ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 511.3

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА РЯДОВ ДИРИХЛЕ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (г. Саратов)

Аннотация

В работе рассматривается задача поведения функций, определенных рядами Дирихле с мультипликативными коэффициентами с ограниченной сумматорной функцией, при подходе к мнимой оси. Показано, что точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле для функций, определяемых рядами Дирихле с мультипликативными коэффициентами, определяемыми неглавными обобщенными харакатерами. Этот результат представляет интерес в связи с решением гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что конечнозначный числовой характер, принимающий ненулевые значения почти на всех простых числах и имеющий ограниченную сумматорную функцию, является характером Дирихле. В основе доказательства основного результата работы лежит так называемый метод редукции к степенным рядам, основные положения которого были разработаны В. Н. Кузнецовым в начале 80-х годов. Этот метод изучает взаимосвязь между аналитическими свойствами рядов Дирихле и граничными свойствами соответсвующих (с теми же коэффециентами, что и у рядов Дирихле) степенных рядов, что позволяет получать новые результаты как для рядов Дирихле, так и для степенных рядов. В нашем случае метод редукции к степенным рядам позволяет на основании полученных в работе свойств степенных рядов с мультипликативными коэффициентами, определяемыми неглавными обобщенными характерами, доказать основной результат работы.

Ключевые слова: ряды Дирихле, сумматорная функция коэффициентов, обобщенные характеры, характеры Дирихле.

Библиография: 16 названий.

ON A BOUNDARY BEHAVIOR OF A DIRICLET SERIES CLASS WITH MULTIPLICATIVE COEFFICIENTS

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva (Saratov)

Abstract

In this paper we consider the behavior of funcions defined by Dirichlet series with multiplicative coefficients and with bounded summatory function when approaching the imaginary axis. We show that the points of the imaginary axis are also the points of continuity in a broad sense of functions defined by Dirichlet series with multiplicative coefficients which are determined by nonprincipal generalized characters. This result is particularly interesting in its connection with a solution of Chudakov hyphotesis, which states that any finite-valued numerical character, which does not vanish on all prime numbers and has bounded summatory function, is a Dirichlet character.

The proof of the main result in this paper is based on the method of reduction to power series, basic principles of which were developed by prof. Kuznetsov in the early 1980s. Ths method establishes a connection between analytical properties of Dirichlet series and boundary

[1]Работа выполнена при финансовой поодержке РФФИ (проект №16-01-00399)

properties of the corresponding power series (i.e. a power series with the same coefficients as the Dirichlet series). This allows to obtain new results both for the Dirichlet series and for the power series. In our case this method allowed us to prove the main result using the properties of the power series with multiplicative coefficients determined by the nonprincipal generalized characters, which also were obtained in this work.

Keywords: Dirichlet series, summatory function of the coefficients, generalized characters, Dirichlet series.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

где $h(n)$ - мультипликативная функция натурального аргумента, для которой сумматорная функция ограничена, т.е.

$$S(x)=\sum_{n\leq x}h(n)=O(1). \tag{2}$$

Из условия (2) и интегрального представления

$$f(s)=s\int_1^{\infty}\frac{S(u)}{u^{(s+1)}}du,\quad \sigma>1,$$

следует, что функция (1) является аналитической в полуплоскости $\sigma>0$.

Основная задача данной работы — выяснить поведение функции (1) при подходе к мнимой оси. Эта задача представляет интерес в связи с окончательным решением известной гипотезы Н. Г. Чудакова относительно обобщенных характеров, сформулированной им в 1950 году ([1], [2]). Н. Г. Чудаков предположил, что конечнозначный числовой характер $h(n)$, принимающий ненулевые значения почти на всех простых числах, сумматорная функция которого имеет асимптотику

$$S(x)=\sum_{n\leq x}h(n)=\alpha x+O(1),$$

является характером Дирихле. Это предположение остается открытым в случае неглавных обобщенных характеров ($\alpha=0$). Всюду в дальнейшем под $h(n)$ будем понимать неглавный обобщенный характер.

Ниже будет показано, что для функций, определяемых рядами Дирихле вида (1) точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле. В основе доказательства этого факта лежит так называемый метод редукции к степенным рядам, главные положения которого были разработаны в 80-х годах В. Н. Кузнецовым [3], [4], [5], [6]. Этот метод предполагает изучение взаимосвязи аналитических свойств рядов Дирихле и граничных свойств степенных рядов с теми же коэффициентами, что и у рядов Дирихле. Изучение такой взаимосвязи позволяет получать новые результаты как в теории рядов Дирихле, так и в теории степенных рядов (см, например, [7], [8], [9], [10], [11]).

2. О граничном поведении степенных рядов с мультипликативными коэффициентами

Рассмотрим степенной ряд вида

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) x^n, \tag{3}$$

где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер.

Относительно степенных рядов вида (3) докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Степенной ряд*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) x^n,$$

имеет в точке единица конечный предел вида

$$\lim_{x \to 1-0} g(x) = \alpha_0. \tag{4}$$

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд лемм относительно приближения на отрезке непрерывных функций алгебраическими полиномами с привлечением аппарата сильно непрерывных ограниченных полугрупп операторов (С.Н.О.П.О.) в теории приближений.

Известно, [12], [13], что наличие С.Н.О.П.О. $\{V_t, t \geq 0\}$, действующей в банаховом пространстве, обеспечивает прямые и обратные теоремы приближения по заданным подпространствам, аналогичные классическим, но выраженные в терминах оператора, порождающего С.Н.О.П.О. и соответствующих модулей k-го порядка. Под классическими понимаются прямые и обратные теоремы приближения периодических функций тригонометрическими полиномами.

Пусть H — линейное пространство степенных рядов, сходящихся на интервале $[0,1)$, и H_n^* — подмножество алгебраических полиномов степени $\leq n$ с мультипликативными коэффициентами. Определим в этом подмножестве операцию «сложения». Под «суммой» двух таких полиномов будем понимать полином с мультипликативными коэффициентами, у которго коэффициенты при простых степенях определяются как сумма соответсвующих коэффициентов слагаемых. Аналогично определяется «умножение на число». В итоге получим цепочку конечномерных линейных пространств H_n^* той же размерности, что и линейных пространств H_n^p, порожденных степенями x^p, p — простое, $p \leq n$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $H_\varepsilon = C[0, 1-\varepsilon]$. Обозначим через H_ε^* и H_ε^p замыкания в H_ε линеалов, порожденных цепочкой конечномерных пространств H_n^* и цепочкой конечномерных пространств H_n^p. Отметим, что размерности подпространств H_n^* и H_n^p асимптотически ведут себя следующим образом

$$\dim H_n^p = \dim H_n^* \sim \frac{n}{\ln n} \tag{5}$$

Как известно, ([12], [13]), в пространстве $C^*[0, 2\pi]$ действует С.Н.О.П.О., порожденная группой сдвигов.

Отображение

$$g(x) = \varphi \arccos \frac{2\pi - 1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

определяет изоморфизм пространств $C^*[0, 2\pi]$ и H_ε — следовательно, этот изоморфизм определяет С.Н.О.П.О. $\{V_\varepsilon(t), t \geq 0\}$, действующую в пространстве H_ε и в подпространстве H_ε^p.

Пусть $\varepsilon > \varepsilon_1$. Рассмотрим линейное отображение

$$\psi_{\varepsilon, \varepsilon_1} : H_\varepsilon^* \to H_{\varepsilon_1}^p,$$

которое на многочленах с мультипликативными коэффициентами определяется следующим образом

$$\psi_{\varepsilon,\varepsilon_1}\left(\sum_0^n a_n x^n\right) = \sum_{p\le n} a_p x^p.$$

В работе [14] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Отображение $\psi_{\varepsilon,\varepsilon_1}$ является взаимнооднозначным, ограниченным отображением пространств H^*_ε и $H^p_{\varepsilon_1}$.*

Это отображение определяет С.Н.О.П.О. $V^*_\varepsilon(t), t \ge 0$, действующую в пространстве H^*_ε. Для любой функции $g(x)$ из линеала $\widetilde{H^*_\varepsilon}$, определенного пространствами H^*_n положим по определению:

$$V^*_\varepsilon(t)(g) = \psi^{-1}_{\varepsilon,\varepsilon_1}(V_{\varepsilon_1}(t)(\psi_{\varepsilon,\varepsilon_1}(g))).$$

Тогда, как следует из результатов работ [12], [13], в которых изучаются вопросы приближения в пространствах с С.Н.О.П.О., в нашем случае для величины $E^*_n(g)$ наилучшего приближения функции $g(x) \in H^*_\varepsilon$ алгебраическими полиномами степени $\le n$ с мультипликативными коэффициентами имеют место прямые и обратные теоремы, аналогичные классическим.

Остановимся на одном из таких результатов. В рассматриваемом случае в силу (5) размерность пространства полиномов, определенных только простыми степенями переменной степени $\le n$, асимптотически равна $\frac{n}{\ln n}$. В этом случае, как следует из результатов работы [13], имеет место утверждение.

Лемма 2. *Пусть $g(x) \in H^*_\varepsilon$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1. $E^*_n(g) = O\left(\omega\left(\frac{lnn}{n}, g, V^*_\varepsilon(t)\right)\right)$;
2. $\omega(\delta, g, V^*_\varepsilon(t)) = O(\widetilde{\omega}(\delta))$,

где $\omega(\delta, g, V^*_\varepsilon(t))$ — модуль первого порядка, т.е.

$$\omega(\delta, g, V^*_\varepsilon(t)) = \sup_{0\le t\le\delta} \left\|V^*_\varepsilon(t)g - g\right\|,$$

где $\widetilde{\omega}(\delta)$ —функция, удовлетворяющая условию Бари.

Отметим, что модуль $\omega(\delta, g, V^*_\varepsilon(t))$ обладает свойствами, аналогичными свойствам модуля непрерывности $\omega(\delta, \varepsilon)$.

В работе [15] приведены прямые и обратные теоремы приближения алгебраическими полиномами, выраженные в терминах гладкости. Соответствующие теоремы имеют место и в случае приближения подпространствами из H^p_ε, а в силу леммы 1, и в случае пространства H^*_ε.

Следовательно, в силу леммы 2 имеет место следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть $g \in H^*_\varepsilon$, модуль непрерывности которой $\omega(\delta, g)$ удовлетворяет условию Бари. Тогда существуют такие положительные константы c_1 и c_2, в общем случае зависящие от ε, для которых имеет место неравенство*

$$c_1\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g\right) \le \omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*_\varepsilon(t)\right) \le c_2\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g\right).$$

Следствие 1. *Пусть функция $g(x)$ определена рядом (3). Тогда имеет место оценка*

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*_\varepsilon(t)\right)} \le C\ln^{-1} n, \tag{6}$$

где константа C в общем случае зависит от ε.

Докажем утверждение, которое уточняет неравенство (6).

Лемма 4. *Для функции $g(x)$, определенной рядом* (3), *имеет место оценка*

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} < C \ln^{-1} n, \tag{7}$$

где константа C не зависит от ε.

Доказательство. Для заданного ε обозначим через $g_t(x)$, где $t < \frac{1}{n}$, функцию $g_t = (V_\varepsilon(t) - E)g$ такую, что $\|g_t(x)\|_\varepsilon = \omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon\right)$ и обозначим через $g_{t_1}(x)$, где $t_1 < \frac{\ln n}{n}$, функцию $g_{t_1} = (V_\varepsilon^*(t) - E)g$, такую, что $\|g_{t_1}(x)\|_\varepsilon = \omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*\right)$.

Здесь мы предполагаем, что указанные t и t_1 существуют. В противном случае в доказательство леммы 4 нужно ввести незначительные коррективы.

Обозначим также

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right) = \sup_{\varepsilon>0} \omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right),$$

$$\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right) = \sup_{\varepsilon>0} \omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right),$$

Заметим, что в силу ограниченности сумматорной функции коэффициентов будет ограничена функция $g(x)$ на интервале $[0,1)$, а её модуль непрерывности $\omega(\delta, g)$ ограничен единой константой для всех отрезков $[0, 1-\varepsilon]$.

Следовательно, имеют место неравенства

$$\|g_t(x)\|_\varepsilon \leq C_1 \omega(\frac{1}{n}, g, V(t))\, \|g(x)\|_\varepsilon \tag{8}$$

$$\|g(x)\|_\varepsilon \leq C_2 \omega^{-1}(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t))\, \|g_t\|_\varepsilon, \tag{9}$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от ε.

В силу (8) и (9) имеем оценку вида

$$\omega(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)) \leq \|g_t\|_\varepsilon \leq C_1 \omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right) \|g(x)\|_\varepsilon \leq$$
$$\leq C_2 \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \|g_{t_1}\|_\varepsilon \leq C_2 \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \omega(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)) \tag{10}$$

Из (10) следует

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \leq C_2 \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \tag{11}$$

Обратно

$$\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right) \leq \|g_{t_1}\|_\varepsilon \leq C_3 \omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right) \|g\|_\varepsilon \leq$$
$$\leq C_4 \frac{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)}{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)} \omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right),$$

где константа C_4 не зависит от ε.

Отсюда получаем

$$\frac{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)}{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)} \leq C_4 \frac{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)}{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)} \tag{12}$$

В силу (12) имеем

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \geq \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)}, \tag{13}$$

где константа C_5 не зависит от ε

Из неравенств (11) и (13) получаем

$$C_5\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \leq \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \leq C_3\frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right)}{\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right)} \tag{14}$$

Неравенство (14) завершает доказательство леммы 4. □

Доказательство.

В силу леммы 4 имеем:

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right) \leq C\ln^{-1} n\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right),$$

где константа C не зависит от ε. В силу (14) получаем:

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g, V(t)\right) \leq C_1\ln^{-1} n\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right). \tag{15}$$

Учитывая, что $g(x) = O(1)$ на отрезке $[0, 1]$, имеем:

$$\omega\left(\frac{\ln n}{n}, g, V^*(t)\right) = O(1),$$

что в совокупности с (15) даёт оценку вида

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g\right) \leq C_2\ln^{-1} n,$$

где $\omega\left(\frac{1}{n}, g\right)$ — модуль непрерывности функции $g(x)$ на интервале $[0, 1)$.

Таким образом, функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, т.е. имеет место (4), что и доказывает утверждение теоремы 1.

Отметим, что рассуждения, приведённые при доказательстве леммы 4, позволяют доказать следующий результат.

Лемма 5. *Пусть $g(x)$ — функция, определённая степенным рядом* (3)*. Тогда для модулей k-го порядка имеет место асимптотическая оценка*

$$\frac{\omega_k\left(\frac{1}{n}, g, V_\varepsilon(t)\right)}{\omega_k\left(\frac{\ln n}{n}, g, V_\varepsilon^*(t)\right)} \leq C\ln^{-k} n,$$

где $n \geq n_0$, n_0 определяется величиной k и где константа C не зависит от ε и k.

Как следствие леммы 5 получается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $g(x)$ — функция, определённая степенным рядом* (3)*. Тогда для модуля непрерывности функции $g(x)$ на отрезке $[0, 1]$ имеет место асимптотическая оценка вида*

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g\right) \leq C\ln^{-k} n, \tag{16}$$

где $n \geq n_0$, n_0 определяется величиной k и где константа C не зависит от k.

Доказательство. Как показано в лемме 5, для модуля непрерывности k-го порядка функции $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ имеет место оценка вида

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, g\right) \le C \ln^{-k} n,$$

где $n \ge n_0$, n_0 определяется величиной k и где константа C не зависит от k.

Как показано в [12], [13], из этой оценки для величины $E_n(g)$ наилучшего приближения функции $g(x)$ алгебраическими полиномами следует оценка вида

$$E_n(g) = O(\varphi(n)),$$

где $\varphi(n) = o(\ln^{-k} n)$, где при любом натуральном k константа в символе «O» не зависит от k, что обеспечивает оценку вида

$$\omega\left(\frac{1}{n}, g\right) \le C \ln^{-k} n,$$

где $n \ge n_0$, n_0 определяется величиной k и где константа C не зависит от k, что завершает доказательство теоремы 2. □

Отметим, что оценка (16) равносильна оценке вида

$$|g(x) - \alpha_0| \le C|\ln^{-k}(1-x)|,$$

где $\alpha_0 = \lim\limits_{x\to 1-0} g(x)$, и $x_0 \le x < 1$, где x_0 определяется величиной k, а константа C не зависит от k.

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Степенной ряд*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) x^n,$$

где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, определяет функцию, имеющую конечный предел вида (4)*, т.е.*

$$\lim_{x\to 1-0} g(x) = \alpha_0.$$

Более того, имеет место оценка

$$|g(x) - \alpha_0| \le \frac{C}{\left|\ln^k(1-x)\right|}, \tag{17}$$

где x_0 определяется величиной k, а константа C не зависит от k.

Отметим, что оценка (17) является более слабой, чем оценка, имеющая место при условии ограниченности производной функции $g(x)$ на интервале $[0,1)$.

3. О поведении рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами в критической полосе

В работе [16] авторами рассматривалась задача поведения рядов Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{18}$$

с ограниченной сумматорной функцией коэффициентов в критической полосе, в частности, при подходе к мнимой оси. В этой работе показано, что выполнение граничных условий вида (4), (17), для соответствующего степенного ряда обеспечивает для функции $f(s)$, определённой рядом Дирихле (18) следующие аналитические свойства:

1. Функция $f(s)$ является аналитической и ограниченной в области $0 < \sigma < 1$, $|t| < T$ константой, зависящей только от величины T.

2. Существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, равномерно сходящаяся к функции $f(s)$ в каждой области $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$.

3. Для каждого интервала $[-T, T]$ мнимой оси существует подпоследовательность полиномов Дирихле $Q_{n_k}(s)$, для которых последовательность функций $f_k(t) = Q_{n_k}(\sigma_k + it)$, где $\sigma_k \to 0$ при $k \to \infty$, равномерно сходится на этом интервале.

Отметим, что свойство 3 позволяет сделать вывод о том, что каждая точка мнимой оси являтся точкой непрерывности в широком смысле для функции $f(s)$.

Таким образом, результаты работы [16] вместе с теоремой 3 доказывают основную теорему данной работы.

Теорема 4. *Ряд Дирихле вида* (1)*:*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

где $h(n)$ — неглавный обобщённый характер, определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > 0$, ограниченную в любой области $0 < \sigma < 1$, $|t| < T$ константой, зависящей только от величины T, для которой точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле.

Отметим, что результат теоремы 4 связан с задачей аналитического продолжения рядов Дирихле вида (1) на комплексную плоскость и с решением гипотезы Н. Г. Чудакова в случае неглавных обобщённых характеров. Но на этих вопросах в данной работе останавливаться не будем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2, С. 133–136.

2. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Об обобщенном характере. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №4, С. 1137–1138.

3. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т. 36, №6, С. 805–812.

4. Кузнецов В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1987, Т. 1, С. 13–23.

5. Кузнецов В. Н. О граничных свойствах степенных рядов с конечнозначными коэффициентами // Диф. уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1987, Т. 7, С. 8–16.

6. Кузнецов В. Н. К задаче описания одного класса рядов Дирихле, определяющих целые функции // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1988, Т. 1, С. 63–72.

7. Матвеева О. А. К задаче описания степенных рядов с целыми коэффициентами, непродолжимых за границу сходимости // Ученые записки Орловского гос. ун-та. Серия: «естественные, технические и медицинские науки» — Орел: изд-во ВГСПУ «Перемена», 2012, вып. 6, ч. 2, С. 153–156.

8. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Механика. Информатика» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013. Т. 13, вып. 4, С. 80–84.

9. Матвеев В. А., Матвеева О. А. Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана для L-функций Дирихле числовых полей // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Информатика. Механика.» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013, вып. 4, ч. 2. С. 76–80.

10. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2013, Т. 14, вып. 2, С. 117–121.

11. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле // Диссертация на соискание уч. степени к. ф.-м.н. — Ульяновск: УлГУ, 2014.

12. Терехин А. П. Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение // Диф. уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1975, вып. 2, С. 3–28.

13. Кузнецова Т. А. Отыскание полугруппы операторов, целой, экспоненциального типа на заданных подпространствах // Диссертация на соискание уч. степени к. ф.-м. н. — Саратов, 1982.

14. Кузнецов В. Н., Водолазов А. М. К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 2003, вып. 1, С. 43–59.

15. Даугавет И. К. Введение в теорию приближений функций: Учебное пособие — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1972.

16. Кузнецов В. Н, Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, вып. 2, С. 162–168.

REFERENCES

1. Chudakov N. G., Linnik U. V. On a class of completely multiplicative functions *DAN SSSR*, 1950, vol.74, issue 2, pp. 133–136.

2. Chudakov N. G., Rodosskij K. A. On a generalized character *DAN SSSR*, 1950, vol.74, issue 4, pp. 1137–1138.

3. Kuznetsov V. N."Analogue of the Szego theorem for a class of Dirichlet series"*Math. issues*, 1984, vol. 36, № 16, pp. 805–812

4. Kuznetsov V. N. "On the analytic extension of a class of Dirichlet series" *Vychislitel'nye metody i programmirovanie: Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, publ. SSU, 1987, vol. 1, pp. 13–23

5. Kuznetsov V. N. "On the boundary properties of power series with finite-valued coefficients" *Differencial'nye uravnenija i teorija funkcij: Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, publ. SSU, 1987, vol. 7, pp. 80–84

6. Kuznetsov V. N. "On the problem of description of a certain class of Dirichlet series, defining integral functions" *Vychislitel'nye metody i programmirovanie: Mezhvuz. sb. nauch. tr. — Saratov: Izd-vo SGU, 1988, T. 1, S. 63–72.*

7. Matveeva O. A. "On a problem of defining of the power series with integer coefficients that can not be continued beyond the boundary of convergence" *Uchenye zapiski Orlovskogo gos. un-ta. Serija: «estestvennye, tehnicheskie i medicinskie nauki» — Orel: izd-vo VGSPU «Peremena», 2012, vyp. 6, ch. 2, S. 153–156.*

8. Matveeva O. A. "Approximation polynomials and the behavior of the Dirichlet L-functions on the critical band" *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriia «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, 2013, vol. 13, issue 4, pp. 80–84

9. Matveev V. A., Matveeva O. A. "On a certain equivalent of the extended Riemann hypothesis for L-functions of Dirichlet series" *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriia «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, 2013, issue 4, part 2, pp. 76–80

10. Matveeva O. A. "On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions in the critical band " *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2013, vol. 14, issue 2, pp. 117–121

11. Matveeva, O. A. "Analytical properties of some classes of Dirichlet series and some problems of the theory of Dirichlet L-functions Dissertation, Ul'ianovsk, 2014.

12. Terehin A. P. Restricted group of operators and best approximation Dif. uravnenija i vychislitel'naja matematika: Mezhvuz. sb. nauch. tr. — Saratov: Izd-vo SGU, 1975, vyp. 2, S. 3–28.

13. Kuznetsova T. A. "Finding semigroup, whole, of exponential type on a subspace Dissertation, Saratov, 1982.

14. Kuznetsov V. N., Vodolazov A. M. "On the problem of analytical extension of the Dirichlet series with completely multiplicative coefficients"Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkcional'nomu analizu i smezhnym voprosam: Mezhvuz. sb. nauch. tr. — Saratov: Izd-vo SGU, 2003, vyp. 1, S. 43–59.

15. Daugavet I. K. "Introduction to functions approximation theory". L.: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1972.

16. Kuznetsov V. N., Matveeva O. A. "On a boundary behavior of a certain Dirichlet series class" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2016, vol. 17, issue 2, pp. 162–168

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
Получено 22.05.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.