватели, имеющие форму кругового цилиндра, так как многие реальные объекты достаточно хорошо аппроксимируются телами цилиндрической формы. Задачи дифракции звуковых волн на одиночных упругих цилиндрах, находящихся в безграничной жидкости, рассматривались во многих работах. Дифракция звуковых волн на однородных изотропных упругих сплошных цилиндрах и цилиндрических оболочках исследовалась, например, в работах [1-4]. В [1-2] рассматривался случай нормального падения волны, а в [3-4] — случай наклонного падения. В работах [5, 6] решена задача о рассеянии плоских звуковых волн на неоднородном изотропном упругом цилиндре. Исследованию рассеяния звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем посвящена работа [7]. В [8] найдено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на неоднородном анизотропном поломом цилиндре в общем случае анизотропии. Решения задач о рассеянии плоской и цилиндрической звуковых волн неоднородными упругими полыми цилиндрами в вязкой жидкости получены в [9, 10]. В работе [11] изучена дифракция плоских звуковых волн на неоднородном изотропном термоупругом цилиндре, помещенном в невязкую теплопроводную жидкость. Исследованию дифракции цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины посвящена работа [12]. В [13] теория резонансного рассеяния использована для анализа рассеяния звука неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочкой. В [14] определены линейные законы неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука.

Серия работ посвящена изучению влияния покрытий цилиндрических твердых тел на их звукоотражающие свойства. В [15] рассмотрены прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием. Выбраны параметры среды резонаторов перфорированного покрытия, обеспечивающие заданный уровень гашения поля дифракции на цилиндре. В [16, 17] обсуждается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. Для снижения рассеяния падающей на цилиндр звуковой волны применено тонкое покрытие с протяженной реакцией. Дифракции плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [18]. Выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов покрытия и оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Задачи о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решены в [19, 20]. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием рассмотрено в [21], а с дискретно-слоистым покрытием — в [22]. Влияние термоупругости материалов цилиндра и его радиально-неоднородного покрытия на рассеяние звука изучено в работах [23, 24]. При этом в [23] рассмотрены как прямая задача дифракции, так и обратная задача об определении законов неод-

нородности материала покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [25]. В [26] получено приближенное аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом цилиндре, имеющем цилиндрическую полость и радиально-неоднородное покрытие. На основе решения прямой задачи рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих минимальное звукоотражение. В [27] решена задача дифракции плоской звуковой волны на двух неоднородных упругих цилиндрах с жесткими включениями.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоской звуковой волны на двух однородных упругих цилиндрах с непрерывно-неоднородными упругими покрытиями, находящимися в идеальной жидкости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим два одинаковых бесконечных однородных изотропных упругих цилиндра радиусом r_0 , оси которых параллельны. Материал цилиндров характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндры имеют покрытия в виде неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1 . Окружающая цилиндры жидкость является идеальной. Ее плотность и скорость звука соответственно равны ρ_1 и c .

Введем основную (x, y, z) и локальные (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}) , (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) декартовы прямоугольные системы координат. Оси локальных координатных систем одинаково ориентированы с соответствующими осями основной системы координат. При этом центры локальных систем координат O_{+1} и O_{-1} находятся на оси y и на осях вращения цилиндров z_{+1} и z_{-1} , расположенных в верхней и нижней полуплоскостях (относительно оси x) соответственно (рис. 1).

Свяжем с основной и локальными прямоугольными системами координат цилиндрические системы координат (r, φ, z) , $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1})$, $(r_{-1}, \varphi_{-1}, z_{-1})$.

В локальных цилиндрических координатах уравнения внешних поверхностей l -го цилиндра и его покрытия имеют вид $r_l = r_0$ и $r_l = r_1$ соответственно ($l = \pm 1$).

Полагаем, что модули упругости λ и μ материала покрытия l -го цилиндра описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты r_l , а плотность ρ — непрерывной функцией координаты r_l ($l = \pm 1$): $\lambda = \lambda(r_l)$, $\mu = \mu(r_l)$, $\rho = \rho(r_l)$.

Пусть из внешнего пространства на цилиндры падает плоская звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} , который лежит в плоскости xy и образует угол φ_0 с положительным направлением оси x .

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \omega t],$$

где A — амплитуда волны; ω — круговая частота; $\mathbf{k} = \{k \cos \varphi_0; k \sin \varphi_0; 0\}$; $\mathbf{r} = \{x, y, 0\}$ — радиус-вектор; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Падающая плоская волна будет рассеиваться цилиндрами. При этом имеет место многократное переотражение между телами.

Определим акустическое поле, рассеянное цилиндрами.

В рассматриваемой постановке задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z .

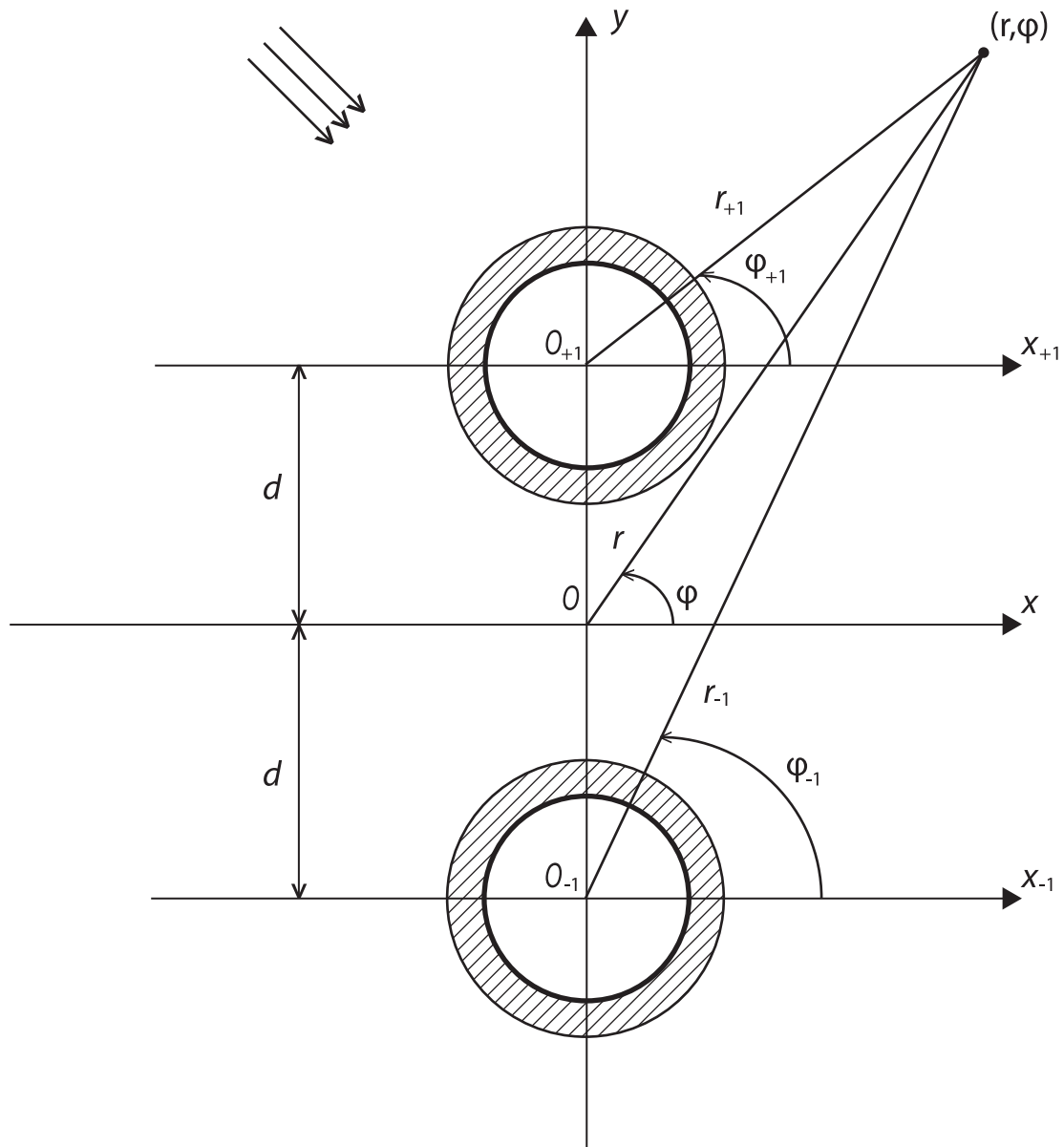


Рис. 1: Геометрия задачи

3. Аналитическое решение задачи

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [28]

$$\Delta\Psi(r, \varphi) + k^2\Psi(r, \varphi) = 0,$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

При этом скорость частиц \mathbf{v} и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad}\Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи потенциал Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_s, \tag{1}$$

где Ψ_s — потенциал скорости волны, рассеянной двумя цилиндрами.

Потенциал скорости рассеянной волны является решением уравнения Гельмгольца и должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [28].

Учитывая, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_l + \mathbf{r}_{Ol} \quad (l = \pm 1),$$

падающую волну запишем в виде

$$\Psi_0 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{Ol})] \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_l)],$$

где $\mathbf{r}_{Ol} = \{0, ld\}$ — радиус-вектор, соединяющий точку O с точкой O_l ($l = \pm 1$). При этом $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{Ol} = kdl \sin \varphi_0$.

Представим потенциал скорости падающей волны в локальных цилиндрических координатах в виде разложения [29]

$$\Psi_0(r_l, \varphi_l) = A e^{ikdl \sin \varphi_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1), \tag{2}$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка n .

Потенциал Ψ_s будем искать в виде суммы двух слагаемых

$$\Psi_s = \sum_{l=\pm 1} \Psi_s^{(l)}, \tag{3}$$

каждое из которых представляет собой потенциал скорости волны, рассеянной l -ым цилиндром.

Функции $\Psi_s^{(l)}$ являются решениями уравнений Гельмгольца, которые в локальных цилиндрических координатах имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi_s^{(l)}}{\partial r_l^2} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \Psi_s^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l^2} \frac{\partial^2 \Psi_s^{(l)}}{\partial \varphi_l^2} + k^2 \Psi_s^{(l)} = 0, \quad l = \pm 1.$$

С учетом условий излучения на бесконечности функции $\Psi_s^{(l)}$ будем искать в виде

$$\Psi_s^{(l)}(r_l, \varphi_l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(l)} H_n(kr_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}, \quad l = \pm 1, \tag{4}$$

где $H_n(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $A_n^{(l)}$ — коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородных упругих цилиндрах и их неоднородных упругих покрытиях.

Представим вектор смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ частиц упругого изотропного однородного l -го цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0^{(l)} = \text{grad}L^{(l)} + \text{rot}\Phi^{(l)}, \quad \text{div}\Phi^{(l)} = 0,$$

где $L^{(l)}$ и $\Phi^{(l)}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения.

Из уравнения Ламе получаем два волновых уравнения [30], которые для установившегося режима движения переходят в скалярное и векторное уравнения Гельмгольца

$$\Delta L^{(l)} + k_l^2 L^{(l)} = 0, \quad \Delta \Phi^{(l)} + k_\tau^2 \Phi^{(l)} = 0,$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Так как $\Phi^{(l)} = \Phi^{(l)}(r, \varphi)\mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z — единичный вектор оси z , то от векторного уравнения Гельмгольца приходим к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi^{(l)}(r, \varphi)$

$$\Delta \Phi^{(l)} + k_\tau^2 \Phi^{(l)} = 0.$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ записываются через функции $L^{(l)}$ и $\Phi^{(l)}$ следующим образом:

$$u_{0r}^{(l)} = \frac{\partial L^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \varphi_l}, \quad u_{0\varphi}^{(l)} = \frac{1}{r_l} \frac{\partial L^{(l)}}{\partial \varphi_l} - \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial r_l}.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{0rr}^{(l)}, \sigma_{0r\varphi}^{(l)}$ в однородной части l -го цилиндра и компонентами вектора смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ имеют вид [32]

$$\sigma_{0rr}^{(l)} = (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial u_{0r}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{\lambda_0}{r_l} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + u_{0r}^{(l)} \right), \quad \sigma_{0r\varphi}^{(l)} = \mu_0 \left(\frac{1}{r_l} \frac{\partial u_{0r}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\partial u_{0\varphi}^{(l)}}{\partial r_l} - \frac{u_{0\varphi}^{(l)}}{r_l} \right).$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{0rr}^{(l)}$ и $\sigma_{0r\varphi}^{(l)}$ выразим через функции $L^{(l)}$ и $\Phi^{(l)}$ с учетом того, что $\Delta L^{(l)} = -k_l^2 L^{(l)}$. Получим

$$\sigma_{0rr}^{(l)} = -\lambda_0 k_l^2 L^{(l)} + 2\mu_0 \left[\frac{\partial^2 L^{(l)}}{\partial r_l^2} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial}{\partial \varphi_l} \left(\frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial r_l} - \frac{1}{r_l} \Phi^{(l)} \right) \right],$$

$$\sigma_{0r\varphi}^{(l)} = \mu_0 \left(\frac{2}{r_l} \frac{\partial^2 L^{(l)}}{\partial r_l \partial \varphi_l} - \frac{1}{r_l^2} \frac{\partial L^{(l)}}{\partial \varphi_l} - \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial r_l^2} + \frac{1}{r_l^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial \varphi_l^2} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial r_l} \right).$$

С учетом условия ограниченности функции $L^{(l)}$ и $\Phi^{(l)}$ будем искать в виде

$$L^{(l)}(r_l, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l)} J_n(k_l r_l) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad (5)$$

$$\Phi^{(l)}(r_l, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} J_n(k_\tau r_l) e^{in(\varphi - \varphi_0)}. \quad (6)$$

Волновые поля в неоднородных упругих покрытиях цилиндров описываются общими уравнениями движения упругой среды [30], которые в локальных цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\sigma_{rr}^{(l)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{r_l} &= -\omega^2 \rho u_r^{(l)}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{2}{r_l} \sigma_{r\varphi}^{(l)} &= -\omega^2 \rho u_\varphi^{(l)}; \quad l = \pm 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $u_r^{(l)}$, $u_\varphi^{(l)}$ и $\sigma_{ij}^{(l)}$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ и тензора напряжений в покрытии l -го цилиндра; $\rho = \rho(r_l)$.

Используя соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука) [31], а также соотношения, связывающие компоненты тензора деформаций с компонентами вектора смещения [31], из уравнений (7) получаем следующие уравнения движения, записанные через компоненты вектора смещения в локальных цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r^{(l)}}{\partial r_l^2} + \frac{\lambda + \mu}{r_l} \frac{\partial^2 u_\varphi^{(l)}}{\partial r_l \partial \varphi_l} + \frac{\mu}{r_l^2} \frac{\partial^2 u_r^{(l)}}{\partial \varphi_l^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r_l} \right) \frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial r_l} + \\ + \frac{1}{r_l} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r_l} \right) \frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \left(\frac{\lambda'}{r_l} - \frac{\lambda + 2\mu}{r_l^2} + \omega^2 \rho \right) u_r^{(l)} &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 u_\varphi^{(l)}}{\partial r_l^2} + \frac{\lambda + \mu}{r_l} \frac{\partial^2 u_r^{(l)}}{\partial r_l \partial \varphi_l} + \frac{\lambda + 2\mu}{r_l^2} \frac{\partial^2 u_\varphi^{(l)}}{\partial \varphi_l^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r_l} \right) \frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial r_l} + \\ + \frac{1}{r_l} \left(\mu' + \frac{\lambda + 3\mu}{r_l} \right) \frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \left(-\frac{\mu'}{r_l} - \frac{\mu}{r_l^2} + \omega^2 \rho \right) u_\varphi^{(l)} &= 0; \quad l = \pm 1, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\lambda = \lambda(r_l)$; $\mu = \mu(r_l)$; штрих означает дифференцирование по r_l .

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ в неоднородном упругом покрытии l -го цилиндра являются периодическими функциями координаты φ_l с периодом 2π . Поэтому функции $u_r^{(l)}(r_l, \varphi_l)$ и $u_\varphi^{(l)}(r_l, \varphi_l)$ ($l = \pm 1$), удовлетворяющие уравнениям (8), будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r^{(l)}(r_l, \varphi_l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}^{(l)}(r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}, \quad u_\varphi^{(l)}(r_l, \varphi_l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}^{(l)}(r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (9) в уравнения (8), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$ и $U_{2n}^{(l)}(r_l)$ для каждого n :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n^{(l)} \mathbf{U}_n^{(l)''} + \tilde{\mathbf{B}}_n^{(l)} \mathbf{U}_n^{(l)'} + \tilde{\mathbf{C}}_n^{(l)} \mathbf{U}_n^{(l)} = 0; \quad l = \pm 1, \quad (10)$$

где $\mathbf{U}_n^{(l)} = \left(U_{1n}^{(l)}(r_l), U_{2n}^{(l)}(r_l) \right)^T$; $\tilde{\mathbf{A}}_n^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{B}}_n^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{C}}_n^{(l)}$ — матрицы второго порядка.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n^{(l)} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}}_n^{(l)} = \begin{pmatrix} \lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r_l} & in \frac{\lambda + \mu}{r_l} \\ in \frac{\lambda + \mu}{r_l} & \mu' + \frac{\mu}{r_l} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{C}_n^{(l)} = \frac{1}{r_l} \begin{pmatrix} \lambda' - \frac{\lambda + (2+n^2)\mu}{r_l} + \omega^2 \rho r_l & in \left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r_l} \right) \\ in \left(\mu' + \frac{\lambda + 3\mu}{r_l} \right) & -\mu' - \frac{n^2 \lambda + (2n^2 + 1)\mu}{r_l} + \omega^2 \rho r_l \end{pmatrix}.$$

Искомые функции $\Psi_s^{(l)}$, $L^{(l)}$, $\Phi^{(l)}$, $u_r^{(l)}$ и $u_\varphi^{(l)}$ ($l = \pm 1$) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия l -го цилиндра заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\text{при } r_l = r_1 \quad -i\omega u_r^{(l)} = v_r, \quad \sigma_{rr}^{(l)} = -p, \quad \sigma_{r\varphi}^{(l)} = 0; \quad l = \pm 1. \quad (11)$$

На внутренней поверхности покрытия l -го цилиндра при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } r_l = r_0 \quad u_r^{(l)} = u_{0r}^{(l)}, \quad u_\varphi^{(l)} = u_{0\varphi}^{(l)}, \quad \sigma_{rr}^{(l)} = \sigma_{0rr}^{(l)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(l)} = \sigma_{0r\varphi}^{(l)}; \quad l = \pm 1. \quad (12)$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(l)}$, $\sigma_{r\varphi}^{(l)}$ в неоднородном покрытии l -го цилиндра и компонентами вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ имеют тот же вид, что и для однородного упругого материала. Только в этих соотношениях упругие постоянные λ_0 и μ_0 следует заменить на модули упругости $\lambda(r_l)$ и $\mu(r_l)$.

Для нахождения коэффициентов $A_n^{(l)}$, $B_n^{(l)}$, $C_n^{(l)}$ разложений (4-6) и функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$, $U_{2n}^{(l)}(r_l)$ в разложениях (9) из граничных условий воспользуемся теоремой сложения для волновых цилиндрических функций, которая позволяет волновую функцию $H_n(kr_l)e^{in\varphi_l}$, записанную в l -ой локальной системе координат ($l = 1$ либо $l = -1$), выразить через волновые функции, но записанные уже в другой, $(-l)$ -ой системе координат.

Теорема сложения имеет вид [29]

$$H_n(kr_l)e^{in\varphi_l} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n-m}(2kd)J_m(kr_{-l})e^{i(n-m)\varphi_{l,-l}+im\varphi_{-l}}, \quad 2d > r_{-l}. \quad (13)$$

Здесь через $\varphi_{l,-l}$ обозначена полярная координата начала O_{-l} ($-l$ -ой локальной системы координат в l -ой локальной системе координат с началом в O_l). При этом $\varphi_{l,-l} = \frac{2+l}{2}\pi$.

Подставляя соответствующие выражения в первое и второе граничные условия (11), получаем две бесконечные системы уравнений (при $j = 1$ и $j = 2$) для определения коэффициентов $A_n^{(l)}$

$$A_n^{(l)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{jnm}^{(-l,l)} A_m^{(-l)} = F_{jn}^{(l)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad l = \pm 1), \quad (14)$$

$$\text{где } \alpha_{1nm}^{(-l,l)} = \frac{J'_n(kr_1)}{H'_n(kr_1)} H_{m-n}(2kd) e^{i(m-n)(\varphi_{-l,l}-\varphi_0)}; \quad F_{1n}^{(l)} = -Ai^n \frac{J'_n(kr_1)}{H'_n(kr_1)} e^{ikdl \sin \varphi_0} - \frac{i\omega U_{1n}^{(l)}(r_1)}{kH'_n(kr_1)};$$

$$\alpha_{2nm}^{(-l,l)} = \frac{J_n(kr_1)}{H_n(kr_1)} H_{m-n}(2kd) e^{i(m-n)(\varphi_{-l,l}-\varphi_0)}; \quad F_{2n}^{(l)} = -Ai^n \frac{J_n(kr_1)}{H_n(kr_1)} e^{ikdl \sin \varphi_0} +$$

$$+ \frac{i}{\rho_1 \omega} \left[(\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U_{1n}^{(l)'}(r_1) + \frac{1}{r_1} \left(U_{1n}^{(l)}(r_1) + in U_{2n}^{(l)}(r_1) \right) \right].$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по аргументу функций.

Решение бесконечной системы линейных уравнений может быть найдено методом усечения [30]. При этом приближенные значения неизвестных находятся с заданной точностью путем сопоставления последовательных решений конечных систем, получаемых из бесконечной системы ее усечением с различными возрастающими значениями порядка усечения N .

Для регуляризации систем (14) сделаем в них замену неизвестных $A_n^{(l)}$ новыми неизвестными $a_{jn}^{(l)}$ ($j = 1, 2$), положив при $j = 1$ и $j = 2$ соответственно [29]

$$A_n^{(l)} = J'_n(kr_1)a_{1n}^{(l)} \quad l = \pm 1 \quad (15)$$

и

$$A_n^{(l)} = J_n(kr_1)a_{2n}^{(l)} \quad l = \pm 1. \quad (16)$$

В результате системы N -го порядка усечения (при $j = 1$ и $j = 2$) будут иметь вид

$$a_{jn}^{(l)} + \sum_{m=-N}^N \hat{\alpha}_{jnm}^{(-l,l)} a_{jm}^{(-l)} = f_{jn}^{(l)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N; \quad l = \pm 1), \quad (17)$$

где $\hat{\alpha}_{1nm}^{(-l,l)} = \frac{J'_m(kr_1)}{J'_n(kr_1)} \alpha_{1nm}^{(-l,l)}$; $f_{1n}^{(l)} = \frac{F_{1n}^{(l)}}{J'_n(kr_1)}$; $\hat{\alpha}_{2nm}^{(-l,l)} = \frac{J_m(kr_1)}{J_n(kr_1)} \alpha_{2nm}^{(-l,l)}$; $f_{2n}^{(l)} = \frac{F_{2n}^{(l)}}{J_n(kr_1)}$.

Системы (17) является системами $(4N + 2)$ уравнений с $(4N + 2)$ неизвестными $a_{jn}^{(+1)}$ и $a_{jn}^{(-1)}$.

Проведем преобразования, позволяющие понизить вдвое порядок систем (17) (при неизменном значении порядка усечения N) без усложнения вычислений матричных элементов и правых частей систем.

Учитывая, что $\varphi_{+1,-1} = \frac{3}{2}\pi$; $\varphi_{-1,+1} = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\hat{\alpha}_{jnm}^{(-1,+1)} = (-1)^{m-n} \hat{\alpha}_{jnm}^{(+1,-1)} = \alpha_{jnm} \quad (j = 1, 2).$$

Тогда система (17) принимает вид

$$a_{jn}^{(+1)} + \sum_{m=-N}^N \alpha_{jnm} a_{jm}^{(-1)} = f_{jn}^{(+1)},$$

$$a_{jn}^{(-1)} + \sum_{m=-N}^N (-1)^{m-n} \alpha_{jnm} a_{jm}^{(+1)} = f_{jn}^{(-1)}.$$

Умножим второе уравнение системы на $(-1)^n$, и осуществим почленное сложение и вычитание уравнений полученной системы. В результате приходим к двум независимым системам линейных уравнений порядка $(2N + 1)$

$$\sum_{m=-N}^N [\delta_{nm} + (-1)^m \alpha_{jnm}] x_{jm} = X_{jn},$$

$$\sum_{m=-N}^N [(\delta_{nm} - (-1)^m \alpha_{jnm}) y_{jm} = Y_{jn} \quad (18)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N; \quad j = 1, 2)$$

с неизвестными $x_{jn} = a_{jn}^{(+1)} + (-1)^n a_{jn}^{(-1)}$, $y_{jn} = a_{jn}^{(+1)} - (-1)^n a_{jn}^{(-1)}$

и правыми частями $X_{jn} = f_{jn}^{(+1)} + (-1)^n f_{jn}^{(-1)}$, $Y_{jn} = f_{jn}^{(+1)} - (-1)^n f_{jn}^{(-1)}$, где δ_{nm} — символ Кронекера.

Тогда

$$a_{jn}^{(+1)} = (x_{jn} + y_{jn})/2, \quad a_{jn}^{(-1)} = (-1)^n(x_{jn} - y_{jn})/2 \quad (j = 1, 2). \quad (19)$$

В матричном виде системы (18) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{jx}\mathbf{x}_j &= \mathbf{E}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} + \bar{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} + \bar{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} + \bar{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}, \\ \mathbf{Q}_{jy}\mathbf{y}_j &= \bar{\mathbf{E}}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} - \bar{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} - \bar{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} - \bar{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\mathbf{Q}_{jx} = (\delta_{nm} + (-1)^m\alpha_{jnm})_{(2N+1)\times(2N+1)}$; $\mathbf{Q}_{jy} = (\delta_{nm} - (-1)^m\alpha_{jnm})_{(2N+1)\times(2N+1)}$;

$\mathbf{x}_j = (x_{-jN}, x_{j(-N+1)}, \dots, x_{j0}, x_{j1}, \dots, x_{jN})^T$; $\mathbf{y}_j = (y_{-jN}, y_{j(-N+1)}, \dots, y_{j0}, y_{j1}, \dots, y_{jN})^T$;

$\mathbf{E}_j = (E_{-jN}, E_{j(-N+1)}, \dots, E_{j0}, \dots, E_{jN})^T$; $\bar{\mathbf{E}}_j = (\bar{E}_{-jN}, \bar{E}_{j(-N+1)}, \dots, \bar{E}_{j0}, \dots, \bar{E}_{jN})^T$;

$\mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} = (g_{-jN}U_{1,-N}^{(+1)}(r_1), \dots, g_{j0}U_{10}^{(+1)}(r_1), \dots, g_{jN}U_{1N}^{(+1)}(r_1))^T$;

$\mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} = (s_{-jN}U_{2,-N}^{(+1)}(r_1), \dots, s_{j0}U_{20}^{(+1)}(r_1), \dots, s_{jN}U_{2N}^{(+1)}(r_1))^T$;

$\mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} = (t_{-jN}U_{1,-N}^{(+1)'}(r_1), \dots, t_{j0}U_{20}^{(+1)}(r_1), \dots, t_{jN}U_{1N}^{(+1)'}(r_1))^T$;

$\bar{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} = (\bar{g}_{-jN}U_{1,-N}^{(+1)}(r_1), \dots, \bar{g}_{j0}U_{10}^{(+1)}(r_1), \dots, \bar{g}_{jN}U_{1N}^{(+1)}(r_1))^T$;

$\bar{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} = (\bar{s}_{-jN}U_{2,-N}^{(+1)}(r_1), \dots, \bar{s}_{j0}U_{20}^{(+1)}(r_1), \dots, \bar{s}_{jN}U_{2N}^{(+1)}(r_1))^T$;

$\bar{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} = (\bar{t}_{-jN}U_{1,-N}^{(+1)'}(r_1), \dots, \bar{t}_{j0}U_{20}^{(+1)}(r_1), \dots, \bar{t}_{jN}U_{1N}^{(+1)'}(r_1))^T$;

$E_{jn} = e_{jn}^{(+1)} + (-1)^n e_{jn}^{(-1)}$; $\bar{E}_{jn} = e_{jn}^{(+1)} - (-1)^n e_{jn}^{(-1)}$;

$e_{1n}^{(l)} = -A \frac{i^n}{H_n'(kr_1)} e^{ikdl \sin \varphi_0}$; $e_{2n}^{(l)} = -A \frac{i^n}{H_n(kr_1)} e^{ikdl \sin \varphi_0}$ ($l = \pm 1$);

$\bar{g}_{jn} = (-1)^n g_{jn}$; $\bar{s}_{jn} = (-1)^n s_{jn}$; $\bar{t}_{jn} = (-1)^n t_{jn}$ ($j = 1, 2$);

$g_{1n} = -\frac{i\omega}{kH_n'(kr_1)J_n'(kr_1)}$; $g_{2n} = \frac{i}{\rho_1\omega r_1 J_n(kr_1)}$; $s_{1n} = 0$; $s_{2n} = -\frac{n}{\rho_1\omega r_1 J_n(kr_1)}$;

$t_{1n} = 0$; $t_{2n} = \frac{i[\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)]}{\rho_1\omega J_n(kr_1)}$ ($n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$).

Методом обратной матрицы найдем решения систем (20)

$$\mathbf{x}_j = (\mathbf{Q}_{jx})^{-1} \left[\mathbf{E}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} + \bar{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} + \bar{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} + \bar{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'} \right],$$

$$\mathbf{y}_j = (\mathbf{Q}_{jy})^{-1} \left[\bar{\mathbf{E}}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} - \bar{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} - \bar{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} - \bar{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'} \right].$$

Запишем в в координатной форме последние два выражения, обозначая через q_{jnm}^x и q_{jnm}^y элементы обратных матриц $(\mathbf{Q}_{jx})^{-1}$ и $(\mathbf{Q}_{jy})^{-1}$ соответственно.

На основании формул (15), (16) и (19) находим выражения для коэффициентов $A_n^{(l)}$.

При $j = 1$ получаем

$$A_n^{(l)} = \frac{l^n}{2} J_n'(kr_1) \sum_{m=-N}^N \left[(q_{1nm}^x E_{1m} + l q_{1nm}^y \bar{E}_{1m}) + (q_{1nm}^x + l q_{1nm}^y) g_{1m} U_{1m}^{(+1)}(r_1) + \right.$$

$$+(q_{1nm}^x - lq_{1nm}^y)\bar{g}_{1m}U_{1m}^{(-1)}(r_1)] \quad (l = \pm 1). \quad (21)$$

При $j = 2$ будем иметь

$$\begin{aligned} A_n^{(l)} = & \frac{l^n}{2} J_n(kr_1) \sum_{m=-N}^N \{ (q_{2nm}^x E_{2m} + lq_{2nm}^y \bar{E}_{2m}) + \\ & + (q_{2nm}^x + lq_{2nm}^y) [g_{2m} U_{1m}^{(+1)}(r_1) + s_{2m} U_{2m}^{(+1)}(r_1) + t_{2m} U_{1m}^{(+1)'}(r_1)] + \\ & + (q_{2nm}^x - lq_{2nm}^y) [\bar{g}_{2m} U_{1m}^{(-1)}(r_1) + \bar{s}_{2m} U_{2m}^{(-1)}(r_1) + \bar{t}_{2m} U_{1m}^{(-1)'}(r_1)] \} \quad (l = \pm 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Приравнявая правые части уравнений (21) и (22), получаем краевое условие для нахождения частного решения системы (10)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-N}^N \left\{ \left[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)} (q_{1nm}^x E_{1m} + lq_{1nm}^y \bar{E}_{1m}) - (q_{2nm}^x E_{2m} + lq_{2nm}^y \bar{E}_{2m}) \right] + \right. \\ & + \left[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)} (q_{1nm}^x + lq_{1nm}^y) g_{1m} - (q_{2nm}^x + lq_{2nm}^y) g_{2m} \right] U_{1m}^{(+1)} + \\ & + \left[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)} (q_{1nm}^x - lq_{1nm}^y) \bar{g}_{1m} - (q_{2nm}^x - lq_{2nm}^y) \bar{g}_{2m} \right] U_{1m}^{(-1)} + \\ & + \left[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)} (q_{1nm}^x + lq_{1nm}^y) s_{1m} - (q_{2nm}^x + lq_{2nm}^y) s_{2m} \right] U_{2m}^{(+1)} + \\ & + \left[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)} (q_{1nm}^x - lq_{1nm}^y) \bar{s}_{1m} - (q_{2nm}^x - lq_{2nm}^y) \bar{s}_{2m} \right] U_{2m}^{(-1)} + \\ & + \left[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)} (q_{1nm}^x + lq_{1nm}^y) t_{1m} - (q_{2nm}^x + lq_{2nm}^y) t_{2m} \right] U_{1m}^{(+1)'} + \\ & \left. + \left[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)} (q_{1nm}^x - lq_{1nm}^y) \bar{t}_{1m} - (q_{2nm}^x - lq_{2nm}^y) \bar{t}_{2m} \right] U_{1m}^{(-1)'} \right\}_{r_l=r_1} = 0 \quad (l = \pm 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Из первых двух граничных условий (12) находим выражения для коэффициентов $B_n^{(l)}$ и $C_n^{(l)}$

$$B_n^{(l)} = \gamma_{1n} U_{1n}^{(l)}(r_0) + \gamma_{2n} U_{2n}^{(l)}(r_0), \quad C_n^{(l)} = \gamma_{3n} U_{1n}^{(l)}(r_0) + \gamma_{4n} U_{2n}^{(l)}(r_0) \quad (l = \pm 1), \quad (24)$$

где $\gamma_{1n} = k_\tau r_0 J'_n(k_\tau r_0) / \Delta_n$; $\gamma_{2n} = in J_n(k_\tau r_0) / \Delta_n$; $\gamma_{3n} = in J_n(k_l r_0) / \Delta_n$;

$\gamma_{4n} = -k_l r_0 J'_n(k_l r_0) / \Delta_n$; $\Delta_n = [k_l r_0 J'_n(k_l r_0) k_\tau r_0 J'_n(k_\tau r_0) - n^2 J_n(k_l r_0) J_n(k_\tau r_0)] / r_0$.

Заметим, что неизвестные коэффициенты $A_n^{(l)}$, $B_n^{(l)}$ и $C_n^{(l)}$ разложений (4-6) можно найти лишь после определения полей смещений в неоднородных покрытиях.

Из третьего граничного условия (11) и двух последних граничных условий (12) с учетом выражений (24) получаем еще три краевых условия для нахождения частного решения системы (10)

$$\left[r_l U_{2n}^{(l)'}(r_l) + in U_{1n}^{(l)}(r_l) - U_{2n}^{(l)}(r_l) \right]_{r_l=r_1} = 0 \quad (l = \pm 1), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \{ [\lambda(r_l) + 2\mu(r_l)] U_{1n}'(r_l) + [\gamma_{1n} d_{1n} + \gamma_{3n} d_{2n} + \lambda(r_l) / r_l] U_{1n}(r_l) + \\ & + [\gamma_{2n} d_{1n} + \gamma_{4n} d_{2n} + in \lambda(r_l) / r_l] U_{2n}(r_l) \}_{r_l=r_0} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\{ \mu(r_l) / \mu_0 U_{2n}'(r_l) + [\gamma_{1n} d_{3n} + \gamma_{3n} d_{4n} + in \mu(r_l) / (\mu_0 r_l)] U_{1n}(r_l) +$$

$$+[\gamma_{2n}d_{3n} + \gamma_{4n}d_{4n} - \mu(r_l)/(\mu_0 r_l)]U_{2n}(r_l)\}_{r_l=r_0} = 0, \quad (27)$$

где $d_{1n} = k_l^2[\lambda_0 J_n(k_l r_0) - 2\mu_0 J_n''(k_l r_0)]$; $d_{2n} = 2\mu_0 i n [J_n(k_\tau r_0) - k_\tau r_0 J_n'(k_\tau r_0)]/r_0^2$;
 $d_{3n} = i n [J_n(k_l r_0) - 2k_l r_0 J_n'(k_l r_0)]/r_0^2$; $d_{4n} = [k_\tau^2 r_0^2 J_n''(k_\tau r_0) - k_\tau r_0 J_n'(k_\tau r_0) + n^2 J_n(k_\tau r_0)]/r_0^2$.

Таким образом, для нахождения искоемых функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$ и $U_{2n}^{(l)}(r_l)$ ($l = \pm 1$) при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ необходимо найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10), удовлетворяющих краевым условиям (23), (25) – (27).

Построенная краевая задача решается каким-либо численным или аналитическим методом. Затем по формуле (21) вычисляются коэффициенты $A_n^{(l)}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$; $l = \pm 1$). В результате на основании (3) и (4) получаем аналитическое описание акустического поля, рассеянного цилиндрами

$$\Psi_s = \sum_{l=\pm 1} \sum_{n=-N}^N A_n^{(l)} H_n(kr_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}.$$

4. Заключение

Задача дифракции плоской звуковой волны на двух однородных упругих цилиндрах с непрерывно-неоднородными упругими покрытиями, находящимися в идеальной жидкости, представляет интерес не только для изучения дифракции звука на решетке цилиндров, но также служит необходимым элементом решения методом мнимых источников задачи о дифракции звука на одиночном однородном упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящимся вблизи идеальной плоской поверхности (акустически мягкой или абсолютно жесткой).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, № 4. P. 405-418.
2. Doolittle R. D., Uberall H. Sound scattering by elastic cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. Vol. 39, № 2. P. 272-275.
3. Flax L., Varadan V. K., Varadan V. V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, № 6. P. 1832-1835.
4. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяния плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акустический журн. 1990. Т. 36, вып. 1. С. 12-16.
5. Безруков А. В., Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акустический журн. 1986. Т. 32, вып. 6. С. 762-766.
6. Коваленко Г. П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акустический журн. 1987. Т. 33, вып. 6. С. 1060-1063.
7. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журн. 1995. Т. 41, № 1. С. 134-138.

8. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндра // Оборонная техника. 1998. № 4-5. С. 11-14.
9. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным упругим полым цилиндром в вязкой жидкости // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 61-70.
10. Толоконников Л. А., Романов А. Г. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородном полом цилиндра в вязкой жидкости // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 151-160.
11. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном термоупругом цилиндрическом слое, граничащем с невязкими теплопроводными жидкостями // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 3. С. 474-483.
12. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Оборонная техника. 1998. № 4-5. С. 9-11.
13. Толоконников Л. А. Резонансное рассеяние звука трансверсально-изотропной неоднородной цилиндрической оболочкой // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. 2006. Вып. 3. С. 106-114.
14. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.
15. Иванов В. П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52, № 6. С. 791-798.
16. Бобровницкий Ю. И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54, № 6. С. 879-889.
17. Бобровницкий Ю. И., Морозов К. Д., Томилина Т. М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56, № 2. С. 147-151.
18. Косарев О. И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46, № 1. С. 34-37.
19. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, вып. 5. С. 850-857.
20. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
21. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
22. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.

23. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 154-173.
24. Ларин Н. В. О влиянии непрерывно-неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства термоупругого цилиндра // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 9. Часть 1. С. 395-403.
25. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189-199.
26. Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечивающих минимальное звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 67-81.
27. Толоконников Л. А., Логвинова А. Л. Дифракция плоской звуковой волны на двух неоднородных цилиндрах с жесткими включениями // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 54-66.
28. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
29. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
30. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1994. 560 с.
31. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no 4, pp. 405-418.
2. Doolittle, R. D. & Uberall, H. 1966, "Sound scattering by elastic cylindrical shells", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 39, no 2, pp. 272-275.
3. Flax, L., Varadan, V. K. & Varadan, V. V. 1980, "Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68, no 6, pp. 1832-1835.
4. Vexler, N. D., Korsunskii, V. M. & Rybak, S. A. 1990, "Scattering of an sloping incident plane wave by a circular cylindrical shell", *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no. 1, pp. 12-16.
5. Bezrukov, A. V., Prihod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, "Scattering of sound waves by elastic radially-layered cylindrical bodies", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 6, pp. 762-766.
6. Kovalenko, G. P. 1987, "About a problem of diffraction of acoustic wave by an inhomogeneous solid body", *Akust. Zhurnal*, vol. 33, no. 6, pp. 1060-1063.
7. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, "Scattering of sound waves by a transversely isotropic inhomogeneous cylinder layer", *Acoustical Physics*, vol. 41, no 1, pp. 114-117.
8. Tolokonnikov, L. A. 1998, "Diffraction of sound waves by an inhomogeneous non-isotropic hollow cylinder", *Oboron. Tekh.*, no 4-5, pp. 11-14.

9. Romanov A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2009, "Scattering of a plane sound wave by an inhomogeneous elastic hollow cylinder in a viscous fluid", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 61-70.
10. Tolokonnikov, L. A. & Romanov A. G. 2008, "Diffraction of cylindrical sound waves by an inhomogeneous hollow cylinder in a viscous fluid", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 151-160.
11. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2009, "Diffraction of a plane acoustic wave by a non-uniform thermoelastic cylindrical layer bounded by inviscid heat-conducting fluids", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 73, no. 3, pp. 336-343.
12. Tolokonnikov, L. A. 1998, "Diffraction of cylindrical waves by an inhomogeneous transversely-isotropic cylindrical shell", *Oboron. Tekh.*, no 4-5, pp. 9-11.
13. Tolokonnikov, L. A. 2006, "The resonant sound scattering by a transversely-isotropic inhomogeneous cylindrical shell", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Geodinam., Phiz., Matem., Termodinam., Geoekolog.*, pp. 3, pp. 106-114.
14. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54-62.
15. Ivanov, V. P. 2006, "Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating", *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683-690.
16. Bobrovnikskii, Yu. I. 2008, "A nonscattering coating for a cylinder", *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758-768.
17. Bobrovnikskii, Yu. I., Morozov, K. D. & Tomilina, T. M. 2010, "A periodic surface structure with extreme acoustic properties", *Acoustical Physics*, vol. 56, no 2, pp. 127-131.
18. Kosarev, O. I. 2012, "Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating", *Probl. Mashinost. Nadezh. Mashin.*, vol. 46, no 1, pp. 34-37.
19. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
20. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208.
21. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274.
22. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.
23. Larin, N. V. 2017, "Diffraction of a plane acoustic wave on the thermoelastic cylinder with the continuously inhomogeneous covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 154-173.
24. Larin, N. V. 2017, "Influence of the continuously inhomogeneous coating in the thermoelastic cylinder sound-reflecting properties", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9-1, pp. 395-403.

25. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 4, pp. 733-742.
26. Tolokonnikov, L. A. 2017, "Determination of the inhomogeneity laws for an covering of an elastic cylinder with cylindrical cavity, providing minimum sound reflexion", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 4, pp. 67-81.
27. Tolokonnikov, L. A. & Logvinova, A. L. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on two non-uniform cylinders with rigid inserts", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 54-66.
28. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p.
29. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p.
30. Sedov, L. I. 1994, "Mechanics of a continuous medium", vol. 2, Nauka, Moscow, 560 p.
31. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprzystosci", Mir, Moscow, 872 p.

Получено 18.04.2018

Принято в печать 17.05.2018