ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 51 (091) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-30-55

Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е-1950-е гг.)[1].

Богатов Егор Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики Старооскольского технологического института им. А. А. Угарова (филиала) Национального исследовательского технологического университета "МИСИС". *e-mail: e.bogolyubscky@yandex.ru*

Аннотация

Цель. Целью работы является изучение вклада отечественных математиков (В.В. Немыцкого, А.Н. Тихонова, А.А. Маркова, М.Г. Крейна, В.Л. Шмульяна и др.) в развитие метода неподвижной точки в бесконечномерном пространстве за период с начала 1920-х гг. до конца 1950-х гг.

Метод. Исследование основано на анализе оригинальных работ перечисленных учёных в контексте общемирового процесса развития нелинейного функционального анализа на фоне достижений американских (Дж. Биркгофа, О. Келлога), польских (С. Банаха, С. Мазура, Ю. Шаудера, К. Борсука и др.), итальянских (Р. Каччиополи), французских (Ж. Лере) и немецких (Э. Роте) математиков.

Результат. Вклад советских учёных в области метода неподвижной точки оказался сопоставимым с вкладом остальной части мирового математического сообщества в рассматриваемый период. Это подтверждается как количеством доказанных теорем о неподвижной точке, так и их качеством. Благодаря усилиям советского математика М.А. Красносельского, с середины 1950-х гг. метод неподвижной точки приобрёл своё значение, как общий метод для решения широкого класса задач качественного характера, относящихся к анализу нелинейных операторных уравнений (до указанного времени обсуждаемый метод рассматривался, только как инструмент для доказательства разрешимости абстрактных аналогов нелинейных интегральных или дифференциальных уравнений и их систем).

Обсуждение. Анализ достижений в области метода неподвижной точки в мировом контексте показал, что развитие нелинейного функционального анализа (как, впрочем, и любого другого раздела математики) есть процесс наднациональный, который осуществляется услилиями математиков из разных стран. Этот процесс выходит за рамки любой научной школы, какой бы крупной она не была.

Ключевые слова: история нелинейного функционального анализа, метод неподвижной точки, теорема Шаудера, теорема Тихонова-Шаудера, теорема Маркова-Какутани, степень отображения Лере-Шаудера, теорема Красносельского, теорема Крейна-Шмульяна, нелинейные интегральные уравнения, топологические методы анализа

Библиография: 75 названий.

Для цитирования:

Е. М. Богатов. Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е-1950-е гг.)// Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 30–55.

[1]Основные результаты работы докладывались на XV международной конференции "АЛГЕБРА,ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ секция История математики [1].

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 51 (091) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-30-55

On the history of the fixed point method and the contribution of the soviet mathematicians (1920s-1950s.)

Bogatov Egor Mikhailovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of higher mathematics and computer science at Starooskolsky technological institute named after. A. A. Ugarov (branch) of the National research technological university "MISIS".
e-mail: e.bogolyubscky@yandex.ru

Abstract

Goal. The aim of the paper is studying of Russian mathematicians contribution (V.V. Nemytskii, A.N. Tikhonov, A.A. Markov, M.G. Krein, V.L. Shmul'yan, etc.) to the development of the fixed point method for the period from the beginning 1920's until the late 1950's. Method. The reseach is based on an analysis of the original works of the listed scientists in the context of the worldwide development of nonlinear functional analysis against the backdrop of the achievements of American (J. Birkhoff, O. Kellogg), Polish (S. Banach, S. Mazur, J. Schauder, K. Borsuk,), Italian (R. Cacciopolli), French (J. Leray) and German (E. Rothe) mathematicians.

Result. The contribution of the Soviet scientists in the field of fixed point method is comparable with that of the rest of the world mathematical community in the period under review. This is confirmed both by the number of proved fixed-point theorems and by their quality. Due to the efforts of the Soviet mathematician M.A. Krasnosel'skii from the mid-1950's a fixed point method became a general method for solving a wide class of problems of a qualitative nature for a nonlinear operators analysis (until this time, the method under discussion was considered only as a tool for proving of the solvability of nonlinear integral or differential equations and their systems abstract analogues).

Discussion. An analysis of the achievements at the area of the fixed-point method in the global context has shown that the development of nonlinear functional analysis (as, indeed, of any other section of mathematics) is a supranational process that is carried out by the efforts of mathematicians from different countries. This process goes beyond any scientific school, no matter how large it may be.

Keywords: history of nonlinear functional analysis, fixed point method, Schauder theorem, Tikhonov-Schauder theorem, Markov-Kakutani theorem, Leray-Schauder mapping degree, Krasnosel'skii theorem, Krein-Shmuljan theorem, nonlinear integral equations, topological analysis methods.

Bibliography: 75 titles.

For citation:
E. M. Bogatov, 2018, "On the history of the fixed point method and the contribution of the soviet mathematicians (1920s-1950s.)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 30–55.

1. Введение

Под методом неподвижной точки мы будем подразумевать метод доказательства существования решений уравнений вида $F(x) = x$ и получения (по возможности) полезных свойств этих решений. Основное внимание будет уделено ситуации, когда x - элемент бесконечномерного пространства, а F - нелинейный оператор.

История метода неподвижной точки к настоящему времени уже довольно хорошо изучена [2, Гл. IX, §1], [3, Гл. VII, §2]-[7, Гл. VII, §6.10]; [8] - [10], однако результатам советских математиков, на наш взгляд, было уделено недостаточно внимания. Автор предпринимает попытку восполнить данный пробел, а также уточнить роль и место метода неподвижной точки в развитии нелинейного функционального анализа, ограничившись серединой XX в.
Будут найдены ответы на следующие вопросы:

1. Чем было мотивировано развитие метода неподвижной точки в указанный период?
2. Каковы былит основные инструменты данного метода и объект исследований?
3. Каков вклад отечественных и зарубежных учёных в разработку метода неподвижной точки ?
4. Как повлияли результаты в области метода неподвижной точки на эволюцию функционального анализа?
5. Какое применение нашёл метод неподвижной точки в других областях?

Работа является продолжением исследований автора, проведённых в [11]-[12].

2. Предыстория: теорема Брауэра, степень отображения

Поскольку истоки метода неподвижной точки лежат в конечномерных задачах, воспроизведём кратко результаты, полученные для этого случая.

В 1909 г. голландский учёный Л. Брауэр стал исследовать векторные поля на сфере S^2, ассоциированные с правой частью уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Для доказательства существования особых точек таких полей Брауэр изучил свойства непрерывных отображений f сферы S^2 в себя. Это привело его к определению нового топологического инварианта - *степени отображения* ($deg\, f$), которое было впоследствии распространено на бесконечномерные пространства и сыграло большую роль в развитии нелинейного функционального анализа в целом.

Перейдём к понятию $deg\, f$ для отображений n-мерных поверхностей S в себя. Упрощённо (по выражению П.С. Александрова [13, с. 154]) степень отображения Брауэра - это кратность покрытия поверхности S её образом S с учётом ориентации.

Строгое изложение результатов, относящихся к степени отображения, было дано Брауэром в двух работах - [14]-[15], опубликованных в журнале *Mathematische Annalen*. В первой из них (1911 г.), посвящённой доказательству инвариантности размерности, он ввёл в расмотрение так назывемую *локализованную* степень отображения - величину $deg(F, G, M)$ для функции $F : \bar{G} \to \mathbf{R}^N$ и точки $M \in \mathbf{R}^N$. Для определения $deg(F, G, M)$, Брауэр аппроксимировал отображение F симплициальным отображением F_ε с точностью ε. При достаточно малых ε разность между числом положительных (p) и числом отрицательных симплексов (q), покрывающих M, остаётся одной и той же для всех аппроксимирующих преобразований; это и есть $deg(F, G, M)$. В примере на рис.1 точку P покрывают 2 симплекса с положительной ориентацией (S_1^+, S_2^+), и один с отрицательной (S_3^-), так что $deg(F, G, M) = 1$.

В следующей работе, опубликованной в 1912 г., Брауэр определяет нелокальную степень отображения $deg\ f$ для непрерывной функции $f : S \to S$, как степень приближающих её симплициальных отображений поверхности S в себя. Принцип был использован тот же, что и в работе [14] ($degf = p-q$), однако результат не зависел уже от точки, а явился топологическим инвариантом, характеризующим одновременно функцию f и поверхность S "в целом".

В качестве одного из важнейших приложений степени отображения, принесших Брауэру мировую известность, была теорема о неподвижной точке и её следствие [2] [15, с. 115]:

Если $degf \neq (-1)^{(n+1)}$, то непрерывное отображение сферы S^n в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Следствие *Непрерывное отображение шара B^n в себя имеет неподвижную точку.*

Локализованная степень отображения тоже сыграла свою роль в доказательстве разрешимости нелинейных уравнений, но намного позже. Соответствующая теорема была доказана Х. Хопфом в 1927 г. [18] и имела вид

Теорема 1. *Пусть $F(X)$ - непрерывная в G функция. Если $deg(F,G,M) \neq 0$; $F(X) \neq M$ для $X \in \partial G$. Тогда уравнение $F(X) = M$ разрешимо в G.*

3. Неподвижные точки в бесконечномерном пространстве. Теорема Биркгофа-Келлога

Существенным шагом в обобщении теоремы Брауэра было перенесение её на бесконечномерный случай. Понятно, что современникам Брауэра эта задача была не под силу - теория функциональных пространств в это время только зарождалась. Эта теория появилась на свет в основном благодаря усилиям европейских математиков - С. Пинкерле, В. Вольтерра, Ж. Адамара, Д. Гильберта, М. Фреше, Ф. Рисса, Э. Шмидта, Э. Хелли и др. - см., например, [2, Гл. IV, §3-4; Гл. V], [19], [20, Гл. I]. К началу 1920-х гг. лидерство французской, немецкой и итальянской математических школ сохранялось. Но сразу после Первой Мировой войны также стала заявлять о себе и американская математическая школа, усилившаяся за счёт притока европейских учёных. Одним из результатов данного усиления стал перехват инициативы в области метода неподвижной точки. Так, в 1922 г. профессора Гарвардского университета Дж. Биркгоф и О. Келлог опубликовали статью [21] с доказательством теоремы о существовании инвариантной функции у непрерывнных отображений вида $Af = f$, действующих в пространствах C, C^n и L^2. Для непрерывных на отрезке функций она имела следующий вид [21, с. 103]

Теорема 2. *Пусть $M_f \subset C[a,b]$ представляет собой выпуклое множество функций, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных; $A : f \to \tilde{f}$ - однозначный непрерывный оператор, переводящий элементы M_f в элементы M_f. Тогда существует функция f_0, инвариантная относительно оператора A.*

Идея доказательства заключалась в аппроксимации непрерывной функции $f \in M$ кусочно-линейной функцией f_n, принимающей заданные значения в n точках, образующих множество M_n. При любом непрерывном A преобразование M_n в себя имеет, по теореме Брауэра, неподвижную точку, ассоциированную с функцией f_0^n: $Af_0^n = f_0^n$. Используя соображения, связанные с компактностью M, переход к пределу по n и непрерывность A, Биркгоф и Келлог получают $Af_0 = f_0$, где $f_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_0^n$.

Как для восстановления кусочно-линейной функции на $[a,b]$ достаточно знать её значения (ординаты) в промежуточных точках этого отрезка, так и для восстановления квадратично-суммируемой функции достаточно иметь набор коэффициентов её разложения в ряд Фурье.

[2] На самом деле эту теорему сформулировал на 10 лет раньше и доказал для простых ситуаций П.Боль - см., например [17, с. 205].

Для $f \in M \subset L^2[a,b]$ имеем

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i; \quad f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i;$$

где a_i - коэффициенты Фурье разложения функции f по системе $\{\varphi_i\}$. Тогда, если обозначить через M_n - конечномерное множество коэффициентов Фурье функции f_n, то при её преобразовании посредством оператора A существует неподвижная точка $f_n^0 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \varphi_i$ $(Af_n^0 = f_n^0)$, из которой, предельным переходом (в среднем квадратичном) Биркгоф и Келлог получают неподвижную точку для множества M.

Несмотря на то, что Биркгоф и Келлог были знакомы с теоремой о неподвижной точке Брауэра, их доказательство не опирается на неё. Биркгоф и Келлог доказывают свой вариант конечномерной теоремы о неподвижной точке для непрерывных преобразований выпуклых n-мерных областей, и используя этот вариант, выводят аналоги теоремы 2 в нормируемых пространствах, для которых, к тому моменту были известны критерии компактности (C^m) или слабой компактности (L^2).

Как подчёркивают авторы [21, с. 105] *"Важным моментом для настоящего метода является замкнутость и выпуклость множества* M_f". Из доказательства теоремы 2 и её аналогов также следует, что необходимым условием существования инвариантной функции является наличие базиса в выбранных функциональных пространствах, что обеспечивает возможность конечномерной аппроксимации функции $f \in M_f$.

В качестве применения метода неподвижной точки Биркгоф и Келлог указывают, в частности, на теоремы существования решения (в классе непрерывных на $[a,b]$ функций) нелинейных интегральных уравнений вида

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_a^b F(s, y(t))dt, \tag{1}$$

где $F(s, y(t))$ - функционал от $y(t)$; $\lambda \in \mathbf{R}$; *f(s)* - заданная функция [21, с. 105].

4. Теорема Шаудера и её обобщения

Абстрактным аналогом уравнения (1) является, как известно, нелинейное операторное уравнение вида $y = f + \lambda Ay$, где A - оператор. Для осознания этого факта (даже в линейной ситуации) потребовалось длительное время [19]. Однако результат превзошёл все ожидания - после защиты С. Банахом диссертации "*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals*" в 1920 г. [22] началось оформление понятийного аппарата и основных методов работы с линейными операторами в нормированных пространствах. Кроме того, усилиями С. Банаха и Г. Штейнгауза во Львове была создана щкола функционального анализа, приобретшая мировую известность [23, Гл. 15-16; Гл.18]. В рамках данной школы и был сделан следующий шаг в развитии метода неподвижной точки - обобщение теоремы Биркгофа-Келлога на произвольные (нормированные) функциональные пространства.

Уже через 3 года после выхода статьи Биркгофа и Келлога, львовский математик Ю. Шаудер представил в *Mathematische Zeitschrift* статью "Теория непрерывных отображений в функциональном пространстве", в которой были сформулированы достаточные условия для того, чтобы при преобразовании одного абстрактного функционального пространства в другое нашлась инвариантная функция. Статья была опубликована в 1927-м году; в ней был дан следующий принцип - теорема существования неподвижной точки [24, с.52]:

Теорема 3. *Если в линейном полном нормированном пространстве (с базисом) непрерывный оператор переводит замкнутое выпуклое тело в свою компактную часть, то существует неподвижная точка.*

Эта теорема и её обобщения стали важнейшей основой установления существования решений нелинейных операторных уравнений. Можно с уверенностью сказать, что работа Шаудера [24] положила начало новому разделу математики - нелинейному функциональному анализу.

Одним из основным мотивом Шаудера явилась теория существования решений квазилинейных уравнений математической физики (гиперболических и эллиптических), таких, как, например, квазилинейное уравнение Пуассона

$$\Delta z = f(x, y, z, z'_x, z'_y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

сводящихся к функциональным уравнениям вида

$$U[z(x, y)] = z(x, y),$$

где U- интегральный оператор, содержащий нелинейности младших порядков [24, с.57-59].

Отметим, что проблематика неподвижных точек активно разрабатывалась в то время и в пределах Московской математической школы. Так, в 1926-м году в Институте математики и механики МГУ П.С. Александровым и В.В. Немыцким был сделан доклад, в котором было приведено доказательство теоремы о существовании неподвижной точки при непрерывном преобразовании выпуклого компактного множества гильбертова пространства в себя [25, с.146-147]. Однако, узнав о более общем результате Шаудера, Александров и Немыцкий отказались от идеи опубликования своей работы.

Все последующие годы Шаудер продолжает двигаться по пути углубления своих результатов. Тщательно изучив свойства операторов, удовлетворяющих теореме 3, в своей статье [26], он приходит к необходимости рассмотрения топологической основы их действия. Одним из первых вопросов, на который ему пришлось здесь ответить - это вопрос об условиях инвариантности области в банаховом пространстве. Во введении к работе, опубликованной на данную тему, Шаудер отмечает [27, с. 123] "*Как известно, топологические теоремы об инвариантности n-мерных областей при однозначном и непрерывном отображении их в себя не могут перенесены на бесконечномерный случай в неизменном виде. Действительно, даже линейные, однозначные и непрерывные отображения гильбертова пространства в себя могут преобразовывать области в нигде не плотные множества. Таким образом, чтобы иметь возможность сохранить неизменность области, мы должны ограничиться более узким классом отображений.*"

Этим классом операторов, сохраняющих свойство полноты во множестве образов, оказался, как показал Шаудер, класс *вполне непрерывных* операторов. Шаудер определил их, следуя Ф. Риссу и Д. Гильберту, как операторы, переводящие слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся (такие операторы не обязаны быть линейными).

Главный результат работы [27] был сформулирован следующим образом:

Теорема 4. *Если E - слабокомпактное[3] банахово пространство с базисом, G - область в этом пространстве, F=U-I, где U - произвольный вполне непрерывный оператор в E, I - тождественный оператор, то $F(G)$ также является областью в E.*

К 1930 г. Шаудер добился полной аналогии с соответствующей теоремой Брауэра о неподвижной точке [28, с.175]:

[3]То есть компактное в смысле сходимости следующего вида: $x_n \overset{\text{сл}}{\to} x$, если для любого линейного непрерывного функционала L в E выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} L(x_n) = L(x)$.

Теорема 5. *Если непрерывное отображение F переводит K в K, где K - компактное подмножество банахова пространства E, то существует такая точка $x_0 \in E$, для которой $F(x_0) = x_0$.*

Понятно, что наиболее подходящими операторами, удовлетворяющими условиям последней теоремы, будут операторы вида $F = U - I$, определённые в теореме 4, поскольку их применение оставляет область K инвариантной и сохраняет свойство её компактности, если таковое присутствовало.

Идеи Шаудера были сразу же восприняты его итальянским коллегой Р. Каччиополи. В 1932 году он дополнил результат Шаудера следующей теоремой существования и единственности [29, с.4], [30, с. 463]

Пусть S - вполне непрерывное отображение банахова пространства E в себя, такое, что оператор T=I-S локально обратим в каждой точке, причём $T(u) \to \infty$ при $||u|| \to \infty$. Тогда S имеет в E единственную неподвижную точку.

Каччиополи использовал эту теорему, в частности, для доказательства однозначной разрешимости уравнения Гаммерштейна вида:

$$u(x) + \int_a^b K(x,y)f(y,u(y))dy = g(x), \tag{2}$$

в предположении о непрерывности всех функций, входящих в (2), а также симметричности и положительной определённости ядра $K(x,y)$ и непрерывной дифференцируемости по u функции $f(y,u)$, такой что $f_u(y,u) \geq 0$ [29, с.5-7].

Применение общих теорем о неподвижной точке к решению конкретных классов уравнений было отдельной, непростой задачей, заслуживающей особого внимания и представляющей большую ценность для научного сообщества. Об этом, в частности, может свидетельствовать тот факт, что после выхода своих работ на эту тему, в 1931 г. Каччиополи получил министерскую Итальянскую стипендию [31, с. 194], а Шаудер, годом позже - стипендию фонда Рокфеллера [32, с.4].

Геометрические идеи Шаудера и Каччиополи нашли своё развитие в исследованиях Немыцкого 1934-1936 гг. по качественной теории интегральных уравнений [33]-[34]. Для доказательства теорем существования и единственности уравнений вида (2) и более общих он использовал, помимо теоремы Шаудера, принцип сжатых отображений:

Если при преобразовании полного метрического пространства в свою часть расстояния между образами меньше, чем расстояния между прообразами, то существует и притом лишь одна неподвижная точка.

Этот принцип был сформулирован и доказан в 1922 г. С. Банахом [22, с.160] для нормированных пространств и перенесён на метрические пространства в 1930 г. Каччиополи [35].

Опираясь на указанные методы и авторский способ расщепления нелинейного интегрального оператора на две части: линейную интегральную и нелинейную (подынтегральную)[4], Немыцкий доказывает следующую теорему:

Если $K(x,y), f(y,u)$ - ограничены в $L^2(L^p)$ по переменной y; $f(y,u)$ удовлетворяет условию Липшица (Гёльдера) по переменной u, то в $L^2(L^p)$ существует единственное решение уравнения

$$u(x) = \lambda \int_G K(x,y)f(y,u(y))dy,$$

где λ - числовой параметр, G - ограниченная область в $\mathbf{R}^n$.

[4]Подробности см., например, в [36, с.96]

Более общий результат, включающий в себя принцип сжатых отображений и теорему Шаудера[5], был получен воронежским математиком М.А. Красносельским в 1955 г. [37] для обоснования метода последовательных приближений при решении нелинейных операторных уравнений:

Пусть $U \subset E$ - замкнутое выпуклое множество; $(A+B)\varphi \in U$ при $\varphi \in U$, где A вполне непрерывный, а B - сжимающий оператор: $\|B\varphi_1 - B\varphi_2\| \leq q\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, $0<q<1$. Тогда оператор $C=A+B$ имеет в U неподвижную точку.

5. Теорема Тихонова

Следующий нетривиальный шаг в развитии метода неподвижной точки состоял в отказе от требования полноты пространства. Это произошло в рамках развития топологических представлений о бесконечномерных пространствах[6], которое привело к появлению понятия *локально-выпуклого пространства*, введённого практически одновременно, в 1935 г., А.Н. Тихоновым [38] и Дж. фон Нейманом [39]. По определению Тихонова[7], *локально-выпуклые пространства - это топологические векторные пространства, в которых существует база окрестностей нуля, состоящих из выпуклых множеств* [38, с. 768].

Отметим, что любое банахово (и вообще нормируемое) пространство локально выпукло. Обратное неверно. Более того, *локально-выпуклое пространство нормируемо тогда и только тогда, когда оно содержит ограниченное открытое множество* (теорема Колмогорова).

Характерным примером локально-выпуклых пространств являются пространства последовательностей Кёте[8] $\mathcal{K}$, открытые в 1934 г. [41]. Пространство $\mathcal{K}$ состоит из последовательностей $\{\xi_n\}$, таких что полунорма, определяющая топологию $\mathcal{K}$, имеет вид:

$$|\xi|_p = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n| a_{np} < \infty \;\; \forall p,$$

где $\{a_{np}\}$ - бесконечная матрица Кёте, элементы которой неотрицательны и не возрастают вдоль каждой строки:

$$0 \leqslant a_{np} < \infty; a_{np} \leqslant a_{n(p+1)};\; n, p = 1, 2, \ldots$$

Тихонов обобщил теорему Шаудера о неподвижной точке на непрерывные отображения в локально-выпуклых пространствах [38, с. 770]:

У каждого непрерывного отображения выпуклого компактного множества локально-выпуклого пространства в себя существует по крайней мере одна неподвижная точка (Теорема Шаудера-Тихонова).

Как отмечает А. Гранас [42, с.24], теорема Тихонова дала положительный ответ на вопрос из части 2 задачи № 54 о справедливости теоремы о неподвижной точке для непрерывных отображений компактных множеств линейных топологических пространств X в себя, при условии существовании произвольно малых выпуклых окрестностей в X (этот вопрос был сформулирован Шаудером в 1935 г. в так называемой "Шотландской [9] книге" [42, с.124]). Подчеркнём, что результат Тихонова был распространён на произвольные Хаусдорфовы топологические

[5] Сейчас он известен, как *теорема Красносельского о неподвижной точке.*

[6] История данного вопроса хорошо описана Ж. Дьедонне в [2, Гл. VIII, §1-3].

[7] Как отмечает Г. Кёте [40, с. 511], определение Тихонова более общее, чем фон Неймана, поскольку последний наложил дополнительное ограничение – каждая точка пространства должна являться пересечением счётного числа окрестностей.

[8] По-видимому, Тихонову пространства Кёте не были известны.

[9] Сборник нерешённых задач, записанных в Шотландском кафе г. Львова С. Банахом, его учениками и коллегами (в том числе советскими) в 1935 -1941 гг. [23, Гл.10].

векторные пространства только через 70 лет[10], в 2005 г. французским математиком R. Cauty [43].

Одним из применений теоремы Шаудера-Тихонова, указанным Тихоновым в [38], было доказательство разрешимости задачи Коши для счётной системы квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_\alpha}{dx} = f_\alpha(x, \ldots, y_\beta, \ldots), \\ y_\alpha(x_0) = y^0_\alpha \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{M} \tag{3}$$

Если функции f_α непрерывны и ограничены для всех значений y_β и всех $|x - x_0| \leq a$, то система (3) имеет решение. Другое применение теоремы Тихонова-Шаудера было получено А.А. Марковым (мл.)[11] в 1936 г. [44]:

Теорема 6. *Пусть K - компактное выпуклое подмножество топологического векторного пространства E; F - коммутирующее семейство непрерывных аффинных преобразований K в себя. Тогда F имеет общую неподвижную точку $p \in K$, такую, что*

$$fp = p \quad \forall f \in F.$$

Из теоремы о неподвижной точке Маркова можно вывести теорему Боголюбова-Крылова об инвариантной мере, на базе которой был обоснован метод усреднения (исторические подробности см., например, в [46]).

Как отмечает С. Парк [47, с. 195], теорема Маркова-Какутани была обобщена на более широкие классы отображений в 1961 г. [48].

6. Теорема Крейна-Шмульяна

В 1930-е гг. продолжала интенсивно развиваться теория банаховых пространств. Ряд утверждений этой теории появились, как бесконечномерные аналоги теорем n-мерной евклидовой геометрии. Например, теорема Минковского об отделимости выпуклого тела гиперплоскостью была обобщена С. Мазуром в 1933 г. на линейные нормированные пространства. Он доказал, что если некоторая точка x_0 не принадлежит замкнутому выпуклому множеству K линейного нормированного пространства E, то существует гиперплоскость $f(x) = c$ $(f \in E^*)$, такая, что $f(x_0) > c$ и $f(x) \leq c$ для любого $x \in K$ [49, с.72-73].

Развивая результаты Мазура о слабой замкнутости выпуклых замкнутых множеств [49, §2] и о компактности выпуклой оболочки компактных множеств в банаховых пространствах [50, с.7], М.Г. Крейн и В.Л. Шмульян доказали следующую теорему (1940), [51, с. 579]:

Теорема 7. *Если S - слабо компактное[12] в E множество, то его слабое замыкание[13] слабо компактно и слабо замкнуто, а выпуклая оболочка S слабо компактна (теорема Крейна-Шмульяна).*

В основе её доказательства лежала теория *регулярно выпуклых множеств*, построенная авторами по примеру теории Банаха регулярно замкнутых линейных подпространств сопряжённого пространства E^* [52, гл. VIII]. Помимо модификации трансфинитных методов, использованных Банахом, Крейн и Шмульян задействовали ряд фактов классической проблемы моментов [51, с. 557].

[10] Об этом автору любезно сообщил профессор Львовского университета М. Заричный.

[11] А также, независимо, в 1938 г. Ш. Какутани [45]. В связи с этим данную теорему называют *теорема Маркова-Какутани.*

[12] *Слабо компактное* множество $S \subset E$ обладает тем свойством, что из любой последовательности $\{x_n\} \in S$ можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность, которая слабо сходится в E к некоторой точке $x_0 \in E$.

[13] *Слабое замыкание* S - множество всех элементов S и их слабых пределов. Множество слабо замкнуто, если оно содержит все свои слабые пределы.

Центральное место в теории Крейна-Шмульяна занимали понятия регулярных гиперплоскостей и выпуклых тел в пространстве E^*. Они назвали гиперплоскость $H \subset E^*$ *регулярной*, если её уравнение можно задать в виде[14]

$$f(x_0) = c,$$

где $f \in E^*$, x_0 - некоторый элемент из E, отвечающий гиперплоскости, а c - число. Множество $K \in E^*$ было названо *регулярно выпуклым*, когда любой элемент $g \in K$ можно отделить от K регулярной гиперплоскостью [53, с.615].

Теорема Крейна-Шмульяна позволила получить обобщения следующей теоремы Шаудера о неподвижной точке [28, с. 176-177, Satz III]:

Пусть E - сепарабельное банахово пространство; $S \subset E$ - выпуклое, слабо компактное и слабо замкнутое множество. Если слабо непрерывный оператор F преобразует множество S в свою часть, то у него существует неподвижная точка x_0 ($Fx_0 = x_0$).

Эти обобщения были сформулированы в виде двух теорем для операторов, действующих в пространствах E и E^* [51, с.581]:

Теорема 8. *Пусть $S \subset E$ - выпуклое замкнутое множество. Если слабо непрерывный оператор $F(x)$, определённый на S, преобразует его в сепарабельную и слабо компактную часть S, то у него существует неподвижная точка x_0 ($Fx_0 = x_0$).*

Теорема 9. *Пусть $K \subset E^*$ - выпуклое, сепарабельное и слабо замкнутое множество. Если слабо непрерывный оператор $F(f)$ преобразует K в свою слабо компактную часть $G \subset E^*$, то у него существует неподвижная точка f_0 ($Ff_0 = f_0$).*

Отметим, что теоремы 8 и 9 не получили широкого распространения и не оказали существенного влияния на развитие функционального анализа. А вот лежащая в их основе теорема 7, напротив, стала классической. В настоящее время она включена в учебники по теории банаховых пространств (см., например [54, Гл.3]) и нелинейного анализа (см., например [55, Гл.3]).

7. Степень отображения Лере-Шаудера

Вслед за обобщением теоремы Брауэра о неподвижной точке на бесконечномерный случай естественно было ожидать аналогичных результатов и для степени отображения $deg\ f$. И они не заставили себя долго ждать - уже в 1934 г. плодотворное сотрудничество Ю. Шаудера и Ж. Лере вылилось в "открытие" степени отображения $Deg\ \Phi$, где Φ действует в банаховом пространстве E [56]. Аналогом непрерывной функции *f*, фигурирующей в определении Брауэра, стало "вполне непрерывное возмущение тождественного оператора" : $\Phi = F - I$. Основных причин здесь две

1. только полная непрерывность оператора F гарантирует инвариантность области G при действии Φ (см. теорему 4);

2. вполне непрерывный оператор хорошо аппроксимируется конечномерным[15].

Изложим эвристические соображения, раскрывающие мотивацию Лере и Шаудера для введения $Deg\ \Phi$.
Уравнение

$$F(x) = x \tag{4}$$

[14]Обычная гиперплоскость задаётся уравнением $X_0(f) = c$, где $X_0 \in E^{**}$.
[15]Это стало понятным уже в процессе определения "новой" степени отображения.

где x принадлежит банахову пространству E, заменяется на более общее уравнение

$$F(k, x) = x, \tag{5}$$

где k - параметр, а зависимость от него непрерывна.
Предполагается, что при $k = k_0$ уравнение (5) разрешимо и имеет вид

$$F_0(x) = x. \tag{6}$$

Переход от уравнения (4) к уравнению (6) может быть выполнен путём непрерывного преобразования оператора F. Предположим, что существует топологический инвариант, характеризующий наличие решений у всего семейства (5). Тогда разрешимость уравнения (6) влечёт за собой существование решения уравнения (4). Таким инвариантом, как показали Лере и Шаудер, является степень отображения $x \to y = x - F(x)$ в точке $y=0$, определённая для вполне непрерывного оператора[16] F.

Для реализации указанной идеи Лере и Шаудер использовали локализованную степень отображения $deg(F, G, M)$. Процесс был осуществлён в два этапа:

1. Приближение вполне непрерывного оператора F конечномерным оператором F_n (проектор Шаудера) со значениями в подпространстве E_n.

2. Определение степени отображения $Deg\,\Phi$ для $\Phi = I - F$ в точке $z \in U$, $U \subset E$ через конечномерную локализованную степень отображения Брауэра оператора Φ_n (сужения Φ на E_n) по формуле

$$Deg(\Phi, U, z) \stackrel{def}{=} deg[\Phi|_{E_n}, U \cap E_n, z], \tag{7}$$

   где $\Phi|_{E_n} = I_n - F_n$.

Корректность определения $Deg(\Phi, U, z)$ по формуле (7) следовала из независимости этой степени от выбора конечномерного подпространства E_n и аппроксимирующего F конечномерного оператора F_n, продемонстрированной Лере и Шаудером в [57, с.77]. Новая степень отображения $Deg(\Phi, U, z)$ унаследовала все свойства конечномерной степени, в том числе принцип неподвижной точки, заключённый в теореме 1:

Теорема 10. *Пусть $F : U \to U$ - вполне непрерывный оператор, такой, что оператор $\Phi = I - F$ не имеет нулей на ∂U. Тогда, если $Deg(\Phi, U, 0) \neq 0$, то существует такой элемент $x_0 \in U$, что $Fx_0 = x_0$ (принцип неподвижной точки Лере-Шаудера).*

Прямым следствием явились теоремы существования решений семейства квазилинейных краевых задач с параметром λ, доказанные Лере и Шаудером для случая, когда эти решения ограничены и установлена разрешимость одной задачи при $\lambda = \lambda_0$.

В 1938 г. немецкий математик Э. Роте постарался придать геометрический смысл степени отображения Лере-Шаудера. Он счёл удобным переформулировать данное понятие в терминах так называемого *порядка* Γ векторного поля $\Phi x = x + Fx$, заданного на сфере S^∞ банахова пространства E [58, с. 183]:

$$\Gamma(\Phi, S^\infty, z) \stackrel{def}{=} (\Phi_n, S^n, z), \tag{8}$$

где E_n - конечномерное подпространство E, содержащее точку z;
S^n - сфера пространства E_n: $S^n = S^\infty \cap E_n$;
$\Phi_n = \Phi|_{E_n}$; F - вполне непрерывный оператор.

Роте показал, что левая часть в формуле (8) равна $Deg\,(\Phi, B^\infty, z)$, где B^∞ - шар пространства E с границей S^∞.

Пояснением специфику способа определения степени отображения по этой формуле:

[16]Здесь это оператор, который переводит ограниченные множества в компактные.

1. Роте рассматривал в качестве области определения Φ только шары B^∞ банахова пространства;

2. подпространством, на которое проектируется Φ может быть только конечномерная поверхность, топологически эквивалентная обычной сфере;

3. если E - гильбертово пространство, то топологический порядок Роте Γ равен вращению конечномерного векторного поля Φ_n на сфере S^n.

8. Результаты Красносельского

Геометрический подход Э. Роте был продолжен в начале 1950-х гг. в работах М.А. Красносельского[17]. Красносельский также связал степень отображения $\Phi = I - F$ области $U \subset E$ с вращением соответствующего векторного поля $\mathbf{\Phi}$ на её границе ∂U [60, с. 125-127]

$$Deg(\Phi, U) \stackrel{def}{=} \gamma(\mathbf{\Phi}, \partial U), \tag{9}$$

где $\gamma(\mathbf{\Phi}, \partial U) \equiv \gamma(\mathbf{\Phi}_n, F(U_B))$; $\mathbf{\Phi}_n$, как обычно - проектор Шаудера;
U_B - покрытие U конечной системой шаров $\{B_i^\infty\}$ пространства E, содержащих все нулевые векторы[18] поля $\mathbf{\Phi}$.

Отличие от определения Роте состояло в следующем:

- U - произвольная область (связная и ограниченная);

- степень отображения по Красносельскому - *нелокальная*[19] (не привязана к какой-либо точке).

Опираясь на определение (9), Красносельский показал, что

Для существования неподвижной точки вполне непрерывного поля $\mathbf{\Phi}$ *внутри области* G *банахова пространства* E *достаточно, чтобы вращение этого поля на границе* G *было отлично от нуля (принцип неподвижной точки Красносельского).*

В связи с этим большой интерес представляют признаки отличия от нуля вращения поля $\mathbf{\Phi}$. Они также были найдены Красносельским и были основаны на утверждении о том, что вращения гомотопных[20] полей одинаковы. Это позволяло заменять заданное поле $\mathbf{\Phi}$ на гомотопное ему поле $\mathbf{\Psi}$, для которого несложно вычислить вращение [61, с.83-84].

Характерным примером применения принципа неподвижной точки Красносельского может служить теорема о разрешимости уравнения Гаммерштейна вида

$$u = Bu; \quad Bu(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y, u(y)) dy, \tag{10}$$

доказанная при следующих условиях [60, Гл. VI,§1]

1. Оператор B расщепляем: $B\varphi = H^* f H \varphi$;

2. Оператор Немыцкого f действует из L^2 в L^2;

---

[17] Поначалу Красносельский использовал определение Роте без каких-либо изменений - см., например, [59, с.5].

[18] Нулевой вектор поля называется его неподвижной точкой.

[19] Этим она отличается и от степени отображения Лере-Шаудера.

[20] Гомотопность вполне непрерывных полей $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ предполагала возможность вполне непрерывной деформации их друг в друга [61, с.84].

3. На функцию f наложены следующие ограничения:
   $uf(x,u) \leq au^2 + b(x)|u|^{2-\gamma} + c(x)$,
   где $0 < \gamma < 2$, $b(x) \in L^{\frac{2}{\gamma}}$, $c(x) \in L^1$, $x \in D \subset \mathbf{R}^n$,
   а число a удовлетворяет неравенству $a < \frac{1}{\lambda_0}$,
   где λ_0 - наибольшее положительное собственное число ядра $K(x,y)$.

Оказалось, что можно указать такое $\rho = \rho(a,b,c,\gamma)$, что уравнение (10) имеет решение в шаре $B_\rho^\infty \subset L^2$ [60, с.316].

Подход Красносельского к исследованию разрешимости нелинейных уравнений не ограничивался принципом Лере-Шаудера и его аналогами. Он старался использовать и другие методы и инструменты, даже относящиеся к конечномерному случаю, самостоятельно распространяя их на пространства бесконечной размерности. Одним из таких инструментов была *теорема Борсука-Улама* об антиподальном отображении (1933) [62]. В упрощённом варианте (см., например, [63, с.21]) она выглядит так:

Пусть отображение $f : S^n \to R^n$ *– непрерывно и нечётно. Тогда существует точка* $x_0 \in S^n$, *в которой* $f(x_0) = 0$.

Обобщив теорему Борсука-Улама на вполне непрерывные векторные поля в бесконечномерных пространствах, Красносельский получил новый принцип неподвижной точки - *аналог теоремы об антиподальном отображении* [64, с.13]:

Теорема 11. *Пусть A - вполне непрерывный оператор, заданный на замкнутом шаре B банахова пространства E, границу которого обозначим через S. Если для каждой точки* φ *сферы S векторы* $A\varphi - \varphi$ *и* $A(-\varphi) + \varphi$ *направлены неодинаково, тогда вращение поля* $\mathbf{\Phi} = I - A$ *нечётно и в шаре B найдётся точка* $\bar{\varphi}$, *такая, что* $A\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$.

Одним из применений теоремы (11) явилось доказательство разрешимости уравнения, содержащего оператор типа Лихтенштейна:

$$Tu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{2n+1}(s; s_1, ..., s_{2n+1})\, u(s_1)...u(s_{2n+1}) ds_1...ds_{2n+1}. \tag{11}$$

В работе [64] Красносельский показал, что при некоторых естественных условиях, налагемых на ядра $K_{2n+1}(s; s_1, ..., s_{2n+1})$, уравнение

$$u = \lambda Tu + Fu,$$

где F – вполне непрерывный оператор; $\|Fu\| \ll 1$ для всех u, имеет в L^2 хотя бы одно решение с нормой, меньшей 1, если λ не является собственным значением оператора (11).

Степень отображения Лере-Шаудера оказалась весьма удачным[21] "изобретением". С её помощью удалось получить ряд интересных результатов качественного характера. В частности, в цитированной работе [56] Лере и Шаудер доказали теорему о существовании изолированной особой точки x_0 вполне непрерывного оператора $\Phi = I - F$ при условии, что $Ax_0 \neq x_0$, где A - производная Фреше оператора F. На основе этой теоремы Красносельский вывел теорему существования и *единственности*[22] неподвижной точки гладкого векторного поля вида $\mathbf{\Phi}_\varepsilon = \Phi - \varepsilon F_1$, где F_1 - непрерывно дифференцируемый в окрестности x_0 вполне непрерывный оператор; $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ [60, с. 170-171]. Данная теорема позволила получить однозначную

[21] С начала 1950-х гг. это понятие было распространено на локально выпуклые пространства усилиями Ж. Лере, М. Нагумо и др.; подробности см. в [5, с.65].

[22] Теоремы единственности с помощью принципа Лере-Шаудера первым стал доказывать Роте - см., [60, с.129].

разрешимость уравнения Гаммерштейна в классе непрерывных функций при некоторых ограничениях.

При помощи теории Лере-Шаудера были получены нелокальные (относительно λ) теоремы существования решений операторных уравнений вида

$$Au = \lambda u. \tag{12}$$

Они были перенесены на некоторые классы нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений в 1930-1940-х гг. самим Лере и некоторыми другими математиками (подробности см. в [65]). В этих теоремах использовались поля $I - \lambda A$, гомотопные *линейным* полям вида $I - \lambda B$, где λ - произвольное число, не принадлежащее спектру линейного вполне непрерывного оператора[23] B [60, с.162].

В развитие данных идей Красносельский доказал теорему существования решений уравнений, близких к нечётным, но не близких к линейным. Пусть A - линейный оператор, B - вполне непрерывен и нечётен, тогда поле $\mathbf{\Phi} = I - A - B$ является, в силу теоремы 11, нечётным, но не является линейным. При малых ε вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}_\varepsilon = \mathbf{\Phi} + \varepsilon C$, где C - вполне непрерывный оператор, гомотопно полю $\mathbf{\Phi}$ и его вращение на некоторой сфере пространства E нечётно. Эти рассуждения привели Красносельского к доказательству следующей теоремы [17, с.164]

Если в уравнении

$$u = Au + Bu + Cu, \tag{13}$$

A - линейный оператор, B - нечётный вполне непрерывный оператор, C - вполне непрерывный оператор с малой нормой, то оно имеет хотя бы одно решение.

Примером уравнения (13) может служить уравнение с нечётным интегростепенным рядом А.М. Ляпунова, возникающее в теории равновесия вращающейся жидкости [66, с.89].

9. Новый взгляд на метод неподвижной точки в контексте теории степени отображения

Топологический подход к вопросу о существовании решений уравнения вида

$$F(x) = 0, \tag{14}$$

или $f(x) = x$, проявившийся во всей полноте в работах Брауэра, давал возможность делать заключение о разрешимости целого семейства уравнений $F_\lambda(x) = 0$, эквивалентных (14) в том смысле, что F_λ путём непрывной деформации[24] переходит в F.

Причиной послужило применение степени отображения, определённой с точностью до гомотопии. Тот же подход, как уже отмечалось, оставался справедливым и для бесконечномерной ситуации при исследовании нелинейных операторных уравнений вида (12), где A - вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E. При этом, как показал Красносельский, при работе с уравнением (12) более удобным инструментом является вращение векторного поля $\mathbf{\Phi} = I - \lambda A$.

Оказалось, что геометрическая интерпретация $Deg\,\Phi$ позволяет не только отвечать на вопрос о разрешимости (12), но и *решать большое число задач качественного характера*, как-то [60, Гл. III, §3; Гл. IV]:

- обоснование сходимости приближённых решений уравнений вида (12);

[23] В роли оператора B первоначально выступала производная Фреше оператора A [57, с.79].
[24] В этом случае функции F и F_λ называются *гомотопными*.

- исследование структуры и свойств спектра оператора A;
- исследование множества собственных векторов нелинейных операторов;
- получение условий законности линеаризации в задаче о точках бифуркации;
- изучение свойств точек бифуркации A.

Постараемся кратко охарактеризовать упомянутые достижения Красносельского.

В послевоенные годы Красносельский работал в Институте математики[25] АН УССР [67] - одном из ведущих центров Советского Союза в области нелинейной механики. Неудивительно, что в круг его научных интересов входили вопросы аппроксимации решений нелинейных уравнений. Привлекая топологические соображения, он исследовал приближённые изолированные решения уравнения

$$\varphi = A\varphi, \quad \varphi \in B \subset E, \tag{15}$$

определяя их, как решения уравнения

$$\varphi = P_n A\varphi,$$

где P_n - линейный проекционный оператор, такой, что $P_n E = L_n$, а L_n - конечномерное подпространство E [60, с. 173].

Опираясь на факт совпадения вращения полей $I - P_n A$ и $I - A$ на сфере $S \subset E$, внутри которой нет других решений (15), кроме φ_0, Красносельский доказывает существование приближённых решений этого уравнения.

Если оператор A имеет в точке φ_0 производную Фреше B, для которой $B\varphi_0 \neq \varphi_0$, то можно оценить скорость сходимости приближённых решений к точному по формуле

$$\|\varphi_n - \varphi_0\| \leq (1 + \varepsilon_n)\|P_n\varphi_0 - \varphi_0\|,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ (подробности см. в [60, с. 176-177]).

Некоторые задачи нелинейной механики (в частности, задача о потере устойчивости стержня переменной жёсткости при вынужденном изгибе[26] [69, с. 204]) приводят к необходимости изучения собственных функций оператора A, как вторых решений этого уравнения, существующих при некоторых выделенных значениях параметра λ. Применение принципа неподвижной точки Красносельского в этой ситуации почти моментально даёт результат [60, Гл.IV, §1]:

Теорема 12. *Пусть $U \subset E$; область U ограничена и содержит нуль банахова пространства Θ. При этом, если вращение $\gamma(I - A, \partial U)$ отлично от 1, то оператор A имеет на ∂U по крайней мере одну собственную функцию, соответствующую положительному собственному значению.*

Если U не содержит Θ вместе с некоторой окрестностью, то утверждение, аналогичное теореме 12, вытекает из условия $\gamma(I - A, \partial U) \neq 0$.

Кроме того, используя понятие *индекса неподвижной точки*[27], введённого Лере и Шаудером в работе [57, с. 48] и свойства гомотопных вполне непрерывных векторных полей, Красносельский доказал теорему о структуре спектра и множестве собственных функций оператора A [60, с.190]:

[25] В этом же институте в 1939-1941 гг. работали С. Банах, С.Мазур и Ю. Шаудер [68, с.12].

[26] Изгиб стержня описывается дифференциальным уравнением, сводящимся к нелинейному операторному уравнению вида (12).

[27] Индекс неподвижной точки $\varphi_0 \in U \subset E$ вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{\Phi}$ равен вращению этого поля на малой сфере $S_\varepsilon \subset U$, окружающей точку φ_0 и такой, что ограничиваемый S_ε шар не содержит других неподвижных точек поля $\mathbf{\Phi}$ [60, с. 116].

Теорема 13. *Пусть φ_0 - изолированная собственная функция ненулевого индекса*[28] *вполне непрерывного оператора A, отвечающая собственному числу $\lambda_0 \neq 0$.*

Тогда можно указать такую область $U \subset E$, в которой собственные функции оператора A образуют непрерывную ветвь[29]*, проходящую через φ_0.*

Спектр оператора A в этом случае сплошной.

Предполагая гладкость оператора A, можно сформулировать условия, при которых каждому собственному значению из некоторого интервала будет соответствовать *единственная* собственная функция [60, с.192].

Если продолжать исследовать уравнение (12), имея в виду аналогию с вышуказанной моделью изгиба стержня, то естественно прийти к вопросу о возможности линеаризации этого уравнения с сохранением качественных свойств данной модели. Одним из таких свойств является наличие так называемых *точек бифуркации*, то есть таких критических значений λ_0, при переходе через которые возникают собственные функции с малой нормой[30][69, с.205]. В задачах, где ищутся формы потери устойчивости, точки бифуркации определяют критические нагрузки, при которых появляются ненулевые прогибы стержня.

В механике при отыскании точек бифуркации вместо оператора A обычно рассматривают его производную Фреше в нуле - линейный оператор B. После этого находят характеристические числа оператора B, которые и считают точками бифуркации оператора A. Отвечая на вопрос о допустимости такой линеаризации, поставленный А.Ю. Ишлинским и М.Г. Крейном, используя упомянутые выше топологические методы, Красносельский доказывает следующую теорему [60, с.199]:

Теорема 14. *Пусть A - вполне непрерывный оператор, имеющий в точке Θ дифференциал Фреше B и удовлетворяющий условию $A\Theta = \Theta$.*

Тогда каждое характеристическое число μ_0 нечётной кратности линейного оператора B является точкой бифуркации оператора A, причём этой точке бифуркации соответствует непрерывная ветвь собственных функций оператора A.

Рассматривая различные условия на характеристические числа оператора B, Красносельский уточняет структуру спектра A и множества его собственных функций [60, с.201-202].

Продолжая исследования свойств точек бифуркации оператора A, Красносельский доказывает утверждение, аналогичное теореме 14 для асимптотической производной[31] данного оператора, а также даёт пример его применения к оператору Гаммерштейна [70].

Не имея возможности проанализировать здесь все результаты Красносельского в обсуждаемой области[32], отметим, что именно с подачи Марка Александровича метод неподвижной точки стал одним из "первых принципов" в нелинейном функциональном анализе и занял достойное место в математике и её приложениях [72, с.225].

[28]Индексом собственной функции φ_0 вполне непрерывного оператора A, отвечающая собственному числу $\lambda_0 \neq 0$ Красносельский назвал индекс неподвижной точки векторного поля $I - \frac{1}{\lambda_0}A$.

[29]Собственные функции образуют в области $U \subset E$ *непрерывную ветвь*, проходящую через точку φ_0, если граница каждого ограниченного открытого множества, содержащего φ_0 и содержащегося в U, имеет непустое пересечение с множеством собственных функций.

[30]Уравнение $A\varphi = \lambda\varphi$ $(A\Theta = \Theta)$, при малых λ обычно не имеет ненулевых малых решений. Наличие точки бифуркации говорит о том, что от известной неподвижной точки ответвляются другие решения уравнения (12).

[31]Линейный оператор B называется *асимптотической производной* оператора A, если A близок к B на элементах большой нормы [60, с. 209]:

$$\lim_{\|\varphi\|\to\infty} \frac{\|A\varphi - B\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

[32]Больше подробностей можно найти в [71, п.2].

10. Заключение

Зародившись в работах Брауэра как топологический, метод неподвижной точки приобрёл, при переходе в бесконечномерное пространство, функционально-аналитический "оттенок". Побудительным мотивом первых исследований (Биркгоф и Келлог, 1922 г.) стало доказательство разрешимости нелинейных операторных уравнений в нормированных пространствах (чаще всего в качестве модельного выступало уравнение Гаммерштейна). После опубликования Шаудером теоремы о неподвижной точке для абстрактных операторов в банаховом пространстве (1930), стали проступать черты нового метода доказательства разрешимости уравнений вида $Au = 0$ [3, с.259]:

1. преобразование исходного уравнения к виду $Fu = u$;
2. выбор банахова пространства E, в котором действует и вполне непрерывен оператор F;
3. выделение компактного множества $K \subset E$, которое переводит в себя оператор F;
4. применение теоремы Шаудера.

Таким образом, дальнейшее развитие метода неподвижной точки должно приводить к получению новых результатов в теории вполне непрерывных операторов и теории компактности[33].

Теорема Шаудера о неподвижной точке подогрела интерес к данной теме математиков всего мира, о чём свидетельствует, в частности, количество доказанных за 9 лет (1932-1940) её аналогов[34] - т. Каччиополи, т. Борсука-Улама, т. Тихонова, т. Маркова, т. Какутани, т. Крейна-Шмульяна.

Переломным пунктом в развитии метода неподвижной точки можно считать выход статьи Лере и Шаудера (1934) с определением степени отображения для операторов – аналога брауэровской степени отображения для функций. Это определение было "геометризовано" в начале 1950-х гг. Красносельским, и в короткий период (буквально в течение 5 лет) преобразовано им в одно из главных орудий качественного анализа нелинейных операторных уравнений. Более того, можно утверждать, что усилиями Красносельского и его учеников во второй половине 1950-х гг. советские математики вышли на лидирующие позиции в области метода неподвижной точки. Вместе с тем, значимые результаты в указанной области в 1920-1940 гг. (помимо советских) были получены представителями различных математических школ - американской, польской, итальянской, немецкой, французской, японской. Из этого следует вывод о том, что процесс развития функционального анализа (и всей математики) носит международный, наднациональный характер.

Что же касается применения метода неподвижной точки в других областях, то, помимо отмеченного выше качественного анализа моделей нелинейной механики, можно выделить также вычислительную математику[35] (см., например, [75, Гл. III, §21]), в частности, получение оценок сходимости приближённых решений и их погрешностей.

Автор выражает признательность проф. Р.Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСИС, г. Старый Оскол) за постановку задачи и полезные советы; участникам секции "История математики" XV международной конференции "АЛГЕБРА,ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ" за внимание к работе и её обсуждение, а также В.П. Богатовой за перевод первоисточников с немецкого языка.

[33]Более подробный анализ последствий развития метода неподвижной точки см., например, в [73, п. 5]

[34]Здесь мы не учитываем топологические теоремы о неподвижной точке, полученные в рамках теории ККМ - см. об этом в [74].

[35]При введении в строке поисковой системы, например, Google, словосочетания *fixed point method* в ответах появляются итерационные либо численные методы, опирающиеся на метод неподвижной точки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатов Е. М. Из истории метода неподвижной точки / В сб. Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова (28-31 мая 2018). — Тула, ТГПУ им Л. Н. Толстого, 2018. С. 317-320.
2. Dieudonné J. History of functional analysis. Amsterdam: North-Holland publishing company, 1981. 316 p.
3. Dieudonné J. A history of algebraic and differential topology 1900-1960. Boston: Modern Birkhäuser, 1989. xxi+ 648 p.
4. Brown R.F. Fixed point theory / History of topology. (Ed. I.M. James). Amsterdam: North-Holland publishing company, 1999. pp. 271-299.
5. Park S. Eighty years of the Brouwer fixed point theorem // Antipodal Points and Fixed Points (by J. Jaworowski, W.A. Kirk, and S. Park), Lect. Notes Ser, 1995. Vol. 28. pp. 55-97.
6. Mawhin J. Leray-Schauder Degree: A half century of extension and applications // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1999. Vol. 14. pp. 195–228.
7. Granas A., Dugundji J. Fixed point theory. New York: Springer, Monographs in Mathematics, 2003. — 690 p.
8. Asati A., Singh A., Parihar C. L. 127 Years of fixed point theory - "A Brief Survey of development of fixed point theory"// International Journal Publications of Problems and Applications in Engineering Research. 2013. Vol 4, №. 1. pp. 34-39.
9. Kumar S. A short survey of the development of fixed point heory // Surveys in Mathematics and its Applications. 2013. Vol. 8. pp. 91-101.
10. Badshah V. H., Tiwari V. H., Aheere Dheeraj. A short note on some spaces and fixed point theory // Journal of scientific research in physical & mathematical sciences. 2014. Vol. 1, Issue 1. pp. 1-7.
11. Богатов Е. М. Об истории метода неподвижной точки и вкладе отечественных математиков / В сб. Годичная научная конференция, посвящённая 85-летию ИИЕТ РАН (2017). М.: Янус-К, 2017. С. 121-125.
12. Богатов Е. М. О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 6. в печати.
13. Александров П. С. Пуанкаре и топология // Успехи математических наук. 1972. Т. 27, №. 1 (163). С. 147-158.
14. Brouwer L. E. J. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl // Mathematische Annalen. 1911. Vol. 70. pp. 161-165.
15. Brouwer L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten // Mathematische Annalen. 1912. Vol. 71. pp. 97-115.
16. Босс В. Лекции по математике Том 13. Топология. Изд. 3-е, испр. М.: ЛЕНАНД. 2014. 216 с.

17. Боль, Пирс. Собрание трудов / П. Боль ; Пер. с нем. И.М. Рабиновича; Под ред. Л.Э. Рейзиня; Вступит. статья и коммент. Л.Э. Рейзиня и И.А. Хенинь. Рига : Зинатне, 1974. — 517 с.

18. Hopf H. Abbildungklassen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten // Mathematische Annalen. 1927. Vol. 96, Iss.1 pp. 209–224.

19. Bernkopf M. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory // Archive for History of Exact Sciences. 1966. Vol. 3, pp. 1-96.

20. Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators. Boston: Birkhäuser Basel. 2007. 855 p.

21. Birkhoff G. D., Kellogg O. D. Invariant points in function space // Transactions of the American Mathematical Society. 1922. Vol. 23, pp. 95–115.

22. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals // Fundamenta Mathematicae. 1922. Vol. 3, pp. 133–181.

23. Duda R. Pearls from a Lost City: The Lvov School of Mathematics. Translated by Daniel Davies. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2014. pp. xi + 231.

24. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Mathematische Zeitschrift. 1927. Vol. 26, Issue 1. pp. 47–65.

25. Математика: Наука в СССР за пятнадцать лет (1917-1932). М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 239 с.

26. Schauder J. Bemerkungen zu meiner Arbeit "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalrümen"// Mathematische Zeitschrift. 1927. Vol. 26, Issue 1. pp. 417–431.

27. Schauder J. Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen // Studia Mathematica. 1929. Vol. 1.1, pp. 123–139.

28. Schauder J. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen // Studia Mathematica. 1930. Vol. 2, pp. 171–180.

29. Caccioppoli R. Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 1932. Vol. 3. p. 1–15.

30. Mawhin J. Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations: from successive approximations to topology / Development of Mathematics 1900-1950. Luxembourg, 1992. pp. 443-477.

31. Sbordone, C. Renato Caccioppoli, nel centenario della nascita // Bollettino dell' Unione Matematica Italiana. A. 2004. Vol. 2. p. 193–214.

32. Ingarden, R. S. Juliusz Schauder - personal reminiscences // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1993. Vol. 2, Iss. 1. pp. 1–14.

33. Немыцкий, В. В. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений // Математический сборник. 1934. Т.41, Вып.3. С. 421–452.

34. Немыцкий В. В. Метод неподвижных точек в анализе // Успехи математических наук. 1936. № 1. С. 141–174.

35. Caccioppoli R. Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale // Rendiconti. Accademia Nazionale dei Lincei. 1930. Vol. 11, pp. 794–799.

36. Богатов Е. М. Об истории развития нелинейных интегральных уравнений в СССР. Сильные нелинейности // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. 2017. № 6, Вып. 46. С. 93–106.

37. Красносельский М. А. Два замечания о методе последовательных приближений // Успехи математических наук. 1955. Т. 10, Вып. 1 (63). С. 123–127.

38. Tychonoff A. Ein Fixpunktsatz // Mathematische Annalen. 1935. Vol. 111. pp. 767–776.

39. von Neumann J. On complete topological spaces // Transactions of the American Mathematical Society. 1935. Vol. 37, Iss. 1. pp. 1–20.

40. Köthe G. Stanislaw Mazur's contributions to functional analysis // Mathematische Annalen. 1987. Vol. 277. pp. 489–528.

41. Köthe G., Toeplitz O. Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1934. Vol. 171. pp. 193–226.

42. The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Cafe. R. Daniel Mauldin Ed. Boston: Birkhäuser, 1981. 280 p.

43. Cauty R. Rétractes absolus de voisinage algébriques // Serdica Mathematical Journal. 2005 . Vol. 31, Iss. 4. pp. 309–354.

44. Марков А. А. Некоторые теоремы об абелевых множествах // Доклады Академии Наук СССР. 1936. Т.1 (X), № 8. С. 299–302.

45. Kakutani S. Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets // Proceedings of the Imperial Academy. 1938. Vol. 14, Iss. 7. pp. 242–245.

46. Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н.Н. Боголюбов, Э. Стефенсон, П.Л. Капица и другие // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 69–87.

47. Park S. Ninety years of the Brouwer fixed point theorem // Vietnam Journal of Mathematics. 1999. Vol. 27, Iss. 3. pp. 187–222.

48. Day M. M. Fixed-point theorems for compact convex sets // Illinois Journal of Mathematics. 1961. Vol. 5, Iss. 4. pp. 585–590.

49. Mazur S. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen // Studia Mathematica. 1933. Vol. 4. pp. 70–84.

50. Mazur S. Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält // Studia Mathematica. 1930. Vol. 2.1. pp. 7–9.

51. Krein M. G. and Šmulian V. L. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space // Annals of Mathematics. 1940. Vol. 41. pp. 556–583.

52. Banach S. Théorie des operations linéaires. Monografje Matematyczne, Vol. I. Warszawa. 1932. 231 p.

53. Крейн М.Г., Люстерник Л.А. Функциональный анализ. В сб. Математика в СССР за 30 лет (1917-1947). М.-Л.: Государственное издательство технической литературы. 1948. С. 608–673.

54. Morrison T. J. Functional analysis. An introduction to Banach space theory. New York: John Wiley and Sons. 2001. 376 p.

55. Denkowski Z., Migórski S., Papageorgiou N. S. An introduction to nonlinear analysis: theory. Boston: Kluwer Academic/Plenum Publishers. 2003. 683 p.

56. Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 1934. Vol. 61. pp. 45–73.

57. Лерэй Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения (Применение некоторых топологических методов к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными). Успехи математических наук. 1946. Том 1, Вып. 3-4 (13-14). С. 71–95.

58. Rothe E. Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen // Compositio Mathematica. 1938. Vol. 5. pp. 177-197.

59. Красносельский М.А. Об одном топологическом методе в задаче о собственных функциях нелинейных операторов // Доклады Академии Наук СССР. 1950. Том 74, Вып. 1. С. 5–8.

60. Красносельский М.А. Топологические методы в теории интегральных уравнений. М.: Государственное издательство технической литературы. 1956. 392 с.

61. Красносельский М.А. Некоторые задачи нелинейного анализа // Успехи математических наук. 1954. Том 9, Вып.3 (61). С. 57–114.

62. Borsuk K. Drei Sätze Über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Mathematicae. 1933. Vol. 20.1. pp. 177–190.

63. Matoušek J. Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Berlin: Springer Science & Business Media. 2008. 214 p.

64. Красносельский М.А. Об одном принципе неподвижной точки для вполне непрерывных операторов в функциональных пространствах // Доклады Академии Наук СССР. 1950. Том 73, Вып. 1. С. 13–15.

65. Mawhin J. Jean Leray and nonlinear integral equations: a partially forgotten legacy // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2007 Vol.1, Iss. 2. pp. 159–187.

66. Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Из истории нелинейных интегральных уравнений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, Вып. 2. С. 77–114.

67. Памяти М.А. Красносельского URL: http://www.aha.ru/ amkr/obitrus.html (дата обращения 10.06.18)

68. Институт математики АН УССР. Сост. Митропольский Ю. А.,. Строк В. В.; Отв ред. Митропольский Ю. А. Киев: Наукова думка. 1988. 176 с.

69. Красносельский М. А. Рассмотрение спектра нелинейного оператора в окрестности точки бифуркации и применения к задаче о продольном изгибе сжатого стержня // Успехи математических наук. 1957. Том 12, Вып.1 (73). С. 203–208.

70. Красносельский М.А. Собственные функции нелинейных операторов, асимптотически близких к линейным // Доклады Академии Наук СССР. 1950. Т. 74, Вып. 2. С. 177–179.

71. Mawhin J. Mark A. Krasnosel'skii and nonlinear analysis: a fruitful love story. В сб. Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения. М.: Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН. 2000. С. 80–97.

72. Боголюбов Н. Н. и др. Красносельский Марк Александрович (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1990. Т. 45, Вып. 2 (272). С. 225–227.

73. Bogatov E . M. Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920's-1950's // Antiquitates Mathematicae. 2017. Vol.11, Iss. 1. pp. 131–156.

74. Park S., Tan D. H. Remarks on the Schauder-Tychonoff fixed point theorem // Vietnam Journal of Mathematics. 2000. Vol. 28. Iss. 2. pp. 127–132.

75. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Пер. с нем. М.: Мир. 1969. 448 с.

REFERENCES

1. Dieudonné, J. 1981, “History of functional analysis”, North-Holland publishing company, Amsterdam.

2. Dieudonné, J. 1989. “A history of algebraic and differential topology 1900-1960”, Modern Birkhäuser, Boston.

3. Brown, R.F. 1999 “Fixed point theory” in History of topology. (Ed. I.M. James) North-Holland publishing company, Amsterdam, pp. 271–299.

4. Park, S. 1995,“Eighty years of the Brouwer fixed point theorem” , Antipodal points and fixed points (by J. Jaworowski, W.A. Kirk, and S. Park), Lect. Notes Ser., Vol. 28, pp. 55–97.

5. Mawhin, J. 1999, “Leray-Schauder Degree: A half century of extension and applications”, *Topol. Meth. Nonlin. Anal.*, Vol. 14, pp. 195–228.

6. Granas A., Dugundji J. 2003, “Fixed point theory”, Springer, New York.

7. Asati, A., Singh, A., Parihar, C. L. 2013, “127 Years of fixed point theory - "A Brief Survey of development of fixed point theory“', *IJPaper*, Vol 4, no. 1, pp. 34–39.

8. Kumar, S. 2013,“A Short Survey of the Development of Fixed Point Theory”, *Surv. Math. Appl.*, Vol. 8, pp. 91–101.

9. Badshah, V. H., Tiwari, V. H., Aheere, Dheeraj. 2014, “A short note on some spaces and fixed point theory”, *J. Sci. Res. Phys. Math. Sci.*, Vol. 1, no 1, pp. 1-7.

10. Bogatov, E.M. 2017, “On the history of the method of a fixed point and the contribution of domestic mathematicians”, Trudy godichnoi nauchnoi konferencii, posvyatshennoi 850letiyu IIET RAN

(Proc. Annual scientific conference dedicated to the 85th anniversary of the INHT RAS), Moscow, pp. 121–125.

11. Bogatov, E.M. 2018,“On the development of qualitative methods for nonlinear equations solving and some consequences”, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, Vol. 23, no 6. to appear.

12. Aleksandrov, P. S. 1972,“Poincaré and topology”, *Russian Math. Surveys*, Vol. 27, no 1, pp. 157—168.

13. Brouwer, L. E. J. 1911, “Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl”, *Math. Annalen*, Vol. 70, pp. 161–165.

14. Brouwer, L. E. J. 1912, “Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten”, *Math. Annalen*, Vol. 71, pp. 97–115.

15. Boss, V. 2014, “Lectures on mathematics. Volume 13. Topology”(in Russian), 3-d ed., LENAND, Moscow , 216 p.

16. Bohl, Piers. 1974, “Collection of works”, Trans. from the German I.M. Rabinovich; Ed. L.E. Reizihn; Introd. article and comment. L.E. Reizihn and I.A. Henihn (in Russian), *Latvia Acad. of Sciences, Inst. of Physics, Latv. Department of the All-Union Astronomical Geodes. society*, *Zinatne*, Riga, 517 p.

17. Hopf, H. 1927, “Abbildungklassen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten”, *Math. Annalen*, Vol. 96, no.1, pp. 209–224.

18. Bernkopf, M. 1966, “The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory”, *Arch. Hist. Exact Sci.*, Vol. 3, pp. 1–96.

19. Pietsch, A. 2007, “History of Banach spaces and linear operators”, *Birkhäuser Basel*, Boston, 855 p.

20. Birkhoff, G. D., Kellogg, O. D. 1922, “Invariant points in function space”, *Trans. Am. Math Soc.*, Vol. 23, pp. 95–115.

21. Banach, S. 1922, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals”, *Fund. Math.*, Vol. 3, pp. 133–181.

22. Duda, R. 2014, “Pearls from a Lost City: The Lvov School of Mathematics. Translated by Daniel Davies”, *AMS*, Providence, R.I., pp. xi + 231.

23. Schauder, J. 1927, “Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen”, *Math. Zeitschrift*, Vol. 26, no 1, pp. 47–65.

24. “Mathematics: Science in the USSR for fifteen years (1917-1932)” (in Russian). 1932, *GTTI*, Moscow-Leningrad, 239 p.

25. Schauder J. 1927, “Bemerkungen zu meiner Arbeit "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalrümen“’, *Math. Zeitschrift*, Vol. 26, no 1. pp. 417–431.

26. Schauder, J. 1929,“Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen”, *Studia Math.*, Vol. 1.1, pp. 123–139.

27. Schauder, J. 1930, “Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen”, *Studia Math.*, Vol. 2, pp. 171–180.

28. Caccioppoli, R. 1932, “Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni”, *Rend. Sem. Mat. Padova*, Vol. 3, p. 1–15.

29. Mawhin, J. 1992, "Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations: from successive approximations to topology", Development of Mathematics 1900-1950. Luxembourg, pp. 443–477.

30. Sbordone, C. 2004, "Renato Caccioppoli, nel centenario della nascita", *BUMI, Ser. A*, Vol. 2, pp. 193–214.

31. Ingarden R. S. 1993, "Juliusz Schauder - personal reminiscences", *TMNA*, Vol. 2, no. 1, pp. 1–14.

32. Niemytzki, V. 1934, "Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions de quelques équations intégrales non-linéaires", *Mat. Sb.*, Vol. 41, no 3, pp. 421–452.

33. Niemytzki, V.V. 1936, "Fixed-point method in analysis", *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 1, pp. 141–174.

34. Caccioppoli R. 1930. "Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale", *Rend. Acc. Naz. Lincei*, Vol. 11, pp. 794–799.

35. Bogatov, E.M., 2017. "About the history of development of nonlinear integral equations in the USSR. Strong nonlinearities", *Belgorod State University Sci. Bull. Math. Phys.*, Vol. 6, no 46, pp. 93–106 (in Russian).

36. Krasnosel'skii, M. A., 1955. "Two remarks on the method of successive approximations", *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 10, no 1(63), pp. 123–127.

37. Tychonoff, A. 1935, "Ein Fixpunktsatz", *Math. Annalen*, Vol. 111, pp. 767–776.

38. von Neumann, J. 1935, "On complete topological spaces", *Trans. Am. Math Soc.*, Vol. 37, no. 1, pp. 1–20.

39. Köthe, G. 1987, "Stanislaw Mazur's contributions to functional analysis", *Math. Annalen*, Vol. 277, pp. 489–528.

40. Köthe, G., Toeplitz, O. 1934, "Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen", *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 171, pp. 193–226.

41. "The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Cafe." R. Daniel Mauldin Ed. 1981, *Birkhäuser*, Boston, 280 p.

42. Cauty, R. 2005, "Rétractes absolus de voisinage algébriques", *Serdica Math. J.*, Vol. 31, no. 4, pp. 309–354.

43. Markov, A. A. 1936, "Some theorems on Abelian sets", *DAN SSSR*, Vol.1 (X), no. 8, pp. 299–302.

44. Kakutani, S. 1938, "Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets", *Proc. Imperial Academy*, Vol. 14, no. 7, pp. 242–245.

45. Bogatov, E.M., Mukhin, R.R. 2017, "The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others", *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, Vol. 25, no. 5, pp. 69–87.

46. Park, S. 1999, "Ninety years of the Brouwer fixed point theorem", *Vietnam J. Math.*, Vol. 27, no. 3, pp. 187–222.

47. Day, M. M. 1961, “Fixed-point theorems for compact convex sets”, *Illinois J. Math.*, Vol. 5, no. 4, pp. 585–590.

48. Mazur, S. 1933, “Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen”, *Studia Math.*, Vol. 4, pp. 70–84.

49. Mazur, S. 1930, “Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält”, *Studia Math.*, Vol. 2.1, pp. 7–9.

50. Krein, M. G. and Šmulian, V. L. 1940, “On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space”, *Annals of Math.*, Vol. 41, pp. 556–583.

51. Banach, S. 1932, “Théorie des operations linéaires”, *Monografje Matematyczne*, Vol. I, Warszawa, 231 p.

52. Krein, M. G., Lyusternik, L.A. 1948, “Functional analysis. In coll. Mathematics in the USSR for 30 years. (1917-1947)”, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, pp. 608–673.

53. Morrison, T. J. 2001, “Functional analysis. An introduction to Banach space theory”, *John Wiley and Sons*, New York, 376 p.

54. Denkowski, Z., Migórski, S., Papageorgiou, N. S. 2003, “An introduction to nonlinear analysis: theory”, *Kluwer Academic/Plenum Publishers*, Boston, 683 p.

55. Leray, J., Schauder, J. 1934, “Topologie et équations fonctionnelles”, *Ann. Sci. l’École Norm. Sup.*, Vol. 61, pp. 45–73.

56. Leray, J., Schauder, J. 1946, “Topology and functional equations”, *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol.1, no. 3-4(13-14), pp. 71—95.

57. Rothe, E. 1938, “Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen”, *Compositio Math.*, Vol. 5, pp. 177–197.

58. Krasnosel’skii, M. A. 1950, “On a topological method in the problem of eigenfunctions of nonlinear operators”, *DAN SSSR*, Vol. 74, no. 1, pp. 5–8.

59. Krasnosel’skii, M. A. 1964, “Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations”. Pergamon, Oxford, 395 p.

60. Krasnosel’skii, M. A. 1954, “Some problems of nonlinear analysis”, *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol.9, no. 3(61), pp. 57–114.

61. Borsuk, K. 1933, “Drei Sätze Über die n-dimensionale euklidische Sphäre”, *Fund. Math.*, Vol. 20.1, pp. 177–190.

62. Matoušek J. 2008, “Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry”, *Springer Science and Business Media*, Berlin, 214 p.

63. Krasnosel’skii, M. A. 1950, “On a fixed-point principle for completely continuous operators in function spaces”, *DAN SSSR*, Vol. 73, no. 1, pp. 13–15.

64. Mawhin, J. 2007, “Jean Leray and nonlinear integral equations: a partially forgotten legacy”, *JFPTA*, Vol.1, no. 2, pp. 159–187.

65. Bogatov E.M., Mukhin R.R. 2016, “About the history of nonlinear integral equations”, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, Vol. 24, no. 2, pp. 77–114.

66. “In memory of M.A. Krasnosel’skii”, 2018, Available at http://www.aha.ru/ amkr/obitrus.html (accessed 10 June 2018).

67. “Institute of Mathematics of the Ukrainian Academy of Sciences”. 1988, Compilers Mitropol’skii Yu. A.,. Strok V.V .; Ed. Mitropol’skii Yu.A.- *Naukova Dumka*, Kiev, 176 p.

68. Krasnosel’skii, M. A. 1957, “Study of the spectrum of a nonlinear operator in the neighborhood of a point of bifurcation and applications to the problem of longitudinal bending of a compressed rod”, *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 12, no.1(73), pp. 203—208.

69. Krasnosel’skii, M. A. 1950, “The eigenfunctions of nonlinear operators asymptotically close to linear operators”, *DAN SSSR*, Vol. 74, no. 2, pp. 177–179.

70. Mawhin, J. 2000, “Mark A. Krasnosel’skii and nonlinear analysis: a fruitful love story ”, In coll. Mark Mark Aleksandrovich Krasnose’lskii. To the 80th anniversary of his birth. Digest of articles, *IITP RAS*, pp.80–97.

71. Bogolyubov, N. N. and others. 1990, “Mark Alexandrovich Krasnosel’skii (on his seventieth birthday)”, *Russian Math. Surveys*, Vol.45, no.2, pp. 231-–234.

72. Bogatov, E . M. 2017, “Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920’s-1950’s”, *Antiquitates Math.*, Vol.11, no. 1, pp. 131–156.

73. Park, S., Tan, D. H. 2000, “Remarks on the Schauder-Tychonoff fixed point theorem”, *Vietnam J. Math.*, Vol. 28, no. 2, pp. 127–132.

74. Collatz, L. 2013, “Funktionalanalysis und numerische Mathematik”, Springer-Verlag, Berlin, 371 p.