ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-313-333

Обобщенные разбиения Рози и линейные рекуррентные последовательности[1]

А. В. Шутов

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, Хабаровское отделение института прикладной математики ДВО РАН (г. Владимир).
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Рози ввел фрактальное множество, связанное со сдвигом двумерного тора на вектор (β^{-1}, β^{-2}), где β – действительный корень уравнения $\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1$, и показал, что данный фрактал разбивается на три фрактала, являющихся множествами ограниченного остатка относительно данного сдвига тора. Введенное множество получило название фрактала Рози и нашло многочисленные применения в комбинаторике слов, геометрии, теории динамических систем и теории чисел.

Позднее была введена бесконечная последовательность разбиений $d-1$-мерных фракталов Рози, связанных с алгебраическими единицами Пизо степени d, на фрактальные множества d типов. Каждое следующее разбиение последовательности является подразбиением предыдущего. Эти разбиения оказались тесно связанными с некоторыми иррациональными сдвигами тора и позволили построить новые примеры множеств ограниченного остатка для этих сдвигов, а также получить результаты о самоподобии орбит сдвигов.

В настоящей работе продолжается изучение обобщенных разбиений Рози, связанных с числами Пизо. Предложен новый подход к определению фракталов и разбиений Рози на основе разложений натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям. Это позволило улучшить результаты о связи разбиений Рози и множеств ограниченного остатка, показав, что соответствующая оценка остаточного члена не зависит от номера разбиения.

Доказана теорема геометризации, показывающая, что натуральное число имеет заданное окончание жадного разложения по линейной рекуррентной последовательности тогда и только тогда, когда соответствующая точка орбиты сдвига тора попадает в некоторое множество, являющееся объединением тайлов разбиения Рози. Получен ряд теоретико-числовых приложений этого результата.

В заключении сформулирован ряд открытых проблем, связанных с обобщенными разбиениями Рози.

Ключевые слова: разбиения Рози, фракталы Рози, числа Пизо, линейные рекуррентные последовательности, множества ограниченного остатка.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:
А. В. Шутов. Обобщенные разбиения Рози и линейные рекуррентные последовательности // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 313–333.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00065)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-313-333

Generalized Rauzy tilings and linear recurrence sequences

A. V. Shutov

Shutov Anton Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (Vladimir).
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Rauzy introduced a fractal set associated with the two-dimensional toric shift by the vector (β^{-1}, β^{-2}), where β is the real root of the equation $\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1$ and showed that this fractal is divided into three fractals that are bounded remainder sets with respect to a given toric shift. The introduced set was named as Rauzy fractal. It obtains many applications in the combinatorics of words, geometry, theory of dynamical systems and number theory.

Later, an infinite sequence of tilings of $d-1$-dimensional Rauzy fractals associated with algebraic Pisot units of the degree d into fractal sets of d types were introduced. Each subsequent tiling is a subdivision of the previous one. These tilings are closely related to some irrational toric shifts and allowed to obtain new examples of bounded remainder sets for these shifts, and also to get some results on self-similarity of shift orbits.

In this paper, we continue the study of generalized Rauzy tilings related to Pisot numbers. A new approach to definition of Rauzy fractals and Rauzy tilings based on expansions of natural numbers on linear recurrence sequences is proposed. This allows to improve the results on the connection of Rauzy tilings and bounded remainder sets and to show that the corresponding estimate of the remainder term is independent on the tiling order.

The geometrization theorem for linear recurrence sequences is proved. It states that the natural number has a given endpoint of the greedy expansion on the linear recurrence sequence if and only if the corresponding point of the orbit of toric shift belongs to some set, which is the union of the tiles of the Rauzy tiling. Some number-theoretic applications of this result is obtained.

In conclusion, some open problems related to generalized Rauzy tilings are formulated.

Keywords: Rauzy tilings, Rauzy fractals, Pisot numbers, linear recurrence sequences, bounded remainder sets.

Bibliography: 32 titles.

For citation:
A. V. Shutov, 2021, “Generalized Rauzy tilings and linear recurrence sequences”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 313–333.

Введение

В 1982 году французский математик Жерар Рози [1] ввел фрактальное множество, ассоциированное с подстановкой

$$\begin{array}{c} 1 \to 12 \\ 2 \to 13 \\ 3 \to 1 \end{array},$$

числом Пизо β, являющимся корнем уравнения

$$\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1,$$

а также линейной рекуррентной последовательностью $\{T_n\}$, заданной соотношением

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

и начальными условиями

$$T_0 = 1, T_1 = 2, T_2 = 4.$$

Даная последовательность известна как последовательность трибоначчи.

В дальнейшем работа Рози породила целое направление исследований на стыке комбинаторики слов, геометрии, теории динамических систем и теории чисел, а введенное им множество получило название фрактала Рози. Некоторый обзор результатов в этом направлении и дальнейшая библиография могут быть найдены в [2]–[5].

С точки зрения теории чисел исходный фрактал Рози интересен тем, что он тесно связан со сдвигом тора на вектор (β^{-1}, β^{-2}) и геометрия фрактала Рози оказывается полезной при изучении арифметики этого сдвига. В частности, в исходной работе Рози [1] эта связь была использована для построения новых примеров множеств ограниченного остатка для этого сдвига.

В работе [6] В.Г.Журавлев построил бесконечное семейство разбиений классического фрактала Рози на подобные ему фракталы, названное семейством разбиений Рози. На основе этого результата им были построены новые семейства множеств ограниченного остатка для рассматриваемого сдвига тора, а также были получены результаты о самоподобии этого сдвига.

В работе [7] были введены аналоги разбиений Рози для семейства фракталов, связанных с единицами Пизо, являющимися корнями уравнений

$$\beta^d = a_1\beta^{d-1} + \ldots + a_{d-1}\beta + a_d \tag{1}$$

с дополнительным условием на коэффициенты

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1} \geq a_d = 1. \tag{2}$$

Подобные фракталы были впервые введены Терстоном [8] и активно изучались в [9]–[13]. В [7] было показано, что построенные обобщенные разбиения Рози порождают множества ограниченного остатка относительно сдвига $d-1$-мерного тора на вектор $(\beta^{-1}, \ldots, \beta^{-d+1})$, а также была доказана теорема самоподобия для этого сдвига.

Отметим, что все существующие подходы к обобщению фрактала Рози не использовали линейных рекуррентных последовательностей. Одним из немногоих исключений является работа [14], но в ней рассматривается только случай $d = 3$, причем полученный фрактал не совпадает с классическим фракталом Рози.

В настоящей работе мы строим линейные рекуррентные последовательности $\{T_n\}$, связанные с единицами Пизо, удовлетворяющими уравнению (1) с условиями на коэффициенты (2) и даем новое определение обобщенных фракталов Рози в терминах этой последовательности. Далее мы используем это определение, чтобы найти числа и меры тайлов, входящих в разбиения Рози. После этого мы возвращаемся к изучению задачи о множествах ограниченного остаткаи уточняем основной результат из [7], показывая, что константа в оценке остаточного члена является абсолютной.

После этого мы показываем, каким образом фракталы Рози могут быть применены для изучения разложений натуральных чисел по последовательности $\{T_n\}$. Главным результатом здесь является теорема геометризации, показывающая что натуральное число N имеет заданное окончание жадного разложения по линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$ тогда и только тогла, когда $(\{N\beta^{-1}\}, \ldots, \{N\beta^{-d+1}\})$ принадлежит некоторому явно определяемому линейно связному множеству, зависящему от окончания разложения. Далее мы показываем, как эта теорема может быть применена к изучению теоретико-числовых свойств чисел с заданным окончанием жадного разложения, получая асимптотические формулы для количества таких чисел, их распределения по прогрессиям, а также для распределения простых среди них.

Фрактал Рози

В данном разделе мы приводим основные предварительные сведения о фракталах Рози. Подробности могут быть найдены в [7] и [9]–[13].

Пусть β – корень уравнения (1) с условиями на коэффициенты (2). В [15] доказано, что в этом случае β является единицей Пизо.

С каждым действительным x можно связать его β-разложение вида [16]

$$x = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x)\beta^k, \tag{3}$$

получаемое по так называемому жадному алгоритму. Здесь $k(x) \geq -\infty$, $m(x) < \infty$. Жадность разложения (3) означает, что для любого $m_1 \leq m(x)$ выполняются неравенства

$$0 \leq x - \sum_{k=m_1}^{m(x)} \varepsilon_k(x)\beta^k < \beta^{m_1}.$$

Пусть $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(r_1)}$ – действительные сопряженные, $\beta^{(r_1+1)}, \overline{\beta^{(r_1+1)}}, \ldots, \beta^{(r_1+r_2)}, \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ – комплексные сопряженные к β. Ясно, что $r_1 + 2r_2 = d - 1$. Кроме того, из определения числа Пизо вытекает, что $|\beta| > 1$, $|\beta^{(k)}| < 1$.

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}(\beta)$, определяемое условием

$$\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} = \{x : k(x) \geq 0\}.$$

Разложение (3) позволяет определить отображение

$$\Phi : \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{d-1}$$

по правилу

$$\Phi(x) = (x^{(1)}, \ldots, x^{(r_1)}, \operatorname{Re} x^{(r_1+1)}, \operatorname{Im} x^{(r_1+1)}, \ldots, \operatorname{Re} x^{(r_1+r_2)}, \operatorname{Im} x^{(r_1+r_2)}),$$

где

$$x^{(j)} = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x)(\beta^{(j)})^k.$$

Множество

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi(\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0})} \tag{4}$$

будем называть фракталом Рози. Здесь и далее черта сверху обозначает замыкание множества.

Теорема 1. *$\mathcal{T}$ – линейно связное ограниченное множество и мера границы $\partial\mathcal{T}$ равна 0. При этом имееет место решетчатое разбиение пространства $\mathbb{R}^{d-1}$ при помощи копий фрактала Рози $\mathcal{T}$:*

$$\mathbb{R}^{d-1} = \mathcal{T} + \Phi(r_1)\mathbb{Z} + \ldots + \Phi(r_{d-1})\mathbb{Z}.$$

Здесь $r_k = 1 - T_\beta^k(1)$.

Далее нам потребуется еще одно определение фрактала Рози $\mathcal{T}$, основанное на комбинаторике слов.

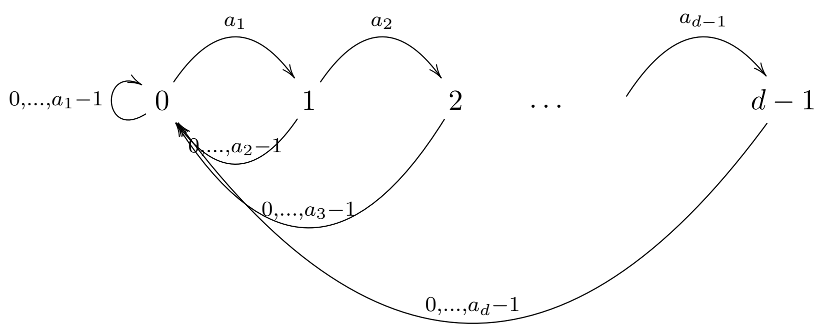
Граф допустимости представляет собой ориентированный граф с кратными ребрами и петлями. В случае рассматривамого нами класса чисел Пизо данный граф содержит d вершин, помеченных числами $0, 1, \dots, d-1$. Ребра графа имеют следующий вид:

1) a_1 ориентированных петель в вершине 0, помеченных числами от 0 до $a_1 - 1$;

2) ориентированные ребра из вершины i в вершину $i+1$, помеченные числами a_i;

3) a_{i+1} ориентированных ребер из вершины i в вершину 0, помеченные числами от 0 до $a_{i+1} - 1$.

Обозначим граф допустимости черз $G(\beta)$. Он имеет следующий вид.



Каждому конечному пути $v_0 \xrightarrow{c_0} v_1 \xrightarrow{c_1} \dots \xrightarrow{c_{m-1}} v_m$ в графе $G(\beta)$ можно сопоставить слово $c_0 c_1 \dots c_{m-1}$, составленное из меток ребер пути. В случае $v_0 = 0$ полученные слова будем называть допустимыми.

Пусть Adm – множество допустимых слов. Определим отображение $\Phi_{Adm} : Adm \to \mathcal{T}$ равенством

$$\Phi_{Adm}(c_0 c_1 \dots c_{m-1}) = \Phi(\sum_{k=0}^{m-1} c_{m-1-k} \beta^k).$$

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi_{Adm}(Adm)}.$$

Пусть теперь $Adm(j)$ – множество допустимых слов, для которых пути в графе $G(\beta)$ заканчиваются в вершине j. Определим множества

$$\mathcal{R}_j = \overline{\Phi_{Adm}(Adm(j))}.$$

Теорема 3. *Каждое множество $\mathcal{R}_j$ представляет собой линейно связное ограниченное множество и мера границы $\partial \mathcal{R}_j$ равна 0. Кроме того, различные множества $\mathcal{R}_j$ не имеют общих внутренних точек.*

Таким образом, мы получили разбиение

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}_0 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{R}_{d-1},$$

называемое разбиением Рози порядка 0.

В силу теоремы 1 фрактал Рози $\mathcal{T}$ является фундаментальной областью решетки $L = \sum_{k=1}^{d-1} \Phi(r_k)\mathbb{Z}$. Поэтому существует естественная проекция π из $\mathcal{T}$ в $d-1$-мерный тор $\mathbb{T}^{d-1} = \mathbb{R}^{d-1}/L$.

Определим отображение $S : \mathbb{T}^{d-1} \to \mathbb{T}^{d-1}$ равенством

$$S(x) = x + \Phi(1) \pmod{L}.$$

Далее определим перекладывание $S_{\mathcal{T}}$ областей $\mathcal{R}_j$ равенством $S_{\mathcal{T}}(x) = x + \Phi(T_\beta^j(1))$, если $x \in \mathcal{R}_j$. Также для допустимого слова $a \in Adm$ обозначим через $S_{Adm}(a)$ лексикографически следущее за a слово из Adm. S_{Adm} можно рассматривать как отображение $Adm \to Adm$.

Теорема 4. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
Adm & \xrightarrow{S_{Adm}} & Adm \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi_{Adm}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{Adm}} \\
\mathcal{T} & \xrightarrow{S_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\mathbb{T}^{d-1} & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^{d-1}
\end{array}$$

Теорема 4 неформально означает, что у нас есть три эквивалентыных языка: комбинаторика допустимых слов Adm, β-разложения действительных чисел и геометрия фрактала Рози, арифметика сдвига S тора $\mathbb{T}^{d-1}$. Наша цель – добавить четвертый язык, связанный с разложениями натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям.

Remark 2. *Можно дополнительно рассмотреть аффинное преобразование, переводящее решетку L в $\mathbb{Z}^{d-1}$. При этом тору $\mathbb{T}^{d-1}$ будет соответствовать новый тор $\mathbb{R}^{d-1}/\mathbb{Z}^{d-1}$. Преобразованию S будет соответствовать преобразование*

$$(x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) \to (\{x_1 + \beta^{-1}\}, \{x_2 + \beta^{-2}\}, \dots, \{x_{d-1} + \beta^{-d+1}\}),$$

где $\{\cdot\}$ – дробная доля числа. Этот факт позволяет переформулировать результаты об орбите $\{S^k(0)\}_{k=0}^{\infty}$ на языка дробных долей $(\{k\beta^{-1}\}, \{k\beta^{-2}\}, \dots, \{k\beta^{-d+1}\})$.

Линейные рекуррентные последовательности

Пусть Adm_n – множество допустимых слов длины n и $Adm_n(j) = Adm_n \cap Adm(j)$. Пусть T_n – число слов в Adm_n. Ясно, что $T_n = 0$ при $n < 0$. Кроме того, поскольку пустое слово допустимо, имеем $T_0 = 1$. Наша первая задача состоит в нахождении линейного рекуррентного соотношения и начальных условий для последовательности $\{T_n\}$.

Теорема 5. *При $n \geq d$ справедливо соотношение*

$$T_n = a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_d T_{n-d}.$$

При $n < d$ имеем

$$T_n = 1 + a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0.$$

Любой путь длины $\geq d$ в графе допустимости начинается с цикла длины $< d$ с началом в вершине 0. Выделение этого цикла позволяет разбить допустимое слово на два подслова.

Точнее, при $n \geq d$ любое допустимое слово x из Adm_n может быть представлено либо в виде cx', $c \in \{0, 1, \dots a_1 - 1\}$, $x' \in Adm_{n-1}$ (цикл $0 \to 0$), либо в виде $a_1 a_2 \dots a_j c x'$, $c \in \{0, 1, \dots, a_{j+1} - 1\}$, $x' \in Adm_{n-j-1}(j)$ для некоторого j, $1 \leq j \leq d-1$ (цикл $0 \to 1 \to \ldots \to j \to 0$).

Объединяя эти два представления, получаем

$$Adm_n = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{c=0}^{a_{j+1}-1} \bigsqcup_{x' \in Adm_{n-j-1}} x_j c x', \tag{5}$$

где слово x_0 - пусто, а при $1 \le j \le d-1$ $x_j = a_1 a_2 \dots a_j$. Переходя к мощностям множеств, получаем

$$T_n = \sum_{j=0}^{d-1} a_{j+1} T_{n-j-1}.$$

Меняя нумерацию индексов, перепишем последнее соотношение в виде

$$T_n = \sum_{j=1}^{d} a_j T_{n-j},$$

что и требовалось доказать.

В случае $n < d$ значение j не может превосходить $n-1$. Кроме того, появвляется дополнительное слово $a_1 a_2 \dots a_n$, соответствующее пути $1 \to 2 \to \dots \to n$ в графе допустимости $G(\beta)$ (данный путь не является циклом). Таким образом, аналог (5) в данном случае имеет вид

$$Adm_n = a_1 a_2 \dots a_n \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{n-1} \bigsqcup_{c=0}^{a_{j+1}-1} \bigsqcup_{x' \in Adm_{n-j-1}} x_j c x'.$$

Переходя к мощностям и меняя нумерацию индексов, находим

$$T_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j T_{n-j},$$

что и доказывает вторую часть теоремы 5.

Из теоремы 5 вытекает [16], что любое натуральное N имеет жадное разложение по последовательности $\{T_n\}$:

$$N = \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k \tag{6}$$

Жадность разложения (6) означает, что для любого $m_1 < m(N)$ выполняются неравенства $0 \le N - \sum_{k=m_1}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k < T_{m_1}$.

Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Определим отображение ε из множества чисел $\mathbb{N}_0$ в множество слов над алфавитом $\{0, 1, \dots a_1\}$ следующим образом:

$$\varepsilon(N) = \varepsilon_{m(N)}(N) \dots \varepsilon_0(N).$$

Ясно, что отображение ε инъективно, то есть переводит разные целые неотрицаатeльные числа в разные слова. Кроме того, из $N_1 < N_2$ вытекает, что $\varepsilon(N_1) <_{lex} \varepsilon(N_2)$, где $<_{lex}$ означает лексикографический порядок на множестве слов.

Предложение 1. *Отображение ε является биекцией между множествами $\mathbb{N}$ и Adm.*

Из определения разложения (6) вытекает, что для любого целого неотрицательного N каждое подслово слова $\varepsilon(N)$ лексикографически меньше слова $a_1 a_2 \dots a_{d-1} 1$. С другой стороны, известно [10], что слово допустимо тогда и только тогда, когда каждое его подслово меньше так называемого разложения Реньи единицы $d(1;\beta)$, определенного в [17]. В случае β, рассматриваемых в данной работе $d(1;\beta)$ вычислено в [15] и имеет вид $d(1;\beta) = a_1 a_2 \dots a_{d-1} 1$. Таким образом, каждое слово $\varepsilon(N)$ допустимо и

$$\varepsilon(\mathbb{N}_0) \subseteq Adm.$$

Далее, нам требуется доказать, что для любого допустимого слова x существует целое неотрицательное N_x такое, что $\varepsilon(N_x) = x$. Пусть $n = |x|$ – длина слова x. Поскольку для любого целого неотрицательного $N < T_n$ длина слова $\varepsilon(N)$ не превосходит n, можно для $0 \leq N < T_n$ определить отображение

$$\varepsilon^{(n)}(N) = 0^{n-|\varepsilon(N)|}\varepsilon(N),$$

где 0^k означает k-кратное повторение символа 0. Тогда

$$\varepsilon^{(n)}(\{N : 0 \leq n < T_n\}) \subseteq Adm_n \tag{7}$$

и отображение $\varepsilon^{(n)}$ по-прежнему инъективно. Поскольку мощности множеств, стоящих в левой и правой части (7) совпадают, получаем

$$\varepsilon^{(n)}(\{N : 0 \leq n < T_n\}) = Adm_n$$

и отображение $\varepsilon^{(n)}$ является биекцией. Используя обратное отображение, получаем требуемое натуральное число N_x, соответствующее заданному допустимому слову x, что завершает доказательство предложения 1.

Введем отображение $\Phi_{\mathbb{N}}$, заданное формулой

$$\Phi_{\mathbb{N}}(N) = \Phi(\varepsilon^{-1}(N)) = \Phi(\sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)\beta^k).$$

Тогда, объединяя предложение 1 с теоремой 2, немедленно получаем следующий результат, дающий нам новое определение фрактала Рози.

Теорема 6. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}_0)}.$$

На множестве $\mathbb{N}_0$ рассмотрим отображение $S_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, задаваемое ревенством

$$S_{\mathbb{N}}(N) = N + 1.$$

Из того, что отображение ε является биекцией и сохраняет порядок, немедленно вытекает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{S_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N}_0 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ Adm & \xrightarrow{S_{Adm}} & Adm \end{array}$$

коммутативна.

Объединяя с теоремой 4, получаем следующий результат.

Теорема 7. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{S_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N}_0 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ Adm & \xrightarrow{S_{Adm}} & Adm \\ \downarrow \Phi_{Adm} & & \downarrow \Phi_{Adm} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{S_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^{d-1} & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^{d-1} \end{array}$$

коммутативна.

Разбиения Рози порядка n

Пусть Adm_n – множество допустимых слов длины n и $Adm_n(j) = Adm_n \cap Adm(j)$.

Выберем некоторое слово $u \in Adm_{d-1}(j)$. Пусть $\widetilde{A}_n(j)$ – множество слов w длины n, для которых слово $uw \in Adm$. Определение множества $\widetilde{A}_n(j)$ не зависит от выбора u, так как замена слова u не меняет начальную вершину j пути графа $G(\beta)$, соответствующего слову w. Другими словами, $\widetilde{A}_n(j)$ – множество слов, соответствующая путям графа $G(\beta)$ длины n, начинающимся в вершине j. Пусть $w \in \widetilde{A}_n(j)$. Для $u \in Adm$ обозначим через $Adm(u)$ множество допустимых слов, заканчивающихся на слово u.

Рассмотрим множества

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = \overline{\Phi_{Adm}\left(\bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw)\right)}.$$

В [7] доказаны следующие результаты.

Теорема 8. *Имеет место разбиение*

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{w \in \widetilde{A}_n(j)} \mathcal{R}_{n,j}(w) \tag{8}$$

фрактала Рози $\mathcal{T}$ на множества $\mathcal{R}_{n,j}(w)$, не имеющие общих внутренних точек. Каждое из множеств $\mathcal{R}_{n,j}(w)$ линейно связно и имеет границу нулевой меры.

Теорема 9. *Пусть $w_{max}(n,j)$ – лексикографически максимальное слово из $\widetilde{A}_n(j)$. Тогда для любого слова $w \in \widetilde{A}_n(j)$, $w \neq w_{max}(n,j)$ найдется слово $w' \in \widetilde{A}_n(j)$, такое, что*

$$S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w)) = \mathcal{R}_{n,j}(w').$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\bigsqcup_{j=0}^{d-1} S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w_{max}(n,j))) = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

Разбиение, определенное в теореме 8 называется разбиением Рози порядка n. Из теоремы 9 вытекает, что это разбиение состоит из множеств d различных типов (относительно сдвига тора S). Найдем меры и количества множеств каждого типа.

Теорема 10. *Справедливо равенство*

$$mes\mathcal{R}_{n,j}(w) = \frac{\beta^{d-1-j-n}}{\sum_{k=0}^{d-1}\beta^k} mes\mathcal{T}.$$

Вначале рассмотрим случай $d = 0$. В этом случае нам нужно показать, что

$$mes\mathcal{R}_j = \frac{\beta^{d-1-j}}{\sum_{k=0}^{d-1}\beta^k} mes\mathcal{T}. \tag{9}$$

Поскольку S – иррациональный сдвиг тора, последовательность $\{S^k(0)\}$ равномерно распределена на торе $\mathbb{T}^{d-1}$, то есть

$$\frac{mes\mathcal{R}_j}{mes\mathbb{T}^{d-1}} = \lim_{N\to\infty} \sharp\{k : 0 \le k < N, S^k(0) \in \mathcal{R}_j\}.$$

Заметим, что $mes\mathbb{T}^{d-1} = mes\mathcal{T}$, после чего осуществим предельный переход не по всем натуральным N, а по подпоследовательности $\{T_k\}$, после чего, воспользовавшись коммутативной диаграммой из теоремы 7, перейдем к языку допустимых слов. В результате получим

$$\frac{mes\mathcal{R}_j}{mes\mathcal{T}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sharp Adm_k(j)}{\sharp Adm_k} = \frac{\sharp Adm_k(j)}{T_k}. \qquad (10)$$

Найдем рекуррентные соотношения для $\sharp Adm_j(k)$.

Заметим, что $\sharp Adm_j(k)$ можно интерпретировать как число путей длины k в графе $G(\beta)$, начинающихся в вершине 0 и заканчивающихся в вершине j. Для $j > 0$, очевидно, имеем

$$\sharp Adm_k(j) = \sharp Adm_{k-1}(j-1). \qquad (11)$$

Для $j = 0$ рассмотрение графа допустимости $G(\beta)$ дает

$$\sharp Adm_k(0) = a_1 \sharp Adm_{k-1}(0) + a_2 \sharp Adm_{k-1}(1) + \ldots + a_d \sharp Adm_{k-1}(d-1). \qquad (12)$$

Подставляя (11) в (12), находим

$$\sharp Adm_k(0) = a_1 \sharp Adm_{k-1}(0) + a_2 \sharp Adm_{k-2}(0) + \ldots + a_d \sharp Adm_{k-d}(0). \qquad (13)$$

Равенства (13) и (11) показывают, что последовательности $\{\sharp Adm_k(j)\}$ удовлетворяют тому же самому линейному рекуррентному соотношению, что и последовательность $\{T_k\}$. Поскольку β – число Пизо, это дает нам асимптотики

$$T_k = c\beta^k + o(1),$$

$$\sharp Adm_k(j) = c_j\beta^k + o(1)$$

с некоторыми $c, c_j > 0$. При этом из (12) следует, что

$$c_j = c_0\beta^{-j}.$$

Подставляя найденные результаты в (10), имеем

$$\frac{mes\mathcal{R}_j}{mes\mathcal{T}} = \frac{c_0}{c}\beta^{-j}.$$

При этом условие

$$\sum_{j=0}^{d-1} \frac{\mathcal{R}_j}{mes\mathcal{T}} = 1$$

дает нам уравнение на $\frac{c_j}{c}$, решая которое получаем (9).

Перейдем теперь к рассмотрению случая произвольного n. Определим также отображение $B : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \arrow[r, "\times\beta"] \arrow[d, "\Phi"] & \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathcal{T} \arrow[r, "B"] & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

где верхняя стрелка обозначает умножение на β. Легко видеть, что B представляет собой аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{d-1}$. В [7] было доказано равенство

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = B^n\mathcal{R}_j + \Phi_{Adm}(w).$$

Тогда имеем
$$mes\mathcal{R}_{n,j}(w) = |\det B|^n \frac{\beta^{d-1-j}}{\sum_{k=0}^{d-1}\beta^k} mes\mathcal{T}$$
и нам остается доказать, что
$$|\det B| = \beta^{-1}.$$

Пусть $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(r_1)}$ – действительные сопряженные, $\beta^{(r_1+1)}$,$\overline{\beta^{(r_1+1)}}$,..., $\beta^{(r_1+r_2)}$,$\overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ – комплексные сопряженные к β. Из определения отображения Φ вытекает, что матрица B имеет блочную структуру:
$$B = \bigoplus_{k=2}^{r_1+r_2} B_k,$$
где
$$B_k = (\beta^{(k)})$$
для $2 \le k \le r_1$ и
$$B_k = |\beta^{(k)}| \begin{pmatrix} \cos\arg\beta^{(k)} & -\sin\arg\beta^{(k)} \\ \sin\arg\beta^{(k)} & \cos\arg\beta^{(k)} \end{pmatrix}$$
для $r_1+1 \le k \le r_1+r_2$. Вычисление определителя дает
$$|\det B| = \prod_{k=2}^{r_1+r_2} |\det B_k| = \prod_{k=2}^{r_1} \beta^{(k)} \prod_{k=r_1+1}^{r_1+r_2} |\beta^{(k)}|^2.$$

Последнее произведение представляет собой произведение модулей всех корней уравнения (1), кроме β. Учитывая, что согласно теореме Виета произведение всех корней этого уравнение равно $a_d = 1$, получаем требуемый результат.

Пусть теперь $R_{n,j}$ – число тайлов вида $\mathcal{R}_{n,j}(w)$.

Теорема 11. *Справедливы равенства*
$$R_{n,0} = T_n$$
и
$$R_{n,j} = \sum_{r=0}^{d-j-1} a_{r+j+1} T_{n-r-1}$$
для $1 \le j \le d-1$.

Из теоремы 8 немедленно вытекает равенство
$$R_{n,j} = \sharp\widetilde{A}_n(j). \tag{14}$$

Заметим, что $\sharp\widetilde{A}_n(j)$ можно интепретировать как число путей длины n в графе $G(\beta)$, начинающихся в вершине j.

Для $j = 0$ очевидно
$$\widetilde{A}_n(0) = Adm_n$$
и, следовательно,
$$\sharp\widetilde{A}_n(0) = T_n.$$

Для $j > 0$ любое слово $x \in \widetilde{A}_n(j)$ представимо в виде $x = ux'$, где слово u соответствует пути в графе $G(\beta)$ из вершины j в вершину 0, не содержащему 0 в качестве промежуточной вершины, а x' – допустимое слово. Интересующие нас пути имеют вид
$$j \to j+1 \to \ldots \to r \to 0,$$

где $r \leq j \leq d-1$. Им соответствуют слова вида

$$a_{j+1}a_{j+2}\dots a_r u',$$

где $u' \in \{0, 1, \dots a_{r+1}-1\}$. Поэтому при $j > 1$ имеет место разложение

$$\widetilde{A}_n(j) = \bigsqcup_{r=j}^{d-1} \bigsqcup_{u'=0}^{a_{r+1}-1} \bigsqcup_{x' \in Adm_{n-r+j-1}} a_{j+1}a_{j+2}\dots a_r u' x'.$$

Переходя к мощностям множеств, получаем

$$\sharp\widetilde{A}_n(j) = \sum_{r=j}^{d-1} \sum_{u'=0}^{a_{r+1}-1} T_{n-r+j-1} = \sum_{r=j}^{d-1} a_{r+1} T_{n-r+j-1}.$$

Меняя нумерацию индекса суммирования и используя (14), получаем требуемый результат.

Следствие 1. *Существуют постоянные $C_j > 0$ такие, что*

$$R_{n,j} = C_j \beta^n + o(1).$$

Множества ограниченного остатка

Множество $X \subseteq \mathbb{T}^{d-1}$ будем называть множеством ограниченного остатка, если имеет место асимптотика

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S^k(0) \in X\} = \frac{mesX}{mes\mathbb{T}^{d-1}} N + O(1). \tag{15}$$

Remark 3. *Отметим, что из иррациональности сдвига тора S и теоремы Вейля о равномерном распределении немедленно вытеает, что для произвольного множества X справедлив аналог асимптотики (15) с остаточным членом $o(n)$.*

Множества ограниченного остатка были введены Гекке в одномерном случае [18]. Обзор современного состояния задачи о многомерных множествах ограниченного остатка можно найти в [19]–[20].

В [7] было показано, что все множества $\pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))$ являются множествами ограниченного остатка. Здесь мы усиливаем этот результат.

Теорема 12. *Существует постоянная C, зависящая от β, но не зависящая от n, j и w такая, что для всех N выполняется неравенство*

$$|\sharp\{k : 0 \leq k < N, S^k(0) \in \pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))\} - \frac{mes\pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))}{mes\mathbb{T}^{d-1}} N| \leq C.$$

Для доказательства нам потребуется ряд вспомогательных результатов.

Предложение 1. *Существуют постоянные c, C_1, γ зависящие только от β, такие, что $0 < \gamma < 1$ и для всех n выполняется неравенство*

$$|T_n - c\beta^n| < C_1 \gamma^n. \tag{16}$$

Доказательство легко получается из общей теории линейных рекуррентных соотношений и того, что β является числом Пизо, то есть все сопряженные к β по модулю меньше 1.

Предложение 2. *Для всех n, k выполняется неравенство*

$$|T_n\beta^{-k} - T_{n-k}| < 2C_1\gamma^{n-k}. \tag{17}$$

Используя неравенство треугольника, запишем

$$|T_n\beta^{-k} - T_{n-k}| \le |T_n\beta^{-k} - c\beta^n\beta^{-k}| + |T_{n-k} - c\beta^{n-k}|.$$

Далее, используя два раза оценку (16), получим

$$|T_n\beta^{-k} - T_{n-k}| < C_1\gamma^n\beta^{-k} + C_1\gamma^{n-k} = C_1\gamma^{n-k}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^k + 1.$$

Поскольку $0 < \frac{\gamma}{\beta} < 1$, имеем,

$$\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^k + 1 < 2$$

для любого k, что и дает нам (17).

При помощи разложения (6)

$$N = \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)T_k$$

для каждого $N \in \mathbb{N}_0$ определим его m-сдвиг

$$\overleftarrow{N}^m = \sum_{k=0}^{m(N)-m} \varepsilon_{k+m}(N)T_k.$$

Предложение 3. *Существуют постоянная C_2 зависящая только от β, такая, что для всех N, m выполняется неравенство*

$$|N\beta^{-m} - \overleftarrow{N}^m| < C_2. \tag{18}$$

Подставляя в левую часть (18) вместо N и $\overleftarrow{N}^m$ их разложения по последовательности $\{T_n\}$ и учитывая, что $0 \le \varepsilon_k(N) \le a_1$, получаем,

$$|N\beta^{-m} - \overleftarrow{N}^m| = |\sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)T_k\beta^{-m} - \sum_{k=0}^{m(N)-m} \varepsilon_{k+m}(N)T_k| \le$$

$$\le a_1|\sum_{k=0}^{m(N)} T_k\beta^{-m} - \sum_{k=0}^{m(N)-m} T_k| \le a_1|\Sigma_1| + |\Sigma_2|,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{m-1} T_k\beta^{-m},$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=m}^{m(N)} (T_k\beta^{-m} - T_{k-m}).$$

С учетом (16), сумма σ_1 оценивается следующим образом

$$|\Sigma_1| \le \beta^{-m}\sum_{k=0}^{m-1} |T_k - c\beta^k| + \sum_{k=0}^{m-1} c\beta^{k-m} <$$

$$< 2C_1\beta^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\gamma^k + c\sum_{k=1}^{m}\beta^{-k} <$$

$$< 2C_1\beta^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k + c\sum_{k=1}^{\infty}\beta^{k} < C_3$$

с константой C_3, зависящей только от β, поскольку $\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k$ представляют собой суммы бесконечных геометрических прогрессий со знаменателями, меньшими единицы.

Для оценки Σ_2 воспользуется неравенством (17):

$$|\Sigma_2| < |\sum_{k=m}^{m(n)}(T_k\beta^{-m} - T_{k-m})| < \sum_{k=m}^{m(N)} 2C_1\gamma^{k-m} <$$

$$< 2C_1\gamma^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k < C_4$$

с константой C_4, зависящей только от β, поскольку последнее выражение представляет собой сумму бесконечной геометричской прогрессии со знаменателем, модуль которого меньше единицы.

Отсюда, выбирая $C_2 = a_1(C_3 + C_4)$, получаем требуемый результат.

Предложение 4. *Справедливы неравенства*

$$|\sharp\{k : 0 \le k < N, S^k(0) \in \pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))\} - \sharp\{k : 0 \le k < \overleftarrow{N}^n, S^k(0) \in \pi(\mathcal{R}_j)\}| \le 1.$$

В силу теоремы 7, достаточно показать, что

$$|\sharp\{k : 0 \le k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\} - \sharp\{k : 0 \le k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\}| \le 1.$$

Заметим, что если $S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j$, то слово $\varepsilon(k) \in Adm(j)$. При этом слово $\varepsilon(k)w$ является допустимым и для $k' = \varepsilon^{-1}(\varepsilon(k)w)$ $S_{\mathcal{T}}^{k'}(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)$.

Пусть $x_1, \ldots, x_l$ – слова, являющиеся образами натуральных чисел из множества $\{k : 0 \le k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\}$ под действием отображения ε. Тогда при $r < l$ имеем

$$x_r w <_{lex} x_l 0^n \le_{lex} \varepsilon(N).$$

Отсюда получаем, что при $r < l$

$$\varepsilon^{-1}(x_r w) \in \{k : 0 \le k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\}$$

и, следовательно,

$$\sharp\{k : 0 \le k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\} \ge \sharp\{k : 0 \le k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\} - 1. \tag{19}$$

Пусть теперь $k \in \{k : 0 \le k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\}$. Слово $\varepsilon(k)$ может быть представлено в виде xw, причем $x \in Adm(j)$. Тогда $\varepsilon^{-1}(x) = \overleftarrow{k}^n \in \{k : 0 \le k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\}$, откуда получаем

$$\sharp\{k : 0 \le k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\} \le \sharp\{k : 0 \le k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\}. \tag{20}$$

Объединяя (19) и (20), получаем требуемый результат.

Теорема 12 немедленно следует из предложений 3 и 4 и того, что все множества $\mathcal{R}_j$ являются множествами ограниченного остатка.

Remark 4. *Альтернативное доказательство теоремы 12 можно получить методов работы [21], используя теорему 9 (фактически утверждающую, что разбиения Рози являются обобщенными перекладывающимися разбиениями тора в смысле [21]) и следствие* 1.

Теорема геометризации

Пусть $w \in Adm$ – допустимое слово. Рассмотрим множества

$$\mathbb{N}(w) = \varepsilon(Adm(w))$$

и

$$\mathcal{T}(w) = \overline{\Phi_{Adm}(Adm(w))}.$$

Множество $\mathbb{N}(w)$ представляет собой множество всех целых неотрицательных чисел с заданным окончанием жадного разложения по линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$. В случае последовательностей второго порядка такие множества рассматривались ранее в [22]-[24]. Отметим также, что в [25] была доказана линейная связность множеств $\mathcal{T}(w)$.

Из теоремы 7 и того, что

$$N = S_{\mathbb{N}}^{N}(0)$$

немедленно вытекает следующий результат.

Теорема 13. *Для любого допустимого слова w $N \in \mathbb{N}(w)$ тогда и только тогда, когда $S^N(0) \in \pi(\mathcal{T}(w))$.*

Аналогичный результат для $d = 2$ доказан в [24]. Наша следующая задача – связать множества $\mathcal{T}(w)$ с тайлами разбиений Рози.

Пусть $J(w)$ – множество вершин графа $G(\beta)$, из которых выходит путь, порождающий слово w.

Предложение 5. *Справедливо равенство*

$$Adm(w) = \bigsqcup_{j \in J(w)} \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw). \tag{21}$$

Вначале покажем, что правая часть равенства (21) определена корректно, то есть все слова uw в нем являются допустимыми. Действительно, рассмотрим слово uw, $u \in Adm_{d-1}(j)$. Тогда путь в графе $G(\beta)$, соответствующий слову u, начинается в вершине 0 и заканчивается в вершине j. Поэтому слово uw является допустимым тогда и только тогда, когда в вершине j графа $G(\beta)$ имеется путь, эквивалентный w, то есть тогда и только тогда, когда $j \in J(w)$. Кроме того, очевидно, что все множества, входящие в правую часть (21) попарно не пересекаются.

Пусть $w \in Adm(w)$. Тогда слово v представимо в виде $v = xw$, где x – некоторое допустимое слово. Представим x в виде $x'u$, где u представляет собой $d-1$ последних символа слова x (если длина $|x|$ слова x меньше $d-1$, допишем к x слева необходимое количество нулей). Слово u допустимо как подслово некоторого допустимого слова. Поэтому $u \in Adm_{d-1}(j)$ при некотором j, причем в силу допустимости слова uw (также являющегося подсловом x), $j \in J(w)$. Таким образом, $Adm(w) \subseteq \bigsqcup_{j \in J(w)} \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw)$.

Докажем обратное включение. Пусть $v \in \bigsqcup_{j \in J(w)} \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw)$. Тогда $v = xuw \in Adm$. При этом слово v заканчивается на w, поэтому $v \in Adm(w)$, что и требовалось доказать.

Переходя при помощи теоремы 7 к множествам $\mathcal{T}(w)$, немедленно получаем следующий результат.

Теорема 14. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{T}(w) = \bigsqcup_{j \in J(w)} \mathcal{R}_{|w|,j}.$$

Следствие 2. *Множества $\pi(\mathcal{T}(w))$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S. Более того, существует постоянная C, зависящая только от β и такая, что для всех N выполняется неравенство*

$$|\sharp\{k : 0 \le k < N, S^k(0) \in \pi(\mathcal{T}(w))\} - \frac{mes\pi(\mathcal{T}(w))}{mes\mathbb{T}^{d-1}}N| \le C.$$

Доказательство получается простым комбинированием теорем 12 и 14.

Переформулируя следствие 2 на языке множеств $\mathbb{N}(w)$, получаем следующий результат.

Следствие 3. *Пусть $N_w(N)$ – количество чисел из $\mathbb{N}(w)$, меньших N. Тогда*

$$N_w(n) = \nu(w)N + O(1),$$

где

$$\nu(w) = \frac{mes\mathcal{T}(w)}{mes\mathcal{T}}.$$

При этом константа в $O(1)$ не зависит от выбора слова w.

Теорема 15. *Пусть $|w|$ – длина слова w. Тогда при любом n множество $\{\nu(w) : |w| = n\}$ содержит не более 2^{d-1} элементов.*

Из теоремы 14 вытекает, что

$$\nu(w) = \frac{\sum_{j \in J(w)} mes\mathcal{R}_{n,j}(w)}{mes\mathcal{T}}.$$

При этом из теоремы 10 следует, что $\mathcal{R}_{n,j}(w)$ не зависит от w. Поэтому мощность множества $\{\nu(w) : |w| = n\}$ не превосходит числа возможных множеств $J(w)$. Из определения $J(w)$ вытекает, что $0 \in J(w)$ и $J(w) \subseteq \{0, 1, \ldots, d-1\}$, откуда и следует требуемый результат.

Теорема 16. *Пусть $N_{w,l,q}(N)$ – количество чисел из $\mathbb{N}(w)$, меньших N и сравнимых с q по модулю l. Тогда*

$$N_{w,l,q} \sim \frac{\nu(w)}{l}N.$$

В силу теорем 7 и 14, имеем

$$N_{w,l,q} = \sharp\{k : 0 \le k < N, k \equiv q \bmod l, S^k(0) \in \pi(\mathcal{T}(w))\}.$$

Вводя новый сдвиг $S_1 = S^l$ и точку $a = S^q(0)$, перепишем последнее равенство в виде

$$N_{w,l,q} = \sharp\{k : 0 \le k < N', S_1^k(a) \in \pi(\mathcal{T}(w))\},$$

где N' – максимальное целое k такое, что $lk + q < N$, то есть

$$N' = \frac{N}{l} + O(1).$$

Константа в $O(1)$ разумеется зависит от l. Множество $\pi(\mathcal{T}(w))$ относительно сдвига S_1 уже не обязано быть множеством ограниченного остатка. Тем не менее, из иррациональности сдвига S вытекает иррациональность сдвига S_1. Поэтому точки орбиты $\{S_1^k(a)\}$ равномерно распределены на торе $\mathbb{T}^{d-1}$ и

$$\sharp\{k : 0 \le k < N', S_1^k(a) \in \pi(\mathcal{T}(w))\} \sim \frac{mes\pi(\mathcal{T}(w))}{mes\mathbb{T}^{d-1}}N',$$

что и дает нам, с учетом предыдущего, требуемый результат.

Теорема 17. *Множество $\mathbb{N}(w)$ содержит бесконечно много простых чисел. Более того, для количества $\pi_w(N)$ простых чисел из $\mathbb{N}(w)$, меньших N, имеет место асимптотика*

$$\pi_w(N) \sim \nu(w)\pi(N),$$

где $\pi(N)$ – количество простых, меньших n.

С учетом теоремы 13 и иррациональности сдвига S достаточно показать, что для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1}$, линейно независимых над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей, последовательность многомерных дробных долей $(\{p_n\alpha_1\}, \{p_n\alpha_2\}, \ldots, \{p_n\alpha_{d-1}\})$, где p_n – n-ое простое число, равномерно распределена на $[0;1)^{d-1}$.

Согласно критерию Вейля [26], для этого достаточно показать, что для любых целых $h_1, h_2, \ldots, h_{d-1}$ с $\sum_{k=1}^{d-1} h_k^2 \neq 0$ имеет место оценка

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \sum_{j=1}^{d-1} h_j p_n \alpha_j}\right| = o(n).$$

Последняя сумма может быть переписана в виде

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i p_n \alpha}$$

с иррациональным

$$\alpha = \sum_{j=1}^{d-1} h_j \alpha_j$$

и требуемая оценка следует из классического результата И.М.Виноградова [27].

Заключение

В работе продолжено изучение обобщенных разбиений Рози произвольных порядков, связанных с алгебраическими единицами Пизо. Дано новое определение таких разбиений в терминах разложений натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям.

Данное определение позволило вычислить числа и меры тайлов разбиения Рози, а также получить новые результаты о связи разбиений Рози с классической теоретико-числовой задачей о множествах ограниченного остатка.

Кроме того, доказанная теорема геометризации позволила начать теоретико-числовое изучение множеств, имеющих заданное окончание жадного разложения по линейной рекуррентной последовательности.

Приведенные результаты не исчерпывают возможные теоретико-числовые приложения разбиений Рози. Некоторые дальнейшие результаты анонсированы в [28].

В заключение сформулируем ряд открытых проблем.

1. В [2] предложен способ определения фрактала Рози при помощи так называемой теории геометрических подстановок. В [21] дано определение обобщенного разбиения Рози произвольного порядка в этом случае. Какая система счисления соответствует этим разбиениям? Возможный кандидат на эту роль имеется в работе [29].

2. Еще одно определение фрактала Рози в [2] основано на проектировании дискретной прямой. Как определить обобщенные разбиения Рози в этом случае?

3. В случае $d = 2$ фрактал Рози вырождается в отрезок. Для $a_1 = a_2 = 1$ можно показать, что построенная в настоящей работе теория эквивалентна теории из [23] (с точностью до аффинного преобразования разбиений). Однако, в случае произвольного $a_2 > 1$ построенное в

настоящей работе семейство обобщенных разбиений Рози оказывается лишь подмножеством семейства разбиений, определенных в [24]. Как определить остальные разбиения в общем случае?

4. В работе [30] определен некоторый одномерный аналог результатов настоящей работы, связанный с разложениями по знаменателям подходящих дробей к произвольному иррациональному α. Можно ли получить многомерные аналоги этих результатов? В частности, как определить фрактал Рози, связанный с произвольным иррациональным вектором? Очевидная сложность связана с отсутствием полноценного аналога цепных дробей в многомерном случае. Тем не менее, некоторые результаты в этом направлении (связанные, в первую очередь с модифицированным алгоритмом Якоби-Перрона и алгоритмом Бруна) можно найти в [31]-[32].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. Vol. 110. P. 147–178.

2. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Springer. 2001.

3. Combinatorics, Automata and Number Theory. Edited by V. Berthe, M. Rigo. Cambridge University Press, 2010.

4. Siegel A., Thuswaldner J. Topological properties of Rauzy fractals. Memoires de la SMF. Vol. 118. 2009.

5. Shutov A. V., Maleev A. V. Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings // Classification and Application of Fractals: New Reserch. Nova Publishers. 2012. P. 55–111.

6. Журавлев В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.

7. Шутов А. В. Обобщенные разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 3. С. 372–389.

8. Thurston W. P. Groups, Tilings, and Finite State Automata. (Am. Math. Soc., Colloq. Lect.). Providence, RI: Am. Math. Soc. 1989.

9. Akiyama S. Self affine tiling and Pisot numeration system // Number Theory and its Applications. Kanemitsu: Kluwer. 1999. P. 7–17.

10. Akiyama S., Barat G., Berthe V., Siegel A. Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions // Monatshefte fur Mathematik. 2008. Vol. 155, № 3. P. 377–419.

11. Akiyama S. On the boundary of self-affine tilings generated by Pisot numbers // Journal of Math. Soc. Japan. 2002. Vol. 54, № 2. P. 283–308.

12. Akiyama S. Pisot number system and its dual tiling // Physics and Theoretical Computer Science. IOS Press. 2007. P. 133–154.

13. Berthe V., Siegel A. Tilings associated with beta-numeration and substitution // Integers: Electronic journal of combinatorial number theory. 2005. Vol. 5, № 3. ♯A02.

14. Hubert P., Messaoudi A. Best simultaneous diophantine approximation of Pisot numbers and Rauzy fractals // Acta Arithmetica. 2006. Vol. 124, № 1. P. 1—15.

15. Frougny C., Solomyak B. Finite beta-expansions // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1992. Vol. 12, № 4. P. 713-–723.

16. Parry W. On the β-expansions of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1960. Vol. 11, № 3. P. 401–416.

17. Renyi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1957. Vol. 8, № 3. P. 477–493.

18. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. 1921. Vol. 5. P. 54–76.

19. Grepstad S., Lev N. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation // Geometric and Functional Analysis. 2015. Vol. 25, № 1. P. 87–133.

20. Журавлев В. Г. Множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2016. Т. 445. С. 585-–640.

21. Шутов А. В. Подстановки и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, Вып. 2. С. 501–522.

22. Журавлев В. Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распрделение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 3. С. 18–46.

23. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 6. С. 1–23.

24. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, Вып. 2. С. 88–112.

25. Akiyama S., Gjini N. // Connectedness of number theoretic tilings // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2005. Vol. 7, № 1. P. 269–312.

26. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Mathematische Annalen. 1916. Vol. 77, № 3. P. 313-–352.

27. Vinogradow I. M. Some theorems concerning the theory of primes // Математический сборник. 1937. Т. 44, № 2. С. 179-–195.

28. Шутов А. В. Фракталы Рози и их теоретико-числовые приложения // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 166. С. 110-–119.

29. Dumont J.-M., Thomas A. Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions // Theoretical computer science. 1989. Vol. 65, № 2. P. 153–169.

30. Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация систем счисления // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, Вып. 4. С. 222—245.

31. Ito S., Ohtsuki M. Modified Jacobi-Perron Algorithm and Generating Markov Partitions for Special Hyperbolic Toral Automorphisms // Tokio Journal Mathematics. 1993. Vol. 16, № 2. P. 441-472.

32. Berthe V., Bourdon J., Jolivet T., Siegel A. A combinatorial approach to products of Pisot substitutions // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2016. Vol. 36, № 6. P. 1757–1794.

REFERENCES

1. Rauzy, G. 1982, "Nombres algébriques et substitutions", *Bull. Soc. Math. France*, vol. 110, pp. 147–178.

2. Pytheas Fogg, N. 2001, *Substitutions in dynamics, aritheoremetics and combinatorics*, Springer.

3. *Combinatorics, Automata and Number Theory* 2010, Edited by V. Berthe & M. Rigo. Cambridge University Press.

4. Siegel, A. & Thuswaldner, J. 2009, "Topological properties of Rauzy fractals", *Memoires de la SMF*, vol. 118.

5. Shutov, A. V. & Maleev A. V. 2012, "Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings", *Classification and Application of Fractals: New Reserch*, Nova Publishers, pp. 55–111.

6. Zhuravlev, V. G. 2006, "Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 137, no 2, pp. 4658–4672. doi:10.1007/s10958-006-0262-z.

7. Shutov, A V. 2018. "Generalized Rauzy tilings and bounded remainder sets", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 20, no. 3, pp 372–389. doi:10.22405/2226-8383-2018-20-3-372-389

8. Thurston, W. P. 1989, "Groups, Tilings, and Finite State Automata", *Am. Math. Soc., Colloq. Lect.*, Providence, RI: Am. Math. Soc.

9. Akiyama, S. 1999, "Self affine tiling and Pisot numeration system", *Number Theory and its Applications*, Kluwer, Kanemitsu, pp. 7–17.

10. Akiyama, S., Barat, G., Berthe, V. & Siegel, A. 2008, "Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions", *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 155, no. 3, pp. 377–419. doi:10.1007/s00605-008-0009-7.

11. Akiyama, S. 2002, "On the boundary of self-affine tilings generated by Pisot numbers", *Journal of Math. Soc. Japan*, vol. 54, no. 2, pp. 283–308. doi:10.2969/jmsj/05420283.

12. Akiyama, S. 2007, "Pisot number system and its dual tiling", *Physics and Theoretical Computer Science*, IOS Press, pp. 133–154.

13. Berthe, V. & Siegel A. 2005, "Tilings associated with beta-numeration and substitution", *Integers: Electronic journal of combinatorial number theory*, vol. 5, no. 3, ♯A02.

14. Hubert, P. & Messaoudi, A. 2006, "Best simultaneous diophantine approximation of Pisot numbers and Rauzy fractals", *Acta Arithmetica*, vol. 124, no. 1, pp. 1—15. doi:10.4064/aa124-1-1.

15. Frougny, C. & Solomyak, B. 1992, "Finite beta-expansions", *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. 12. no. 4, pp. 713-–723. doi:10.1017/S0143385700007057.

16. Parry, W. 1950, "On the β-expansions of real numbers", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 11, no. 3, pp. 401–416. doi:10.1007/BF02020954.

17. Renyi, A. 1957, "Representations for real numbers and their ergodic properties", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 8, no.3, pp. 477–493. doi:10.1007/BF02020331.

18. Hecke, E. 1921, "Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins", *Math.Sem.Hamburg Univ.*, vol. 5, pp. 54–76. doi: 10.1007/BF02940580.

19. Grepstad, S. & Lev, N. 2015, “Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation“, *Geometric and Functional Analysis*, vol. 25, no 1, pp. 87–133. doi:10.1007/s00039-015-0313-z.

20. Zhuravlev, V. G. 2017, “Bounded ramainder sets“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 222, pp. 585-–640. doi:0.1007/s10958-017-3322-7.

21. Shutov, A. V. 2018, “Substitutions and bounded remainder sets“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 499-520. doi:10.22405/2226-8383-2018-19-2-499-520.

22. Zhuravlev, V. G. 2009, “Fibonacci-even numbers: Binary additive problem, distribution over progressions, and spectrum“, *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 20, no 3, pp. 18–46. doi;10.1090/S1061-0022-09-01051-6.

23. Davlet'yarova, E. P., Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2013, “Geometrization of the Fibonacci numeration system, with applications to number theory“, *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 25, no. 6., pp. 1–23. doi:10.1090/S1061-0022-2014-01321-0.

24. Davlet'yarova, E. P., Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2016, “Geometrization of the generalized Fibonacci numeration system with applications to number theory“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, no. 2, pp. 88–112. doi:10.22405/2226-8383-2016-17-2-88-112.

25. Akiyama, S. & Gjini, N. 2005, “Connectedness of number theoretic tilings“ *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 7, no. 1, pp, 269–312.

26. Weyl, H. 1916, “Üeber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins“, *Math. Ann.*, vol. 7, no. 3, pp. 313-–352. doi:10.1007/BF01475864.

27. Vinogradow, I. M. “Some theorems concerning the theory of primes‘, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 44, no. 2, pp. 179-–195.

28. Shutov, A. B. 2019, “Rauzy fractals and their number-theoretic applications“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, vol 166, pp. 110-–119. doi:10.36535/0233-6723-2019-166-110-119.

29. Dumont, J.-M. & Thomas, A. 1989, “Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions“, *Theoretical computer science*, vol. 65, no. 2, pp. 153–169. doi:10.1016/0304-3975(89)90041-8.

30. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2017, “Geometrization of numeration systems“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 222—245. doi:10.22405/2226-8383-2017-18-4-221-244.

31. Ito, S. & Ohtsuki, M. 1993, “Modified Jacobi-Perron Algorithm and Generating Markov Partitions for Special Hyperbolic Toral Automorphisms“, *Tokio Journal Mathematics*, vol. 16, no. 2, pp. 441-472. doi:10.3836/tjm/1270128497.

32. Berthe, V., Bourdon, J., Jolivet, T. & Siegel, A. 2016, “A combinatorial approach to products of Pisot substitutions“, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* vol. 36, no. 6, pp. 1757–1794. doi:10.1017/etds.2014.141.