

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 3.

УДК 512.6+004.421.6

О СТРУКТУРЕ РЕЗОНАНСНОГО МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННОГО МНОГОЧЛЕНА

А. Б. Батхин (г. Москва)

Аннотация

Изучается резонансное множество вещественного многочлена, т. е. множество всех значений пространства коэффициентов, при которых вещественный многочлен имеет соизмеримые корни.

Резонансное множество многочлена может рассматриваться как некоторое обобщение дискриминантного множества последнего. Знание его структуры необходимо при исследовании резонансов вблизи положений равновесия динамической системы.

В работе предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации резонансного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Структура резонансного множества многочлена степени n описывается в терминах разбиения натурального числа n .

Основные алгоритмы, описанные в работе, реализованы в виде библиотеки в системе компьютерной алгебры Maple. Приведено описание резонансного множества кубического многочлена.

Ключевые слова: теория исключения, субрезультант, субдискриминант, резонансное множество, компьютерная алгебра.

Библиография: 12 названий.

ON THE STRUCTURE OF THE RESONANCE SET OF A REAL POLYNOMIAL

A. B. Batkhin (Moscow)

Abstract

We consider the resonance set of a real polynomial, i. e. the set of all the points of the coefficient space at which the polynomial has commensurable roots. The resonance set of a polynomial can be considered as a certain generalization of its discriminant set. The structure of the resonance set is useful for investigation of resonances near stationary point of a dynamical system.

The constructive algorithm of computation of polynomial parametrization of the resonance set is provided. The structure of the resonance set of a polynomial of degree n is described in terms of partitions of the number n .

The main algorithms, described in the paper, are organized as a library of the computer algebra system Maple. The description of the resonance set of a cubic polynomial is given.

Keywords: elimination theory, subresultant, subdiscriminant, resonance set, computer algebra.

Bibliography: 12 titles.

1. Введение

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда для некоторого вещественного многочлена $f(x)$ необходимо сформулировать условия на его коэффициенты, при выполнении которых этот многочлен имеет соизмеримые корни. Так, например, условие целочисленной соизмеримости (кратности) корней характеристического многочлена матрицы линейной части уравнений движения вблизи положения равновесия выделяет в пространстве коэффициентов многочлена (или параметров уравнений движения) многообразия, на которых имеется резонанс между собственными частотами колебаний. Случай, когда многочлен $f(x)$ имеет корень кратности $k > 1$ является частным случаем описанной выше ситуации.

Эта статья продолжает исследования автора [1–3] по описанию структуры и построению параметрического представления дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ многочлена

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \quad (1)$$

n -й степени с вещественными коэффициентами. Вещественное n -мерное пространство $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ его коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n , как и ранее, назовём *пространством коэффициентов* многочлена (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Пару корней $t_i, t_j, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, многочлена (1) назовём $p : q$ -соизмеримой, если $t_i : t_j = p : q$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Здесь и далее предполагаем, что $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N}$, т. е. исключаем случай, когда один из корней t_i или t_j равен нулю, поскольку нулевой корень соизмерим с любым другим корнем.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Если у многочлена (1) есть пара $p : q$ -соизмеримых корней, то есть и пара $q : p$ -соизмеримых корней. Следовательно, далее предполагаем, что коэффициент соизмеримости $p : q$ удовлетворяет условию $|p/q| \geq 1$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Резонансным множеством $\mathcal{R}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовём множество всех точек пространства коэффициентов Π , в которых $f_n(x)$ имеет хотя бы пару $p : q$ -соизмеримых корней. Для фиксированного коэффициента соизмеримости, задаваемого рациональным числом $p/q \in \mathbb{Q}$, соответствующее резонансное множество обозначим через $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$, т. е.*

$$\mathcal{R}_{p:q}(f_n) = \{P \in \Pi : \exists i, j = 1, \dots, n, t_i : t_j = p : q\}.$$

Цель данной работы — разработать конструктивный алгоритм вычисления параметрического представления всех компонент резонансного множества $\mathcal{R}(f_n)$ приведённого вещественного многочлена $f_n(x)$.

Статья состоит из введения, трёх разделов и заключения. В разделе 2 формулируется условие на коэффициенты существования соизмеримых корней многочлена (1) в терминах обобщённых субдискриминантов, которые с точностью до множителя суть субрезультанты пары многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$. В разделе 3 дано описание иерархической структуры резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$, указана связь этой структуры с задачей разбиения натурального числа n , описан алгоритм построения параметрического представления компонент этого множества и дано описание программной библиотеки для системы компьютерной алгебры **Maple**. В заключительном разделе 4 приведено описание резонансного множества кубического многочлена. Статья представляет собой сокращённый вариант препринта [4].

2. Условие $p : q$ -соизмеримости корней многочлена $f_n(x)$

Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет пару $p : q$ -соизмеримых корней. Это эквивалентно тому, что два многочлена $f_n(px)$ и $f_n(qx)$ имеют общий корень, или, другими словами,

$$\text{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = 0,$$

где $\text{Res}_x(g, h)$ — результат многочленов $g(x)$ и $h(x)$, вычисленный относительно переменной x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $g(x) = \prod_{i=1}^n (x - t_i)$, $h(x) = \prod_{i=1}^m (x - u_i)$ суть два приведённых многочлена степени n и m соответственно. Тогда их результат относительно переменной x вычисляется по формуле

$$\text{Res}_x(g, h) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (t_i - u_j).$$

Поскольку при $p = q = 1$ многочлены $f_n(px)$ и $f_n(qx)$ имеют n общих корней, то результат $\text{Res}_x(f_n(px), f_n(qx))$ делится на множитель $(p - q)^n$. В силу замечания 1, результат $\text{Res}_x(f_n(px), f_n(qx))$ делится на свободный член a_n многочлена (1). Таким образом, указанный выше результат представим в виде

$$\text{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = a_n(p - q)^n \text{GD}_{p,q}(f),$$

где $\text{GD}_{p,q}(f_n)$ — введённый в [5, 6] обобщённый дискриминант многочлена $f_n(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Термин обобщённый дискриминант выбран в связи с тем, что при стремлении коэффициента соизмеримости $p : q \rightarrow 1$, $\text{GD}_{p,q}(f_n)$ стремится к значению дискриминанта $D(f_n)$ многочлена (1).

У многочлена (1) может быть не одна пара $p : q$ -соизмеримых корней. Для полного исследования структуры $p : q$ -соизмеримых корней введём несколько вспомогательных понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Цепочкой $p : q$ -соизмеримых корней длины k (кратко цепочкой корней) назовём отрезок длины k геометрической прогрессии с основанием t_i и знаменателем p/q , каждый член которой является корнем этого же многочлена. Основание прогрессии t_i назовём порождающим корнем соответствующей цепочки.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для того чтобы коэффициенты полиномиальных объектов (многочленов, субрезультантов, параметрических представлений компонентов резонансного множества $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$ и др.) были представлены в виде многочленов, а не рациональных функций от чисел p и q , будем в цепочке корней длины k в определении 4 использовать величину $q^{k-1}t_i$ в качестве порождающего корня.

Резонансное множество $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$ для каждого фиксированного коэффициента соизмеримости $p : q$ состоит из конечного числа многообразий \mathcal{V}_l , на каждом из которых многочлен $f_n(x)$ имеет l цепочек корней с различными порождающими корнями. Суммарная длина этих цепочек корней равна степени многочлена n .

Для описания каждого из многообразий \mathcal{V}_l нужно знать структуру корней многочлена

$$\tilde{f}_{p,q}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{gcd}(f_n(px), f_n(qx)). \quad (2)$$

Пусть $d = \deg \tilde{f}_{p,q} > 0$, тогда корни многочлена $\tilde{f}_{p,q}(x)$ дают информацию о соизмеримых корнях исходного многочлена (1): каждой цепочке корней длины $k \leq d$ многочлена $\tilde{f}_{p,q}(x)$ соответствует цепочка корней длины $k + 1$ многочлена $f_n(x)$. Структуру корней многочлена удобно определить с помощью субрезультантов [7, 8] пары многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$.

Известно много методов вычисления результата пары многочленов. Их обзор дан, например, в [2, 7, 9]. Здесь ограничимся методом Сильвестра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Матрицей Сильвестра $\mathbf{Sylv}(f, g)$ двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, для которых $n = \deg f(x)$ и $m = \deg g(x)$, называется квадратная матрица размера $(n + m)$, строки которой суть векторы, составленные из коэффициентов многочленов

$$x^{m-1}f(x), x^{m-2}f(x), \dots, xf(x), f(x), g(x), xg(x), \dots, x^{n-2}g(x), x^{n-1}g(x)$$

в базисе $x^{n+m-1}, \dots, x, 1$.

Определение субрезультанта дадим с помощью иннора [10] матрицы $\mathbf{Sylv}(f, g)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть \mathbf{M}_n — квадратная матрица размера $n \times n$. Тогда матрица \mathbf{M}_{n-k} , $k < [n/2]$, полученная вычёркиванием k крайних строк и столбцов с обеих сторон исходной матрицы \mathbf{M}_n , называется её k -м иннором.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. k -м субрезультантом $\text{Res}_x^{(k)}(f, g)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется определитель k -го иннора матрицы Сильвестра $\mathbf{Sylv}(f, g)$.

Запишем матрицу Сильвестра $\mathbf{Sylv}(f_n(px), f_n(qx))$ размера $2n \times 2n$ для многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$:

$$\mathbf{Sylv}(f_n(px), f_n(qx)) = \begin{pmatrix} p^n & a_1p^{n-1} & \cdots & a_{n-2}p^2 & a_{n-1}p & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p^n & \cdots & a_{n-3}p^3 & a_{n-2}p^2 & a_{n-1}p & a_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^n & a_1p^{n-1} & a_2p^{n-2} & a_3p^{n-3} & \cdots & a_{n-1}p & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & q^n & a_1q^{n-1} & a_2q^{n-2} & a_3q^{n-3} & \cdots & a_{n-1}q & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & q^n & \cdots & a_{n-3}q^3 & a_{n-2}q^2 & a_{n-1}q & a_n & \cdots & 0 & 0 \\ q^n & a_1q^{n-1} & \cdots & a_{n-2}q^2 & a_{n-1}q & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрица (3) имеет $n - 1$ нетривиальный субрезультант. Очевидно, что в силу её структуры, каждый из этих субрезультантов раскладывается на три множителя. Можно показать, что для k -го субрезультанта многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$ имеет место следующее разложение

$$\text{Res}_x^{(k)}(f_n(px), f_n(qx)) = (p - q)^{n-k} (pq)^{k(n-k)} \text{GD}_{p;q}^{(k)}(f_n). \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Назовём k -м обобщённым субдискриминантом $\text{GD}_{p;q}^{(k)}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ для коэффициента соизмеримости p/q третий нетривиальный множитель в формуле (4).

Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет цепочку $p : q$ -соизмеримых корней длины k с порождающим корнем t , т. е. в силу замечания 4 он имеет вид

$$f_n(x) = u(x) \prod_{i=0}^{k-1} (x - p^i q^{k-1-i} t).$$

Здесь многочлен $u(x)$ степени $n - k$ не имеет корней $p : q$ -соизмеримых с t . Тогда

$$f_n(px) = u(px) (px - q^{k-1}t) p^{k-1} \prod_{i=0}^{k-2} (x - p^i q^{k-2-i} t),$$

$$f_n(qx) = u(qx) (qx - p^{k-1}t) q^{k-1} \prod_{i=0}^{k-2} (x - p^i q^{k-2-i} t).$$

Следовательно, многочлен $\tilde{f}_{p,q}$ из формулы (2) имеет цепочку $p : q$ -соизмеримых корней длины $k - 1$ с порождающим корнем t/q .

В силу приведённых выше рассуждений, а также теоремы 3.3 из [8], имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы $\deg \tilde{f}_{p,q}(x) = d$, необходимо и достаточно, чтобы в последовательности i -ых обобщённых субдискриминантов $\text{GD}_{p,q}^{(i)}(f_n)$ первым отличным от нуля обобщённым субдискриминантом был субдискриминант $\text{GD}_{p,q}^{(d)}(f_n)$ с номером d .*

Введём полиномиальные идеалы $\mathcal{I}_{p,q}^{(l)}(f_n)$, состоящие из первых l обобщённых субдискриминантов $\text{GD}_{p,q}^{(i)}(f_n)$:

$$\mathcal{I}_{p,q}^{(l)}(f_n) = \left\{ \text{GD}_{p,q}^{(i)}(f_n), i = 0, \dots, l - 1 \right\}.$$

Тогда согласно теореме 1 нули идеала $\mathcal{I}_{p,q}^{(l)}(f_n)$ образуют множество, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет в точности $k < n$ различных цепочек $p : q$ -соизмеримых корней.

3. Параметризация резонансного множества $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$

Множество $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$ состоит из алгебраических многообразий \mathcal{V}_l размерностей l , $1 \leq l \leq n - 1$. Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий \mathcal{V}_l , имеющих фиксированную размерность l , зависит от числа разбиений $p(n)$ степени n многочлена $f_n(x)$.

3.1. Число компонент резонансного множества $\mathcal{R}_{p,q}(f_n)$

Напомним здесь основные определения, связанные с разбиением натуральных чисел; подробнее см. [2, 11–13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. *Разбиением λ натурального числа n называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$, для которой*

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = n.$$

Каждое из разбиений запишем в виде $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \dots]$, где n_i — число повторений слагаемого i в разбиении, т. е. $\sum_{i=1}^k i n_i = n$.

Основные числовые функции, связанные с множеством разбиений числа n следующие.

- Функция $p(n)$ задаётся числом всех разбиений числа n (последовательность A000041 в [13]).
- Функция $p_k(n)$ задаётся числом всех разбиений n на k слагаемых.
- Функция $q(n)$ задаётся числом всех разбиений n на различные слагаемые (последовательность A000009 в [13]).
- Функция $q_k(n)$ задаётся числом всех разбиений n на k различных слагаемых.

Очевидно, $p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n)$ и $q(n) = \sum_{k=1}^n q_k(n)$.

Рассмотрим разбиение $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} \dots i^{n_i} \dots]$ натурального числа n . Величина i в разбиении λ задаёт длину цепочки $p : q$ -соизмеримых корней для соответствующего порождающего корня t_i , а n_i — число различных порождающих корней, задающих цепочку корней длины i . Тогда

$l = \sum_i n_i$ есть число различных порождающих корней многочлена $f_n(x)$ для коэффициента соизмеримости p/q и $\sum_i in_i = n$. Любое разбиение λ числа n определяет некоторую структуру $p : q$ -соизмеримых корней многочлена и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов Π некоторое алгебраическое многообразие \mathcal{V}_l^i , $i = 1, \dots, p_l(n)$, размерности l по числу различных порождающих корней t_i . Число таких многообразий размерности l равно $p_l(n)$, а общее число многообразий всех возможных размерностей равно $p(n) - 1$, поскольку разбиению $[1^n]$ соответствует ситуация, когда все порождающие корни многочлена (1) задают цепочки корней длины 1, т. е. среди всех корней многочлена $f_n(x)$ нет ни одной пары $p : q$ -соизмеримых корней.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В силу того, что исходный многочлен (1) вещественный, комплексные корни его образуют пары — сам комплексный корень t_i и ему комплексно сопряжённый \bar{t}_i . Если порождающий комплексный корень t_i задаёт цепочку корней длины k , то и сопряжённый ему корень \bar{t}_i задаёт цепочку корней такой же длины, в которой каждый корень является комплексно сопряжённым соответствующему корню из цепочки корней, задаваемых корнем t_i . Значит, в разбиении λ , которое соответствует такой структуре корней, будет два равных слагаемых. Следовательно, на алгебраическом многообразии $\mathcal{V}_l \subset \Pi$ размерности l многочлен $f_n(x)$ имеет только вещественные корни, если соответствующее ему разбиение числа n есть разбиение, состоящее из l различных слагаемых. Число таких разбиений для фиксированного l есть значение функции $q_l(n)$, а общее число компонент резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$, на которых все корни вещественны, задаётся функцией $q(n)$.

3.2. Иерархическая структура компонент множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$

Рассмотрим разбиение $[n^1]$, которое соответствует случаю, когда имеется единственная цепочка корней длины n , задаваемая порождающим (очевидно вещественным) корнем t_1 . Тогда многочлен $f_n(x)$ имеет вид

$$f_n(x; t_1) = \prod_{j=0}^{n-1} [x - p^j q^{n-1-j} t_1]. \quad (5)$$

Здесь запись $f_n(x; t_1)$ означает, что все корни многочлена (1) зависят от параметра t_1 . В этом случае его коэффициенты a_i выражаются через элементарные симметрические многочлены [12, 14] $\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисленные на корнях вида $(p/q)^j t_1$, $j = 0, \dots, n-1$, соответствующей цепочки корней.

$$a_i = (-1)^i \sigma_i(q^{n-1} t_1, p q^{n-2} t_1, \dots, p^{n-1} t_1), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

В силу однородности симметрических многочленов σ_i , коэффициенты a_i являются степенными функциями степени i параметра t_1 .

Согласно теореме 1 в этом случае $\deg \tilde{f}_{p:q}(x) = n-1$, т. е. в последовательности обобщённых субдискриминантов $\text{GD}_{p:q}^{(i)}(f_n)$, $i = 0, \dots, n-1$, первый отличный от нуля обобщённый субдискриминант есть $\text{GD}_{p:q}^{(n-1)}(f_n)$. Следовательно, формулы (6) задают параметрическое представление нулей идеала $\mathcal{I}_{p:q}^{(n-1)}$. Эти нули представляют собой одномерное многообразие (кривую) $\mathcal{V}_{p:q}^{(1)}$ в пространстве коэффициентов Π . Эта кривая не имеет особых точек, поскольку в силу её параметрического представления (6) $a_i \sim t_1^i$ и, следовательно, производные da_i/dt_1 одновременно в ноль не обращаются.

Рассмотрим следующую конструкцию. Выберем на кривой $\mathcal{V}_{p:q}^{(1)}$ пару точек, соответствующих значениям параметра $t_1 \neq 0$ и $(p/q)^{-1} t_1$, и проведём через них прямую. Покажем, что на этой прямой многочлен $f_n(x)$ имеет одну цепочку $p : q$ -соизмеримых корней длины $n-1$ и одну

цепочку корней длины 1, т. е. простой корень. Действительно, рассмотрим вспомогательный многочлен

$$g(x; t_1, v) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(x; t_1) + v \frac{f_n(x; t_1) - f_n(x; (p/q)^{-1}t_1)}{t_1}. \quad (7)$$

Тогда с учётом формулы (5) получим, что

$$g(x; t_1, v) = \left[x - \left(p^{n-1}t_1 + v \frac{p^n - q^n}{p} \right) \right] \prod_{j=0}^{n-2} [x - p^j q^{n-1-j} t_1].$$

Выбирая

$$v = \frac{p(t_2 - p^{n-1}t_1)}{p^n - q^n},$$

получим, что $g(x; t_1, t_2) = (x - t_2) \prod_{j=0}^{n-2} [x - p^j q^{n-1-j} t_1]$. Очевидно, что структура корней в этом случае соответствует разбиению $[1^1(n-1)^1]$.

Таким образом, коэффициенты вспомогательного многочлена (7) задают в пространстве Π многообразие \mathcal{V}_2 , представляющую собой линейчатую поверхность. Она образована секущими, которые пересекают кривую \mathcal{V}_1 в точках, соответствующих таким значениям t_1^1 и t_1^2 параметра t_1 , что $t_1^2/t_1^1 = p/q$. При $p/q \rightarrow 1$ эта линейчатая поверхность превращается в касательную развёртывающую поверхность, параметризация которой задаётся формулой (3.6) из [2].

Описанную выше процедуру теперь можно повторить для многообразия \mathcal{V}_2 и получить параметрическое представление части многообразия \mathcal{V}_3 , на котором имеется цепочка корней длины $n-2$ и пара простых корней, т. е. ему соответствует разбиению $[1^2(n-2)^1]$. Продолжая последовательно эту процедуру в итоге придём к параметрическому представлению многообразия \mathcal{V}_{n-1} наибольшей размерности. На нём имеется одна цепочка $p:q$ -соизмеримых корней длины 2, а остальные корни простые, т. е. ему соответствует разбиение $[1^{n-2}2^1]$. Очевидно, что в силу замечания 5, полученная параметризация описывает только ту часть многообразия \mathcal{V}_l , $3 \leq l < n$, на котором все корни многочлена (1) вещественные.

3.3. Алгоритм построения параметризации многообразий \mathcal{V}_l

Рассмотрим конструктивную процедуру вычисления параметрического представления многообразий \mathcal{V}_l^i для всех значений $l = 1, \dots, n-1$ и $i = 1, \dots, p_l(n)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в пространстве Π имеется многообразие \mathcal{V}_l , $\dim \mathcal{V}_l = l$, на котором многочлен (1) имеет l различных цепочек $p:q$ -соизмеримых корней, причём цепочка корней с порождающим корнем t_1 имеет длину $m > 1$. Другие $l-1$ корней не являются $p:q$ -соизмеримыми с корнями первой цепочки. Пусть $\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l)$ — параметризация многообразия \mathcal{V}_l , тогда

$$\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) + \frac{p(t_{l+1} - p^{m-1}t_1)}{t_1(p^m - q^m)} [\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) - \mathbf{r}_l((q/p)t_1, \dots, t_l)] \quad (8)$$

задаёт параметризацию части многообразия \mathcal{V}_{l+1} , на котором имеется цепочка корней длины $m-1$ с порождающим t_1 , простой корень t_{l+1} , а остальные цепочки корней такие же, как на исходном многообразии \mathcal{V}_l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы многочлен $f_n(x)$ на многообразии \mathcal{V}_l факторизуется следующим образом:

$$f_n(x; t_1, \dots, t_l) = u(x) \prod_{j=0}^{m-1} [1 - p^j q^{m-1-j} t_1], \quad (9)$$

где многочлен $u(x)$ не имеет корней $p : q$ -соизмеримых с корнями цепочки, порождённой t_1 . Рассмотрим вспомогательный многочлен $g(x; t_1, \dots, t_l, v)$, коэффициенты которого непрерывно зависят от параметров t_1, \dots, t_l, v следующим образом

$$g(x; t_1, \dots, t_l, v) = f_n(x; t_1, \dots, t_l) + v \frac{f_n(x; t_1, \dots, t_l) - f_n(x; (q/p)t_1, \dots, t_l)}{t_1}.$$

Подставляя выражение для $f_n(x)$ из формулы (9), получим

$$g(x; t_1, \dots, t_l, v) = u(x) \left[x - \left(p^{m-1}t_1 + v \frac{p^{m-1} - q^{m-1}}{p} \right) \right] \times \prod_{j=0}^{m-2} (x - p^j q^{m-2-j} q t_1).$$

Полагая теперь

$$v = \frac{p(t_{l+1} - p^{m-1}t_1)}{p^m - q^m},$$

получаем

$$g(x; t_1, \dots, t_{l+1}) = u(x; t_2, \dots, t_l)(x - t_{l+1}) \prod_{j=0}^{m-2} (1 - p^j q^{m-2-j} q t_1).$$

Таким образом, многочлен $g(x; t_1, \dots, t_{l+1})$ имеет цепочку корней длины $m-1$ с порождающим t_1 , один простой корень t_{l+1} и остальные $n-m$ корней такие же, как у многочлена $f_n(x)$. Следовательно, формула (8) параметризует ту часть многообразия \mathcal{V}_{l+1} , на которой многочлен $f_n(x)$ имеет описанную выше структуру корней. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть один из корней, например u_1 , многочлена $u(x)$ в условии теоремы 2 простой, т. е. $u(x) = (x - u_1)\tilde{u}(x)$. Тогда на части многообразия \mathcal{V}_{l+1} исходный многочлен имеет пару комплексно сопряжённых корней. Чтобы получить параметрическое представление этой части многообразия \mathcal{V}_{l+1} , следует сделать следующую замену параметров:

$$t_{l+1} \rightarrow v_1 + iv_2, \quad u_1 \rightarrow v_1 - iv_2.$$

Эта замена параметров приведёт к тому, что многочлен $f_n(x)$ на части многообразия \mathcal{V}_{l+1} , где есть пара комплексно-сопряжённых корней, можно представить в виде

$$f_n(x) = \tilde{u}(x) ((x - v_1)^2 + v_2^2) \prod_{j=0}^{m-2} [1 - p^j q^{m-2-j} t_1]. \quad (10)$$

Если поменять знак перед слагаемым v_2^2 в правой части формулы (10), то получим факторизацию многочлена $f_n(x)$ на той части многообразия \mathcal{V}_{l+1} , где имеется пара простых вещественных корней $v_1 \pm v_2$. Таким образом, для получения параметризации всего многообразия \mathcal{V}_{l+1} следует использовать подстановку

$$t_{l+1} \rightarrow v_1 + \sqrt{v_2}, \quad u_1 \rightarrow v_1 - \sqrt{v_2}, \quad (11)$$

которая, в итоге, позволит записать многочлен $f_n(x)$ на всем многообразии \mathcal{V}_{l+1} в виде

$$f_n(x) = ((x - v_1)^2 + v_2) \tilde{u}(x) \prod_{j=0}^{m-2} [1 - p^j q^{m-2-j} t_1].$$

Также, как это было сделано в [2, 3], введём три основные операции, которые позволят последовательно перейти от параметрического представления одномерного многообразия \mathcal{V}_1 к параметризации всех других компонентов резонансного множества $\mathcal{R}_{p;q}(f_n)$.

1. Назовём операцию перехода от многообразия \mathcal{V}_l к многообразию \mathcal{V}_{l+1} в теореме 2 «**ПОДЪЁМ**». Эта операция позволяет перейти к многообразию, размерность которого на единицу больше размерности исходного. Если на нём многочлен (1) имеет только вещественные корни, то получим полную параметризацию этого многообразия, если имеются комплексные корни, то применим следующую операцию.
2. Операцию, основанную на замене (11) в замечании 6, назовём «**ПРОДОЛЖЕНИЕ**». Эта операция позволяет получить параметризацию всего многообразия \mathcal{V}_{l+1} , полученного в результате операции «ПОДЪЁМ» в случае, когда на последнем имеются комплексные корни.
3. Если на многообразии \mathcal{V}_{l+1} многочлен $f_n(x)$ имеет пару различных цепочек корней одинаковой длины k , то можно перейти к многообразию \mathcal{V}_l , на котором имеется цепочка корней удвоенной длины $2k$. Такую операцию назовём «**СПУСК**». Если после этого перехода на многообразии \mathcal{V}_l имеется пара корней одинаковой кратности, то для них следует выполнить процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ».

Опишем алгоритм получения параметрического представления алгебраических многообразий \mathcal{V}_l^i , $l = 1, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, p_l(n)$, составляющих резонансное множество $\mathcal{R}_{p;q}(f_n)$.

1. Вначале строим параметрическое представление одномерного многообразия \mathcal{V}_1 по формулам (6).
2. Применяем операцию «ПОДЪЁМ» получаем параметризацию многообразия \mathcal{V}_2^1 , соответствующего разбиению $[1^1(n-1)^1]$.
3. Вновь применяем операцию «ПОДЪЁМ» и получаем параметризацию многообразия \mathcal{V}_3^1 , которое соответствует разбиению $[1^2(n-2)^1]$. Поскольку на этом многообразии имеется пара простых корней, то следует применить операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ». В итоге получаем полную параметризацию многообразия \mathcal{V}_3^1 .
4. Применяя к последней параметризации операцию «СПУСК», получаем параметрическое представление многообразия \mathcal{V}_2^2 , на котором корни многочлена $f_n(x)$ соответствуют разбиению $[2^1(n-2)^1]$.
5. Последовательно комбинируя операции «ПОДЪЁМ», «ПРОДОЛЖЕНИЕ» и «СПУСК», получим параметрическое представление всех компонент резонансного множества $\mathcal{R}_{p;q}(f_n)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Резонансное множество $\mathcal{R}_{p;q}(f_n)$ вещественного многочлена $f_n(x)$ для фиксированного коэффициента соизмеримости $p : q$ допускает полиномиальную параметризацию.*

3.4. Программная реализация

Для организации вычисления резонансного множества $\mathcal{R}_{p;q}(f_n)$ в системе компьютерной алгебры **Maple** был реализован набор процедур, из которых скомпонована программная библиотека **ResonanceSet**. Библиотека расширяет возможности другой библиотеки **SubDiscrim**, ориентированной на работу с дискриминантным множеством многочлена $\mathcal{D}(f_n)$ и описанной в [2, 3].

В состав библиотеки вошли следующие процедуры:

- **GDiscrim** — для вычисления k -го обобщённого субдискриминанта $\text{GD}_{p;q}^{(k)}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ для фиксированного коэффициента соизмеримости $p : q$.

- `MkFam1` — для вычисления параметрического представления многообразия \mathcal{V}_1 .
- `ProcUp` — для реализации процедуры «ПОДЪЁМ» (см. п. 1 на стр. 13).
- `ProcCont` — для реализации процедуры «ПРОДОЛЖЕНИЕ» (см. п. 2 на стр. 13).
- `ProcDown` — для реализации процедуры «СПУСК» (см. п. 3 на стр. 13).

Каждая из процедур реализована в двух вариантах. Первый вариант предназначен для вычислений при целом коэффициенте соизмеримости, второй — при рациональном. Библиотека `ResonanceSet` будет доступна по адресу <http://keldysh.ru/batkhin/ResonanceSet.zip> после завершения тестирования. Все вычисления в разделе 4 проводились с использованием библиотеки `ResonanceSet`.

4. Резонансное множество кубики

В качестве примера рассмотрим структуру резонансного множества кубического многочлена

$$f_3 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \quad (12)$$

Он имеет два обобщённых субдискриминанта

$$\begin{aligned} \text{GD}_{p,q}^{(1)}(f_3) &= pq a_1^2 a_2 + (p^2 + pq + q^2) a_1 a_3 - (p + q)^2 a_2^2, \\ \text{GD}_{p,q}^{(0)}(f_3) &= p^2 q^2 (p + q)^2 a_1^3 a_3 - q^3 p^3 a_1^2 a_2^2 - \\ &\quad - pq (p^2 + pq + q^2) (p^2 + 4pq + q^2) a_1 a_2 a_3 + \\ &\quad + p^2 q^2 (p + q)^2 a_2^3 + (p^2 + pq + q^2)^3 a_3^2. \end{aligned}$$

Резонансное множество $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$ состоит из двух компонент \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 , соответствующих разбиениям $[3^1]$ и $[1^1 2^1]$. Их параметризации суть

$$\mathcal{V}_1 : \{a_1 = -(p^2 + pq + q^2)t_1, a_2 = pq(p^2 + pq + q^2)t_1^2, t_3 = -(pq)^3 t_1^3\}, \quad (13)$$

$$\mathcal{V}_2 : \{a_1 = -(p + q)t_1 - t_2, a_2 = pqt_1^2 + (p + q)t_1 t_2, a_3 = -pqt_1^2 t_2\}. \quad (14)$$

Поскольку на многообразии \mathcal{V}_1 нет комплексных корней, то $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$.

Геометрически множество $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$ представляет собой линейчатую развёртывающую поверхность (14) со скрученной кубикой (13) в качестве направляющей. Эта поверхность самопересекается по своей направляющей, которая является множеством особых точек поверхности и показана на рис. 1 для значения коэффициента соизмеримости $p : q = 7$.

Поскольку на многообразии \mathcal{V}_2 кубика (12) имеет только вещественные корни, то поверхность (14) не пересекается с дискриминантной поверхностью $\mathcal{D}(f_3)$, которая делит пространство коэффициентов кубики на две области с разным числом вещественных корней. Поверхности $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$ и $\mathcal{D}(f_3)$ касаются друг друга вдоль пары кривых, на которых третий корень совпадает с одним из пары соизмеримых корней. Наконец, отметим, что поверхность (14) делит пространство коэффициентов Π на области, в каждой из которых попарное отношение всех корней имеет свою структуру.

5. Заключение

Резонансное множество $\mathcal{R}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ может рассматриваться как некоторое обобщение дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ для случая, когда отношение пары корней

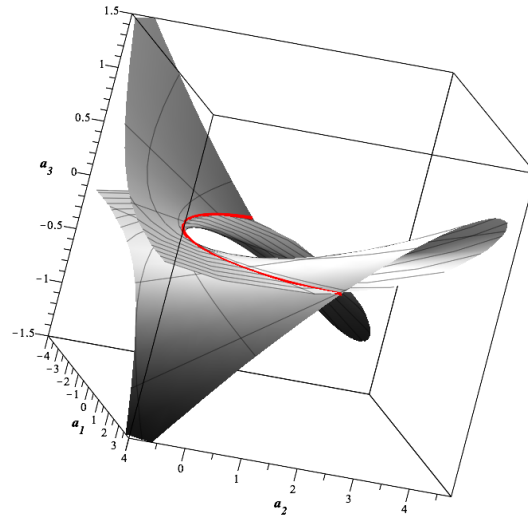


Рис. 1: Резонансное множество $\mathcal{R}_{p,q}(f_3)$ для $p : q = 7 : 1$.

равно некоторому числу. Резонансное множество состоит из конечного набора алгебраических многообразий размерностей от 1 до $n - 1$, число которых определяется числом $p(n)$ разбиений степени n многочлена $f_n(x)$. Каждое из этих многообразий выделяется соответствующим идеалом, состоящим из обобщённых субдискриминантов, и допускает полиномиальную параметризацию.

Результаты работы могут быть применены к решению проблемы формальной устойчивости [15] положения равновесия системы Гамильтона с числом степеней свободы больше двух.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батхин А. Б. Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). 2015. Т. 16, №2. С. 23–34.
2. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. №76. 36 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf.
3. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42, №2. С. 14–27.
4. Батхин А. Б. Структура резонансного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 29. 23 с. DOI: <http://dx.doi.org/10.20948/prepr-2016-29> URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2016_29.pdf.
5. Батхин А. Б. Нелинейная устойчивость системы Гамильтона по линейному приближению // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2012. №33. 24 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_33.pdf.
6. Батхин А. Б. Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автоматика и телемеханика. 2013. Т. 8. С. 47–64.

7. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.
8. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry. Algorithms and Computations in Mathematics 10. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2006. ix+662 p.
9. Джюри Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М., 1979. 304 с.
10. Gathen, J. von zur, Luücking T. Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. — 2003. — Vol. 297, 1–3. — Pp. 199–239. — DOI: 10.1016/S0304-3975(02)00639-4.
11. Эндриус Г. Теория разбиений. М. : Наука, 1982. 256 с.
12. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М. : Мир, 1985. 222 с.
13. Sloane N. The on-line encyclopedia of integer sequences. 2015. URL: <http://oeis.org>.
14. Прасолов В. В. Многочлены. М. : МЦНМО, 2014. 336 с.
15. Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian Systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, No 1. P. 81–114.

REFERENCES

1. Batkhin, A. B. 2015, “Structure of discriminant set of real polynomial” // Chebyshevskii Sb. (Tula). Vol. 16, no. 2. P. 23–34. (in Russian). URL: <http://mi.mathnet.ru/eng/cheb/v16/i2/p23>
2. Batkhin, A. B. 2015, “Parametrization of the discriminant set of a real polynomial” // No. 76. Moscow : Keldysh Institute preprints. (in Russian). URL: http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf.
3. Batkhin, A. B. 2016, “Parameterization of the Discriminant Set of a Polynomial” // Programming and Computer Software. Vol. 42, no. 2. Pp. 65–76.
4. Batkhin, A. B. 2016, *Structure of the resonance set of a real polynomial*. No. 29. Moscow: Keldysh Institute preprints. (in Russian). URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2016_29.pdf
5. Batkhin, A. B. 2012, *Non-linear stability of the Hamiltonian system on linear approximation*. No. 33. Moscow : Keldysh Institute preprints. (in Russian). URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_33.pdf
6. Batkhin, A. B. 2013, “Segregation of stability domains of the Hamilton nonlinear system” // Automation and Remote Control. Vol. 74, no. 8. Pp. 1269–1283.
7. Kalinina, E. A. & Uteshev, A. Yu. 2002, *Elimination theory*, Izd-vo NII Khimii SPbGU, Saint-Petersburg.
8. Basu, S. & Pollack, R. & Roy, M.-F. 2006, *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
9. Jury, E. 1974, *Inners and stability of dynamic systems*. John Wiley and Sons.
10. Gathen, J. von zur, Luücking T 2003, Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. Vol. 297, 1–3. Pp. 199–239. DOI: 10.1016/S0304-3975(02)00639-4.

11. Andrews, G. 1998, *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press, 1998.
12. Macdonald, I. A. 1998, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford University Press.
13. Sloane N, 2015, The on-line encyclopedia of integer sequences. URL: <http://oeis.org>.
14. Prasolov, V. V., 2004, *Polynomials*. Berlin Heidelberg : Springer. Vol. 11 of Algorithms and Computation in Mathematics.
15. Moser, J. 1958, "New aspects in the theory of stability of Hamiltonian Systems" // *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. 11, No 1. P. 81–114.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

Получено 4.06.2016 г.

Принято в печать 13.09.2016 г.