

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 1

УДК 519.68:159.955

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-73-91

КОМПЬЮТЕРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ
О ЦЕНТРОИДАХ¹

А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

В данной статье дается доказательство “гипотезы о центроидах”, выдвинутой в работе “Экспериментальное обоснование гипотез в *GeoGebra*” и опубликованной в текущем номере “Чебышевского сборника”. Формулируется эта гипотеза так: “Пусть в невырожденном треугольнике из каждой вершины проведены медианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что их центроиды лежат на одном эллипсе”. Доказательство гипотезы проводится с опорой на символьные вычисления, реализованные в пяти пакетах компьютерной математики *GeoGebra*, *Mathcad Prime*, *Maxima*, *Maple* и *Mathematica* [2-8]. Использование различных систем символьных вычислений для решения одной задачи позволяет получить наглядный материал для сравнительной оценки возможностей этих систем. В завершающей части статьи предлагается к рассмотрению другое утверждение — “гипотеза о центрах описанных окружностей”. Формулируется она так: “Пусть три чевианы пересекаются внутри остроугольного треугольника в центре описанной окружности. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что центры их описанных окружностей лежат на одном эллипсе”. Данная гипотеза была выдвинута и получила экспериментальное подтверждение с помощью динамической модели, построенной в *GeoGebra*.

Ключевые слова: *GeoGebra*, динамическая модель, коническое сечение, центроид, *Mathcad Prime*, *Maxima*, *Mathematica*, *Maple*.

Библиография: 12 названий.

A COMPUTER PROOF OF THE HYPOTHESIS ABOUT
OF CENTROIDS

A. R. Esayan, N. N. Dobrovolsky (Tula)

Abstract

This article provides a proof of the “hypothesis about of centroids”, which is given in the “Experimental validation of hypotheses in *GeoGebra*” and published in the current issue of the “Chebyshevskiy sbornik”. This hypothesis is formulated as follows: “Let are a non-degenerate triangle from each vertex held the median. Then the original triangle is split into six triangles without common interior points so that their centroids lie on the same ellipse”. The proof of the hypothesis is based on symbolic computation, implemented in five packages of computer mathematics *GeoGebra*, *Mathcad Prime*, *Maxima*, *Maple* and *Mathematica* [2-8]. The use of different systems of symbolic computation for solving a problem allows to obtain visual material for comparative assessment of these systems. In the final part of the article offers to consider another statement — “the hypothesis about of circumcenters”. It is formulated so: “Let the three

¹Работа выполнена в рамках государственного задания ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» на 2017-2019 годы (№27.6122.2017/БЧ) при поддержке гранта РФФИ № 16-41-710194 п_а.

cevian intersect inside acute-angled triangle in the circumcenter. Then the original triangle is split into six triangles without common interior points so that their circumcenters lie on the same ellipse". This hypothesis was proposed and confirmed experimentally, using a dynamic model constructed in GeoGebra.

Keywords: GeoGebra, dynamic model, conic, centroid, Mathcad Prime, Maxima, Mathematica, Maple.

Bibliography: 12 titles.

1. Введение

В статье [12] приведено несколько гипотез, связанных с расположением определенных точек треугольника на той или иной конике. Выдвинуты они были, вероятно, на основе экспериментов с моделями в одной из систем динамической математики типа *GeoGebra*. В статье [11] говорится о том, что не все приведенные в [12] гипотезы справедливы, но для одной из них, а именно "гипотезе об инцентрах", приводится компьютерное доказательство с использованием символьных вычислений в системе *Maple*. В статье "Экспериментальное обоснование гипотез в *GeoGebra*", опубликованной в текущем номере "Чебышевского сборника", выдвинута серия новых гипотез, связанных с расположением некоторых треугольных центров на той или иной конике. В этой статье, как выдвижение гипотез, так и их экспериментальное обоснование реализуются на тех же самых динамических моделях. Среди выдвинутых гипотез имеется и "гипотеза о центроидах" (Ж6), которая формулируется следующим образом. "Пусть в невырожденном треугольнике из каждой вершины проведены медианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что их центроиды лежат на одном эллипсе". В данной статье приводится доказательство этой гипотезы с использованием символьных вычислений, причем в нескольких системах компьютерной математики: *GeoGebra*, *Mathcad Prime*, *Maxima*, *Maple* и *Mathematica* [2-8]. Использование различных систем символьных вычислений для решения одной задачи, во-первых, уменьшает риск возможной ошибки, а во-вторых позволяет получить наглядный материал для сравнительной оценки возможностей этих систем.

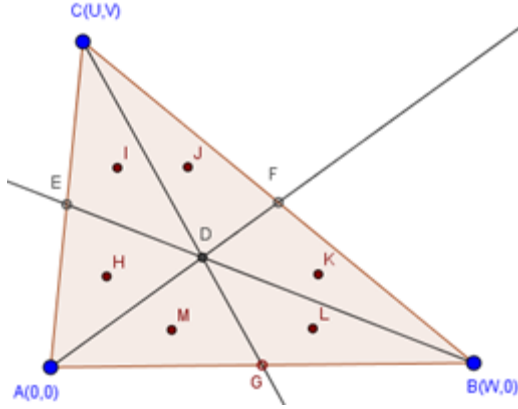
2. Схема доказательства гипотезы Ж6

Доказательство сформулированной выше гипотезы о центроидах было проведено с использованием символьных вычислений, причем в нескольких системах компьютерной математики: *GeoGebra*, *Mathcad Prime*, *Maxima*, *Maple* и *Mathematica* [2-8]. Во всех случаях эти вычисления привели к одному и тому же результату – подтверждению гипотезы, что и позволяет переформулировать ее в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Теорема об центроидах. Пусть в невырожденном треугольнике из каждой вершины проведены медианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что их центроиды лежат на одном эллипсе.

Схема доказательства. Обозначим через D точку пересечения трех медиан $\triangle ABC$ и через E , F и G – основания этих медиан. Далее, пусть H , I , J , K , L и M – точки пересечения медиан в полученных $\triangle DAE$, $\triangle DEC$, $\triangle BCF$, $\triangle DFB$, $\triangle DBG$ и $\triangle DGA$, то есть их центроиды. Доказательство теоремы может быть проведено по следующей схеме. Пусть x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , x_3 и y_3 – координаты вершин исходного треугольника: $A=A(x_1, y_1)$, $B=B(x_2, y_2)$ и $C=C(x_3, y_3)$. Тогда координаты центроидов H , I , J , K , L и M могут быть вычислены через эти координаты, то есть они зависят от шести параметров. Дальнейшая работа с величинами, связанными с шестью параметрами, представляется не совсем простой и, по крайней мере, весьма громоздкой.

Однако при проведении доказательства теоремы можно считать выполненными такие условия. Вершина A расположена в начале координат, то есть имеет координаты $A(0, 0)$. Этого всегда можно добиться преобразованием параллельного переноса. Сторона AB $\triangle ABC$ расположена на положительном направлении оси абсцисс, то есть вершина B имеет координаты $B(W, 0)$. Этого всегда можно добиться преобразованием поворота. Далее, пусть координаты вершины $C = C(U, V)$. Таким образом, можно считать, что координаты центроидов задаются выражениями, зависящими всего лишь от трех параметров U , V и W (см. рис. 1). При этом из невырожденности исходного треугольника следует, что $W \neq 0$ и $V \neq 0$.



$$D = D\left(\frac{U+W}{3}, \frac{V}{3}\right);$$

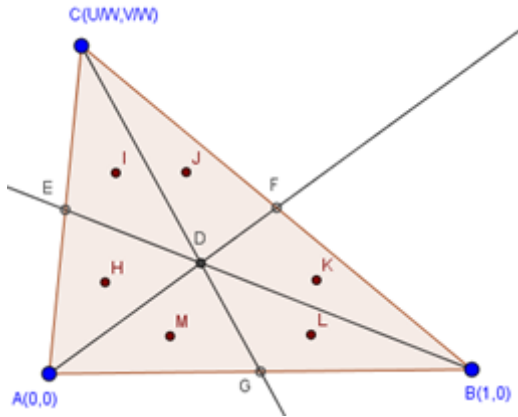
$$H = H\left(\frac{5U+2W}{18}, \frac{5V}{18}\right), \quad K = K\left(\frac{5U+11W}{18}, \frac{5V}{18}\right),$$

$$I = I\left(\frac{11U+2W}{18}, \frac{11V}{18}\right), \quad L = L\left(\frac{2U+11W}{18}, \frac{V}{9}\right),$$

$$J = J\left(\frac{11U+5W}{18}, \frac{11V}{18}\right), \quad M = M\left(\frac{2U+5W}{18}, \frac{V}{9}\right).$$

Рис. 1: Координаты центроидов $\triangle DAE$, $\triangle DEC$, $\triangle DCF$, $\triangle DFB$, $\triangle DBG$ и $\triangle DGA$

Теперь уже можно было бы приступить к доказательству теоремы, но мы попробуем избавиться еще от одного из параметров. Предположим, что удалось установить справедливость теоремы для любых треугольников с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и $C(x_3, y_3)$, то есть для случая двух параметров. Но тогда она справедлива и для треугольников с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и $C(U/W, U/W)$ при любых U , V , W ($W \neq 0$). Этот случай демонстрируется слева на рис. 2, а справа от него выписаны координаты всех центроидов рассматриваемых треугольников.



$$D = D\left(\frac{U+W}{3W}, \frac{V}{3W}\right);$$

$$H = H\left(\frac{5U+2W}{18W}, \frac{5V}{18W}\right), \quad K = K\left(\frac{5U+11W}{18W}, \frac{5V}{18W}\right),$$

$$I = I\left(\frac{11U+2W}{18W}, \frac{11V}{18W}\right), \quad L = L\left(\frac{2U+11W}{18W}, \frac{V}{9W}\right),$$

$$J = J\left(\frac{11U+5W}{18W}, \frac{11V}{18W}\right), \quad M = M\left(\frac{2U+5W}{18W}, \frac{V}{9W}\right).$$

Рис. 2: Координаты центроидов $\triangle DAE$, $\triangle DEC$, $\triangle DCF$, $\triangle DFB$, $\triangle DBG$ и $\triangle DGA$

Иными словами, существует нетривиальный набор действительных числовых значений a , b , c , d , e и f таких, что центроиды H , I , J , K , L и M , показанные справа на рис. 2, лежат на конике

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y - f = 0 \quad (1)$$

и, кроме того, этой коникой является эллипс. Подставляя в (1) координаты точек H , I , J , K , L и M , получим:

$$\begin{cases} a \cdot \left(\frac{5U+2W}{18W}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{5U+2W}{18W}\right) \cdot \left(\frac{5V}{18W}\right) + c \cdot \left(\frac{5V}{18W}\right)^2 + d \cdot \left(\frac{5U+2W}{18W}\right) + e \cdot \left(\frac{5V}{18W}\right) - f = 0, \\ \dots \dots \dots \\ a \cdot \left(\frac{2U+5W}{18W}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{2U+5W}{18W}\right) \cdot \left(\frac{2V}{18W}\right) + c \cdot \left(\frac{2V}{18W}\right)^2 + d \cdot \left(\frac{2U+5W}{18W}\right) + e \cdot \left(\frac{2V}{18W}\right) - f = 0. \end{cases}$$

Эти соотношения можно переписать в виде:

$$\begin{cases} a \cdot \left(\frac{5U+2W}{18}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{5U+2W}{18}\right) \cdot \left(\frac{5V}{18}\right) + c \cdot \left(\frac{5V}{18}\right)^2 + d_1 \cdot \left(\frac{5U+2W}{18}\right) + e_1 \cdot \left(\frac{5V}{18}\right) - f_1 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ a \cdot \left(\frac{2U+5W}{18}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{2U+5W}{18}\right) \cdot \left(\frac{2V}{18}\right) + c \cdot \left(\frac{2V}{18}\right)^2 + d_1 \cdot \left(\frac{2U+5W}{18}\right) + e_1 \cdot \left(\frac{2V}{18}\right) - f_1 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $d_1 = d \cdot W$, $e_1 = e \cdot W$, $f_1 = f \cdot W^2$. Но это означает, что центроиды, показанные на рис. 1, лежат на конике

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d_1 \cdot x + e_1 \cdot y - f_1 = 0. \quad (3)$$

Остается показать, что коника (3), как и (1), задает эллипс. Пусть $\det$ – функция вычисления определителя матрицы. В соответствии с [9, с. 41] тип коники (1) определяется инвариантами:

$$S = a + c, \quad \delta = \det \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}, \quad \Delta = \det \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & -f \end{bmatrix}, \quad (4)$$

а тип коники (3) – инвариантами:

$$S_1 = a + c, \quad \delta_1 = \det \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \det \begin{bmatrix} a & b/2 & d \cdot W/2 \\ b/2 & c & e \cdot W/2 \\ d \cdot W/2 & e \cdot W/2 & -f \cdot W^2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что $S_1 = S$, $\delta_1 = \delta$, $\Delta_1 = \Delta \cdot W^2$. Далее, поскольку (1) эллипс, то $\delta > 0$, $\Delta \cdot S < 0$ [9, с. 41], но тогда $\delta_1 > 0$, $\Delta_1 \cdot S_1 < 0$, то есть (3) – также эллипс, что и требовалось установить.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай с двумя параметрами, представленный на рис. 2 при $W=1$. И можно приступать к символьным расчетам в различных упомянутых выше системах компьютерной математики.

3. Доказательство гипотезы №6 в GeoGebra

Система GeoGebra (ver. 5.0.231.0). В *GeoGebra*-документе, показанном на рис. 3, приведены все необходимые символьные вычисления, связанные с компьютерным доказательством теоремы о центроидах. Реализуются они в редакторе *CAS – Computer Algebra System* и сводятся к следующим действиям:

1-7) выписывается матрица de коэффициентов системы (2) при $W=1$;

8) подсчитывается определитель системы (2), то есть $Determinant[de]$. Он оказывается равным нулю и, следовательно, линейная однородная система имеет нетривиальное решение;

9-16) для системы уравнений, полученной из (2) при $d=-1$ удалением четвертого уравнения и перенесением свободных членов в правую часть формируются матрица коэффициентов ms и вектор свободных bs ;

17) подсчитывается определитель и ранг ms . Поскольку ΔABC – невырожденный, то параметр $V \neq 0$ и, следовательно, $Determinant[ms] = -V^4/1296 \neq 0$. Следовательно “усеченная” система уравнений $ms.x=bs$ имеет и притом единственное решение;

18-20) найти решение системы $ms.x=bs$ с помощью встроенной функции $Solve$ не удастся. Поэтому, сначала для ms находится обратная матрица $mi = Invert[ms]$, проверяется правильность вычислений, а затем по mi отыскивается решение $sol = mi*bs$;

21-27) из векторной записи решения sol формируются значения для переменных a, b, c, e и f ($d=-1$);

28-33) по найденным коэффициентам определяются инварианты (1);

$$S = \frac{3}{4V^2}, \quad \delta = -\frac{7}{144V^2}, \quad \Delta = -7 \cdot \frac{U^2 + V^2 - U + 1}{144};$$

34) поскольку $V \neq 0$ и $U^2 - U + 1 = (U - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, то $\delta > 0$, $\Delta.S < 0$ и, следовательно, построенная коника является эллипсом, что и требовалось доказать.

1	f1:((5*U+2)^2/18^2, (5*U+2)*5*V/18^2, (5*V)^2/18^2, (5*U+2)/18, 5*V/18, -1);
2	f2:((11*U+2)^2/18^2, (11*U+2)*11*V/18^2, (11*V)^2/18^2, (11*U+2)/18, 11*V/18, -1);
3	f3:((11*U+5)^2/18^2, (11*U+5)*11*V/18^2, (11*V)^2/18^2, (11*U+5)/18, 11*V/18, -1);
4	f4:((5*U+11)^2/18^2, (5*U+11)*5*V/18^2, (5*V)^2/18^2, (5*U+11)/18, 5*V/18, -1);
5	f5:((2*U+11)^2/18^2, (2*U+11)*2*V/18^2, (2*V)^2/18^2, (2*U+11)/18, 2*V/18, -1);
6	f6:((2*U+5)^2/18^2, (2*U+5)*2*V/18^2, (2*V)^2/18^2, (2*U+5)/18, 2*V/18, -1);
7	de:{f1,f2,f3,f4,f5,f6} $\rightarrow de := \begin{pmatrix} \frac{1}{324} (5U+2)^2 & \frac{5}{324} V(5U+2) & \frac{1}{324} (5V)^2 & \frac{1}{18} (5U+2) & \frac{5}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (11U+2)^2 & \frac{11}{324} V(11U+2) & \frac{1}{324} (11V)^2 & \frac{1}{18} (11U+2) & \frac{11}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (11U+5)^2 & \frac{11}{324} V(11U+5) & \frac{1}{324} (11V)^2 & \frac{1}{18} (11U+5) & \frac{11}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (5U+11)^2 & \frac{5}{324} V(5U+11) & \frac{1}{324} (5V)^2 & \frac{1}{18} (5U+11) & \frac{5}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (2U+11)^2 & \frac{1}{162} V(2U+11) & \frac{1}{324} (2V)^2 & \frac{1}{18} (2U+11) & \frac{1}{9} V & -1 \\ \frac{1}{324} (2U+5)^2 & \frac{1}{162} V(2U+5) & \frac{1}{324} (2V)^2 & \frac{1}{18} (2U+5) & \frac{1}{9} V & -1 \end{pmatrix}$
8	Determinant[de] $\rightarrow 0$

9	$e1:((5*U+2)^2/18^2, (5*U+2)*5*V/18^2, (5*V)^2/18^2, 5*V/18, -1);$
10	$e2:((11*U+2)^2/18^2, (11*U+2)*11*V/18^2, (11*V)^2/18^2, 11*V/18, -1);$
11	$e3:((11*U+5)^2/18^2, (11*U+5)*11*V/18^2, (11*V)^2/18^2, 11*V/18, -1);$
12	$e4:((2*U+11)^2/18^2, (2*U+11)*2*V/18^2, (2*V)^2/18^2, 2*V/18, -1);$
13	$e5:((2*U+5)^2/18^2, (2*U+5)*2*V/18^2, (2*V)^2/18^2, 2*V/18, -1);$
14	$bs:((5*U+2)/18, (11*U+2)/18, (11*U+5)/18, (2*U+11)/18, (2*U+5)/18);$
15	$ms: \{e1, e2, e3, e4, e5\}$ $\rightarrow ms := \begin{pmatrix} \frac{1}{324} (5U+2)^2 & \frac{5}{324} V (5U+2) & \frac{1}{324} (5V)^2 & \frac{5}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (11U+2)^2 & \frac{11}{324} V (11U+2) & \frac{1}{324} (11V)^2 & \frac{11}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (11U+5)^2 & \frac{11}{324} V (11U+5) & \frac{1}{324} (11V)^2 & \frac{11}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (2U+11)^2 & \frac{1}{162} V (2U+11) & \frac{1}{324} (2V)^2 & \frac{1}{9} V & -1 \\ \frac{1}{324} (2U+5)^2 & \frac{1}{162} V (2U+5) & \frac{1}{324} (2V)^2 & \frac{1}{9} V & -1 \end{pmatrix}$
16	bs $\rightarrow \left\{ \frac{5}{18} U + \frac{1}{9}, \frac{11}{18} U + \frac{1}{9}, \frac{11}{18} U + \frac{5}{18}, \frac{1}{9} U + \frac{11}{18}, \frac{1}{9} U + \frac{5}{18} \right\}$
17	$\{Determinant[ms], MatrixRank[ms]\}$ $\rightarrow \left\{ -\frac{1}{1296} V^4, 5 \right\}$
18	$mi: Invert[ms]$ $\rightarrow mi := \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & \frac{-8U-32}{3V} & \frac{8U+32}{3V} & \frac{-22U-7}{3V} & \frac{22U+7}{3V} \\ -\frac{18}{V^2} & \frac{4U^2+32U+22}{3V^2} & \frac{-4U^2-32U-4}{3V^2} & \frac{11U^2+7U-7}{3V^2} & \frac{-11U^2-7U+43}{3V^2} \\ \frac{13}{V} & -\frac{7}{3V} & 0 & \frac{7}{3V} & -\frac{13}{V} \\ \frac{11}{9} & -\frac{32}{81} & \frac{17}{81} & \frac{143}{324} & -\frac{803}{324} \end{pmatrix}$
19	$mi*ms$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20	sol:mi*bs → $\text{sol} := \left\{ 1, \frac{-2U+1}{V}, \frac{U^2-U+1}{V^2}, \frac{U-1}{V}, -\frac{29}{108} \right\}$
21	a:Element{sol,1};
22	b:Element{sol,2};
23	c:Element{sol,3};
24	d:-1;
25	e:Element{sol,4};
26	f:Element{sol,5};
27	{a,b,c,d,e,f} → $\left\{ 1, \frac{-2U+1}{V}, \frac{U^2-U+1}{V^2}, -1, \frac{U-1}{V}, -\frac{29}{108} \right\}$
28	S:a+c;
29	m1:{{a,b/2},{b/2,c}};
30	m2:{{a,b/2,d/2},{b/2,c,e/2},{d/2,e/2,-f}};
31	{S,m1,m2} → $\left\{ \frac{U^2-U+1}{V^2} + 1, \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2U+1}{2V} \\ \frac{-2U+1}{2V} & \frac{U^2-U+1}{V^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2U+1}{2V} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-2U+1}{2V} & \frac{U^2-U+1}{V^2} & \frac{U-1}{2V} \\ -\frac{1}{2} & \frac{U-1}{2V} & \frac{29}{108} \end{pmatrix} \right\}$
32	δ:Determinant{m1};
33	Δ:Determinant{m2};
34	SΔ:S*Δ;
35	{δ, Δ, Factor{SΔ}} → $\left\{ \frac{3}{4V^2}, -\frac{7}{144V^2}, -7 \cdot \frac{U^2+V^2-U+1}{144V^4} \right\}$
36	{δ>0,SΔ<0} → {true, true}

Рис. 3: Код доказательства теоремы об центроидах в системе *GeoGebra*

4. Доказательство гипотезы $\mathfrak{R6}$ в Mathcad Prime

Система Mathcad Prime(ver. 3.1). В *Mathcad*-документе, показанном на рис. 4, реализованы все необходимые символьные вычисления, связанные с компьютерным доказательством теоремы о центроидах. И сводятся они к следующим действиям. В пунктах 1 и 2 выписывается матрица ma коэффициентов системы (2) и для нее символьно подсчитывается определитель и ранг. Поскольку определитель оказался равным нулю, то нетривиальное решение системы (2) существует и все центроиды H, I, J, K, L и M действительно лежат на одной конике. Но при ранге ma , равном 5, одно из неизвестных можно считать свободным, например, $d=-1$, а для нахождения остальных неизвестных a, b, c, e и f выделить из (2) систему пяти уравнений. Сделать это можно удалением из (2) четвертого уравнения и перенесением четвертого столбца в правую часть.

1. Матрица системы уравнений (1)

$$ma := \begin{bmatrix} \left(\frac{5 \cdot U + 2}{18}\right)^2 & \left(\frac{5 \cdot U + 2}{18}\right) \cdot \left(\frac{5 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{5 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{5 \cdot U + 2}{18} & \frac{5 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{11 \cdot U + 2}{18}\right)^2 & \left(\frac{11 \cdot U + 2}{18}\right) \cdot \left(\frac{11 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{11 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{11 \cdot U + 2}{18} & \frac{11 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{11 \cdot U + 5}{18}\right)^2 & \left(\frac{11 \cdot U + 5}{18}\right) \cdot \left(\frac{11 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{11 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{11 \cdot U + 5}{18} & \frac{11 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{5 \cdot U + 11}{18}\right)^2 & \left(\frac{5 \cdot U + 11}{18}\right) \cdot \left(\frac{5 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{5 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{5 \cdot U + 11}{18} & \frac{5 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{2 \cdot U + 11}{18}\right)^2 & \left(\frac{2 \cdot U + 11}{18}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{2 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{2 \cdot U + 11}{18} & \frac{2 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{2 \cdot U + 5}{18}\right)^2 & \left(\frac{2 \cdot U + 5}{18}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{2 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{2 \cdot U + 5}{18} & \frac{2 \cdot V}{18} & -1 \end{bmatrix}$$

2. Символьное вычисление определителя матрицы ma и ее ранга

$$\det(ma) \rightarrow 0$$

$$\text{rank}(ma) \rightarrow 5$$

Поскольку для дальнейших вычислений достаточно иметь лишь матрицу коэффициентов полученной системы – ms и столбец ее свободных членов – bs , то именно они и выписаны в пункте 3 документа.

Далее, в пункте 4 подсчитан определитель и ранг матрицы ms : $\det(ms) = -V^4/1296$ и $\text{rank}(ms)=5$. Из невырожденности исходного $\triangle ABC$ вытекает, что $V \neq 0$ и, следовательно, $\det(ms) \neq 0$. Таким образом, система $ms \cdot x = bs$ имеет единственное решение, которое и находится с помощью встроенной функции $lsolve(ms, bs)$. В результате получаем значения для a, b, c, e и f ($d=-1$), выраженные через параметры U и V .

Наконец в пункте 5 документа проводятся все завершающие вычисления, а именно, символьно вычисляются инварианты S, δ и Δ и устанавливается, что $\delta > 0$ и $S \cdot \Delta < 0$. А значит проведенная коника является эллипсом, что и требовалось доказать.

3. Поскольку ΔABC невырожденный, то $V \neq 0$. Пусть $d = -1$. Найдём остальные коэффициенты коники из системы с матрицей ms и свободным членом bs :

$$ms := \begin{bmatrix} \left(\frac{5 \cdot U + 2}{18}\right)^2 & \left(\frac{5 \cdot U + 2}{18}\right) \cdot \left(\frac{5 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{5 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{5 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{11 \cdot U + 2}{18}\right)^2 & \left(\frac{11 \cdot U + 2}{18}\right) \cdot \left(\frac{11 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{11 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{11 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{11 \cdot U + 5}{18}\right)^2 & \left(\frac{11 \cdot U + 5}{18}\right) \cdot \left(\frac{11 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{11 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{11 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{2 \cdot U + 11}{18}\right)^2 & \left(\frac{2 \cdot U + 11}{18}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{2 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{2 \cdot V}{18} & -1 \\ \left(\frac{2 \cdot U + 5}{18}\right)^2 & \left(\frac{2 \cdot U + 5}{18}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot V}{18}\right) & \left(\frac{2 \cdot V}{18}\right)^2 & \frac{2 \cdot V}{18} & -1 \end{bmatrix} \quad bs := \begin{bmatrix} \frac{5 \cdot U + 2}{18} \\ \frac{11 \cdot U + 2}{18} \\ \frac{11 \cdot U + 5}{18} \\ \frac{2 \cdot U + 11}{18} \\ \frac{2 \cdot U + 5}{18} \end{bmatrix}$$

4. $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ e \\ f \end{bmatrix} := \text{lsolve}(ms, bs) \xrightarrow{\text{simplify}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2 \cdot U - 1}{V} \\ \frac{U^2 - U + 1}{V^2} \\ \frac{U - 1}{V} \\ -\frac{29}{108} \end{bmatrix}$ $\det(ms) \xrightarrow{\text{factor}} -\frac{V^4}{1296}$
 $\text{rank}(ms) \rightarrow 5$
 $a \rightarrow 1$ $b \rightarrow -\frac{2 \cdot U - 1}{V}$
 $c \rightarrow \frac{U^2 - U + 1}{V^2}$ $d := -1$
 $e \rightarrow \frac{U - 1}{V}$ $f \rightarrow -\frac{29}{108}$

5. $S := a + c \rightarrow \frac{U^2 - U + 1}{V^2} + 1$ $m1 := \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2 \cdot U - 1}{2 \cdot V} \\ -\frac{2 \cdot U - 1}{2 \cdot V} & \frac{U^2 - U + 1}{V^2} \end{bmatrix}$

$$m2 := \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & -f \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2 \cdot U - 1}{2 \cdot V} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2 \cdot U - 1}{2 \cdot V} & \frac{U^2 - U + 1}{V^2} & \frac{U - 1}{2 \cdot V} \\ -\frac{1}{2} & \frac{U - 1}{2 \cdot V} & \frac{29}{108} \end{bmatrix} \quad \delta := \det(m1) \rightarrow \frac{3}{4 \cdot V^2}$$

$$\Delta := \det(m2) \xrightarrow{\text{simplify}} -\frac{7}{144 \cdot V^2}$$

Итак: $\delta \rightarrow \frac{3}{4 \cdot V^2}$ $S \cdot \Delta \rightarrow -\frac{7 \cdot \left(\frac{U^2 - U + 1}{V^2} + 1\right)}{144 \cdot V^2}$

Но $U^2 - U + 1 = \left(U - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $V \neq 0$ Поэтому $\delta > 0$ и $S \cdot \Delta < 0$, что и требовалось установить.

Рис. 4: Код доказательства теоремы об центроидах в системе *Mathcad Prime*

В компьютерных системах Maxima, Maple и Mathematica символьные вычисления при доказательстве теоремы об центроидах проводятся практически так же, как и в системах GeoGebra и Mathcad Prime. Поэтому мы ограничимся приведением фрагментов документов с соответствующими действиями без их комментирования.

5. Доказательство гипотезы Ж6 в Maxima

Система Maxima (*wxMaxima ver. 16.12.0*). *Maxima*-документ с соответствующими вычислениями показан на рис. 5.

```
(%i1)  ma:matrix ([ (5·U+2)^2/18^2, (5·U+2)·5·V/18^2, (5·V)^2/18^2,
                    (5·U+2)/18, 5·V/18, -1],
                  [(11·U+2)^2/18^2, (11·U+2)·11·V/18^2, (11·V)^2/18^2,
                    (11·U+2)/18, 11·V/18, -1],
                  [(11·U+5)^2/18^2, (11·U+5)·11·V/18^2, (11·V)^2/18^2,
                    (11·U+5)/18, 11·V/18, -1],
                  [(5·U+11)^2/18^2, (5·U+11)·5·V/18^2, (5·V)^2/18^2,
                    (5·U+11)/18, 5·V/18, -1],
                  [(2·U+11)^2/18^2, (2·U+11)·2·V/18^2, (2·V)^2/18^2,
                    (2·U+11)/18, 2·V/18, -1],
                  [(2·U+5)^2/18^2, (2·U+5)·2·V/18^2, (2·V)^2/18^2,
                    (2·U+5)/18, 2·V/18, -1]];
```

(ma)

$$\begin{bmatrix} \frac{(5U+2)^2}{324} & \frac{5(5U+2)V}{324} & \frac{25V^2}{324} & \frac{5U+2}{18} & \frac{5V}{18} & -1 \\ \frac{(11U+2)^2}{324} & \frac{11(11U+2)V}{324} & \frac{121V^2}{324} & \frac{11U+2}{18} & \frac{11V}{18} & -1 \\ \frac{(11U+5)^2}{324} & \frac{11(11U+5)V}{324} & \frac{121V^2}{324} & \frac{11U+5}{18} & \frac{11V}{18} & -1 \\ \frac{(5U+11)^2}{324} & \frac{5(5U+11)V}{324} & \frac{25V^2}{324} & \frac{5U+11}{18} & \frac{5V}{18} & -1 \\ \frac{(2U+11)^2}{324} & \frac{(2U+11)V}{162} & \frac{V^2}{81} & \frac{2U+11}{18} & \frac{V}{9} & -1 \\ \frac{(2U+5)^2}{324} & \frac{(2U+5)V}{162} & \frac{V^2}{81} & \frac{2U+5}{18} & \frac{V}{9} & -1 \end{bmatrix}$$

```

(ma)

$$\begin{bmatrix} \frac{(5U+2)^2}{324} & \frac{5(5U+2)V}{324} & \frac{25V^2}{324} & \frac{5U+2}{18} & \frac{5V}{18} & -1 \\ \frac{(11U+2)^2}{324} & \frac{11(11U+2)V}{324} & \frac{121V^2}{324} & \frac{11U+2}{18} & \frac{11V}{18} & -1 \\ \frac{(11U+5)^2}{324} & \frac{11(11U+5)V}{324} & \frac{121V^2}{324} & \frac{11U+5}{18} & \frac{11V}{18} & -1 \\ \frac{(5U+11)^2}{324} & \frac{5(5U+11)V}{324} & \frac{25V^2}{324} & \frac{5U+11}{18} & \frac{5V}{18} & -1 \\ \frac{(2U+11)^2}{324} & \frac{(2U+11)V}{162} & \frac{V^2}{81} & \frac{2U+11}{18} & \frac{V}{9} & -1 \\ \frac{(2U+5)^2}{324} & \frac{(2U+5)V}{162} & \frac{V^2}{81} & \frac{2U+5}{18} & \frac{V}{9} & -1 \end{bmatrix}$$


(%i2) ratsimp(determinant(ma));
(%o2) 0
(%i3) [ms,bs]:[submatrix(4,ma,4), submatrix(4,ma,1,2,3,5,6)];

(%o3)

$$\left[ \begin{bmatrix} \frac{(5U+2)^2}{324} & \frac{5(5U+2)V}{324} & \frac{25V^2}{324} & \frac{5V}{18} & -1 \\ \frac{(11U+2)^2}{324} & \frac{11(11U+2)V}{324} & \frac{121V^2}{324} & \frac{11V}{18} & -1 \\ \frac{(11U+5)^2}{324} & \frac{11(11U+5)V}{324} & \frac{121V^2}{324} & \frac{11V}{18} & -1 \\ \frac{(2U+11)^2}{324} & \frac{(2U+11)V}{162} & \frac{V^2}{81} & \frac{V}{9} & -1 \\ \frac{(2U+5)^2}{324} & \frac{(2U+5)V}{162} & \frac{V^2}{81} & \frac{V}{9} & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5U+2}{18} \\ \frac{11U+2}{18} \\ \frac{11U+5}{18} \\ \frac{2U+11}{18} \\ \frac{2U+5}{18} \end{bmatrix} \right]$$


```

```
(%i4)  q:factor(expand(invert(ms)));
```

$$(q) \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{2^2}{3} & -\frac{2^2}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & -\frac{8(U+4)}{3V} & \frac{8(U+4)}{3V} & -\frac{22U+7}{3V} & \frac{22U+7}{3V} \\ -\frac{18}{V^2} & \frac{2(2U^2+16U+11)}{3V^2} & -\frac{4(U^2+8U+1)}{3V^2} & \frac{11U^2+7U-7}{3V^2} & -\frac{11U^2+7U-43}{3V^2} \\ \frac{13}{V} & -\frac{7}{3V} & 0 & \frac{7}{3V} & -\frac{13}{V} \\ \frac{11}{3^2} & -\frac{2^5}{3^4} & \frac{17}{3^4} & \frac{11 \cdot 13}{2^2 \cdot 3^4} & -\frac{11 \cdot 73}{2^2 \cdot 3^4} \end{bmatrix}$$

```
(%i5)  li:create_list(ratsimp(sum(q[i,j]·bs[j], j,1,5)),i,[1,2,3,4,5]);
```

```
(li)   [[1], [-\frac{2U-1}{V}], [\frac{U^2-U+1}{V^2}], [\frac{U-1}{V}], [-\frac{29}{108}]]
```

```
(%i6)  [a,b,c,e,f]:flatten(li);
```

```
(%o6)  [1, -\frac{2U-1}{V}, \frac{U^2-U+1}{V^2}, \frac{U-1}{V}, -\frac{29}{108}]
```

```
(%i7)  d:-1$
```

```
(%i8)  m1:matrix([a,b/2],[b/2,c])$
```

```
(%i9)  m2:matrix([a,b/2,d/2],[b/2,c,e/2],[d/2,e/2,-f])$
```

```
(%i10) [m1,m2];
```

$$(\%o10) \quad \left[\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2U-1}{2V} \\ -\frac{2U-1}{2V} & \frac{U^2-U+1}{V^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2U-1}{2V} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2U-1}{2V} & \frac{U^2-U+1}{V^2} & \frac{U-1}{2V} \\ -\frac{1}{2} & \frac{U-1}{2V} & \frac{29}{108} \end{bmatrix} \right]$$

```
(%i11) [S, \delta, \Delta]:[a+c,newdet(m1),newdet(m2)];
(%o11)/R/ [  $\frac{v^2-v+1}{v^2}+1, \frac{3}{4v^2}, -\frac{7}{144v^2}$  ]
(%i13) ['\delta=\delta, 'S='\Delta=factor(S.\Delta)];
(%o13)/R/ [  $\delta=\frac{3}{4v^2}, \Delta S=-\frac{7(v^2+v^2-v+1)}{144v^4}$  ]
```

Рис. 5: Код доказательства теоремы об центроидах в системе *Maxima*

6. Доказательство гипотезы $\mathfrak{R6}$ в Maple

Система Maple (ver. 2016.0). *Maple*-документ с соответствующими вычислениями показан на рис. 6.

```
> with(LinearAlgebra) :
> ma := Matrix([[ (5*U+2)^2/18^2, (5*U+2)*5*V/18^2, (5*V)^2/18^2, (5*U+2)/18, 5*V/18, -1], [(11*U+2)^2/18^2, (11*U+2)*11*V/18^2, (11*V)^2/18^2, (11*U+2)/18, 11*V/18, -1], [(11*U+5)^2/18^2, (11*U+5)*11*V/18^2, (11*V)^2/18^2, (11*U+5)/18, 11*V/18, -1], [(5*U+11)^2/18^2, (5*U+11)*5*V/18^2, (5*V)^2/18^2, (5*U+11)/18, 5*V/18, -1], [(2*U+11)^2/18^2, (2*U+11)*2*V/18^2, (2*V)^2/18^2, (2*U+11)/18, 2*V/18, -1], [(2*U+5)^2/18^2, (2*U+5)*2*V/18^2, (2*V)^2/18^2, (2*U+5)/18, 2*V/18, -1]])

ma := 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{324} (5U+2)^2 & \frac{5}{324} (5U+2)V & \frac{25}{324} V^2 & \frac{5}{18} U + \frac{1}{9} & \frac{5}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (11U+2)^2 & \frac{11}{324} (11U+2)V & \frac{121}{324} V^2 & \frac{11}{18} U + \frac{1}{9} & \frac{11}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (11U+5)^2 & \frac{11}{324} (11U+5)V & \frac{121}{324} V^2 & \frac{11}{18} U + \frac{5}{18} & \frac{11}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (5U+11)^2 & \frac{5}{324} (5U+11)V & \frac{25}{324} V^2 & \frac{5}{18} U + \frac{11}{18} & \frac{5}{18} V & -1 \\ \frac{1}{324} (2U+11)^2 & \frac{1}{162} (2U+11)V & \frac{1}{81} V^2 & \frac{1}{9} U + \frac{11}{18} & \frac{1}{9} V & -1 \\ \frac{1}{324} (2U+5)^2 & \frac{1}{162} (2U+5)V & \frac{1}{81} V^2 & \frac{1}{9} U + \frac{5}{18} & \frac{1}{9} V & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```

```
> Determinant(ma)
0 \quad (2)
```

> $ms := \text{SubMatrix}(ma, [1..3, 5, 6], [1..3, 5, 6]) : bs := \text{SubMatrix}(ma, [1..3, 5, 6], [4]) :$
 $\{ms, bs\}$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{324} (5U+2)^2 & \frac{5}{324} (5U+2)V & \frac{25}{324} V^2 & \frac{5}{18} V - 1 \\ \frac{1}{324} (11U+2)^2 & \frac{11}{324} (11U+2)V & \frac{121}{324} V^2 & \frac{11}{18} V - 1 \\ \frac{1}{324} (11U+5)^2 & \frac{11}{324} (11U+5)V & \frac{121}{324} V^2 & \frac{11}{18} V - 1 \\ \frac{1}{324} (2U+11)^2 & \frac{1}{162} (2U+11)V & \frac{1}{81} V^2 & \frac{1}{9} V - 1 \\ \frac{1}{324} (2U+5)^2 & \frac{1}{162} (2U+5)V & \frac{1}{81} V^2 & \frac{1}{9} V - 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{18} U + \frac{1}{9} \\ \frac{11}{18} U + \frac{1}{9} \\ \frac{11}{18} U + \frac{5}{18} \\ \frac{1}{9} U + \frac{11}{18} \\ \frac{1}{9} U + \frac{5}{18} \end{bmatrix} \right\} \quad (3)$$

> $[\text{Rank}(ms), \text{Determinant}(ms)]$

$$\left[5, -\frac{1}{1296} V^4 \right] \quad (4)$$

> $q := \text{LinearSolve}(ms, bs)$

$$q := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2U-1}{V} \\ \frac{U^2-U+1}{V^2} \\ \frac{U-1}{V} \\ -\frac{29}{108} \end{bmatrix} \quad (5)$$

> $a := q(1); b := q(2); c := q(3); d := -1; e := q(4); f := q(5)$
 $a := 1$

$$b := -\frac{2U-1}{V}$$

$$c := \frac{U^2-U+1}{V^2}$$

$$d := -1$$

$$e := \frac{U-1}{V}$$

$$f := -\frac{29}{108} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& > m1 := \text{Matrix}\left(\left[\left[\begin{matrix} a & \frac{b}{2} \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} \frac{b}{2} & c \end{matrix}\right]\right]\right) : m2 := \text{Matrix}\left(\left[\left[\begin{matrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & -f \end{matrix}\right]\right]\right) : [m1, m2] \\
& \left[\left[\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} \frac{2U-1}{V} \\ -\frac{1}{2} \frac{2U-1}{V} & \frac{U^2-U+1}{V^2} \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} \frac{2U-1}{V} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \frac{2U-1}{V} & \frac{U^2-U+1}{V^2} & \frac{1}{2} \frac{U-1}{V} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \frac{U-1}{V} & \frac{29}{108} \end{matrix} \right] \right] \quad (7) \\
& > S := a + c : \delta := \text{Determinant}(m1) : \Delta := \text{Determinant}(m2) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > [\delta, S \cdot \Delta] \\
& \left[\frac{3}{4V^2}, -\frac{7}{144} \frac{1 + \frac{U^2 - U + 1}{V^2}}{V^2} \right] \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > \text{solve}\left(\frac{3}{4V^2} > 0, [V]\right) \\
& \quad \quad \quad [[V < 0], [0 < V]] \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > \text{solve}\left(\frac{1 + \frac{U^2 - U + 1}{V^2}}{V^2} > 0, [U, V]\right) \\
& \quad \quad \quad [[U = U, V < 0], [U = U, 0 < V]] \quad (10)
\end{aligned}$$

Рис. 6: Код доказательства теоремы об центроидах в системе *Maple*

7. Доказательство гипотезы $\mathfrak{R6}$ в *Mathematica*

Система Mathematica (ver. 11). *Mathematica*-документ с соответствующими вычислениями показан на рис. 7.

```

ma :=
  ⎛
  (5*U+2)^2/18^2  (5*U+2)*5*V/18^2  (5*V)^2/18^2  (5*U+2)/18  5*V/18  -1
  (11*U+2)^2/18^2  (11*U+2)*11*V/18^2  (11*V)^2/18^2  (11*U+2)/18  11*V/18  -1
  (11*U+5)^2/18^2  (11*U+5)*11*V/18^2  (11*V)^2/18^2  (11*U+5)/18  11*V/18  -1
  (5*U+11)^2/18^2  (5*U+11)*5*V/18^2  (5*V)^2/18^2  (5*U+11)/18  5*V/18  -1
  (2*U+11)^2/18^2  (2*U+11)*2*V/18^2  (2*V)^2/18^2  (2*U+11)/18  2*V/18  -1
  (2*U+5)^2/18^2  (2*U+5)*2*V/18^2  (2*V)^2/18^2  (2*U+5)/18  2*V/18  -1
  ⎝
{Det[ma], MatrixRank[ma]} {0, 5}
ms := Drop[ma, {4}, {4}]; bs := Drop[Take[ma, {1, 6}, {4}], {4}];
{MatrixForm[ms], MatrixForm[bs]}

```

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{324} (2+5U)^2 & \frac{5}{324} (2+5U)V & \frac{25V^2}{324} & \frac{5V}{18} & -1 \\ \frac{1}{324} (2+11U)^2 & \frac{11}{324} (2+11U)V & \frac{121V^2}{324} & \frac{11V}{18} & -1 \\ \frac{1}{324} (5+11U)^2 & \frac{11}{324} (5+11U)V & \frac{121V^2}{324} & \frac{11V}{18} & -1 \\ \frac{1}{324} (11+2U)^2 & \frac{1}{162} (11+2U)V & \frac{V^2}{81} & \frac{V}{9} & -1 \\ \frac{1}{324} (5+2U)^2 & \frac{1}{162} (5+2U)V & \frac{V^2}{81} & \frac{V}{9} & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{18} (2+5U) \\ \frac{1}{18} (2+11U) \\ \frac{1}{18} (5+11U) \\ \frac{1}{18} (11+2U) \\ \frac{1}{18} (5+2U) \end{pmatrix} \right\}$$

$\{a, b, c, e, f\} = \text{Flatten}[\text{Simplify}[\text{LinearSolve}[\text{ms}, \text{bs}]]];$

$d := -1; \{a, b, c, d, e, f\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-2U}{2V} \\ \frac{1-2U}{2V} & \frac{1-U+U^2}{V^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-2U}{2V} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1-2U}{2V} & \frac{1-U+U^2}{V^2} & \frac{-1+U}{2V} \\ -\frac{1}{2} & \frac{-1+U}{2V} & \frac{29}{108} \end{pmatrix} \right\}$$

$S = a + c; m1 = \{\{a, b/2\}, \{b/2, c\}\}; m2 = \{\{a, b/2, d/2\}, \{b/2, c, e/2\}, \{d/2, e/2, f\}\};$
 $\{\text{MatrixForm}[m1], \text{MatrixForm}[m2]\}$

$$\left\{ 1 + \frac{1-U+U^2}{V^2}, \frac{3}{4V^2}, -\frac{7\left(1 + \frac{1-U+U^2}{V^2}\right)}{144V^2} \right\}$$

$S := a + c;$

$\{\delta, \Delta\} := \{\text{Det}[m1], S * \text{Det}[m2]\};$

$\{S, \delta, \Delta\}$

$$\left\{ 1 + \frac{1-U+U^2}{V^2}, \frac{3}{4V^2}, -\frac{7\left(1 + \frac{1-U+U^2}{V^2}\right)}{144V^2} \right\}$$

$\text{Reduce}[\delta > 0] \quad V < 0 || V > 0$

$\text{Reduce}[\Delta < 0]$

$U \in \text{Reals} \&\& (V < 0 || V > 0)$

Рис. 7: Код доказательства теоремы об центроидах в системе *Mathematica*

8. Заключение

Ранее мы отмечали, что с использованием символьных вычислений гипотеза об инцентрах переведена в доказанное утверждение [11]. То же самое сделано в данной статье с гипотезой об центроидах. В связи с этим в *GeoGebra* была создана динамическая модель для проверки сформулированных ниже гипотез $(X_k, 6X_k)$ ($k=1, 2, \dots$), где X_k – треугольный центр в обозначениях библиотеки Кимберлинга [12].

Гипотезы $(X_k, 6X_k)$. Пусть три чевианы пересекаются внутри невырожденного треугольника в треугольном центре X_k ($k=1, 2, \dots$). Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что их треугольные центры X_k лежат на одном эллипсе.

При $k=1$ гипотеза $(X_1, 6X_1)$ – это теперь уже доказанное утверждение об инцентрах, при $k=2$ гипотеза $(X_2, 6X_2)$ – это теперь уже доказанное утверждение о центроидах. Упомянутая модель для проверки гипотез $(X_k, 6X_k)$ ($k=1, 2, \dots$) представлена на рис. 8. Не останавли-

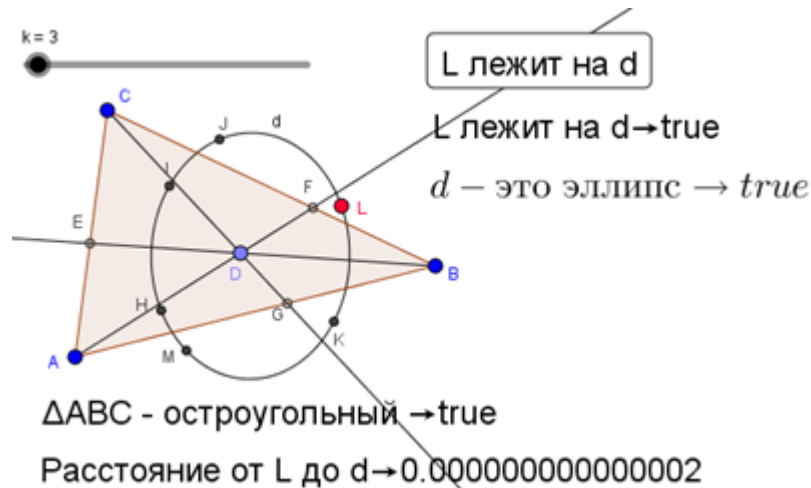


Рис. 8: Динамическая модель для проверки гипотез типа $\mathfrak{R}_k = (X_k, 6X_k)$ ($k=1, 2, \dots$)

ваясь на подробном описании модели отметим, что номер k треугольного центра X_k ($k=1, 2, \dots$) задается на ней ползунком, а при изменении на модели значений k и позиций свободных точек A , B и C оперативно изменяются и переменные части информационных надписей. Проведенные эксперименты с моделью позволили построить контрпримеры для гипотез $(X_k, 6X_k)$ при $k=1, 2, \dots, 100$ (далее проверка не проводилась). Однако, если исходный треугольник является остроугольным, то утверждение $(X_3, 6X_3)$ опровергнуть не удалось и, вероятно, оно справедливо. Поскольку X_3 — это центр описанной окружности, то завершить статью мы можем формулированием следующего утверждения.

Гипотеза о центрах описанных окружностей. Пусть три чевианы пересекаются внутри остроугольного треугольника в центре описанной окружности. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что центры их описанных окружностей лежат на одном эллипсе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка, —М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.
2. Есаян А. Р. “РТС Mathcad Prime 3.1”, монография, А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин, М. М. Абдуразаков. Тула, изд. Тульского госпедуниверситета, 2016, 400 с.
3. Есаян А. Р. Программирование в Maple / А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, В. А. Шулюпов. —Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2007. —334 с.
4. Есаян А. Р. Создание новых инструментов в GeoGebra. Реценз. кол. монография “Проблемы модернизации современного образования”, Калуга 2016, с. 29-59
5. Есаян, А. Р. Махіма. Данные и графика. / А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. —Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011 — 367 с.

6. Есаян А. Р. Maxima. Программирование в Maxima. / А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. –Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012 – 351 с.
7. Есаян А. Р. Творческая лаборатория Mathematica: Система, данные, графика. В 2 ч., Ч.1 / А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский. –Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. -296 с.
8. Есаян А. Р. Творческая лаборатория Mathematica. Программирование, функции алгебры и анализа / А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский. –Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005 – 258 с.
9. Kimberling, C. Triangle Centers and Central Triangles, Congr. Numer. 129, 1998. p. 1-295.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968
11. Осипов Н. Н. Компьютерное доказательство теоремы об инцентрах. Математическое просвещение. Третья серия, выпуск 18, М.: Изд. МЦНМО, 2014, с. 205-216
12. Штейнгарц Л. А. Орбиты Жукова и теорема Морлея. Математика в школе, № 6, 2012 г. с. 53-61

REFERENCES

1. Akopyan A.V., Zaslavsky A. A. 2007, *Geometric properties of curves of the second order*, Moscow: mtsnmo, Moscow, -136 p.
2. Esayan A. R. *PTC Mathcad Prime 3.1*, monograph, A. R. Esayan, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky, A. V. Yakushin, M. Abdurazakov. Tula, ed. Tula gospeduniversitet, 2016, -400 p.
3. Esayan A. R. *Programming in Maple*, A. R. Esayan, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky, V. A. Shulyuov. Tula, ed. Tula gospeduniversitet, 2007, -334 p.
4. Esayan A. R. *Creating new tools in GeoGebra*. The reviewed collective monograph “Problems of modernization of modern education”, Kaluga 2016, p. 29-59
5. Esayan, A. R. Maxima. The data and graphics. / A. R. Esayan, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky, A. B. Yakushin. –Tula, ed. Tula gospeduniversitet, 2011 – 367 p
6. Esayan A. R. Maxima. Programming in Maxima. / A. R. Esayan, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky, A. B. Yakushin. –Tula, ed. Tula gospeduniversitet, 2012 –351 p
7. Esayan A. R. The Creative laboratory Mathematica: System, data, and graphics. In 2 parts, Part 1 / A. R. Esayan, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky. –Tula, ed. Tula gospeduniversitet, 2005. -296 с.
8. Esayan A. R. The Creative laboratory Mathematica. Programming, functions, algebra and analysis / A. R. Esayan, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky. –Tula, ed. Tula gospeduniversitet, 2005 – p. 258
9. Kimberling, C. Triangle Centers and Central Triangles, Congr. Numer. 129, 1998. p. 1-295.
10. Korn G., Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers/ М.: Nauka, 1968

11. Osipov N. N., A computer proof of the theorem about incentro. Mathematical education. Third series, volume 18, M.: Ed. Mtsnmo, 2014, pp. 205-216
12. Steingarts L. A., Orbits of Zhukov and theorem of Morley. Mathematics in school, №. 6, 2012, pp. 53-61

Тульский государственный педагогический университет им Л. Н. Толстого.

Тульский государственный университет.

Получено 12.11.2016 Принято 13.03.2017