ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-334-346

Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках

Е. Ю. Юденкова

Юденкова Екатерина Юрьевна — аспирант, Московский педагогический государственный университет; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (г. Москва).

e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Аннотация

В настоящей работе доказывается бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках. Используется модификация обобщенного метода Зигеля-Шидловского. F-ряд – это ряд вида $f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$, коэффициенты которого a_n удовлетворяют некоторым арифметическим свойствам. Эти ряды сходятся в поле $\mathbb{Q}_p$ – p-адических чисел и их алгебрических расширений $\mathbb{K}_v$. Полиадическое число – это ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}$. Лиувиллево число – это вещественное число x такое, что для всех положительных целых чисел n существует бесконечное число пар целых чисел $(p,q), q > 1$ таких, что $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$. Полиадическое лиувиллево число α обладает тем свойством, что для любых чисел P, D существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство $|\alpha - A|_p < A^{-D}$. Бесконечная линейная (алгебраичская) независимость означает, что для любой ненулевой линейной формы (любого ненулевого многочлена) существует бесконечно много простых чисел p и нормирований v, продолжающих p-адическое нормирование на алгебраическое числовое поле $\mathbb{K}$, со следующим свойством: результат подстановки в рассматриваемую линейную форму (многочлен) значений F-рядов вместо переменных является отличным от нуля элементом поля $\mathbb{K}_v$.

Ранее было доказано лишь существование хотя бы одного простого числа p с перечисленными выше свойствами.

Ключевые слова: Метод Зигеля-Шидловского, F-ряды, полиадические лиувиллевы точки.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Е. Ю. Юденкова. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 334–346.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-334-346

Infinite linear and algebraic independence of values of F-series at polyadic Liouvillea points

E. Yu. Yudenkova

Yudenkova Ekaterina Yurievna — graduate student, Moscow Pedagogical State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Abstract

This paper proves infinite linear and algebraic independence of the values of F-series at polyadic Liouville points using a modification of the generalised Siegel-Shidlovskii method. F-series have form $f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ whose coefficients a_n satisfy some arithmetic properties. These series converge in the field $\mathbb{Q}_p$ of p-adic numbers and their algebraic extensions $\mathbb{K}_v$. Polyadic number is a series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}$. Liouville number is a real number x with the property that, for every positive integer n, there exist infinitely many pairs of integers (p, q) with $q > 1$ such that $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$. The polyadic Liouville number α has the property that for any numbers P, D there exists an integer $|A|$ such that for all primes $p \leq P$ the inequality $|\alpha - A|_p < A^{-D}$. Infinite linear (algebraic) independence means that for any nonzero linear form (any nonzero polynomial) there are infinitely many primes p and valuations v extending p-adic valuation to an algebraic number field $\mathbb{K}$ with the following property: the result of substitution in the considered linear form (polynomial) of the values of F - of series instead of variables is a nonzero element of the field.
Previously, only the existence of at least one prime number p with the properties listed above was proved.

Keywords: Method by Siegel–Shidlovscii, F-series, polyadic Liouville numbers.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
E. Yu. Yudenkova, 2021, “Infinite linear and algebraic independence of values of F-series at polyadic Liouvillea points”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 334–346.

Введение и формулировки результатов

Цель настоящей работы – доказательство бесконечной линейной и алгебраической независимости значений F – рядов в Лиувиллевых полиадических точках. Классический метод Зигеля – Шидловского был использован для E и G функций Зигеля, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, коэффициенты которых обладают определенными арифметическими свойствами.

Дадим точное определение F – ряда

Определение 1. *Ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$$

принадлежит классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, если его коэффициенты принадлежат полю $\mathbb{K}$ и удовлетворяют условиям

1. *$|\overline{a_n}| = O(\exp(c_1 n)), n \to \infty$ (где для алгебраического числа α символ $|\overline{\alpha_n}|$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);*
2. *существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n$.*

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p, не большие $c_2 n$, причём

$$\operatorname{ord}_p d_{0,n} \leqslant c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Полиадическое лиувиллево число α обладает тем свойством, что для любых чисел P, D существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство

$$|\alpha - A|_p < A^{-D}.$$

Настоящая работа развивает результаты В.Г.Чирского, из которых следует, что для любой ненулевой линейной формы и многочлена существовует хотя бы одно простое число p такое, что в поле p – адических чисел результат подстановки значений F – рядов в полиадической лиувиллевой точке вместо переменных отличных от 0. В предлагаемой работе этот результат усиливается и доказывается существование бесконечного множества простых чисел с таким свойством.

Перейдем к формулировкам утверждений. Предположим, что рассматриваемые ряды $f_i(z), i = 1, \ldots, m$ составляют (формальное) решение системы дифференциальных уравнений

$$y'(z) = \sum_{j=1}^{m} Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \ldots, m, Q_{j,i}(z) \in \mathbb{K}(z), i, j = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Пусть $T = T(z)$ – многочлен с целыми коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ такой, что

$$T(z) Q_{j,i}(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], j, i = 1, \ldots, m.$$

В работе [1] А.И. Галочкин доказал теорему об алгебраической независимости значений E – функций в трансцендентных точках, допускающих высокий порядок приближения алгебраическими числами.

Э.Бомбиери в своей работе [2] в 1981 г. ввел понятие глобального соотношения.

Определение 2. *Пусть $P(y_1, \ldots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}$. Соотношение*

$$P(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)) = 0 \tag{2}$$

называется глобальным, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$. Назовем глобальное соотношение (2) тривиальным, если оно получается в результате подстановки $z = \xi$ в алгебраическое уравнение, связывающее $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ над $\mathbb{K}(z)$ и нетривиальным в противном случае.

Сформулированное выше понятие глобального соотношения допускает следующее обобщение. Пусть

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \tag{3}$$

где $\theta_k \in \mathbb{K}$, причему этот ряд сходится во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Примеры таких рядов и описание их свойств будут приведены в конце второго параграфа.

Тогда в определениях глобального соотношения и нетривиального глобального соотношения можно рассматривать такую точку ξ вместо точки ξ из поля $\mathbb{K}$.

Обозначим $\Theta_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k$.

Теорема 1. *Пусть F – ряды $f_1 \equiv 1, f_2, \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}$. Пусть ξ – ряд (3), где θ_k – целые числа из поля $\mathbb{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству*

$$p \leq m \exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{4}$$

и любого нормирования v, продолжающего p - адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(m-1+\delta)(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|). \tag{5}$$

Тогда для любой линейной форму $L(y_1, \ldots, y_m)$, коэффициенты которой – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v, продолжающих p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_v = |L(1, f_2(\xi), \ldots, f_m(\xi))|_v > 0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть F – ряды $f_1, f_2, \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений*

$$y_i'(z) = Q_{0,i}(z) \sum_{j=1}^{m} Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \ldots, m,$$
$$Q_{j,i}(z) \in \mathbb{K}(z), i = 1, \ldots, m, j = 0, \ldots, m. \tag{7}$$

и алгебраически независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть ξ – ряд (3), где θ_k – целые числа из поля $\mathbb{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству

$$p \leq m \exp(\ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{8}$$

и любого нормирования v, продолжающего p - адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|), |\Theta_n| > \exp(\ln^{2+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{9}$$

Тогда для любого многочлена $P(y_1, \ldots, y_m)$, коэффициенты которого – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v, продолжающих p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|P(\xi)|_v = |P(f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_m(\xi))|_v > 0.$$

Доказательство теорем 1 и 2

В формулируемых утверждениях положительные постоянные $c_i, i = 4, 5, \ldots$ зависят от параметров класса, которому принадлежат рассматриваемые F – ряды, от системы (1) и от числа m.

Определим соответсвующий системе (1) дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}(z) y_i \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Пусть $y_1, \ldots, y_m, m \geq 2$ представляют собой степенные ряды, составляющие формальное решение системы уравнений (1). Подставляя их в форму

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(z) y_i$$

вместо переменных, получаем формальный степенной ряд $R(z)$ по степеням z. Формальная производная ряда $R(z)$ по z является линейной формой от рядов $y_1, \ldots, y_m$ и их формальных производных. После замены $y_1', \ldots, y_m'$ на правые части соответствующих дифференциальных уравнений и умножения на многочлен $T = T(z)$ получим линейную форму от $y_1, \ldots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, т.е. для решений этой системы $TDR = TR'$. Таким образом, начав с произвольной формы

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}(z) y_i, P_{1,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], i = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

положим

$$R_k = TDR_{k-1}, k = 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Согласно сказанному выше, R_k представляет собой линейную форму от $y_1, \ldots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, т.е.

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i} y_i, P_{k,i} = P_{k,i}(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]. \tag{12}$$

Коэффициенты этой формы удовлетворяют равенствам

$$P_{k,i} = T\left(P'_{k-1,i} + \sum_{j=1}^{m} P_{k-1,j} Q_{j,i}\right), i = 1, \ldots, m, k = 2, 3, \ldots. \tag{13}$$

Лемма 1. *(Лемма 10 [3], с. 106). Пусть F – ряды $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}$. Пусть*

$$\rho = \min_{1 \leq i \leq m} \operatorname{ord}_{z=0} f_i(z),$$

$$\sigma = \max(\deg T, \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} \deg TQ_{j,i}).$$

Пусть N – натуральное число, R_1 – отличная от нуля линейная форма

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}(z) y_i, P_{1,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], i = 1, \ldots, m,$$

причем $\deg P_{1,i}(z) \leq N$, пусть ряд $R_1(z)$ получается из формы R_1 в результате подстановки $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ вместо $y_1, \ldots, y_m$ и пусть

$$\operatorname{ord}_{z=0} R_1(z) \geq m(N+1) - s - 1, s \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq \left[\frac{N}{2}\right].$$

Тогда при $N \geq N_0$ (где N_0 – постоянная, для которой в [19] дана оценка сверху, выраженная через параметры рассматриваемого класса рядов и системы дифференциальных уравнений) формы $R_1, \ldots, R_m$ линейно независимы и их определитель $\Delta(z)$ имеет вид

$$\Delta(z) = z^{mn-s-\rho} \Delta_1(z),$$

где многочлен $\Delta_1(z)$ имеет степень $t_1, 0 \leq t_1 \leq t$, а $t = \sigma \frac{m(m-1)}{2} + s + \rho$.

Лемма 2. *(Лемма 11 [3], с. 107). Пусть F – ряды $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}$, числа ρ, σ, N_0, s, t – те же, что и в предыдущей лемме. Пусть R_1 – отличная от нуля линейная форма, определенная в предыдущей лемме такая, что*

$$\mathrm{ord}_{z=0} R_1(z) \geq m(N+1) - s - 1.$$

Тогда при $N \geq N_0$ для любого целого числа $\Theta \in \mathbb{K}, \Theta T(\Theta) \neq 0$, матрица

$$||P_{k,i}(\Theta)||_{i=1,\ldots,m,k=1,\ldots,m+t} \tag{14}$$

имеет ранг m.

Лемма 3. *Пусть ряды*

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} n! z^n, i = 1, \ldots, m$$

принадлежат классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$. Тогда для любого натурального числа N существуют многочлены

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^{N} B_{i,n} n! z^n, i = 1, \ldots, m$$

такие, что их коэффициенты $B_{i,n}, n = 0, \ldots, N, i = 1, \ldots, m$ являются целыми числами из поля $\mathbb{K}$, удовлетворяющими неравенству

$$|\overline{B_{i,n}}| \leq \exp(c_4 N \sqrt{\ln N}). \tag{15}$$

При этом линейная форма

$$R(z) = \sum_{i=1}^{m} P_i(z) f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n n! z^n$$

имеет при $z = 0$ порядок нуля не ниже, чем $u(N) + 1$, где

$$u(N) = m(N+1) - \left[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right] \tag{16}$$

и для любого простого числа $p, c_5 \leq p \leq u(N)$ и любого $v|p$, для любой точки $\xi \in \mathbb{K}_v$, удовлетворяющей условию $|\xi|_v \leq 1$, справедливо неравенство

$$|R(\xi)|_v \leq |(u(N))!|_v \exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa}\left(c_6 \log_p N + c_7 \frac{N}{p^2}\right)\right).$$

Эта лемма вполне аналогична леммам, приведенным в лемме 14 в [3], с. 113 или [4], с. 7. Ее подробное доказательство опущено. Следующая лемма также аналогичная лемме 15 [3], с. 116.

Лемма 4. *Пусть ряды $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ принадлежат классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над $\mathbb{K}(z)$, линейная форма (10) $R_1(z) = R(z)$ построена по лемме 3, формы R_k и их коэффициенты $P_{k,i}$ определены равенствами (11) - (13), $\Theta \in \mathbb{K}, \Theta T(\Theta) \neq 0$. Число σ определено в лемме 1. Тогда $\deg P_{k,i}(z) \leq N + (k-1)\sigma$,*

$$|\overline{P_{k,i}(\Theta)}| \leq \left(\prod_{n=0}^{k-1}(n\sigma + m + N)\right)\cdot$$

$$\cdot \exp(N\ln N + c_8 N\sqrt{N\ln N} + c_9 k)|\overline{\Theta}|^{N+\sigma\frac{m(m-1)}{2}+[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]}. \tag{17}$$

Кроме того, для любого простого числа $p, c_5 \le p \le u(N)$ *и любого* $v|p$, *для любой точки* $\xi \in \mathbb{K}_v$, *удовлетворяющей условию* $|\xi|_v \le 1$, *справедливо неравенство*

$$|R_k(\xi)|_v \le |(u(N))!|_v \exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa}\left(c_6\log_p N + c_7\frac{N}{p^2}\right)\right). \tag{18}$$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Определим число $N = N(n)$ равенством

$$N = N(n) = [\exp\ln^{1+\epsilon}|\overline{\Theta_n}|]. \tag{19}$$

Пусть $N \ge N_0$. Положим $s = [\frac{N}{\sqrt{\ln N}}], t = \sigma\frac{m(m-1)}{2} + [\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]$ и применим лемму 2. Матрица (14) имеет ранг m, поэтому среди ее строк есть $m-1$ строк, линейно независимых со строкой коэффициентов формы L. Обозначим номера этих строк $k_2, \ldots, k_m$ и рассмотрим определитель

$$\Delta(\Theta_n) = \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_m \\ P_{1,k_2}(\Theta_n) & \cdots & P_{m,k_2}(\Theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{1,k_m}(\Theta_n) & \cdots & P_{m,k_m}(\Theta_n) \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Он представляет собой отличное от нуля целое число из поля $\mathbb{K}$. Его можно рассматривать как значение многочлена

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_m \\ P_{1,k_2}(z) & \cdots & P_{m,k_2}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{1,k_m}(z) & \cdots & P_{m,k_m}(z) \end{vmatrix} \tag{21}$$

в точке $z = \Theta_n$. Поскольку $k_i \le m + t$,

$$\prod_{n=0}^{k-1}(n\sigma + m + N) \le \exp(c_{10}N\sqrt{\ln N})$$

и из леммы 4 следуют неравенства $\deg P_{k_i,j}(z) \le N + c_{11}\left[\frac{N}{\ln N}\right]$,

$$|\overline{P_{k_i,j}(\Theta_n)}| \le \exp(N\ln N + c_{12}N\sqrt{N\ln N})|\overline{\Theta_n}|^{N+m+\sigma\frac{m(m-1)}{2}+[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]},$$

выполняющиеся для всех $i, j = 1, \ldots, m$. Обозначим

$$h = \max_{i=1,\ldots,m}|\overline{h_i}|.$$

Тогда

$$|\overline{\Delta(\Theta_n)}| \le (m-1)!h\exp((m-1)N\ln N + c_{13}N\sqrt{\ln N})|\overline{\Theta_n}|^{(m-1)(N+m+\sigma\frac{m(m-1)}{2}+[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}])},$$

и из (19) получаем

$$|\overline{\Delta(\Theta_n)}| \le (m-1)!h\exp((m-1)N\ln N + c_{14}N\sqrt{\ln N} + c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}). \tag{22}$$

Подставим $z = \xi$ в $\Delta(z)$ и рассмотрим полученные элементы полей $\mathbb{K}_v$, где $v|p$.

Лемма 5. *При* $N \ge N_0$ *для любого простого числа* $p, c_5 \le p \le u(N)$ *и* $v|p$ *в поле* $\mathbb{K}_v$ *выполняется равенство* $|\Delta(\xi)|_v = |\Delta(\Theta_n)|_v$.

Для доказательства леммы используем равенство, справедливое в каждом из рассматриваемых полей $\mathbb{K}_v$:

$$\Delta(\xi) = \Delta(\Theta_n + (\xi - \Theta_n)) = \Delta(\Theta_n) + (\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n), \tag{23}$$

где $\Delta_1(\xi, \Theta_n)$ – многочлен от ξ, Θ_n с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Следовательно, согласно (5)

$$|(\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n)|_v \le |(\xi - \Theta_n)|_v \le \exp(-(m - 1 + \delta)(\exp \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|),$$

откуда, ввиду (19),

$$|(\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n)|_v \le \exp(-(m - 1 + \delta)N \ln N).$$

С другой стороны, $\Delta(\Theta_n)$ – отличное от 0 целое число из поля $\mathbb{K}$, следовательно, согласно (22),

$$|\Delta(\Theta_n)|_v \ge |\overline{\Delta(\Theta_n)}| \ge \exp(-(m - 1)N \ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}).$$

Если число n, а, значит, и число N, выбрано достаточно большим, то

$$\exp(-(m - 1)N \ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}) > \exp(-(m - 1 + \delta)N \ln N),$$

поэтому из равенства (23) следует, что

$$|\Delta(\xi)|_v = |\Delta(\Theta_n)|_v \ge \exp(-(m - 1)N \ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}). \tag{24}$$

Лемма доказана.

В каждом из рассматриваемых полей $\mathbb{K}_v$ умножим первый столбец определителя $\Delta(\xi)$ на 1, второй столбец – на $f_2(\xi)$ и так далее, столбец с номером m на $f_m(\xi)$ и прибавим получившиеся столбцы к первому. Отметим, что $|\xi|_v \le 1$ и все ряды $f_2(\xi), \dots, f_m(\xi)$ сходятся. Согласно (9) и (12), элементами первого столбца будут величины

$$L(\xi) = L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)), L_i(\xi) = R_{k_i}(\xi), i = 2, \dots, m$$

в указанном порядке. Поэтому

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} L(\xi) & h_2 & \cdots & h_m \\ L_2(\xi) & P_{2,k_2}(\xi) & \cdots & P_{m,k_2}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_m(\xi) & P_{2,k_m}(\xi) & \cdots & P_{m,k_m}(\xi) \end{vmatrix}.$$

Обозначим алгебраически дополнения элементов первого столбца этого определителя $\delta_1, \dots, \delta_m$ соответственно, и разложим его по первому столбцу:

$$\Delta(\xi) = \sum_{j=2}^{m} L_j(\xi)\delta_j + L(\xi)\delta_1. \tag{25}$$

Из (18) следует, что для любого простого числа $p, c_5 \le p \le u(N)$ и $v|p$

$$\left|\sum_{j=2}^{m} L_j(\xi)\delta_j\right|_v \le \max_{i=2,\dots,m} |L_i(\xi)\delta_i|_v \le |L_i(\xi)|_v \le$$

$$|(u(N))!|_v \exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa}\left(c_6 \log_p N + c_7\frac{N}{p^2}\right)\right), i = 2, \dots, m.$$

Обозначим $l(N) = \exp\sqrt{\ln N}$. Тогда

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} \left|\sum_{i=2}^{m} L_i(\xi)\delta_i\right|_v \le \prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} \left|\sum_{i=2}^{m} L_i(\xi)\right|_v \le$$

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} \max_{i=2,\dots,m} |L_i(\xi)|_v \le \prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} |(u(N))!|_v \exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa}\left(c_6\log_p N + c_7\frac{N}{p^2}\right)\right).$$

так как δ_i – целые числа.

Используя известные неравенства для количества простых чисел в заданном интервале, получаем

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} \exp(c_6\log_p N) \le \exp\left(c_6\frac{\ln N}{\ln p}\times c_{16}\frac{u(N)}{\ln u(N)}\right) \le \exp\left(c_{17}N\right),$$

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} \exp\left(c_7\frac{N}{p^2}\right) = \exp\left(N\sum_{l(N)\le p\le u(N), v|p}\frac{c_7}{p^2}\right) \le \exp(c_{18}N)$$

Однако

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N)} |(u(N))!| = \frac{\prod_{p\le u(N)} |(u(N))!|_p}{\prod_{p\le l(N)} |(u(N))!|_p}.$$

Для $\prod_{p\le u(N)} |(u(N))!|_p$ выполнено равенство

$$\prod_{p\le u(N)} |(u(N))!|_p = \frac{1}{(u(N))!}.$$

Для $\prod_{p\le l(N)} |(u(N))!|_p$ имеем оценку снизу, полученную следующим образом

$$\prod_{p\le l(N)} |(u(N))!|_p = \prod_{p\le l(N)} p^{-\frac{u(N)}{p-1}+\frac{Su(N)}{p-1}} \ge \exp\left(-u(N)\sum_{p\le l(N)}\frac{\ln p}{p-1}\right).$$

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p-1} = \sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p} + \sum_{p\le x}\ln p\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right) = \sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p} + \sum_{p\le x}\left(\frac{\ln p}{p(p-1)}\right).$$

Вторая сумма – сходящийся ряд и его оценим константой C. Первая сумма есть

$$\ln x + O(1), x\to\infty.$$

Таким образом,

$$-u(N)\sum_{p<l(N)}\frac{\ln p}{p-1} \ge -u(N)\ln l(N) \ge -m(N+1)\sqrt{\ln N}.$$

Тогда

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N)} |(u(N))!|_p \le \left(\left(m(N+1) - \left[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right]\right)!\right)^{-1} \exp(-m(N+1)\sqrt{\ln N}) \le$$

$$\le \exp(-mN\ln N + CN\sqrt{\ln N}).$$

Следовательно,

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N)} |L_i(\xi)\delta_i|_v \le \exp(-mN\ln N + CN\sqrt{\ln N}). \tag{26}$$

С другой стороны, из неравенства (24) следует, что

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} |\Delta(\xi)|_v = \prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} |\Delta(\Theta_n)|_v \ge$$
$$\exp(-(m-1)N\ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}). \tag{27}$$

Из неравенств (26), (27) и равенства (16) сразу следует, что

$$\prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} |\Delta(\xi)|_v \le \prod_{l(N)\le p\le u(N), v|p} \left|\sum_{i=2}^{m} L_i(\xi)\delta_i\right|_v,$$

тогда из (25) получаем, что существует $p, l(N)\le p\le u(N)$ и $v|p$ такие, что в $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_v \ge |\Delta(\xi)|_v.$$

Для завершения доказательства достаточно получить неравенство $l(N(n+1)) > u(N(n))$, т.е.

$$\exp\sqrt{\ln N(n+1)} > m(N(n)+1),$$

так как

$$N(n+1) = \exp\left(\ln^{1+\epsilon}|\overline{\Theta_n}|\right)$$
$$\ln N(n+1) = \ln^{1+\epsilon}|\overline{\Theta_n}|$$
$$\sqrt{\ln N(n+1)} = \ln^{\frac{1+\epsilon}{2}}|\overline{\Theta_n}|$$
$$\exp\left(\ln^{\frac{1+\epsilon}{2}}|\overline{\Theta_{n+1}}|\right) > m\exp\left(\ln^{1+\epsilon}|\overline{\Theta_n}|\right) = \exp(\ln^{1+\epsilon}|\overline{\Theta_n}| + \ln m)$$
$$\ln^{\frac{1+\epsilon}{2}}|\overline{\Theta_{n+1}}| > \ln^{1+\epsilon}|\overline{\Theta_n}| + \ln m$$
$$|\overline{\Theta_{n+1}}| > \exp(\ln^{2+\epsilon}|\overline{\Theta_n}|).$$

Из этого условия следует, что при переходе от n к $n+1$ для соответствующих чисел N будет выполняться неравенство

$$l(N(n+1)) > u(N(n)).$$

Следовательно, интервалы $(l(N(n)), u(N(n)))$ и $(l(N(n+1)), u(N(n+1)))$ не будут пересекаться, а в каждом из них есть простое число p, для которого $L(\xi)\ne 0$ в $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть d – степень многочлена $P(y_1,\dots,y_m)$ по совокупности переменных $y_1,\dots,y_m$. Тогда его можно рассматривать как линейную форму от $M = C_{m+d}^m$ произведений степеней переменных $y_1^{k_1},\dots,y_m^{k_m}$, где $k_1+\ldots+k_m\le d$, $k_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Лемма 6. *Пусть ряды $f_1(z), f_2(z),\dots,f_m(z)$ удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда их произведение степеней*

$$f_1^{k_1}(z)\cdots f_m^{k_m}, k_1+\ldots+k_m\le d, k_i\ge 0, i=1,\dots,m,$$

составляют решение системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой являются целочисленными линейными комбинациями коэффициентов исходной системы (1). Кроме того, они принадлежат классу $F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, \tilde{q})$, где

$$C_1 = c_1 + \ln 2,\ C_2 = c_2,\ C_3 = (c_3+1)d,\ \tilde{q} = q^{1+[\ln d]}.$$

Доказательство леммы вполне аналогично доказательствам леммы 18 из [3], с. 122.

Эти произведение степеней линейно независимо вследствие алгебраической независимости $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$. Из неравенств (8) и (9) при достаточно больших n следуют неравенства

$$p \leq M \exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|)$$

и

$$|\xi - \Theta_n| < \exp(-(M - 1 + \delta)(\exp \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|),$$

представляющие собой неравенства (4) и (5), в которых m заменено на M. Применение теоремы 1 завершает доказательство теоремы 2.

Заключение

В настоящей работе была доказана бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках с использованием модификации обобщенно го метода Зигеля-Шидловского.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений E – функций в некоторых трансцендентных точках // Вестн. Московского университета. Сер. 1, Математика, механика. 1970. № 5. С. 58-63.

2. Bombieri E. On G – functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press, 1981. P. 1-68.

3. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.

4. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2019, vol. 26, no. 2, pp. 175-184.

5. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика, механика. — Изд-во Моск. универстита (М), 2015. № 1. С. 59-61.

6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, 2017. Том 81, № 1. С. 215-232 DOI.

7. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F-рядов // Доклады Академии наук. — Изд-во Наука (М), 2018. Том 483, № 1. С. 257-259.

8. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук. — Изд-во Наука (М), 2014. Том 459, № 6. С. 677-679.

9. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, 2014. Том 78, № 6. С. 193-210

10. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 4. С. 129-133.

11. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. Том 48, № 2. С. 123-127.

12. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. Наука (М). 2014. Том 459, № 6. С. 677-679.

13. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. Том 81, выпуск 2. С. 215-232.

14. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 3. С. 180-185.

15. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, № 1. С. 254-264.

16. André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. // Inst. Math., Jussieu.

17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.

18. Matala–Aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations. // J. Number Theory. 2018. 186, pp.202-210.

19. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241-260.

REFERENCES

1. Galochkin A. I. 1970, "On algebraic independence of the values of E – functions at certain transcendental points", *Moscow University Mathematics Bulletin*, iss. 1, no. 5, pp. 58-63.

2. Bombieri E., 1981, "On G – functions", *Recent Progress in Analytic Number Theory*, Academic Press (London), vol. 2, pp. 1-68.

3. Shidlovskii, A. B. 1989, "Transcendental numbers", *Studies in mathematics*, Walter de Gruyter (Berlin, New York), vol. 12

4. Chirskii V. G. 2019, "Product formula, global relations and polyadic integers", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 26, no. 2, pp. 175-184.

5. Chirskii, V. G. 2015, "Arithmetic properties of Euler series", *Moscow University Mathematics Bulletin*, Allerton Press Inc.(United States), vol. 70, no. 1, pp. 41-43.

6. Chirskii, V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 81, no. 2, pp. 444-461.

7. Chirskii, V. G. 2018, "Arithmetic properties of generalized hypergeometric F-series", *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 98, no. 3, pp. 589-591.

8. Chirskii, V. G. 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 90, no. 3, pp. 766-768.

9. Chirskii, V. G. 2014, “On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 78, no. 6, pp. 1244-1260.

10. Chirskii, V. G. 2011, “Estimates of linear forms and polynomials in polyadic numbers”, *Chebyshevskii Sb.*, 12:4, pp.129-133.

11. Chirskii, V. G. 1990, “Global relations”, *Mat. Zametki*, vol. 48, no. 2, pp. 123–127

12. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 90, no. 3, pp. 766-768.

13. Chirskii, V.,G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 81, no. 2, pp. 444-461.

14. Chirskii, V. G. 2016, “On transformations of periodic sequences”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 3, pp. 191–196.

15. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integers”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.

16. André Y. 2000, “Séries Gevrey de type arithmétique“, *Annals of Mathematics*, vol. 151, pp. 705-740

17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.

18. Matala–Aho T. & Zudilin W. 2018, “Euler factorial series and global relations“, *J. Number Theory*, vol. 186, pp. 202-210.

19. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, Y. 2004, “Effective estimates for global relations on Euler-type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241-260.