ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-304-312

Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n \lambda^n,$$

где λ представляет собой некоторое полиадическое лиувиллево число.Как обычно, символ Похгаммера обозначается $(\gamma)_n$, по определению, $(\gamma)_0 = 1$, а при $n \geq 1$ имеем $(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1)...(\gamma + n - 1)$. Рассматриваемые ряды сходятся в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Результат является непосредственным продолжением проведенного автором исследования арифметических свойств полиадических чисел

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n,$$

Значения обобщенных гипергеометрических рядов являются объектом исследования многочисленных работ. Если параметры рядов представляют собой рациональные числа, то такие ряды входят либо в класс $E-$ функций(если эти ряды - целые функции), либо в класс $G-$ функций (если они имеют конечный ненулевой радиус сходимости),либо в класс $F-$ рядов (в случае нулевого радиуса сходимости в поле комплексных чисел, однако при этом они сходятся в полях $p-$ адических чисел). Во всех перечисленных случаях применим метод Зигеля-Шидловского и его обобщения. Если среди параметров рядов содержатся алгебраические иррациональные числа, то исследование их арифметических свойств ведется на основе приближений Эрмита-Паде.

В рассматриваемом случае параметр - трансцендентное число. Следует отметить, что ранее А.И. Галочкин доказал алгебраическую независимость значений $E-$функций в точке, представляющей собой действительное число Лиувилля. Упомянем также поданные в печать работы Е.Ю. Юденковой о значениях $F-$рядов в полиадических лиувиллевых точках. Особенно отметим, что в этой работе рассматриваются значения в полиадической трансцендентной точке гипергеометрических рядов, параметр которых - полиадическое трансцендентное (лиувиллево) число.

Ключевые слова: полиадические числа Лиувилля, бесконечная линейная независимость.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
В. Г. Чирский. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 304–312.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-304-312

Arithmetic properties of values at polyadic Liouville points of Euler-type series with polyadic Liouville parameter

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study infinite linear independence of polyadic numbers

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \lambda^n,$$

where λ is a certain polyadic Liouville number. The series considered converge in any field $\mathbb{Q}_p$. Here $(\gamma)_n$ denotes Pochhammer symbol, i.e. $(\gamma)_0 = 1$, and for $n \geq 1$ we have$(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)$. The result extends the previous author's result on the polyadic numbers

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n,$$

The values of generalized hypergeometric series are the subject of numerous studies. If the parameters of the series are rational numbers, then they come either in the class of E (if these series are entire functions) or the class of G functions (if they have a finite non-zero radius of convergence) or to the class of $F-$ series (in the case of zero radius of convergence in the field of complex numbers, however, they converge in the fields of $p-$ adic numbers). In all these cases, the Siegel-Shidlovsky method and its generalizations are applicable. If the parameters of the series contain algebraic irrational numbers, then the study of their arithmetic properties is based on the Hermite-Pade approximations.

In this case, the parameter is a transcendental number. It should be noted that earlier A. I. Galochkin proved the algebraic independence of the values of $E-$functions at a point that is a real Liouville number. We also mention the published works of E. Yu. Yudenkova on the values of $F-$ series in polyadic Liouville points. We especially note that in this paper we consider the values in the polyadic transcendental point of hypergeometric series, the parameter of which is the polyadic transcendental (Liouville) number.

Note that earlier A.I. Galochkin proved the algebraic independence of values of $E-$functions at points which are real Liouville numbers. We also mention submitted papers (E.Yu.Yudenkova) about the arithmetic properties of values of $F-$series at polyadic Liouville numbers. It should be specially mentioned that here we study the values of hypergeometric series with a parameter which is a polyadic Liouville number.

Keywords: polyadic Liouville number, infinite linear independence.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. G. Chirskii, 2021, “Arithmetic properties of values at polyadic Liouville points of Euler-type series with polyadic Liouville parameter”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 304–312.

Введение

Исследование арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических рядов имеет долгую историю. Описание работ Линдемана, Вейерштрасса, Мейера, Зигеля можно найти в знаменитой книге А.Б. Шидловского "Трансцендентные числа"[1]. Там же приведены ссылки на работы В.А. Олейникова, И.И. Белогривова, А.И. Галочкина, А.Н. Коробова, П.Л. Иванкова. Особенно следует отметить работы В.Х. Салихова[2],[3], давшие близкое к окончательному описание свойств значений обобщённых гипергеометрических $E-$ функций. Важные результаты были получены Бейкерсом, Браунвеллом и Хекманом [4]. Значения $G-$ функций исследовались в работах А.И. Галочкина, Г.В. Чудновского [5], Э. Бомбьери [6]. В работе [6] было введено понятие глобального соотношения, позволившее применить метод Зигеля-Шидловского к еще одному классу рядов, к $F-$ рядам. См. [7]-[14]. Отметим, что применение метода Зигеля-Шидловского давало результаты только для гипергеометрических рядов с рациональными параметрами. Случай алгебраических иррациональных параметров исследовался с помощью построения точных приближающих форм с использованием аппроксимаций Эрмита-Паде.

Случай трансцендентного параметра рассмотрен в работе [15], где была установлена бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(1)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n, f_1(1)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n.$$

Напомним, что кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых $p-$ адических чисел по всем простым числам p. Элементы θ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых п соответствующем кольце целых $p-$ адических чисел обозначаем $\theta^{(p)}$. Бесконечная линейная независимость полиадических чисел $\theta_1,...,\theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1x_1+...+h_mx_m$ с целыми коэффициентами $h_1,...,h_m$ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле Q_p выполняется неравенство

$$h_1\theta_1^{(p)}+...+h_m\theta_m^{(p)}\neq 0.$$

Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!, a_n\in \mathrm{Z}, 0\leq a_n\leq n.$$

Разумеется, ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях $p-$ адических чисел, представляет собой целое полиадическое число. Будем называть полиадическое число θ полиадическим числом Лиувилля(или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p\leq P$ выполнено неравенство

$$|\theta-A|_p<A^{-n}.$$

Настоящая работа продолжает развитие заложенной в [15] основной идеи. В работе [16] А.И. Галочкин доказал алгебраическую независимость значений E–функций в точке, представляющей собой действительное число Лиувилля. Здесь будет доказана бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n\lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n\lambda^n.$$

Важным аппаратом получения этого результата являются построенные в работе Ю. В. Нестеренко [17] аппроксимации Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций.

Формулировка основного результата

Пусть $\lambda_0 = 0$, пусть μ_0 -произвольное натуральное число. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \mu_0, s_1 = \exp(\lambda_1)$$

Пусть μ_1 -произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_1 + \lambda_1 + 1$ выполняется неравенство

$$ord_p\mu_1 \geq 2s_1 \ln s_1$$

При $k \geq 2$ положим

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1}, s_k = \exp\lambda_k \tag{1}$$

и пусть натуральное число μ_k выбрано так, что для любого простого $p \leq s_k+\lambda_k+1$ выполняется неравенство

$$ord_p\mu_k \geq 2s_k \ln s_k. \tag{2}$$

Пусть

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k \tag{3}$$

Ряд (3) сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$ согласно (1), (2) и его сумма в этом поле представляет собой целое $p-$адическое число. Более того, этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля, так как

$$|\lambda - \lambda_k|_p < p^{-2s_k \ln s_k} < \lambda_k^{-2s_k}.$$

для любого простого числа $p \leq s_k + \lambda_k + 1$.

Будем рассматривать ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n z^n, \tag{4}$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+1)_n z^n, \tag{5}$$

где λ определено равенством (3). Ряды (4) и (5) сходятся в любом поле $\mathbb{Q}_p$ при $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$.

Нам потребуются вспомогательные ряды. При всех k положим

$$f_{0,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_k)_n z^n, \tag{6}$$

$$f_{1,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_k+1)_n z^n. \tag{7}$$

Коэффициенты этих рядов - натуральные числа, поэтому в любом поле $\mathbb{Q}_p$ они сходятся при $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$.

Теорема. *Для любых целых чисел h_0, h_1, не равных нулю одновременно, существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство*

$$|L(\lambda)|_p = |h_0 f_0(\lambda) + h_1 f_1(\lambda)|_p > 0. \tag{8}$$

Схема доказательства теоремы

Следуя работе Ю.В. Нестеренко [17], обозначим

$$\alpha_{1,k} = \lambda_k, \alpha_{2,k} = 1$$

и для $N = 2s + r$, где $r = 1$ или $r = 2$ полагаем $\alpha_{N,k} = \alpha_{r,k} + s$, иными словами,

$$\alpha_{2s+1,k} = \lambda_k + s, \alpha_{2s+2,k} = 1 + s. \tag{9}$$

Используя обычное обозначение

$$F(\alpha, \beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!} z^n$$

положим

$$f_{N,k}(z) = F(\alpha_{N+1,k}, \alpha_{N+2,k} z).$$

Обозначим, далее,

$$u_{0,k}(z) = f_{0,k}(z), u_{1,k}(z) = \alpha_{1,k} f_{1,k}(z)$$

и для любого N положим

$$u_{N,k}(z) = \alpha_{1,k} ... \alpha_{N,k} z^{N-1} f_{N,k}(z).$$

В упомянутой выше статье Ю.В. Нестеренко установлено, что для любого N существуют многочлены $P_{N,i,k}(z), i = 0, 1$ такие, что выполняется равенство

$$u_{N,k}(z) = P_{N,0,k}(z) u_{0,k}(z) + P_{N,1,k}(z) u_{1,k}(z).$$

При этом

$$P_{0,0,k}(z) = 1, P_{0,1,k}(z) = 0, P_{1,0,k}(z) = 0, P_{1,1,k}(z) = 1.$$

В той же работе установлено, что при всех N справедливо равенство

$$u_{N+2,k}(z) = u_{N+1,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z u_{N,k}(z)$$

и вытекающие из него соотношения

$$P_{N+2,i,k}(z) = P_{N+1,i,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z P_{N,i,k}(z), i = 0, 1. \tag{10}$$

Пусть $K_i, i = 1, 2, ...$ обозначают натуральные числа. Пусть $C_i, i = 1, 2, ...$ обозначают положительные постоянные. Символом $[a]$ обозначаем целую часть числа a.

По индукции, используя (9) и (10), доказывается следующая лемма.

Лемма 1.*Существует* $K_1 \in \mathbb{N}$, *такое, что для всех* $k \in \mathbb{N}, k \geq K_1$, *при* $s = [s_k] + 1$ *для многочленов* $P_{N,i,k}(z), N = 2s+1$ *или* $N = 2s+2, i = 0,1$ *выполняются неравенства*

$$|P_{N,i,k}(\lambda_k)| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_1 s_k \sqrt{\ln s_k})$$

и эти неравенства останутся верными при замене числа N *числом* $N+1$.

Лемма 2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq K_2$,*где* K_2- *эффективная постоянная,* $s \in \mathbb{N}$, *причем* $s = [s_k] + 1$. *Тогда для* $N = 2s+1$ *или* $N = 2s+2$ *справедливы неравенства*

$$\prod_p |u_{N,k}(\lambda_k)|_p \leq \exp(-2s_k \ln s_k + C_3 s_k \sqrt{\ln s_k},)$$

где произведение в левой части этого неравенство взято по всем простым числам p, *удовлетворяющим неравенствам*

$$\exp(\sqrt{\ln s_k}) \leq p \leq s_k + \lambda_k + 1. \tag{11}$$

Рассмотрим линейную форму

$$L_k(\lambda_k) = h_0 f_{0,k}(\lambda_k) + h_1 f_{1,k}(\lambda_k)$$

с целыми коэффициентами $h_0, h_1, \max(|h_0|, |h_1|) = h$.

Все выбираемые далее постоянные K_i будут зависеть от h .

Лемма 3. *Пусть* $\delta > 0$,$k \in \mathbb{N}$, $k \geq K_3$. *Тогда существует простое число* p_k, *удовлетворяющее неравенствам* (11), *для которого справедлива оценка*

$$|L_k(\lambda_k)|_{p_k} \geq \exp(-s_k \ln s_k - C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}) \tag{12}$$

Рассмотрим линейную форму

$$L(\lambda) = h_0 f_0(\lambda) + h_1 f_1(\lambda).$$

Она представляет собой целое p_k- адические число, поэтому разность форм

$$L(\lambda) - L_k(\lambda_k) = L(\lambda) - L(\lambda_k) + L(\lambda_k) - L_k(\lambda_k) = h_0 f_0(\lambda) + h_1 f_1(\lambda) -$$

$$(h_0 f_0(\lambda_k) + h_1 f_1(\lambda_k)) + (h_0 f_0(\lambda_k) + h_1 f_1(\lambda_k)) - (h_0 f_{0,k}(\lambda_k) + h_1 f_{1,k}(\lambda_k))$$

$$= h_0(f_0(\lambda) - f_0(\lambda_k) + f_0(\lambda_k) - f_{0,k}(\lambda_k)) + h_1(f_1(\lambda) - f_1(\lambda_k) + f_1(\lambda_k) - f_{1,k}(\lambda_k))$$

тоже представляет собой целое p_k- адические число. Согласно равенствам (4)- (7)

$$f_0(\lambda) - f_0(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n (\lambda^n - \lambda_k^n), f_1(\lambda) - f_1(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n (\lambda^n - \lambda_k^n)$$

$$f_0(\lambda_k) - f_{0,k}(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda)_n - (\lambda_k)_n)\lambda_k^n, f_1(\lambda_k) - f_{1,k}(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda+1)_n - (\lambda_k+1)_n)\lambda_k^n$$

Обозначим $\Lambda_k = \lambda - \lambda_k$. При $n \geq 1$ все эти разности являются целыми p_k- адическими числами, членами сходящегося в $\mathbb{Q}_{p_k}$ ряда. Каждое из этих чисел можно представить в виде произведения Λ_k на целое p_k- адические число, член сходящегося в $\mathbb{Q}_{p_k}$ ряда. Из равенств (1) и неравенства (2) вытекает,что

$$|\Lambda_k|_{p_k} = |\mu_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}.$$

Это означает, что

$$|f_i(\lambda) - f_i(\lambda_k)|_{p_k} \le |\Lambda_k|_{p_k} \le p_k^{-2s_k \ln s_k}$$

и

$$|f_i(\lambda_k) - f_{i,k}(\lambda_k)|_{p_k} \le |\Lambda_k|_{p_k} \le p_k^{-2s_k \ln s_k}.$$

Следовательно,

$$|L(\lambda) - L_k(\lambda_k)|_{p_k} \le p_k^{-2s_k \ln s_k} \tag{13}$$

Неравенства (12),(13) означают, что при $k \ge K_4$ получаем:

$$|L(\lambda) - L_k(\lambda_k)|_{p_k} < |L_k|_{p_k}.$$

Поэтому

$$|L(\lambda)|_{p_k} = |L_k(\lambda_k)|_{p_k} > 0,$$

то есть доказываемое неравенство(8).

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что при $k \ge K_5$ справедливо неравенство $p_k < p_{k+1}$.

Заключение.

Этот результат можно считать первым в ряду подобных ему. Можно применить идеи этой работы к гипергеометрическим рядам более общего вида и использовать приближения Эрмита-Паде из работы Ю.В. Нестеренко [17]. Возможна попытка уточнения результата с использованием подхода из работы [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).

2. Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических E – функций. // Матем. сб. -1990.-т.181.-№2.-с.189-211.

3. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E – функций. // Acta Arithm.-1990.-v.53.- p.453-471.

4. Beukers F., Brownawell W. D., Heckman G. Siegel normality // Ann.Math.-1988.-Ser.127.-p.279-308.

5. Chudnovsky G. V. On application of Diophantine approximations // Proc.Natl.Acad.Sci.USA.-1985.-V.81.-p.7261-7265.

6. Bombieri E. On G-functions // Recent Progress in Analytic Number Theory.v.2. London: Academic Press, 1981.-p.1-68.

7. Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J.. Effective estimates for global relations on Euler-type series. // Ann. Fac. Sci. Toulouse, v.13,no.2,2004,pp.241-260.

8. Матвеев В. Ю., Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов, Чебышевский сборник,том 17, выпуск 3,с. 156 – 167

9. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. // Доклады Академии наук, сер. матем.т.459, no. 6, 677-678.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients. Dokl. Math. 90(3), pp. 766–768(2014))

10. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F-рядов. // Доклады Академии наук, сер. матем.т.483, no. 3, 257-258.(Английский перевод V.G. Chiskii, Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series. Dokl. Math. 98:3, 589–591 (2018).)

11. Matala-aho T., Zudilin W., Euler factorial series and global relations, J. Number Theory 186 (2018), 202-210.

12. Ernvall-Hytonen A. M., Matala-aho T., Seppela L., Euler's divergent series in arithmetic progressions. // arXiv:1809.03859v1math.NT11 Sep 2018.

13. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.

14. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series. // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.

15. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром. // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.т.494, с. 69-70.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)

16. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений E-функций в некоторых трансцендентных точках. // Вестник МГУ. Сер.1, матем.,механ.-1970.-no.5.С.58-63.(Английский перевод A.I. Galochkin.The algebraic independence of values of E-functions at certain transcendental points. // Mosc. Univ. Math. Bull. 25.-n0.5.-pp.41-45)

17. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций. // Матем. сб.-1994.-т.185.-no.3.-с.39-72.(Англий перевод Nesterenko Yu. V.. Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions. // Russ.Acad.Sci.Sb.Math. -1995.-83.-189-219)

REFERENCES

1. Shidlovskii, A. B.1989." Transcendental Numbers", *W.de Gruyter.-Berlin.-New York.*467pp.

2. Salikhov. V. Kh.1990."A criterion for the algebraic independence of the values of a class of hypergeometric E-functions",*Math. USSR,Sb.*, Vol, 69, pp. 203-226.

3. Salikhov. V. Kh. " Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of class of E-functions", *Acta Arith.*,Vol. 53, pp. 453-471.

4. Beukers F., Brownawell W. D., Heckman G.1988." Siegel normality", *Ann.Math.,* Ser.127, pp. 279-308.

5. Chudnovsky G. V. 1985. On application of Diophantine approximations", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* Vol.81, pp. 7261-7265.

6. Bombieri E. 1981 "On G-functions", *Recent Progress in Analytic Number Theory.. London: Academic Press"*, Vol.2, pp. 1-68.

7. Bertrand D., Chiskii V. G., Yebbou J. 2004. " Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol.13,no.2, pp. 241-260.

8. Matveev V. Yu. 2018 " Algebraic independence of certain almost polyadic series", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 17, no.3, pp. 156-167.

9. Chiskii V. G. 2014. " Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Dokl. Math.* Vol. 90, no.3, pp. 766–768.

10. Chiskii V. G. 2018. " Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series", *Dokl. Math.* Vol. 98, no.3, pp. 589–591.

11. Matala-aho T. , Zudilin W. V.2018. "Euler factorial series and global relations", *J. Number Theory* Vol. 186, pp. 202-210.

12. Ernvall-Hytonen A-M., Matala-aho T.,Seppela L.,2018. " Euler's divergent series in arithmetic progressions", *arXiv:1809.03859v1math.NT11 Sep 2018*

13. Chirskii V. G. 2019, "Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp. 286-305.

14. Chirskii V. G.2020. " Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp. 175-184.

15. Chiskii V. G., "Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter", *Dokl. Math.*, Vol.102,no.2. pp. 412-413.

16. Galochkin A. I.1970. "The algebraic independence of values of E-functions at certain transcendental points", *Mosc. Univ. Math. Bull.*, Vol. 25.n0.5.pp. 41-45.

17. Nesterenko Yu. V. 1995. "Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions", *Russ.Acad.Sci.Sb.Math.*,Vol83. pp. 189-219.