"Светлой памяти Олега Борисовича Лупанова посвящается".

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 2

УДК 512.54

ОБ АМЕНАБЕЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ F-ГРУПП

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина (Ярославль)

Аннотация

В работе [1] Дж. фон Нейман в связи с изучением парадокса Банаха–Тарского ввел понятие *аменабельной* группы: группа G называется *аменабельной*, если на ней существует нетривиальная конечно аддитивная левоинвариантная мера, т.е. на множестве $P(G)$ всех подмножеств множества G определена функция μ, принимающая неотрицательные значения, и удовлетворяющая условиям

1) $\mu(G) > 0$,

2) для любых двух непересекающихся подмножеств U и V множества G выполняется равенство $\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V)$,

3) для любого подмножества U множества G и любого элемента g группы G выполняется равенство $\mu(gU) = \mu(U)$.

В этой работе Дж. фон Нейман установил, что любая локально разрешимая группа аменабельна, а любая свободная нециклическая группа неаменабельна. Так как подгруппа аменабельной группы сама аменабельна, то любая группа, в которую вложима свободная группа ранга 2, неаменабельна. К этой работе Дж. фон Неймана восходит гипотеза о справедливости обратного утверждения, т.е. об аменабельности любой группы, в которую не вложима свободная группа ранга 2.

Это приводит к понятию *альтернатива фон Неймана для аменабельности для класса групп C*:

для класса групп C выполняется альтернатива фон Неймана для аменабельности, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение

либо группа G аменабельна, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Первоначальная гипотеза Дж. фон Неймана может рассматриваться как *альтернатива фон Неймана для аменабельности* для класса всех групп. *Альтернатива фон Неймана для аменабельности* справедлива для класса всех подгрупп групп с одним определяющим соотношением и для класса всех подгрупп групп с условием малого сокращения.

В настоящей заметке устанавливается справедливость *альтернативы фон Неймана для аменабельности* для подгрупп F-групп: для произвольной подгруппы G любой F-группы справедливо утверждение:

либо группа G аменабельна, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Ключевые слова: фуксовы группы, F-группы, аменабельные группы, альтернатива Титса, альтернатива Дж. фон Неймана.

Библиография: 15 названий.

ON AMENABLE SUBGROUPS OF F-GROUPS

V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina (Yaroslavl)

Abstract

When studying the Banach–Tarski paradox, John von Neumann (1929) introduced the concept of *amenable* group: a group G is *amenable*, if it has a left invariant nontrivial finitely additive measure, *i.e.* a non-negative valued function μ defined on the set $P(G)$ of all subsets of the set G satisfying

1) $\mu(G) > 0$,

2) for all non-intersecting subsets U V of the set G the equality $\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V)$ holds,

3) for any subset U of the set G and for all element g of the group G the equality $\mu(gU) = \mu(U)$ holds.

John von Neumann (1929) found that any locally solvable group is amenable, and any free non-cyclic group is non-amenable. Since a subgroup of an amenable group is amenable itsef, then any group with an embedded free group of rank 2, is non-amenable. A hypothesis going back to this John von Neumann (1929) work, consists in amenablility of any group in which no free group of rank 2 can be emedded.

This leads to the concept of *von Neumann alternative for a class C of groups*:

for a class C of groups von Neumann alternative for amenability is valid, if for an arbitrary group G from this class the following statement holds:

A group G is either amenable or it contains a subgroup isomorphic to a free F_2 group of rank 2.

The original J. von Neumann hypothesis can be considered as *von Neumann alternative for amenability* for the class of all groups. The *von Neumann alternative for amenability* holds for the class of subgroups of groups with one definig relation as well as for the class of all groups satisfying small cancellation conditions.

In this work we establish the validity of *von Neumann alternative* for *amenability* of subgroups of F-groups. The following equivalence is shown for an arbitrary subgroup G of any F-group:

A group G is either amenable or it contains a subgroup isomorphic to a free F_2 group of rank 2.

Keywords: Fuchsian groups, F-groups, amenable groups, Tits' alternative, von Neumann alternative.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Понятие аменабельной группы было введено Дж. фон Нейманом в работе [1].

Группа G называется *аменабельной*, если на ней существует нетривиальная конечно аддитивная левоинвариантная мера, т.е. на множестве $P(G)$ всех подмножеств множества G определена функция μ, принимающая неотрицательные значения, и удовлетворяющая условиям

1) $\mu(G) \neq 0$,

2) для любых двух непересекающихся подмножеств U и V множества G выполняется равенство

$$\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V),$$

3) для любого подмножества U множества G и любого элемента g группы G выполняется равенство

$$\mu(gU) = \mu(U).$$

Класс аменабельных групп замкнут относительно взятия подгрупп, факторгрупп и расширений групп. Любая почти аменабельная группа, т.е. группа, содержащая аменабельную подгруппу конечного индекса, сама является аменабельной. Кроме того объединение возрастающей цепочки аменабельных групп само аменабельно. Поэтому класс аменабельных групп замкнут относительно конечных и даже счетных прямых, но не декартовых, произведений.

Дж. фон Нейман установил [1], что любая локально разрешимая группа аменабельна, а любая свободная нециклическая группа неаменабельна. Так как подгруппа аменабельной группы сама аменабельна, то любая группа, в которую вложима свободная группа ранга 2, неаменабельна. К этой же работе Дж. фон Неймана восходит гипотеза о справедливости обратного утверждения, т.е. об аменабельности любой группы, в которую не вложима свободная группа ранга 2.

В работе [8] А. Ю. Ольшанский построил контрпример — пример неаменабельной группы без свободных неабелевых подгрупп.

С. И. Адян [9] доказал неаменабельность любой свободной периодической группы $B(m,n)$ при любом $m \geqslant 2$ и любом нечетном $n \geqslant 665$. Это был первый пример неаменабельной группы, удовлетворяющей нетривиальному тождеству.

Титсом [2] доказано, что для любой конечно порожденной линейной группы G справедливо утверждение:

либо группа G содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2,

либо группа G почти разрешима.

Это привело к понятию *альтернатива Титса* для класса групп:

для класса групп C выполняется альтернатива Титса, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение

либо группа G почти разрешима, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Изучению классов групп, для которых справедлива *альтернатива Титса*, посвящен ряд работ различных авторов.

Альтернатива Титса связана со следующим вопросом, достаточно давно и независимо изучавшимся в комбинаторной теории групп:

для каких классов групп C справедливо утверждение:

для произвольной группы G из этого класса справедлива альтернатива:

либо на группе G выполняется нетривиальное тождество, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Последнее утверждение мы будем называть *альтернативой Титса для тождеств*.

Для подгрупп групп с одним определяющим соотношением последний вопрос полностью исследован в работах Д. И. Молдаванского [7], А. А. Чеботаря [10] и А. Карраса и Д. Солитэра [11]. Кроме того, в работе А. Карраса и Д. Солитэра [11] доказано, что если H — подгруппа группы G с одним определяющим соотношением, то либо H содержит свободную подгруппу ранга 2, либо H разрешима, а значит, как доказано Д. И. Молдаванским [7], метабелева. Таким образом для подгрупп групп с одним определяющим соотношением выполнен усиленный вариант *альтернативы Титса*. Для групп, удовлетворяющих условию малого сокращения 1/6, рассматриваемый вопрос изучен в работах В. П. Классена [12] при описании подгрупп этих групп. Для гиперболических групп, а значит, в частности, для групп, удовлетворяющих условию малого сокращения 1/6, справедливость *альтернативы Титса для тождеств* установлена А. Ю. Ольшанским [13].

В то же время Брин и Сквайер построили группу на которой не выполняется никакое нетривиальное тождество, однако в нее не вложима свободная группа F_2 ранга 2.

По аналогии с *альтернативой Титса для тождеств* рассматривается *альтернатива фон Неймана для аменабельности*.

Для класса групп C выполняется альтернатива фон Неймана для аменабельности, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение

либо группа G аменабельна, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Такая формулировка навеяна базовой работой Дж. фон Неймана [1], в которой, как уже отмечалось выше, сформулирована гипотеза об аменабельности любой группы, в которую не вложима свободная группа ранга 2. Таким образом гипотеза Дж. фон Неймана может рассматриваться как *альтернатива фон Неймана для аменабельности* для класса всех групп.

Из выше сказанного следует, что *альтернатива фон Неймана для аменабельности* справедлива для класса всех подгрупп групп с одним определяющим соотношением и для класса подгрупп гиперболических групп.

В соответствии с определением из монографии Р. Линдона и П. Шуппа [6] F-группой мы называем группу с заданием вида

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_n \,|\, a_1^{m_1} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1, a_1 \ldots a_p Q = 1 \,\rangle\rangle,$$

где $p, n \geq 0$, все $m_i > 1$ и либо

$$Q \;=\; [b_1, b_2] \ldots [b_{2t-1}, b_{2t}], \quad \text{где } 2t = n \text{ и } [a, b] \text{ -- коммутатор элементов } a \text{ и } b,$$

либо

$$Q \;=\; b_1^2 \ldots b_t^2, \quad \text{где } t = n.$$

Как отмечается в указанной монографии, F-группы — это фуксовы группы с ориентируемым или неориентируемым факторпространством, исключая те из них, которые разлагаются в свободное произведение циклических. Точнее, F-группы — это конечно порожденные фуксовы группы, а бесконечно порожденные фуксовы группы раскладываются в свободное произведение циклических групп.

В монографии Р. Линдона и П. Шуппа [6] дано полное описание абелевых подгрупп произвольных F-групп. В работе [3] дано описание подгрупп, на которых выполняется нетривиальное тождество, произвольных фуксовых групп. В настоящем сообщении рассматривается вопрос об аменабельности подгрупп произвольных F-групп.

2. Альтернатива фон Неймана для аменабельности для подгрупп F-групп

Целью этого раздела будет доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Для подгрупп F-групп выполняется альтернатива фон Неймана для аменабельности: произвольная подгруппа H F-группы G либо является аменабельной, либо H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.*

Доказательство. Пусть H — произвольная подгруппа F-группы G. Если подгруппа H имеет бесконечный индекс, то раскладывается в свободное произведение циклических групп [6]. Пусть $H = A * B$, где A и B — нетривиальные группы. Если хотя бы одна из них содержит не менее трех элементов, то H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2 [14]. Если же A и B — группы второго порядка, то H — метабелева, а значит аменабельная группа.

Если подгруппа H имеет конечный индекс, то она сама является F-группой [6]. В таком случае остается доказать, что если H является F-группой и в нее не вложима свободная группа ранга 2, то H является аменабельной группой.

Пусть нециклическая группа H имеет задание

$$\langle\langle\, a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_n \,|\, a_1^{m_1}=1,\ldots,a_p^{m_p}=1, a_1\ldots a_pQ=1 \,\rangle\rangle,$$

где $p,n\geq 0$, все $m_i>1$ и либо

$$Q \;=\; [b_1,b_2]\ldots[b_{2t-1},b_{2t}], \quad \text{где } 2t=n \text{ и } [a,b] - \text{коммутатор элементов } a \text{ и } b,$$

либо

$$Q \;=\; b_1^2\ldots b_t^2, \quad \text{где } t=n.$$

Если $p=0$, то H имеет задание

$$\langle\langle\, b_1,\ldots,b_n \,|\, Q=1 \,\rangle\rangle,$$

и либо

$$Q \;=\; [b_1,b_2]\ldots[b_{2t-1},b_{2t}], \quad \text{где } 2t=n,$$

либо

$$Q \;=\; b_1^2\ldots b_t^2, \quad \text{где } t=n.$$

Так как H — нециклическая группа, то $n\geq 2$.

При $n=2$ задание принимает вид

$$\langle\langle\, b_1,b_2 \,|\, [b_1,b_2] \;=\; 1 \,\rangle\rangle$$

или

$$\langle\langle\, b_1,b_2 \,|\, b_1^2b_2^2 \;=\; 1 \,\rangle\rangle.$$

В первом случае H — свободная абелева группа ранга 2, а значит аменабельная. А во втором случае прямые вычисления показывают, что коммутант группы H — бесконечная циклическая группа, поэтому H — метабелева, а значит аменабельная группа. Заметим, что в рассматриваемом случае группа H содержит в качестве нормальной подгруппы индекса 2 свободную абелеву группу ранга 2 [6].

Случай $n>2$ не возможен, так как тогда группа H была бы свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, b_1,b_2 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, b_3,\ldots,b_n \,\rangle\rangle$$

с объединением по некоторым бесконечным циклическим подгруппам и в нее была бы вложима свободная группа ранга 2, что противоречит сделанному выше предположению.

При $p=1$ задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, b_1,\ldots,b_n \,|\, Q^m=1 \,\rangle\rangle, \quad \text{где} \quad m>1.$$

Так как по предположению H не содержит свободную подгруппу ранга 2 и нециклическая, а кроме того H имеет кручение, так как $m>1$, то в силу результата А. Карраса и Д. Солитэра [11] H — бесконечная диэдральная группа, т.е. имеет задание

$$\langle\langle\, c_1,c_2 \,|\, c_1^2=1, c_2^2=1 \,\rangle\rangle,$$

что, как легко понять, невозможно.

Пусть $p\geq 2$.

Если $n\geq 1$, то H – свободное произведение групп

$$\langle\langle\, a_1,\ldots,a_p \,|\, a_1^{m_1}=1,\ldots,a_p^{m_p}=1 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, b_1,\ldots,b_n \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным соответственно элементами $a_1 \dots a_p$ и Q.

Так как по предположению в группу H не вложима свободная подгруппа ранга 2, то $n = 1$.

Так как при $p \geq 3$ и при $p = 2$, но $m_1 \geq 3$ или $m_2 \geq 3$, группа

$$\langle\langle\, a_1, \dots, a_p \,|\, a_1^{m_1} = 1, \dots, a_p^{m_p} = 1 \,\rangle\rangle$$

содержит свободную подгруппу ранга 2, то остается рассмотреть два случая:

1) $n = 0$, $p \geq 2$;

2) $n = 1$, $p = 2$, $m_1 = m_2 = 2$.

В первом случае задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, a_1, \dots, a_p \,|\, a_1^{m_1} = 1, \dots, a_p^{m_p} = 1, a_1 \dots a_p = 1 \,\rangle\rangle.$$

Если $p \geq 4$, то H – свободное произведение групп

$$\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^{m_1} = 1, a_2^{m_2} = 1 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, a_3, \dots a_p \,|\, a_3^{m_3} = 1, \dots, a_p^{m_p} = 1 \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным соответственно элементами $a_1 a_2$ и $a_3 \dots a_p$.

Так как в случаях, когда $p \geq 5$, либо $p = 4$, но по крайней мере одно из чисел m_1, m_2, m_3 или m_4 не меньше 3, одна из этих групп содержит свободную подгруппу ранга 2, а по предположению в группу H не вложима свободная подгруппа ранга 2, то $p = 4$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$.

В этом случае группа H имеет задание

$$\langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_3^2 = 1, (a_1 a_2 a_3)^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Обозначим через N циклическую подгруппу, порожденную элементом $a_1 a_2$. Из равенств

$$(a_1 a_2 a_3)^2 = 1, \quad a_1 a_2 a_3 = a_3 a_2 a_1,$$
$$a_1^{\varepsilon} \cdot a_2 a_3 \cdot a_1^{-\varepsilon} = a_3 a_2 = (a_2 a_3)^{-1},$$
$$a_2^{\varepsilon} \cdot a_2 a_3 \cdot a_2^{-\varepsilon} = a_3 a_2 = (a_2 a_3)^{-1},$$
$$a_3^{\varepsilon} \cdot a_2 a_3 \cdot a_3^{-\varepsilon} = a_3 a_2 = (a_2 a_3)^{-1},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, следует, что N – нормальная подгруппа. При этом

$$H \diagup N \,=\, \langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1 \,\rangle\rangle$$

— бесконечная диэдральная группа, метабелева. Значит сама группа H — разрешимая ступени 3, а значит аменабельная.

Рассмотрим оставшийся подслучай $p = 3$ рассматриваемого первого случая, когда $n = 0$. В этом случае задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^{m_1} = 1, a_2^{m_2} = 1, a_3^{m_3} = 1, a_1 a_2 a_3 = 1 \,\rangle\rangle.$$

т.е. H — группа многогранника (m_1, m_2, m_3) [15]. Можно считать, что $m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Для завершения доказательства воспользуемся тем, что в любой F-группе есть подгруппа конечного ранга без кручения [6].

Каждая конечная группа аменабельна. Известно [15], что группа многогранника (m_1, m_2, m_3) конечна лишь в следующих четырех случаях:

1) $m_1 = m_2 = 2$,
2) $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 3$,
3) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$,
4) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$.

Пусть группа H бесконечна. В любой F-группе H есть нормальная подгруппа N конечного индекса без кручения [6], которая тоже является F-группой. Значит N имеет задание вида

$$\langle\langle\, t_1, s_1, \ldots, t_m, s_m \,|\, \prod_{i=1}^{m} [t_i, s_i] \;=\; 1 \,\rangle\rangle$$

или вида

$$\langle\langle\, c_1, \ldots, c_k \,|\, c_1^2 \ldots c_k^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Покажем, что в рассматриваемом случае в группе H есть нормальная подгруппа конечного индекса, являющаяся свободной абелевой группой ранга 2, значит H почти абелева, а значит аменабельна.

Предположим, что рассматриваемая подгруппа N имеет задание первого типа.

Так как по предположению в H не вложима свободная группа ранга 2, то $m = 1$, ибо в противном случае группа N является свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, t_1, s_1 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, t_2, s_2, \ldots, t_m, s_m \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденымм соответственно элементами

$$[t_1, s_1] \quad \text{и} \quad \prod_{i=2}^{m} [t_i, s_i].$$

Поэтому в N, а значит и в H, вложима свободная группа ранга 2.

Итак в этом случае N – свободная абелева группа ранга 2.

Предположим, что рассматриваемая подгруппа N имеет задание второго типа. Так как подгруппа N без кручения, то $k \geq 2$.

Так как по предположению в H не вложима свободная группа ранга 2, то $k = 2$, ибо в противном случае группа N является свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, c_1, c_2 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, c_3, \ldots, c_k \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным соответственно элементами

$$c_1^2 c_2^2 \quad \text{и} \quad c_3^2 \ldots c_k^2.$$

Поэтому в N, а значит и в H, вложима свободная группа ранга 2.

Итак в этом случае N имеет задание вида

$$\langle\langle\, c_1, c_2 \,|\, c_1^2 c_2^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

В этом случае N содержит в качестве нормальной подгруппы индекса 2 свободную абелеву группу ранга 2.

Итак, N содержит в качестве нормальной подгруппы конечного индекса свободную абелеву группу ранга 2. Значит в рассматриваемом случае H содержит в качестве подгруппы конечного индекса свободную абелеву группу ранга 2. Поэтому H аменабельна.

Этим завершается рассмотрение случая $n = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда $n = 1$, $p = 2$, $m_1 = m_2 = 2$.

$$H \;=\; \langle\langle\, a_1, a_2, b_1 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_1 a_2 b_1^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Обозначим через N циклическую подгруппу, порожденную элементом b_1^2. Легко проверить, что N — нормальная подгруппа и

$$H/N = \langle\langle a_1, b_1 \,|\, a_1^2 = 1, b_1^2 = 1 \rangle\rangle$$

— бесконечная диэдральная группа, метабелева. Значит сама группа H — разрешимая ступени 3, а значит аменабельная. □

3. Заключение

Таким образом установлено, что для подгрупп F-групп наряду с *альтернативой Титса для тождеств* справедлива и *альтернатива фон Неймана для аменабельности*.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neumann J. Zur allgemeinen Theorie des Masses // Fund. Math. — 1929. — V. 13. — P. 73–116.
2. Tits J. Free subgroups in linear groups // J. Algebra. — 1972. — V. 20. — P. 250–270.
3. Дурнев В. Г. О некоторых подгруппах фуксовых групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, ЯрГУ. 1998. — С. 69–77.
4. Дурнев В.Г., Зеткина О.В., Зеткина А.И. Об альтернативе Титса для подгрупп F-групп // Чебышевский сборник. — 2014. — Т. XV. — Вып. 1(49). — С. 77–85.
5. Дурнев В.Г. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4 // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы докладов. — Львов. — 1987.
6. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. — 448 с.
7. Молдаванский Д.И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журнал. — 1967. — Т. 8. — С. 1370–1384.
8. Ольшанский А.Ю. К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе // Успехи матем. наук. — 1980. — Т. 35. — вып. 4. — С. 199–200.
9. Адян С.И. Случайные блуждания на свободных периодических группах // Известия РАН. Серия математическая. — 1982. — Т. 46. — вып. 6. — С. 11139–1149.
10. Чеботарь А. Подгруппы групп с одним определяющим соотношением, не содержащие свободных подгрупп ранга 2 // Алгебра и логика. — 1971. — Том 10. — С. 570–586.
11. Karrass A., Solitar D. Subgroups of *HNN* groups and groups with one defining relation // Canad. J. Math. — 1971. — V. 23. — P. 627–643.
12. Классен В.П. Строение подгрупп с тождеством в группах с малой мерой налегания определяющих слов // Матем. заметки. — 1978. — Т. 24. — № 3. — С. 305–313.
13. Ольшанский А.Ю. SQ-универсальность гиперболических групп // Матем. сборник. — 1995. — Т. 186. — вып. 8. — С. 119–132.
14. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. — 456 с.
15. Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980. — 240 с.

REFERENCES

1. Neumann, J. 1929, “Zur allgemeinen Theorie des Masses”, *Fund. Math.*, vol. 13, pp. 73–116, Available at: http://eudml.org/doc/211921 (accessed 25 June 2016).

2. Tits, J. 1972, “Free subgroups in linear groups”, *J. Algebra*, vol. 20, no. 2, pp. 250–270. doi:10.1016/0021-8693(72)90058-0

3. Durnev, V. G. 1998, “On some subgroups of Fuchsian groups”, *Voprosy theorii grupp i gomologicheskoi algebry (Group theory and homological algebra)*, Yaroslavl State University. P. 69–77.

4. Durnev, V. G., Zetkina, O.V. & Zetkina, A. I. 2014, “On the Tits’ alternative for subgroups of F-groups”, *Tchebyshev Sbornik*, vol. XV, no. 1(49), pp. 77–85.

5. Durnev, V. G. “On the commutator width of the B_3 and B_4 braid groups”, *XIX Vsesoyuznaia algebraicheskaia conferentcia (XIX USSR Algebraic Conference Reports).* L’vov, 1987

6. Lyndon, R. C. & Schupp, P. E. 2001, *Combinatorial Group Theory*, Springer, Berlin–Heidelberg.

7. Moldavanskii, D. I. 1967, “Certain subgroups of groups with a single defining relation”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 8, no. 6, p. 1039–1048, doi:10.1007/BF02196411

8. Ol’shanskii, A. Yu. 1980, “On the problem of the existence of an invariant mean on a group”, *Russian Mathematical Surveys*, vol. 35, no. 4, p. 199–200, doi:10.1070/RM1980v035n04ABEH001876

9. Adyan, S. I. 1983, “Random walks on free periodic groups”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 21, no. 3, p. 425–434, doi:10.1070/IM1983v021n03ABEH001799

10. Chebotar’, A. A. 1971, “Subgroups of groups with one defining relation that contains no free subgroups of rank 2”, *Algebra and Logic*, vol. 10, no. 5, pp. 353–362, doi:10.1007/BF02219843

11. Karrass, A. & Solitar, D. 1971, “Subgroups of *HNN* groups and groups with one defining relation”, *Canad. J. Math.*, vol. 23, no. 4, pp. 627–643, doi:10.4153/CJM-1971-070-x

12. Klassen, V. P. 1978, “Structure of subgroups with an identity in groups with a small degree of overlap of defining words”, *Math. Notes.*, vol. 24, no. 3, pp. 665–669, doi:10.1007/BF01097751

13. Ol’shanskiĭ, A. Yu. 1995, “The SQ-universality of hyperbolic groups”, *Sbornik: Mathematics.*, vol. 186, no. 8, 1199–1211, doi:10.1070/SM1995v186n08ABEH000063

14. Magnus, W., Karrass, A. & Solitar D. 1976, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Dover Publications, Inc., New York.

15. Coxeter, H. S. M. & Moser, W. O. J. 1972, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer, Berlin.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
Получено 31.03.2016 г.
Принято в печать 10.06.2016 г.