

# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

## Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.95

### МНОГОЦВЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА<sup>1</sup>

В. Г. Журавлев (г. Владимир)

#### Аннотация

Пусть  $r(i, X^1)$  — количество точек орбиты длины  $i$  относительно вращения  $S_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  окружности единичной длины  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  на угол  $\alpha$ , попавших в  $X^1$ , и пусть  $\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$  — отклонение функции распределения  $r(i, X^1)$  от ее среднего значения  $i|X^1|$ , где  $|X^1|$  означает длину  $X^1$ . В 1921 г. Э. Гекке доказал теорему: если  $X^1$  имеет длину  $|X^1| = h\alpha + b$ , где  $h \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ , то для отклонения  $\delta(i, X^1)$  выполняется неравенство  $|\delta(i, X^1)| \leq h$  для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$

В 1981 г. И. Орен перенес результат Гекке на конечные объединения интервалов  $X^1$  и для таких множеств получил оценку  $\delta(i, X^1) = O(1)$  при  $i \rightarrow \infty$ .

В общем случае, если  $X^d$  принадлежит  $d$ -мерному тору  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$  и для него выполняется условие  $\delta(i, X^d) = O(1)$  при  $i \rightarrow \infty$ , то  $X^d$  называется множеством ограниченного остатка.

Глобальный подход к поиску множеств ограниченного остатка предложен В. Г. Журавлевым, при котором вместо отдельных множеств  $X_k^d$  на торе  $\mathbb{T}^d$  рассматриваются полные разбиения торов  $\mathbb{T}_{c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_s^d$  с некоторыми параметрами  $c, \lambda$ . Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора  $\mathbb{T}^d$  в накрывающее пространство  $\mathbb{R}^d$  так, чтобы повороту тора  $S_\alpha$  отвечало перекладывание  $S_v$  некоторых множеств  $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$  из  $\mathbb{R}^d$ . Если число таких множеств  $X'_k$  окажется  $s+1 \leq d+1$ , то каждый из образов  $X_k^d = \pi(X'_k)$  на торе  $\mathbb{T}^d$  будет  $BR$ -множеством, а соответствующее объединение  $T_{c,\lambda}^d = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$  из  $\mathbb{R}^d$  — торической разверткой для  $\mathbb{T}^d$ . Такие развертки  $T^d$  были сконструированы с помощью перекладывающихся параллелоэдров — многогранников, трансляционно разбивающих пространство  $\mathbb{R}^d$ . Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому  $d$ -мерного единичного куба  $C^d$  и отрезков.

В 2012 г. В. Г. Журавлевым по указанной схеме были построены простейшие многомерные множества ограниченного остатка  $X^d = P^d$ , являющиеся  $d$ -мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин  $\sharp V(P^d) = 2^{d+1} - 2$ . Для размерностей  $d = 1$  и  $2$  это будут соответственно множества, содержащие отрезки Гекке

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00360.

и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для  $d = 3, 4$  — параллелоэдры Вороного, среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр Федорова.

В настоящей работе с помощью разбиений многомерных торов строятся множества ограниченного остатка, представляющие собою конечные объединения выпуклых многогранников. Для отклонений распределения точек орбит относительно сдвигов тора по указанным множествам доказывается многомерный вариант теоремы Гекке о распределении дробных долей на окружности.

*Ключевые слова:* многомерная теорема Гекке, множества ограниченного остатка, многогранники.

*Библиография:* 9 названий.

## MULTI-COLOUR BOUNDED REMAINDER SETS

V. G. Zuravlev (Vladimir)

### Abstract

Let  $r(i, X^1)$  be the number of points in the  $S_\alpha$ -orbit of the length  $i$  with respect to a rotation  $S_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  of the unit circle  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  by an angle  $\alpha$  hit the  $X^1$ . Denote by  $\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$  the deviation of the function  $r(i, X^1)$  from its average value  $i|X^1|$ , where  $|X^1|$  is the length of  $X^1$ .

In 1921 E. Hecke had proved the theorem: if  $X^1$  has the length  $|X^1| = h\alpha + b$ , where  $h \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ , then the inequality  $|\delta(i, X^1)| \leq h$  для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$  holds for all  $i = 0, 1, 2, \dots$

In 1981 г. I. Oren was able to generalize the Hecke theorem to the case of a finite union of intervals  $X^1$ . He proved the estimation  $\delta(i, X^1) = O(1)$  as  $i \rightarrow \infty$ .

In the general case, if  $X^d$  belongs to the  $d$ -dimensional torus  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$  and there is  $\delta(i, X^d) = O(1)$  as  $i \rightarrow \infty$ , then  $X^d$  is called a bounded remainder set.

Global approach to search of bounded remainder sets was proposed by V.G. Zhuravlev in 2011 when, instead of separate sets  $X_k^d$  on the torus  $\mathbb{T}^d$ , the complete toric decompositions  $\mathbb{T}_{c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_s^d$  with parameters  $c, \lambda$  began to be considered. The main idea was to determine a lifting  $\pi^{-1} : \mathbb{T}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^d$  of the torus  $\mathbb{T}^d$  into the covering space  $\mathbb{R}^d$  so the rotation  $S_\alpha$  maps to a rearrangement  $S_v$  of the corresponding sets  $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$  in  $\mathbb{R}^d$ . In the case  $s + 1 \leq d + 1$ , each set  $X_k^d = \pi(X'_k)$  is a bounded remainder set and the union  $T_{c,\lambda}^d = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$  in  $\mathbb{R}^d$  is a toric development for  $\mathbb{T}^d$ . These developments  $T^d$  were built with the help of rearrangement parallelohedra, and the parallelohedra obtained as the Minkowskii sums of the unit cube  $C^d$  and intervals. If  $d = 3, 4$  we have the Voronoi parallelohedra and the Fedorov rhombic dodecahedron.

In the present paper, by using tilings of multidimensional tori, bounded remainder sets are constructed. The tilings consist of a finite combination of

convex polyhedra. A multi-dimension version of Hecke theorem with respect to the uniform distribution of fractional parts on the unit circle is proved for these sets.

*Keywords:* multi-dimension Hecke theorem, bounded remainder sets, polyhedra.

*Bibliography:* 9 titles.

## Введение

Пусть  $r(i, X^1)$  — количество точек орбиты длины  $i$  относительно вращения

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{1}$$

окружности единичной длины  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  на угол  $\alpha$ , попавших в  $X^1$ . Обозначим через

$$\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$$

отклонение функции распределения  $r(i, X^1)$  от ее среднего значения  $i|X^1|$ , где  $|X^1|$  означает длину  $X^1$ . В 1921 г. Э. Гекке доказал теорему [1]: если  $X^1$  имеет длину  $|X^1| = h\alpha + b$ , где  $h \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ , то для отклонения  $\delta(i, X^1)$  выполняется неравенство

$$|\delta(i, X^1)| \leq h \tag{1}$$

для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$

Орен [2] перенес результат Гекке на конечные объединения интервалов  $X^1$  и для таких множеств получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty \tag{2}$$

Отметим, что интервалы из множества  $X^1$  сами в отдельности могут и не обладать свойством (2).

В общем случае, если  $X^d$  принадлежит  $d$ -мерному тору  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$  и для него выполняется условие (2), то  $X^d$  называется множеством ограниченного остатка.

Глобальный подход к поиску множеств ограниченного остатка предложен в [3], где вместо отдельных множеств  $X_k^d$  на торе  $\mathbb{T}^d$  стали рассматриваться полные разбиения торов

$$\mathbb{T}_{c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_s^d$$

с некоторыми параметрами  $c, \lambda$ . Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора  $\mathbb{T}^d$  в накрывающее пространство  $\mathbb{R}^d$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{S_v} & \mathbb{R}^d \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^d \end{array}, \tag{3}$$

при котором повороту тора  $S_\alpha$  отвечает перекладывание  $S_v$  некоторых множеств  $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$  из  $\mathbb{R}^d$ . Если число таких множеств  $X'_k$  окажется  $s + 1 \leq d + 1$ , то

каждый из образов  $X_k^d = \pi(X'_k)$  на торе  $\mathbb{T}^d$  будет  $BR$ -множеством, а соответствующее объединение

$$T_{c,\lambda}^d = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$$

из  $\mathbb{R}^d$  — торической разверткой для  $\mathbb{T}^d$ , т.е. фундаментальной областью в пространстве  $\mathbb{R}^d$  относительно трансляций кубической решеткой  $\mathbb{Z}^d$ . Такие развертки  $T^d$  были сконструированы в [4] с помощью перекладывающихся параллелоэдров — многогранников, трансляционно разбивающих пространство  $\mathbb{R}^d$ . Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому  $d$ -мерного единичного куба  $C^d$  и отрезков.

В [5] по схеме (3) были построены простейшие многомерные множества ограниченного остатка  $X^d = P^d$ , являющиеся  $d$ -мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин

$$\sharp V(P^d) = 2^{d+1} - 2.$$

Для размерностей  $d = 1$  и  $2$  это будут соответственно множества, содержащие отрезки Гекке и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для  $d = 3, 4$  — параллелоэдры Вороного [6], среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр Федорова [7]. Для указанных многогранников ограниченного остатка  $X^d = P^d$  в [5] доказано неравенство

$$|\delta(i, X^d)| \leq dh, \quad (4)$$

являющееся многомерным аналогом теоремы Гекке (1). Здесь в неравенстве (4) отклонения  $\delta(i, X^d)$  рассматриваются для сдвига тора  $S_\beta$  на вектор  $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$ , где  $h$  — любое натуральное число и  $l$  — произвольный вектор из кубической решетки  $\mathbb{Z}^d$ .

Следующим шагом исследования общих многомерных множеств ограниченного остатка может служить задача о построении более сложные множества  $X^d$ , отличных от вытянутых кубов  $X^d = P^d$  и их малых деформаций. Основная идея состоит в том, чтобы использовать многоцветные разбиения

$$\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_D^d$$

тора  $\mathbb{T}^d$  с числом областей  $D+1 > d+1$ , получающиеся как сечения соответствующих перекладывающихся разбиений

$$\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^D = X_0^D \sqcup X_1^D \sqcup \dots \sqcup X_D^D$$

тора  $\mathbb{T}^D$  бóльшей размерности  $D > d$ . При таком подходе возникают множества ограниченного остатка  $X^d$ , представляющие собою конечные объединения  $d$ -мерных многогранников, каждый из которых является сечением некоторого  $D$ -мерного многогранника из разбиения  $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^D$ , т.е. некоторого отмеченного выше параллелепипеда или выпуклого параллелоэдра  $P^D$ . В теореме 5.1 доказывается, что отклонения  $\delta(i, X^d)$  для таких многоцветных множеств ограниченного остатка  $X^d$  снова удовлетворяют неравенству (4).

## 1. Торические развертки

**1.1. Перекладывающиеся торические развертки.** Пусть дан  $D$ -мерный тор

$$\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / L, \quad (1)$$

где  $L$  — невырожденная решетка из векторного пространства  $\mathbb{R}^D$ , т.е. решетка  $L$  имеет размерность  $D$  над  $\mathbb{R}$ . Пусть задан сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D : x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{L}. \quad (2)$$

Разверткой  $T^D$  тора  $\mathbb{T}^D$  назовем такое подмножество  $T^D$  из  $\mathbb{R}^D$ , для которого ограничение фактор-отображения

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\text{mod } L} \mathbb{T}^D : x \mapsto x \pmod{L}$$

на указанное подмножество  $T^D \subset \mathbb{R}^D$  задает биекцию

$$T^D \xrightarrow{\text{mod } L} \mathbb{T}^D. \quad (3)$$

Пусть дана торическая развертка  $T^D$ , удовлетворяющая следующему условию. Существует такое разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D \quad (4)$$

развертки  $T^D$ , что если с помощью биекции (3) отождествить тор  $\mathbb{T}^D$  с его разверткой  $T^D$ , то индуцированное отображение

$$T^D \xrightarrow{S_v} T^D$$

для сдвига тора (2) будет эквивалентно перекладыванию областей  $T_0, T_1, \dots, T_D$  развертки  $T^D$ :

$$S_v(x) = x + v(x), \quad (5)$$

где вектор сдвига  $v(x)$  зависит от  $x \in T^D$  и определяется условием

$$v(x) = v_k, \quad \text{если } x \in T_k, \quad (6)$$

при этом  $v_0, v_1, \dots, v_D$  — некоторая фиксированная система векторов. Развертка  $T^D$ , удовлетворяющая условиям (3)–(6), называется *перекладывающейся*.

Заметим, что в силу биекции (3) разбиению (4) развертки  $T^D$  отвечает разбиение

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D \quad (7)$$

тора  $\mathbb{T}^D$  на соответствующие области  $\mathbb{T}_k \equiv T_k \pmod{L}$ .

Далее мы будем использовать понятие *разбиения* множеств в *обычном* (*строгом*) смысле, когда рассматриваются покрытия множеств

$$X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots$$

с условием  $X_k \cap X_{k'} = \emptyset$  для  $k \neq k'$ , а также в *расширенном* смысле

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots,$$

предполагая в данном случае, что различные множества  $X_k, X_{k'}$  не имеют общих внутренних точек  $X_k^{\text{int}} \cap X_{k'}^{\text{int}} = \emptyset$ .

**1.2. Трансляционная решетка и ранг вектора сдвига.** Из определений (2), (5) и (6) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha \pmod{L} \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (8)$$

при этом векторы

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, \dots, D \quad (9)$$

принадлежат основной решетке периодов  $L$  тора (1). В дальнейшем на протяжении всей статьи будем предполагать, что  $L$  является невырожденной решеткой, порождаемой

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D] \quad (10)$$

векторами (9) над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ , т.е.

$$\text{векторы } l_1, \dots, l_D \text{ имеют ранг } D \text{ над } \mathbb{R}. \quad (11)$$

При этом условии вектор сдвига  $\alpha$  можно разложить по данному базису

$$\alpha = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_D l_D. \quad (12)$$

Пусть  $\alpha$  — произвольный вектор из  $\mathbb{R}^D$  с координатами  $(\alpha_1, \dots, \alpha_D)$  в базисе (12). Определим его *ранг относительно решетки  $L$*  равенством

$$\text{rank}_L(\alpha) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha) - 1, \quad (13)$$

где

$$M(\alpha) = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D] \subset \mathbb{R}$$

обозначает *модуль* над кольцом  $\mathbb{Z}$ , порождаемый числами  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_D$ ;

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D]$$

— размерность этого модуля над  $\mathbb{Z}$ . Если  $\alpha' \in \mathbb{R}^D$  — другой вектор, удовлетворяющий условию  $\alpha' \equiv \alpha \pmod{L}$ , то из определения (13) вытекает равенство

$$\text{rank}_L(\alpha') = \text{rank}_L(\alpha).$$

Это означает, что ранг  $\text{rank}_L(\alpha)$  корректно определен для векторов  $\alpha$  на торе  $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$ . Из определения (13) также следуют неравенства

$$0 \leq \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) \leq D.$$

Назовем вектор  $\alpha$  *иррациональным*, если  $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) > 0$ . Если при этом ранг принимает наибольшее значение  $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$ , то будем говорить, что вектор *максимально иррациональный*. В оставшемся случае  $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = 0$  скажем, что вектор *рациональный*. Это равносильно тому, что вектор  $\alpha$  имеет рациональные координаты  $\alpha_1, \dots, \alpha_D$  в базисе (12).

Для вектора  $\alpha$  отвечающие ему сдвиг  $S_\alpha$  тора (2) и перекладывание  $S_v$  из (6) будем называть соответствующим образом.

## 2. Торические развертки и множества ограниченного остатка

**2.1. Цветные  $k$ -отклонения.** Пусть  $\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D$  — разбиение тора (7), отвечающее разбиению (4) развертки тора  $T^D$ . Зададим сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\beta} \mathbb{T}^D : x \mapsto S_\beta(x) \equiv x + \beta \pmod{L} \quad (1)$$

на вектор

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + b \circ l), \quad (2)$$

при этом  $h$  — произвольное натуральное число,

$$b \circ l = b_1 l_1 + \dots + b_D l_D$$

и  $b = (b_1, \dots, b_D) \in \mathbb{Z}^D$  — целый вектор. Из определения следует, что вектор  $b \circ l$  принадлежит решетке  $L$ . Любому сдвигу тора (1) можно сопоставить *считающую функцию*

$$r_k(i, x_0) = \#\{j; S_\beta^j(x_0) \in \mathbb{T}_k; 0 \leq j < i\}. \quad (3)$$

По условию  $L$  — невырожденная решетка (10). Поэтому для ее базиса  $l_1, \dots, l_D$  существует двойственный базис  $l_1^*, \dots, l_D^*$ , связанный с исходным базисом соотношениями

$$l_k^* \cdot l_m = \delta_{km}, \quad (4)$$

где  $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_D y_D$  — скалярное произведение для  $x = (x_1, \dots, x_D)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_D)$  из  $\mathbb{R}^D$  и  $\delta_{km}$  — символ Кронекера.

Для  $k = 0, 1, \dots, D$  обозначим

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i a_k. \quad (5)$$

Здесь коэффициенты  $a_k$  ( $k = 1, \dots, D$ ) задаются равенствами

$$a_k = -l_k^* \cdot \alpha = -\alpha_k, \quad (6)$$

где  $\alpha_k$  — координаты (12) вектора  $\alpha$  относительно базиса  $l_1, \dots, l_D$ , а коэффициент  $a_0$  определяется из равенства

$$a_0 + a_1 + \dots + a_D = 1. \quad (7)$$

Назовем  $\delta_k(i, x_0)$  отклонением распределения точек *орбиты*

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0) = \{S_\beta^i(x_0) \equiv x_0 + i\beta \pmod{L}; i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (8)$$

относительно области  $\mathbb{T}_k \subset \mathbb{T}^D$ , или кратко —  *$k$ -отклонением* или *цветным отклонением*.

Для произвольного множества  $X \subset \mathbb{R}^D$  определим его крайние значения

$$\underline{m}_k(X) = \inf_{x \in X} l_k^* \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = \sup_{x \in X} l_k^* \cdot x, \quad (9)$$

где векторы  $l_1^*, \dots, l_D^*$  определены в (4) и

$$l_0^* = -l_1^* - \dots - l_D^*. \quad (10)$$

Относительно отклонений  $\delta_k(i, x_0)$  в [5] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. При любом  $k = 0, 1, \dots, D$  выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(T) h \quad (11)$$

для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$ , где константы

$$c_k(T) = \overline{m}_k(T) - \underline{m}_k(T), \quad (12)$$

не зависят от  $h$ ,  $i$  и определяются исключительно размерами развертки тора  $T = T^D$ , определенной в (4).

**2.2. Вырождение орбит.** Пусть вектор сдвига  $\alpha$  будет произвольным, т.е. не обязательно иррациональным, и пусть  $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$  — орбита (8) произвольной начальной точки  $x_0 \in T$  относительно сдвига  $S_\beta$ , где вектор сдвига  $\beta$  определен равенством (2). Обозначим  $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c$  замыкание орбиты  $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ .

Если вектор сдвига  $\alpha$  будет максимально иррациональным, то есть иметь ранг  $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$ , то вектор  $\beta$  также будет максимально иррациональным. Известно [8], что для указанных  $\beta$  будет выполняться равенство

$$\dim \text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = D$$

и, таким образом, в этом случае выполняется формула

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = T^c. \quad (13)$$

В общем случае будет выполняться лишь включение

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subseteq T^c, \quad (14)$$

поэтому для констант (12) из (14) будет следовать неравенство

$$c_k(X) \leq c_k(T). \quad (15)$$

Здесь множество  $X$  определяется с помощью биекции (3):

$$T^D \supseteq X \xrightarrow{\text{mod } L} \text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subset \mathbb{T}^D. \quad (16)$$

Если неравенство (15) будет строгим, то, как следствие, в случае произвольного вектора сдвига  $\alpha$  мы получим для отклонений  $\delta_k(i, x_0)$  усиление оценки (11).

В этом случае теорема 1 принимает вид [5].

ТЕОРЕМА 2. При любом  $k = 0, 1, \dots, D$  выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X) h \quad (17)$$

для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$ , где константы  $c_k(X)$  вычисляются по формуле

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X), \quad (18)$$

не зависят от  $h$ ,  $i$  и определяются исключительно размерами множества  $X$  из (16). Величины  $\overline{m}_k(X)$  и  $\underline{m}_k(X)$  определены в (9).



**2.3. Единичный базис.** Константы  $c_k(X)$  из теоремы 2 можно конкретизировать, если перейти

$$l_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \dots \quad l_D = -\mathbf{e}_D \quad (19)$$

от базиса (11) к единичному базису

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_D = (0, 0, \dots, 1). \quad (20)$$

При таком выборе базиса решетка  $L$ , определенная в (10), будет иметь вид

$$L = \mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D], \quad (21)$$

т.е. будет кубической решеткой  $\mathbb{Z}^D$  в пространстве  $\mathbb{R}^D$ .

Если решетка  $L$  имеет вид (21), то выполняется следующая теорема [5].

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть векторы  $l_1, \dots, l_D$  выбраны в виде (19) и  $x_0$  — произвольная начальная точка из тора  $\mathbb{T}^D$ .

1. Тогда  $k$ -отклонения (5) принимают вид

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i\alpha_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (22)$$

где вектор сдвига  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$  записан в единичном базисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$  и  $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$ .

2. Пусть выбран вектор сдвига  $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$  с произвольным натуральным  $h$  и вектором  $l$  из кубической решетки  $\mathbb{Z}^D$ . Тогда при любом  $k = 0, 1, \dots, D$  выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X)h \quad (23)$$

для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$  с константами

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X),$$

где множество  $X$  определено в (16),

$$\underline{m}_k(X) = -\sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = -\inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x$$

для  $k = 1, \dots, D$  и

$$\underline{m}_0(X) = \inf_{x \in X} \mathbf{e}_0 \cdot x, \quad \overline{m}_0(X) = \sup_{x \in X} \mathbf{e}_0 \cdot x$$

для  $k = 0$ , где  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_D$ .

3. В случае  $h = 1$  выполняются точные неравенства:

$$x_{0k} - \sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \leq \delta_k(i, x_0) \leq x_{0k} - \inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \quad (24)$$

для  $k = 1, \dots, D$ , где начальная точка  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0D})$  — записана в базисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \dots, \mathbf{e}_D$ ; и

$$\underline{m}_0(X) - \sigma(x_0) \leq \delta_0(i, x_0) \leq \overline{m}_0(X) - \sigma(x_0), \quad (25)$$

где  $\sigma(x_0) = x_{01} + \dots + x_{0D}$ .

### 3. Разбиения вытянутых параллелоэдров

**3.1. Вытянутые кубы  $C_s$ .** Приведем из [4] основные понятия и результаты, необходимые нам для дальнейшего. Пусть  $C = C^D$  — замкнутый  $D$ -мерный куб, натянутый на единичные векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ . Обозначим  $\mathbb{R}_+^D$  *положительный конус*, состоящий из  $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$  с координатами  $x_1 > 0, \dots, x_D > 0$ . Для любого вектора  $\mathbf{s}$  из конуса  $\mathbb{R}_+^D$  определим операцию *вытягивания*  $\text{Str}_s$  произвольного множества  $X \subset \mathbb{R}^D$  как сумму по Минковскому

$$\text{Str}_s(X) = X + Is = \bigcup_{t \in I} (X + ts) \quad (1)$$

самого множества  $X$  и вложенного в пространство  $\mathbb{R}^D$  отрезка  $Is = \{ts; t \in I\}$ , где  $I = [0, 1]$ . Условимся  $\mathbf{s}$  из (1) называть *вытягивающим вектором*.

Применяя данную операцию к единичному кубу  $C$ , построим из него многогранник

$$C_s = \text{Str}_s(C), \quad (2)$$

представляющий собою *вытянутый куб*, имеющий объем

$$\text{vol } C_s = \sigma(\mathbf{s}) + 1.$$

Здесь обозначили

$$\sigma(\mathbf{s}) = s_1 + \dots + s_D$$

для вектора  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_D)$ . Вытянутые кубы  $C_s$  обладают следующим важным для наших целей свойством ([4], теорема 1.1):

для любого вектора  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^D$  имеет место разбиение пространства

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L_s} C_s[l], \quad (3)$$

где  $C_s[l] = C_s + l$  — множество, полученное сдвигом куба  $C_s$  на вектор  $l$ , и

$$L_s = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_{1,s}, \dots, \mathbf{e}_{D,s}]$$

— полная решетка, порождаемая векторами  $\mathbf{e}_{k,s} = \mathbf{e}_k + \mathbf{s}$  для  $k = 1, \dots, D$ .

**3.2. Вытянутые параллелоэдры  $C_c$ .** Линейное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{M_s} \mathbb{R}^D : \mathbf{e}_{k,s} \mapsto \mathbf{e}_k \quad k = 1, \dots, D \quad (4)$$

задает изоморфизм решеток

$$M_s : L_s^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^D$$

и переводит  $D$ -мерный единичный куб  $C$  в *параллелоэдр*

$$C = M_s(C), \quad (5)$$

натянутый соответственно на векторы

$$\mathbf{e}_{1,c} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{c}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{D,c} = \mathbf{e}_D - \mathbf{c},$$

где вектор  $\mathbf{c}$  вычисляется по формуле

$$\mathbf{c} = \text{inv}(\mathbf{s}). \quad (6)$$

Здесь

$$\text{inv}(x) = \frac{x}{\sigma(x) + 1}$$

представляет собою *линейно-инверсное преобразование* пространства  $\mathbb{R}^D$ .

Согласно (5), вытянутый куб  $C_{\mathbf{s}}$  отображается

$$M_{\mathbf{s}} : C_{\mathbf{s}} \longrightarrow C_{\mathbf{c}}$$

в многогранник

$$C_{\mathbf{c}} = \text{Str}_{\mathbf{c}}(C), \quad (7)$$

получающийся вытягиванием параллелоэдра  $C$  вдоль вектора  $\mathbf{c}$ , связанного с вектором  $\mathbf{s}$  формулой (6). *Вытянутый параллелоэдр*  $C_{\mathbf{c}}$  имеет объем

$$\text{vol } C_{\mathbf{c}} = 1 \quad (8)$$

и число вершин  $\sharp V(C_{\mathbf{c}}) = 2^{D+1} - 2$ .

**3.3. Вытягивающие векторы для параллелоэдров.** Согласно [5], имеет место биекция

$$\text{inv} : \mathbf{S}_{<1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_{<1} \quad (9)$$

между  $\mathbf{S}_{<1} = \mathbb{R}_+^D$  и множеством

$$\mathbf{C}_{<1} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) < 1\}, \quad (10)$$

где  $\sigma(\mathbf{c}) = c_1 + \dots + c_D$ . Множество  $\mathbf{C}_{<1}$  является  $D$ -мерным симплексом, замыкание которого содержит  $(D - 1)$ -мерный симплекс

$$\mathbf{C}_1^c = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}_+^D)^c; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}.$$

В [9] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. 1. *Множество*

$$\mathbf{C}_{\leq 1} = \mathbf{C}_{<1} \sqcup \mathbf{C}_1, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$$

- внутренность симплекса  $\mathbf{C}_1^c$ , представляет собою множество вытягивающих векторов для параллелоэдров (7): любому вектору  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$  соответствует  $\mathbf{c} \mapsto C_{\mathbf{c}}$
- выпуклый параллелоэдр  $C_{\mathbf{c}}$ .

2. *Вытянутые параллелоэдры*  $C_{\mathbf{c}}$  разбивают пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} C_{\mathbf{c}}[l] \quad (12)$$

на многогранники  $C_{\mathbf{c}}[l] = C_{\mathbf{c}} + l$  без общих внутренних точек.

**3.4. Разбиения и перекладывания вытянутых параллелоэдров.** Используя (12), определим разбиение пространства  $\mathbb{R}^D$ :

$$\mathcal{T}_c = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_c[l]. \quad (13)$$

Обозначим

$$\partial \mathcal{T}_c = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \partial \mathcal{C}_c[l]$$

множество всех границ разбиения  $\mathcal{T}_c$ , состоящее из границ всех многогранников  $\mathcal{C}_c[l]$ . Для любого  $\alpha = \lambda c$ ,  $0 < \lambda < 1$ , определим множество границ

$$\partial \mathcal{C}_{c,\lambda} = \partial \mathcal{C}_c \cup [\mathcal{C}_c \cap (\partial \mathcal{T}_c - \alpha)] \subset \mathcal{C}_c.$$

Границы  $\partial \mathcal{C}_{c,\lambda}$  разбивают вытянутый параллелоэдр  $\mathcal{C}_c$  на  $D + 1$  область без общих внутренних точек [5]:

$$\mathcal{C}_{c,\lambda} = \mathcal{P}_0^c \cup \dots \cup \mathcal{P}_D^c, \quad (14)$$

где  $\mathcal{P}_k^c$  для  $k = 1, \dots, D$  — параллелоэдры, содедержающие точки

$$e_k = (0, \dots, \overset{(k)}{1}, \dots, 0),$$

а

$$\mathcal{P}_0^c = [\mathcal{C}_c \setminus (\mathcal{P}_1^c \cup \dots \cup \mathcal{P}_D^c)]^c$$

— вытянутый параллелоэдр вида  $\mathcal{P}_0^c = \text{Str}_{c-\alpha}(\mathcal{C})$ .

Зададим перекладывание

$$S_v(\mathcal{C}_{c,\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} S_v(\mathcal{P}_0^c) \cup S_v(\mathcal{P}_1^c) \cup \dots \cup S_v(\mathcal{P}_D^c) \quad (15)$$

вытянутого параллелоэдра с разбиением (14), где

$$S_v(\mathcal{P}_k^c) = \mathcal{P}_k^c[v_k] = \mathcal{P}_k^c + v_k$$

— параллельный сдвиг многогранника  $\mathcal{P}_k^c$  на вектор

$$v_k = \alpha - \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ \mathbf{e}_k, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Перекладывание  $S_v$  индуцирует многозначное отображение

$$S_v : \text{Str}_c(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \quad (17)$$

определяемое условиями

$$x \mapsto S_v(x) = x + v_k, \quad \text{если } x \in \mathcal{P}_k^c.$$

Из ([4], предложение 1.1) вытекает следующее свойство перекладывания  $S_v$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Вытянутый параллелоэдр  $\mathcal{C}_{c,\lambda} = \text{Str}_c(\mathcal{C})$  с разбиением (14) замкнут  $S_v(\mathcal{C}_{c,\lambda}) \subseteq \mathcal{C}_{c,\lambda}$  относительно операции перекладывания (15).*

Из определения (16) векторов сдвигов  $v_k$  вытекает сравнение  $v_k \equiv \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}$  для любого  $k = 0, 1, \dots, D$ . Отсюда и (17) получаем сравнение

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}, \tag{18}$$

означающее, что многозначное отображение  $S_v$  становится однозначным на вытянутом параллелед্রে  $S_v : \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ , если отображение  $S_v$  рассмотреть по  $\pmod{\mathbb{Z}^D}$ .

Определим на торе  $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$  сдвиг

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D : x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}.$$

Тогда из (15)-(18) вытекает, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\mathbf{c}} & \xrightarrow{S_v} & \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \\ \text{mod } \mathbb{Z}^D \downarrow & & \downarrow \text{mod } \mathbb{Z}^D \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^D \end{array} \tag{19}$$

**3.5. Построение перекладывающихся торических разверток.** Чтобы построить для вытянутого параллелед্রে  $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$  с разбиением (14) соответствующую ему перекладывающуюся торическую развертку  $T_{\mathbf{c},\lambda} \subset \mathbb{R}^D$  (см. определение в п. 1.1), нам потребуется следующий  $i$ -алгоритм [4], определяющий индекс  $i(x)$  точек  $x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ .

Согласно  $i$ -алгоритму, любая точка  $x$  из вытянутого параллеледдре  $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$  имеет однозначно определенный индекс

$$i(x) = -1, 0, 1, \dots, D.$$

Если точка  $x$  принадлежит внутренности некоторого параллеледдре  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{c}}$ , то она имеет индекс  $i(x) = k$ . Так что смысл индекса  $i(x)$  состоит в том, что он распределяет общие граничные точки между параллеледдрями  $\mathcal{P}_0^{\mathbf{c}}, \mathcal{P}_1^{\mathbf{c}}, \dots, \mathcal{P}_D^{\mathbf{c}}$ .

Используя индекс  $i(x)$ , определим следующие незамкнутые многогранники

$$\mathcal{P}_k = \{x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}; i(x) = k\} \tag{20}$$

для  $k = 0, 1, \dots, D$ . Они состоят из всех внутренних точек параллеледдров  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{c}}$  и части их граничных точек. Из однозначности индекса  $i(x)$  следует  $\mathcal{P}_{k_1} \cap \mathcal{P}_{k_2} = \emptyset$  с номерами  $k_1 \neq k_2$ . Так определенные многогранники  $\mathcal{P}_k$  обладают следующим свойством [4].

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть параметр  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$  определен равенством  $\alpha = \lambda \mathbf{c}$ , где  $0 < \lambda \leq 1$  в случае  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{< 1}$  и  $0 < \lambda < 1$ , если  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$ . Кроме того, пусть  $\mathcal{P}_k$  — многогранники (20). Тогда их объединение

$$T_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D \tag{21}$$

является перекладывающейся торической разверткой из  $\mathbb{R}^D$ .

Итак, любому вытянутому параллеледдре  $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$  с разбиением  $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$  из (14)  $i$ -алгоритм ставит в соответствие

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \Rightarrow T(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) = T_{\mathbf{c},\lambda}^D \tag{22}$$

перекладывающуюся торическую развертку  $T_{\mathbf{c},\lambda}^D \subset \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$  с разбиением (21). Ее роль состоит в том, посредством биекции (3) она задает *каноническое разбиение* тора

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D \quad (23)$$

на множества  $\mathbb{T}_k^D = \mathcal{P}_k \bmod \mathbb{Z}^D$ , являющиеся по теореме 1 множествами ограниченного остатка.

Из последовательности шагов (14), (22) и (23) получается следующий алгоритм построения разбиений тора  $\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D$ .

*Общая схема для канонического разбиения тора  $\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D$  :*

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \Rightarrow T_{\mathbf{c},\lambda}^D \Rightarrow \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D. \quad (24)$$

## 4. Теорема Гекке для $BR$ -многогранников

**4.1. Многомерная теорема Гекке.** Пусть

$$T_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D$$

— перекладывающаяся торическая развертка (21) с заданным на ней перекладыванием  $S_v$  (см. определение (5)). Указанной развертке  $T_{\mathbf{c},\lambda}^D$  по схеме (24) соответствует разбиение тора

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D,$$

на котором определен сдвиг  $S_{\alpha}(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D$ . Введем обозначение (ср. (2))

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l), \quad (1)$$

при этом  $h$  — произвольное натуральное число и  $l \in \mathbb{Z}^D$ . Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \#\{j; S_{\beta}^j(x_0) \in \mathbb{T}_k^D; 0 \leq j < i\},$$

где  $S_{\beta}$  — сдвиг тора на вектор (1) и  $x_0$  — произвольная начальная точка на торе  $\mathbb{T}^D$ . Пусть вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$  записан в единичном базисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$  и  $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$ . Относительно отклонений

$$\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) - i \operatorname{vol}(\mathbb{T}_k^D) \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (2)$$

доказана следующая теорема [4].

ТЕОРЕМА 6. (*многомерное обобщение теоремы Гекке*).

1. Пусть  $\alpha = \lambda \mathbf{c}$ , где  $0 < \lambda \leq 1$  в случае  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$  и  $0 < \lambda < 1$ , если  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$ . Тогда в формуле (2) объемы равны

$$\text{vol}(\mathbb{T}_k^D) = \alpha_k \tag{3}$$

для  $k = 0, 1, \dots, D$  и для отклонений (2) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D)| \leq c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})h \tag{4}$$

для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Константы  $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$  вычисляются по формуле

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = \max_{v \in V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v - \min_{v \in V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v, \tag{5}$$

где  $\mathbf{e}_k$  — единичные векторы для  $k = 1, \dots, D$  и  $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_D$ . Здесь в (5) через  $V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$  обозначено множество вершин вытянутого параллелоэдра  $\mathbf{C}_{\mathbf{c}}$ . Таким образом, константы  $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$  в неравенстве (4) не зависят от выбора множителя  $h$  в определении (1) вектора сдвига  $\beta$ .

2. Если вектор  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$  записан в единичном базисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ , то константы  $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$  вычисляются по формулам:

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)c_k \tag{6}$$

для  $k = 1, \dots, D$ ; и соответственно

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \tag{7}$$

для  $k = 0$ .

3. Для констант  $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$  из (6), (7) выполняется общее неравенство

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) \leq D \quad \text{для любого } \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}. \tag{8}$$

**4.2. VR-многогранники.** Замкнутые многогранники  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{c}}$  с номерами  $k = 1, \dots, D$ , определенные в (14), допускают простое описание

$$\mathcal{P}_k^{\mathbf{c}} = P_k^{\mathbf{c}} + \omega. \tag{9}$$

Здесь  $P_k^{\mathbf{c}} \subset \mathbb{R}^D$  обозначает замкнутый параллелепипед, натянутый на векторы

$$\alpha, \quad \mathbf{c} - \mathbf{e}_{k'} \quad \text{для всех } k' = 1, \dots, D, \quad k' \neq k, \tag{10}$$

где  $\mathbf{c} = \lambda \alpha$  и  $\mathbf{e}_{k'}$  — единичные векторы. Точка

$$\omega = \mathbf{e}_0 - (D - 1)\mathbf{c} - \alpha, \tag{11}$$

где  $\mathbf{e}_0 = (1, \dots, 1)$ , является общей для всех многогранников  $\mathcal{P}_k^{\mathbf{c}}$  для  $k = 0, 1, \dots, D$ . При этом в случае  $k = 0$  многогранник  $P_0^{\mathbf{c}}$  также задается равенством (9), в котором полагаем  $\omega = 0$  и  $P_0^{\mathbf{c}}$  — вытянутый параллелоэдр вида (см. (7))

$$\mathcal{P}_0^{\mathbf{c}} = \text{Str}_{\mathbf{c} - \alpha}(\mathbf{C}). \tag{12}$$

Если  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$  и  $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$ , то из определения (10) следует

$$\text{vol } P_k^c = \alpha_k. \quad (13)$$

В (20) были определены незамкнутые многогранники  $\mathcal{P}_k$ , содержащие все внутренние и некоторые граничные точки многогранника  $\mathcal{P}_k^c$ . Используя  $\mathcal{P}_k$ , определим соответствующие незамкнутые многогранники  $P_k$  равенством (ср. (9))

$$P_k = \mathcal{P}_k + \omega \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D. \quad (14)$$

Множество  $X \subset \mathbb{R}^D$  назовем  $\mathbb{Z}^D$ -различимым, если оно удовлетворяет свойству

$$\forall x, y \in X : x - y \in \mathbb{Z}^D \Rightarrow x = y. \quad (15)$$

Из определения (14) следует, что все многогранники  $P_k$  являются  $\mathbb{Z}^D$ -различимыми, так как, согласно теореме 4.1, все их сдвиги в совокупности образуют торическую развертку  $T_{\mathbf{c}, \lambda}^D$ . Пусть дан произвольный вектор сдвига  $\beta \in \mathbb{R}^D$  и число  $h = 1, 2, 3, \dots$  — такое, что существует вектор  $\alpha$ , удовлетворяющий условиям

$$\alpha \in \mathbf{C}_{<1}, \quad \alpha \equiv h\beta \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (16)$$

Обозначим

$$P_k = P_{\beta, h, \lambda, k} \quad (17)$$

многогранники, определенные равенствами (14) для векторов  $\alpha$  из (16) и  $\mathbf{c} = \lambda\alpha$ , где  $\sigma(\alpha) < \lambda \leq 1$ .

Для сдвига  $S_\beta$  тора  $\mathbb{T}^D$  и многогранника  $P_k$  зададим *считающую функцию*

$$r(i; \beta, x_0, P_k) = \#\{j; S_\beta^j(x_0) \in P_k \pmod{\mathbb{Z}^D}, 0 \leq j < i\},$$

где  $x_0$  — произвольная начальная точка на торе  $\mathbb{T}^D$ ; и, принимая во внимание равенство (13), определим отвечающее функции  $r(i; \beta, x_0, P_k)$  *отклонение*

$$\delta(i; \beta, x_0, P_k) = r(i; \beta, x_0, P_k) - i \text{vol } \mathbb{P}_k^D \quad (18)$$

распределения точек орбиты  $\text{Orb}(S_\beta, x_0)$  относительно области  $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \pmod{\mathbb{Z}^D}$  на торе  $\mathbb{T}^D$ , имеющие, согласно (3) и (13), объемы  $\text{vol } \mathbb{P}_k^D = \text{vol } P_k^c = \alpha_k$  для  $k = 0, 1, \dots, D$ .

Из теоремы 6 вытекает следствие [5].

**ТЕОРЕМА 7.** Пусть даны вектор сдвига  $\beta \in \mathbb{R}^D$  и  $h = 1, 2, 3, \dots$ , удовлетворяющие условиям (16),  $\mathbf{c} = \lambda\alpha$ , где  $\sigma(\alpha) < \lambda \leq 1$ , и пусть  $P_k = P_{\beta, h, \lambda, k}$  — отвечающие этим параметрам многогранники (17). При этих условиях имеют место следующие утверждения.

1. Для отклонений (18) выполняются неравенства

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leq h\gamma_k \quad (19)$$

с константами

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)c_k \quad (20)$$



для  $k = 1, \dots, D$  и

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \tag{21}$$

для  $k = 0$ , где  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$ .

2. Также для отклонений выполняется общее неравенство

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leq hD. \tag{22}$$

Как уже отмечалось, многогранники  $P_k$ , определенные в (14), являются  $\mathbb{Z}^D$ -различимыми, а из теоремы 7 следует, что относительно сдвига  $S_\beta$  многогранники  $P_k$ , если их рассматривать как области  $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$  на торе  $\mathbb{T}^D$ , являются множествами ограниченного остатка. По аналогии с определением (2) многогранники, обладающие указанными свойствами, естественно назвать *многогранниками ограниченного остатка* или, кратко, *BR-многогранниками*.

Для произвольной размерности  $D$  многогранники  $P_k$  с номерами  $k = 1, \dots, D$  по своей конструкции — параллелепипеды (10) — представляют собою простейший вид BR-многогранников. Многогранник  $P_0$  также может быть параллелепипедом в исключительном случае вектора  $\mathbf{c} = \lambda\alpha$ , когда  $\lambda = 1$ . Если же  $\lambda < 1$ , то  $P_0$  — параллеледр с числом вершин  $\#V(P_k) = 2^{D+1} - 2$ .

Заметим, что приведенное во введении неравенство (4) вытекает из неравенства (22).

Далее мы предполагаем построить более сложные BR-множества, состоящие из объединения нескольких многогранников, каждый из которых уже не обязан быть BR-многогранником.

## 5. Многоцветные разбиения торов

**5.1. Вложения торов и торические обмотки.** Определим вложение

$$\mathbb{R}^d \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}}^d \subseteq \mathbb{R}^D, \tag{1}$$

полагая  $\widehat{x} = (x, 0)$  для  $x \in \mathbb{R}^d$ . Здесь считаем, что  $\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$ , где  $D = d + d'$ .

Поскольку кубическая решетка  $\mathbb{Z}^D$  также разлагается в прямое произведение  $\mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^{d'}$ , то вложение (1) можно факторизовать

$$x \bmod \mathbb{Z}^d \mapsto \widehat{x} \bmod \mathbb{Z}^D \tag{2}$$

в виде вложения

$$\mathbb{T}^d \hookrightarrow \widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \tag{3}$$

тора  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$  в тор  $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$ . Так определенное вложение (3) согласовано

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d & \hookrightarrow & \mathbb{T}^D \\ S_\alpha \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\widehat{\alpha}} \\ \mathbb{T}^d & \hookrightarrow & \mathbb{T}^D \end{array} \tag{4}$$

с действием соответствующих сдвигов торов

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^d, \quad S_{\widehat{\alpha}}(\widehat{x}) \equiv \widehat{x} + \widehat{\alpha} \bmod \mathbb{Z}^D. \tag{5}$$

Укажем, что в (5) при определении сдвига  $S_\alpha$  — в отличие от п. 1.1 — мы теперь выбираем  $d$ -мерный вектор сдвига  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ .

Тор меньшей размерности  $\widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D$  будем называть *торической обмоткой* в  $\mathbb{T}^D$ . Из (3) и (4) следует, что торическая обмотка  $\widehat{\mathbb{T}}^d$  — инвариантное множество

$$S_{\widehat{\alpha}} \widehat{\mathbb{T}}^d = \widehat{\mathbb{T}}^d \quad (6)$$

относительно сдвига  $S_{\widehat{\alpha}}$ .

Начиная с этого места, если не оговорено противное, будем предполагать, что вектор сдвига  $\alpha$  тора  $\mathbb{T}^d$  максимально иррациональный, т.е.  $\text{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\mathbb{Z}^d) = d$ .

**5.2. Автоморфизмы тора  $\mathbb{T}^D$ .** С помощью автоморфизмов тора  $\mathbb{T}^D$  исходя из некоторой фиксированной обмотки  $\widehat{\mathbb{T}}^d$  можно получить богатое семейство других торических обмоток на торе  $\mathbb{T}^D$ . Обозначим  $\text{Aut } \mathbb{T}^D$  группу автоморфизмов тора  $\mathbb{T}^D$ . Ее можно разложить в прямое произведение

$$\text{Aut } \mathbb{T}^D \simeq \text{Aut}_h \times \text{Aut}_s$$

ее некоммутативной подгруппы гиперболических автоморфизмов  $\text{Aut}_h \simeq \text{GL}_D(\mathbb{Z})$  и коммутативной подгруппы сдвигов тора  $\text{Aut}_s \simeq \mathbb{T}^D$ . Здесь  $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$  обозначает *группу унимодулярных матриц* или, иначе, матриц с целыми коэффициентами определителя  $\pm 1$ .

1. *Гиперболические автоморфизмы тора  $\mathbb{T}^D$ .* Любая матрица  $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$  задает автоморфизм тора  $\mathbb{T}^D$  следующим образом

$$A : \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D : x^D \bmod \mathbb{Z}^D \mapsto Ax^D \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (7)$$

Это непосредственно вытекает из свойства  $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$  быть группой автоморфизмов кубической решетки  $\mathbb{Z}^D$ : для любого  $A$  из группы  $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$  отображение  $x^D \mapsto Ax^D$  задает изоморфизм решетки  $\mathbb{Z}^D$ .

2. *Сдвиги тора  $\mathbb{T}^D$ .* Если элемент  $t^D \in \mathbb{T}^D$ , то отвечающий ему автоморфизм тора  $\mathbb{T}^D$  из подгруппы  $\text{Aut}_s$  будет обычным сдвигом тора

$$S_{t^D} : \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D : x^D \mapsto x^D + t^D \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (8)$$

**5.3. Согласованность сдвига  $S_\alpha$  с автоморфизмами тора  $\mathbb{T}^D$ .** Для произвольного преобразования  $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$  и вектора  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  обозначим

$$A^\wedge \alpha = A\widehat{\alpha} \quad (9)$$

и определим вектор сдвига  $\widehat{\alpha}_A$  тора  $\mathbb{T}^D$ :

$$\widehat{\alpha}_A \equiv A^\wedge \alpha \bmod \mathbb{Z}^D,$$

полагая при этом, что вектор  $\widehat{\alpha}_A$  имеет вид

$$\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1}, \dots, \widehat{\alpha}_{A,D}), \quad \text{где } 0 \leq \widehat{\alpha}_{A,k} < 1. \quad (10)$$

При автоморфизме тора (7) преобразование сдвига  $S_{\widehat{\alpha}}$  переходит в преобразование  $S_{\widehat{\alpha}_A}$ , что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^D & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^D \\ S_{\widehat{\alpha}} \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\widehat{\alpha}_A} \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (11)$$

Из диаграммы (11) и коммутативности сдвигов

$$S_{t^D} \circ S_{\hat{\alpha}_A} = S_{\hat{\alpha}_A} \circ S_{t^D}$$

получаем еще одну коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^D & \xrightarrow{\sim}^{A_{t^D}} & \mathbb{T}^D \\ S_{\hat{\alpha}} \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\hat{\alpha}_A} \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow{\sim}^{A_{t^D}} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (12)$$

где автоморфизм  $A_{t^D}$  тора  $\mathbb{T}^D$  определяется как композиция

$$A_{t^D}(x^D) \equiv Ax^D + t^D \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (13)$$

**5.4. Стационарные разбиения тора  $\mathbb{T}^d$ .** Пусть  $t = t^D$  и

$$\hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d = A_t^\wedge \mathbb{T}^d = S_t A \hat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \quad (14)$$

— торическая обмотка, где полагаем

$$A_t^\wedge(x) = A_t(\hat{x}).$$

Из диаграммы (12) и инвариантности (6) торической обмотки  $\hat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$  вытекает инвариантность

$$S_{\hat{\alpha}_A} \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d = \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \quad (15)$$

обмотки (14), при этом, как нетрудно убедиться, имеют место следующие коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\sim}^{A_t^\wedge} & \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \\ S_\alpha \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\hat{\alpha}_A} \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\sim}^{A_t^\wedge} & \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \end{array} \quad (16)$$

и

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}^D \\ S_{\hat{\alpha}_A} \downarrow \sim & & \downarrow \sim S_{\hat{\alpha}_A} \\ \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (17)$$

Здесь  $\text{id}$  обозначает тождественное вложение обмотки  $\hat{\mathbb{T}}^d$  в содержащий ее тор  $\mathbb{T}^D$ .

Пусть вектор сдвига  $\alpha$  будет иррациональным. Для таких  $\alpha$  в [9] доказано, что существуют преобразования  $A$  из группы  $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$  с условием

$$\sigma(\hat{\alpha}_A) < 1, \quad (18)$$

где

$$\sigma(\hat{\alpha}_A) = \hat{\alpha}_{A,1} + \dots + \hat{\alpha}_{A,D}$$

для вектора (10). Неравенство (18) означает, что  $\hat{\alpha}_A$  принадлежит

$$\hat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{<1} \quad (19)$$

— множеству параметров (10). Определим вектор  $\mathbf{c}$  равенством

$$\widehat{\alpha}_A = \lambda \mathbf{c}, \quad \text{где } \sigma(\widehat{\alpha}_A) < \lambda \leq 1. \quad (20)$$

Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{c}$  также, как и вектор  $\widehat{\alpha}_A$ , удовлетворяет условию

$$\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}. \quad (21)$$

Для таких векторов  $\mathbf{c}$  по схеме (24) мы можем построить

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D \quad (22)$$

— каноническое разбиение тора  $\mathbb{T}^D$ . Используя разбиение (22) и вложение (17), можем естественным образом задать разбиение торической обмотки  $\widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \subset \mathbb{T}^D$ , полагая

$$\widehat{\mathbb{T}}_{A_t,\mathbf{c},\lambda}^d = \widehat{\mathbb{T}}_{A_t,0}^d \sqcup \widehat{\mathbb{T}}_{A_t,1}^d \sqcup \dots \sqcup \widehat{\mathbb{T}}_{A_t,D}^d, \quad (23)$$

где

$$\widehat{\mathbb{T}}_{A_t,k}^d = \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \cap \mathbb{T}_k^D$$

и множества  $\mathbb{T}_k^D$  взяты из разбиения (22).

Теперь с помощью изоморфизма (2) мы можем перенести разбиение (23) обмотки  $\widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d$  на изоморфный ей тор  $\mathbb{T}^d$ :

$$\mathbb{T}_{A_t,\mathbf{c},\lambda}^d = \mathbb{T}_{A_t,0}^d \sqcup \mathbb{T}_{A_t,1}^d \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_{A_t,D}^d. \quad (24)$$

Разбиение  $\mathbb{T}_{A_t,\mathbf{c},\lambda}^d$  назовем *стационарным* разбиением тора  $\mathbb{T}^d$ . Такое название обусловлено тем, что в п. 7.1 мы определим еще другой вид, так называемых, динамических разбиений.

**5.5. Распределение точек орбит на торе  $\mathbb{T}^D$ : общий случай.** Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \#\{j; S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D; 0 \leq j < i\} \quad (25)$$

для сдвига тора  $S_{\widehat{\beta}_A}$  на вектор  $\widehat{\beta}_A = A^\wedge \beta$ . Здесь  $x_0^D$  — произвольная начальная точка на торе  $\mathbb{T}^D$  и

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d), \quad (26)$$

где  $h$  — произвольное натуральное число и  $l^d$  из решетки  $\mathbb{Z}^D$ . Обозначим

$$\delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \mathbf{r}_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) - i\widehat{\alpha}_{A,k} \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (27)$$

— отклонение распределения точек орбиты  $\text{Orb}(S_{\widehat{\beta}_A}, x_0)$  относительно области  $\mathbb{T}_k^D$  на торе  $\mathbb{T}^D$ , где согласно (19) координаты вектора  $\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1}, \dots, \widehat{\alpha}_{A,D})$  удовлетворяют условиям:

$$\widehat{\alpha}_{A,1} + \dots + \widehat{\alpha}_{A,D} < 1 \quad \text{и} \quad \widehat{\alpha}_{A,k} > 0. \quad (28)$$

Аналогично, как это было сделано в теореме 3, дополнительно определяем нулевую координату

$$\widehat{\alpha}_{A,0} = 1 - \widehat{\alpha}_{A,1} - \dots - \widehat{\alpha}_{A,D} = 1 - \sigma(\widehat{\alpha}_A). \quad (29)$$

Из (28) следует, что  $\widehat{\alpha}_{A,0} > 0$ . Тогда, согласно теореме 6, для отклонений (27) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad (30)$$

для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Здесь константы  $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$  в силу (6) и (7) вычисляются по следующим формулам:

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)c_k \quad (31)$$

для  $k = 1, \dots, D$  и

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad (32)$$

для  $k = 0$ , где вектор  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$  определен в (20). Для констант  $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$  из формул (31) и (32) вытекает грубое неравенство

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) < D \quad (33)$$

для всех  $k = 0, 1, \dots, D$ .

**5.6. Отклонения на  $\mathbb{T}^d$ : стационарный случай.** Выберем произвольную начальную точку  $x_0^d$  на торе  $\mathbb{T}^d$  и для стационарного разбиения  $\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$  из (15) определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \#\{j; S_{\beta}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_{A_t, k}^D; 0 \leq j < i\}, \quad (34)$$

а также отклонение

$$\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) - i \widehat{\alpha}_{A, k} \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (35)$$

распределения точек орбиты  $\text{Orb}_{S_{\beta}}(x_0^d)$  относительно области  $\mathbb{T}_{A_t, k}^D$  из разбиения тора  $\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ , определенного в (24).

**ТЕОРЕМА 8. 1.** Пусть параметр  $\mathbf{c}$  определен равенством (20), где  $\widehat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{\leq 1}$  для некоторого преобразования  $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ . Тогда для отклонений (35) имеют место неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (36)$$

где константы  $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$  определены в (31) и (32).

2. При тех же условиях, независимо от выбора параметра  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{< 1}$ , выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| < Dh \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D. \quad (37)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть вектор сдвига  $\widehat{\beta}_A$  определен согласно (10). Так как по условию  $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$ , где  $l^d \in \mathbb{Z}^D$ , то обмотка  $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$  инвариантна  $S_{\widehat{\beta}}(\widehat{\mathbb{T}}^d) = \widehat{\mathbb{T}}^d$  относительно сдвига  $S_{\widehat{\beta}}$ . Отсюда следует инвариантность

$$S_{\widehat{\beta}_A} \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d = \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \quad (38)$$

обмотки (14).

Пусть  $x_0^D = A_t \wedge x_0^d$ . Согласно коммутативной диаграмме (17), имеем согласование

$$S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \widehat{\mathbb{T}}_{A_t, k}^d \Leftrightarrow S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D,$$

а в силу диаграммы (16) и (38) — еще одно согласование

$$S_{\beta}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_k^d \Leftrightarrow S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \widehat{\mathbb{T}}_{A_t, k}^d.$$

Отсюда для любого  $k$  выводим равносильность

$$S_{\beta}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_{A_t, k}^d \Leftrightarrow S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D. \quad (39)$$

Из определений (34), (35) и согласования (39) для любого  $i$  вытекает равенство отклонений

$$\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D), \quad (40)$$

для  $k = 0, 1, \dots, D$ . Теперь из равенства (40) и теоремы 6 следуют неравенства (36) и (37).  $\square$

## 6. Заключение

Чтобы продвигаться дальше, было бы интересно на первом шаге более подробно рассмотреть случай  $d = 1$ , когда описанным выше методом получаются конечные разбиения

$$\mathbb{X}^1 = \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^1 \subset \mathbb{T}^1$$

единичной окружности или, что равносильно — единичного полуинтервала  $\mathbb{T}^1$ . По теореме 8 разбиения  $\mathbb{X}^1$  состоят

$$\mathbb{X}^1 = \mathbb{X}_0^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{X}_D^1 \quad (41)$$

из множеств ограниченного остатка  $\mathbb{X}_k^1$  для  $k = 0, 1, \dots, D$ .

Каждое такое  $\mathbb{X}_k^1$  есть конечное объединение полуинтервалов и при этом для отклонений  $\delta_k(i; \beta, x_0^1, \mathbb{X}^1)$  выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^1, \mathbb{X}^1)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad (42)$$

для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$

С другой стороны, ранее [2] Орен также рассматривал конечные объединения полуинтервалов  $X^1$  и для них получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Более того, А. В. Шутов [10] получил явные оценки в (43).

Из сопоставления двух оценок (42) и (43) сразу возникает несколько задач.

1. Образуют ли совокупности всех множеств  $\mathbb{X}_k^1$  из (41) и  $X^1$  из (43) один и тот же класс множеств ограниченного остатка на  $\mathbb{T}^1$ .

2. Как ведут себя отклонения из (42) с ростом размерности  $D \rightarrow \infty$  объемлющего пространства  $\mathbb{R}^D$ .

3. Описать развертки  $T^D$  тора  $\mathbb{T}^D$ , минимизирующие границы отклонений в неравенствах (42).

4. Чему соответствуют размерность  $D$  и развертки тора  $T^D$  в терминах работ [2] и [10].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins // Math. Sem. Hamburg. Univ. 1921. Bd. 1. S. 54–76.
2. Oren I. Admissible functions with multiple discontinuities // Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City. 1981. Vol. V. I. P. 217–230.
3. Журавлев В. Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 95–130.
4. Журавлев В. Г. Переключающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95–145.
5. Журавлев В. Г. Многогранники ограниченного остатка. Математика и информатика, 1 — К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы. — Совр. пробл. матем. Москва: МИАН, 2012. 128 с.
6. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. т. 2. Киев: Из-во АН Украинской ССР, 1952. 420 с.
7. Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. Москва: Из-во АН СССР, 1953. 418 с.
8. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352.
9. Журавлев В. Г. Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 97–136.
10. Шутов А. В. Проблема Гекке – Кестена для нескольких интервалов // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 1. С. 172–177.

## REFERENCES

1. Hecke, E. 1922, "Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 1, no. 1, pp. 54–76. (German)
2. Oren, I. 1981, "Admissible functions with multiple discontinuities", *Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City*, vol. V. I., pp. 217–230.
3. Zhuravlev, V. G. 2012, "A multidimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts", *Algebra i Analiz*, vol. 24, no. 1, pp. 95–130. (Russian); translation in *St. Petersburg Math. J.* 2013. vol. 24, no. 1, pp. 71–97.
4. Zhuravlev, V. G. 2011, "Exchanged toric developments and bounded remainder sets", *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 392, *Analiticheskaya Teoriya Chisel i Teoriya Funktsii.* 26, pp. 95–145, 219–220. (Russian); translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)* 184 (2012), no. 6, pp. 716–745.

5. Zhuravlev, V. G. 2012, "Polyhedra bounded remainder", *Mathematics and informatics, 1 — the 75th anniversary of Anatolia Alekseevicha Karatsuba. — Sovrem. probl. Mat. Moscow, Steklov Mathematical Institute*, 2012. 128 p. (Russian)
6. Voronoi, G. F. 1952, 1953, "Sobranie socinenii v treh tomah", [Collected works in three volumes.] *Izdatel'stvo Akademii Nauk Ukrainskoi SSR, Kiev*, vol. I, 1952, 399 p.; vol. II, 1952, 391 p.; vol. III, 1953, 306 p. (Russian)
7. Fedorov, E. S. 1953, "Nacala uceniya o figurah", [Elements of the study of figures.] *Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow*, 410 p. (Russian)
8. Weyl, H. 1916, "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins", *Math. Ann.* Bd. 77. S. 313–352.
9. Zhuravlev, V. G. 2012, "Moduli of toric tilings into bounded remainder sets and balanced words", *Algebra i Analiz*, vol. 24, no. 4, pp. 97–136. (Russian); translation in *St. Petersburg Math. J.* 2013, vol. 24, no. 4, pp. 601–629.
10. Shutov, A. V. 2011, "The Hecke-Kesten problem for some integrals", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, no. 1(37), pp. 172–177. (Russian)

Владимирский государственного университета им. братьев Столетовых.  
Поступило 15.04.2015