ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-2-288-303

Об одном линейном диофантовом уравнении и его приложениях[1]

А. П. Фот, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, А. С. Подолян

Фот Андрей Петрович — доктор технических наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: fot@mail.osu.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Подолян Алёна Сергеевна — магистрант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрено линейное диофантово уравнение с шестью переменными. Построено его решение как сдвинутая неполная пятимерная целочисленная решётка в шестимерном пространстве. Построен базис этой решётки.

Дано алгоритмическое решение нахождения всех его решений из заданного шестимерного целочисленного параллелепипеда. Для этого был построен новый базис этой неполной пятимерной решётки, который позволил написать эффективную программу нахождения всех наборов, удовлетворяющих данному диофантову уравнению и принадлежащих заданному прямоугольному параллелепипеду.

В результате работы предложенного алгоритма, реализованного в системе Mathcad, было показано, что из общего количества 10182290760 целых точек, лежащих в заданном параллелепипеде, только 7822045 удовлетворяют заданному диофантову уравнению. Таким образом, полный перебор был сокращён в 1301,7 раза.

В статье рассмотрена связь сдвинутых решёток и задачи целочисленного программирования. Показано, как можно строить базисы неполных целочисленных решёток, которые позволяют сокращать полный перебор по точкам s-мерного прямоугольного параллелепипеда на перебор по точкам сдвинутой неполной решётки, лежащим в этом параллелепипеде.

Рассмотрены некоторые приложения этого диофантова уравнения в технических вопросах, связанных с решением одной прикладной задачи машиностроения в области проектирования мерительного инструмента, в частности, наборов концевых мер длины.

В статье отражён итерационный характер уточнения математической модели указанной прикладной задачи. После первой корректировки модели количество наборов уменьшилось ещё в 193,237 раза, а после второй корректировки модели общее сокращение наборов пригодных для последующей оптимизации стало в 581114,6 раза.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а

В заключении указаны направления дальнейших исследований и возможное применение идей нейросетей Хопфилда и машинного обучения для реализации отбора оптимальных решений.

Ключевые слова: неполные целочисленные решётки, линейные диофантовы уравнения, мерительный инструмент, набор плоскопараллельных концевых мер длины.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. П. Фот, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Об одном линейном диофантовом уравнении и его приложениях // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, С. 288–303.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-2-288-303

On a linear Diophantine equation and its applications

A. P. Fot, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan

Fot Andrey Petrovich — doctor of technical sciences, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: fot@mail.osu.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Podolyan Alyona Sergeevna — undergraduate, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Abstract

The paper considers a linear Diophantine equation with six variables. Its solution is constructed as a shifted incomplete five-dimensional integer lattice in a six-dimensional space. The basis of this lattice is constructed.

An algorithmic solution for finding all its solutions from a given six-dimensional integer parallelepiped is given. For this purpose, a new basis for this incomplete five-dimensional lattice was constructed, which allowed us to write an effective program for finding all sets that satisfy a given Diophantine equation and belong to a given rectangular parallelepiped.

As a result of the proposed algorithm implemented in the Mathcad system, it was shown that out of the total number of 10182290760 integer points lying in a given parallelepiped, only 7822045 satisfy the given Diophantine equation. Thus, the total search was reduced by 1301.7 times.

The article considers the relationship between shifted lattices and integer programming problems. It is shown how it is possible to construct bases of incomplete integer lattices, which make it possible to reduce a complete search over the points of an s-dimensional

rectangular parallelepiped to a search over the points of a shifted incomplete lattice lying in this parallelepiped.

Some applications of this Diophantine equation in technical issues related to the solution of an applied mechanical engineering problem in the field of measuring tool design, in particular, sets of end length measures, are considered.

The article reflects the iterative nature of the refinement of the mathematical model of this applied problem. After the first model adjustment, the number of sets decreased by another 193.237 times, and after the second model adjustment, the total reduction of sets suitable for subsequent optimization became 581114.6 times.

In conclusion, the directions of further research and possible application of the ideas of Hopfield neural networks and machine learning for the implementation of the selection of optimal solutions are indicated.

Keywords: incomplete integer lattices, linear diophantine equations, measuring tool, a set of plane-parallel end-length measures.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. P. Fot, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan, 2021, "On a linear Diophantine equation and its applications", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 288–303.

Введение

Рассмотрим линейное диофантово уравнение

$$9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N + 990. \tag{1}$$

Такое диофантово уравнение возникает при решении одной прикладной задачи машиностроения в области проектирования мерительного инструмента, в частности, наборов плоскопараллельных концевых мер длины [6], [7], [9], [11], [14], [15].

Если рассмотреть однородное диофантово уравнение

$$9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N, \tag{2}$$

то множеством его решений будет неполная целочисленная решётка Λ в $\mathbb{R}^6$.

Нетрудно видеть, что набор $k_1 = 120$, $k_2 = 18$, $k_3 = 20$, $k_4 = 10$, $k_5 = 10$, $N = 55$ является частным решением неоднородного диофантова уравнения (1). Если положить $\vec{k}_0 = (120, 18, 20, 10, 10)$, $N_0 = 55$, то общим решением уравнения (1) будет сдвинутая решётка

$$\Lambda + (\vec{k}_0, N_0) = \{(\vec{k}, N) | 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N + 990\}, \tag{3}$$

где неполная решётка Λ решений однородного диофантова уравнения (2) задана равенством

$$\Lambda = \{(\vec{k}, N) | 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N\}. \tag{4}$$

Заметим, что $9 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = -1$, поэтому каждому набору целых чисел (k_3, k_4, k_5, N) соответствует целая точка

$$(9k_3 + 9k_4 + 10k_5 - 10N, -18k_3 - 18k_4 - 20k_5 + 20N, k_3, k_4, k_5, N) \in \Lambda.$$

Так как целая точка $(5k_2, -9k_2, 0, 0, 0, 0) \in \Lambda$, то неполная решётка Λ имеет вид

$$\Lambda = \{(5k_2+9k_3+9k_4+10k_5-10N, -9k_2-18k_3-18k_4-20k_5+20N, k_3, k_4, k_5, N) | k_2, k_3, k_4, k_5, N \in \mathbb{Z}\}$$

и задается базисом из 5 векторов $\vec{\lambda}_1 = (5, -9, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_2 = (9, -18, 1, 0, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_3 = (9, -18, 0, 1, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_4 = (10, -20, 0, 0, 1, 0)$, $\vec{\lambda}_5 = (-10, 20, 0, 0, 0, 1)$.

В приложениях нам требуется найти все натуральные решения, принадлежащие параллелепипеду $\Pi = [100; 200] \times [12; 62] \times [7; 57] \times [2; 52] \times [1; 10] \times [47; 122]$. Этот параллелепипед содержит $K = 101 \cdot 51 \cdot 51 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 76 = 10182290760$ целых точек, что затрудняет выполнение полного перебора для нахождения всех точек сдвинутой решётки, принадлежащих данному параллелепипеду.

Цель данной работы — дать алгоритмическое решение нахождения всех решений диофантова уравнения (1), принадлежащих параллелепипеду Π, и подсчитать их количество. Кроме этого, в статье рассматриваются приложения данного диофантова уравнения к задачам машиностроения в области проектирования мерительного инструмента.

Алгоритмическое решение

Так как неполная решётка Λ имеет размерность 5 в шестимерном пространстве, то она задается 5 целочисленными параметрами. Обозначим их через t_1, t_2, t_3, t_4, t. Базис решётки Λ преобразуем, взяв вместо $\vec{\lambda}_2$ вектор $\vec{\lambda}_2' = (-1, 0, 1, 0, 0, 0)$, и вместо $\vec{\lambda}_3 = (9, -18, 0, 1, 0, 0)$ вектор $\vec{\lambda}_3' = (-1, 0, 0, 1, 0, 0)$. Переходя к новому базису, получим, что общее решение диофантова уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{cases} k_1 = 5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120 \\ k_2 = -9t_1 - 20t_4 + 20t + 18 \\ k_3 = t_2 + 20 \\ k_4 = t_3 + 10 \\ k_5 = t_4 + 10 \\ N = t + 55 \end{cases} \tag{5}$$

Действительно,

$$\begin{gathered} 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = \\ = 9(5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120) + 5(-9t_1 - 20t_4 + 20t + 18) + \\ +9(t_2 + 20) + 9(t_3 + 10) + 10(t_4 + 10) = 10(t + 55) + 990 = 10N + 990. \end{gathered}$$

Для определения всех точек сдвинутой неполной решётки Λ, лежащих в параллелепипеде Π, необходимо найти все целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} 100 \leqslant k_1 = & 5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120 & \leqslant 200 \\ 12 \leqslant k_2 = & -9t_1 - 20t_4 + 20t + 18 & \leqslant 62 \\ 7 \leqslant k_3 = & t_2 + 20 & \leqslant 57 \\ 2 \leqslant k_4 = & t_3 + 10 & \leqslant 52 \\ 1 \leqslant k_5 = & t_4 + 10 & \leqslant 10 \\ 47 \leqslant N = & t + 55 & \leqslant 122 \end{cases} \tag{6}$$

Исключим из системы (6) переменные t_2, t_3, t_4, получим

$$\begin{cases} 100 \leqslant k_1 = & 5t_1 - k_3 - k_4 + 10k_5 - 10N + 600 & \leqslant 200 \\ 12 \leqslant k_2 = & -9t_1 - 20k_5 + 20N - 882 & \leqslant 62 \\ 7 \leqslant & k_3 & \leqslant 57 \\ 2 \leqslant & k_4 & \leqslant 52 \\ 1 \leqslant & k_5 & \leqslant 10 \\ 47 \leqslant & N & \leqslant 122 \end{cases} \tag{7}$$

Из первого и второго неравенств системы (7) получаем для t_1 диапазон изменения

$$\max\left(-100+\frac{k_3+k_4}{5}-2k_5+2N,\frac{-20k_5+20N-944}{9}\right)\leqslant t_1\leqslant$$
$$\leqslant\min\left(-80+\frac{k_3+k_4}{5}-2k_5+2N,\frac{-20k_5+20N-894}{9}\right). \qquad (8)$$

Для последующих вычислений сделаем изменения в записи неравенств, которые уменьшат трудоемкость алгоритма:

$$-100-2k_5+2N+\max\left(\frac{k_3+k_4}{5},\frac{-2k_5+2N+1}{9}-5\right)\leqslant t_1\leqslant$$
$$\leqslant -80-2k_5+2N+\min\left(\frac{k_3+k_4}{5},\frac{-2k_5+2N+6}{9}-20\right). \qquad (9)$$

Используя целую часть $[\cdot]$ и функцию потолок $\lceil\cdot\rceil$, определим функции $f_1(k_3,k_4)=\left\lceil\frac{k_3+k_4}{5}\right\rceil$, $f_2(k_3,k_4)=\left[\frac{k_3+k_4}{5}\right]$, $f_3(k_5,N)=\left\lceil\frac{-2k_5+2N+1}{9}\right\rceil$, $f_4(k_5,N)=\left[\frac{-2k_5+2N+6}{9}\right]$. Отсюда следует, что

$$-100-2k_5+2N+\max\left(f_1(k_3,k_4),f_3(k_5,N)-5\right)\leqslant t_1\leqslant$$
$$\leqslant -80-2k_5+2N+\min\left(f_2(k_3,k_4),f_4(k_5,N)-20\right). \qquad (10)$$

Ниже приведена программа, которая подсчитывает количество точек решения уравнения (1). Сами точки не сохранялись, так как их слишком много: 7822045.

```
Fot(p) := | T[10,5] ← 0, j ← 0
          | for N ∈ 47..122
          |   for k5 ∈ 1..10
          |     | N1 ← 2(N − k5) − 100, N2 ← N1 + 20
          |     | K ← 10(k5 − N), K2 ← −2K − 882, K ← K + 600
          |     | r ← (2(N − k5) + 6)/9, f4 ← floor(r)
          |     | r ← (2(N − k5) + 1)/9, f3 ← floor(r)
          |     | f3 ← f3 + 1  if r ≠ f3
          |     | for k4 ∈ 2..52
          |     |   for k3 ∈ 7..57
          |     |     | K1 ← K − k3 − k4
          |     |     | r ← (k3 + k4)/5, f2 ← floor(r), f1 ← f2
          |     |     | f1 ← f1 + 1  if r ≠ f1
          |     |     | m1 ← max(f1, f3 − 5), m2 ← min(f2, f4 − 20)
          |     |     | m1 ← N1 + m1, m2 ← N2 + m2
          |     |     | for t ∈ m1..m2                    if m1 ≤ m2
          |     |     |   | k1 ← 5t + K1, k2 ← −9t + K2
          |     |     |   | j ← j + 1
          | j
```

```
Fot(10000000) = 7822045
```

Другой вариант этой программы дает возможность по заданным N, k_5, k_4, k_3 находить все решения с указанными значениями этих переменных.

Заметим,что различных наборов N, k_5, k_4, k_3, принадлежащих параллелепипеду П, ровно 1976760. Анализ работы программы Fot показывает, что только для 369250 наборов из них (18,7% от общего числа) соответствующие точки сдвинутой неполной решётки не принадлежат параллелепипеду П.

Сдвинутые решётки и задачи целочисленного программирования

Как известно (см. [1], с. 117), достаточно общее определение вещественной теоретико-числовой решётки в геометрии чисел следующее.

```
Fot1(N,k5,k4,k3) := | T[10,5] ← 0, j ← 0
                    | N1 ← 2(N − k5) − 100, N2 ← N1 + 20
                    | K ← 10(k5 − N), K2 ← −2K − 882, K ← K + 600
                    | r ← (2(N − k5) + 6)/9, f4 ← floor(r)
                    | r ← (2(N − k5) + 1)/9, f3 ← floor(r)
                    | f3 ← f3 + 1  if  r ≠ f3
                    | K1 ← K − k3 − k4
                    | r ← (k3 + k4)/5, f2 ← floor(r), f1 ← f2
                    | f1 ← f1 + 1  if  r ≠ f1
                    | m1 ← max(f1, f3 − 5), m2 ← min(f2, f4 − 20)
                    | m1 ← N1 + m1, m2 ← N2 + m2
                    | for  t ∈ m1 .. m2                                  if  m1 ≤
                    |   | k1 ← 5t + K1, k2 ← −9t + K2
                    |   | T[j,0] ← k1, T[j,1] ← k2, T[j,2] ← k3, T[j,3] ← k4, T[j,4] ← k5, T[j,5] ← N
                    |   | j ← j + 1
                    | submatrix(T, 0, j − 1, 0, 5)
```

$$\text{Fot1}(55,10,10,20) = \begin{pmatrix} 100 & 54 & 20 & 10 & 10 & 55 \\ 105 & 45 & 20 & 10 & 10 & 55 \\ 110 & 36 & 20 & 10 & 10 & 55 \\ 115 & 27 & 20 & 10 & 10 & 55 \\ 120 & 18 & 20 & 10 & 10 & 55 \end{pmatrix}$$

Определение 1. *Пусть $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_m$, $\quad m \leqslant s$ — линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^s$. Совокупность Λ всех векторов вида*

$$a_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + a_m\vec{\lambda}_m,$$

где a_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется m-мерной решёткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_m$ — базисом этой решётки.

Если $m = s$, то решётка называется полной, в противном случае — неполной. Множество всех s-мерных полных решёток из $\mathbb{R}^s$ будем обозначать через PR_s. Отметим, что в монографии [8] под решёткой понимается произвольная сдвинутая решётка, то есть множество вида $\Lambda + \vec{x}$, где $\Lambda \in PR_s$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$. Множество всех сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x}$ из $\mathbb{R}^s$ будем обозначать через CPR_s.

Очевидно, что $\mathbb{Z}^s$ — решётка, её ещё называют фундаментальной решёткой.

Решётка Λ называется целочисленной решеткой в $\mathbb{R}^s$, если Λ — подрешетка фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s | m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\}$$

и $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система целочисленных векторов.

Пусть $A = (A_1, \ldots, A_s) \in \mathbb{Z}^s$, $B = (B_1, \ldots, B_s) \in \mathbb{Z}^s$ и $\Pi(A, B)$ — прямоугольный параллелепипед с вершинами в точках A и B:

$$\Pi(A, B) = [A_1; B_1] \times \ldots \times [A_s; B_s], \quad A_j \leqslant B_j \quad (j = 1, \ldots, s).$$

Если $N(\Pi(A, B))$ — количество целых точек в этом параллелепипеде, то

$$N(\Pi(A, B)) = (B_1 - A_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (B_s - A_s + 1).$$

Достаточно общая задача целочисленного программирования звучит так: дана функция $F(X)$, где $X = (X_1, \ldots, X_s)$ — произвольная целочисленная точка из параллелепипеда $\Pi(A, B)$. Требуется найти точку минимума, т. е. найти $X_0 \in \Pi(A, B)$ такую, что

$$F(X_0) = \min_{X \in \Pi(A,B)} F(X).$$

Ясно, что если про функцию $F(X)$ неизвестно никаких её свойств, то остается только алгоритм полного перебора, требующий вычисления $N(\Pi(A,B))$ значений функции $F(X)$.

Если нам известно, что переменные $X_1,\ldots,X_s$ связаны диофантовым уравнением

$$c_1X_1+\ldots+c_sX_s=c,\quad c,c_1,\ldots,c_s\in\mathbb{Z}, \tag{11}$$

то, как показывает пример из предыдущего раздела, полный перебор может быть существенно сокращён. Остановимся на этом более подробно.

Лемма 1. *Если $d=(c_1,\ldots,c_s)$ — наибольший общий делитель коэффициентов и $d\nmid c$, то диофантово уравнение (11) не имеет решений.*

Доказательство. Действительно, для любых целых значений $X_1,\ldots,X_s$ имеем:

$$d\mid c_1X_1+\ldots+c_sX_s\Longrightarrow d\mid c,$$

что противоречит условию. □

Из элементарной теории чисел [2] хорошо известно, что алгоритм Евклида в сочетании с теорией цепных дробей [10] дает простой способ нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел $a\neq 0$ и $b\neq 0$:

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}=\frac{P_n}{Q_n},\quad (a,b)=\frac{a}{P_n}=\frac{b}{Q_n}=(-1)^{n-1}(aQ_{n-1}-bP_{n-1}).$$

Определим следующие целые числа $d_1=(c_1,c_2)=x_1c_1+y_1c_2$, $d_2=(d_1,c_3)=x_2d_1+y_2c_3$, $\ldots$, $d_{s-1}=(d_{s-2},c_s)=x_{s-1}d_{s-2}+y_{s-1}c_s$.

Лемма 2. *Справедливо равенство $(c_1,\ldots,c_s)=d_{s-1}$. Для целых чисел $X_1=x_1\cdot\ldots\cdot x_{s-1}$, $X_2=y_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{s-1}$, $X_3=y_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_{s-1}$, $\ldots$, $X_{s-2}=y_{s-2}x_{s-1}$, $X_s=y_{s-1}$ справедливо равенство*

$$c_1X_1+\ldots+c_sX_s=(c_1,\ldots,c_s).$$

Доказательство. Из рекуррентного равенства

$$(c_1,\ldots,c_s)=((c_1,\ldots,c_{s-1}),c_s)$$

следует первое утверждение леммы.

Индукцией по s получим второе утверждение:

$$d_{s-2}=(x_1\cdot\ldots\cdot x_{s-2})c_1+\ldots+y_{s-2}c_{s-1},$$
$$d_{s-1}=x_{s-1}d_{s-2}+y_{s-1}c_s=(x_1\cdot\ldots\cdot x_{s-1})c_1+\ldots+y_{s-2}x_{s-1}c_{s-1}+y_{s-1}c_s.$$

□

Из леммы 1 следует, что без ограничения общности можно считать, что $(c_1,\ldots,c_s)=1$. Из леммы 2 вытекает, что $X_1^0=X_1c,\ldots,X_s^0=X_sc$ будут частным решением диофантова уравнения (11).

Пусть $c_j\neq 0$ $(j=1,\ldots,k)$. Обозначим через $\Lambda(c_1,\ldots,c_k)$ неполную целочисленную решётку в $\mathbb{R}^k$, определяемую диофантовым уравнением

$$c_1X_1+\ldots+c_kX_k=0. \tag{12}$$

Очевидно, что для любого целого $c\neq 0$ получаем вырожденный случай $\Lambda(c)=\{0\}$.

Лемма 3. *Решётка* $\Lambda(c_1, c_2)$ *имеет базис* $\vec{\lambda} = \left(\frac{c_2}{(c_1,c_2)}, -\frac{c_1}{(c_1,c_2)}\right)$.

Доказательство. Положим $c_1' = \frac{c_1}{(c_1,c_2)}$, $c_2' = \frac{c_2}{(c_1,c_2)}$, тогда $(c_1', c_2') = 1$ и уравнение $c_1X_1 + c_2X_2 = 0$ равносильно уравнению $c_1'X_1 + c_2'X_2 = 0$. Отсюда следует, что $X_1 = tc_2'$, $X_2 = -tc_1'$, где t — любое целое число, что и доказывает утверждение леммы. □

Для любого вектора $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ определим операции "подъёма размерности"

$$\vec{\lambda} \uparrow = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0)$$

и "опускания размерности"

$$\vec{\lambda} \downarrow = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}).$$

Лемма 4. *Пусть* $k \geqslant 2$ *и неполная решётка* $\Lambda(c_1, \ldots, c_k)$ *имеет базис* $\vec{\lambda}_j$ $(j = 1, \ldots, k-1)$, *тогда неполная решётка* $\Lambda(c_1, \ldots, c_{k+1})$ *имеет базис* $\vec{\lambda}_j' = \vec{\lambda}_j \uparrow$ $(j = 1, \ldots, k-1)$,

$$\vec{\lambda}_k = \left(-\frac{c_{k+1}X_1}{d_k}, \ldots, -\frac{c_{k+1}X_k}{d_k}, \frac{X_1c_1 + \ldots + X_kc_k}{d_k}\right),$$

где величины X_1, ..., X_k *из леммы 2 с заменой* s *на* k.

Доказательство. Пусть вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}) \in \Lambda(c_1, \ldots, c_{k+1})$ удовлетворяет условию, что λ_{k+1} наименьшая натуральная $k+1$-ая координата вектора из неполной решётки $\Lambda(c_1, \ldots, c_{k+1})$, а $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \Lambda(c_1, \ldots, c_{k+1})$ — произвольный вектор. Разделим x_{k+1} на λ_{k+1} с остатком: $x_{k+1} = q\lambda_{k+1} + r$, $0 \leqslant r < \lambda_{k+1}$. Так как вектор $\vec{x} - q\vec{\lambda} = (x_1 - q\lambda_1, \ldots, x_k - q\lambda_k, r) \in \Lambda(c_1, \ldots, c_{k+1})$, то $r = 0$ в силу выбора вектора $\vec{\lambda}$. Но это означает, что $(\vec{x} - q\vec{\lambda}) \downarrow \in \Lambda(c_1, \ldots, c_k)$. Отсюда следует утверждение леммы, так как в качестве вектора $\vec{\lambda}$ можно взять вектор $\vec{\lambda}_k$, заданный равенством

$$\vec{\lambda}_k = \left(-\frac{c_{k+1}X_1}{d_k}, \ldots, -\frac{c_{k+1}X_k}{d_k}, \frac{X_1c_1 + \ldots + X_kc_k}{d_k}\right),$$

где величины X_1, ..., X_k из леммы 2 с заменой s на k. □

Из доказанной леммы нетрудно видеть, что при $k \geqslant 2$ неполная решётка $\Lambda(c_1, \ldots, c_k)$ имеет базис $\vec{\lambda}_j$ $(j = 1, \ldots, k-1)$, для которого базисная матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{k-1,1} & \lambda_{k-1,2} & \lambda_{k-1,3} & \lambda_{k-1,4} & \ldots & \lambda_{k-1,k} \end{pmatrix}$$

$\lambda_{j,j+1} \neq 0$ $(j = 1, \ldots, k-1)$. Более того, можно утверждать, что найдётся базисная матрица с дополнительными свойствами $\lambda_{j,j+1} > 0$, $\lambda_{i,j+1} \geqslant 0$ $(i = j+1, \ldots, k-1)$, $(j = 1, \ldots, k-1)$.

Последние условия могут быть весьма полезными при реализации циклов перебора точек неполной решётки $\Lambda(c_1, \ldots, c_s)$, попадающих в параллелепипед $\Pi(A, B)$.

Приложение диофантова уравнения к техническому объекту

Как указано в реферате к описанию изобретения по патенту [9]: "Изобретение относится к механическим средствам измерения и может быть использовано, в частности, при настройке измерительных приборов. Универсальный набор концевых мер состоит из пяти групп мер. Размеры мер подчинены зависимостям: $A_{1-m} = A_{n-(m-1)} + \delta_m$, $A_{nm-m} = A_{1-m} + (n_m - 1)\delta_m$, где

A_{1-m} — размер первой меры группы с номером m; $A_{n-(m-1)}$ — размер последней меры группы с номером $m-1$; A_{nm-m,n_m} и δ_m — размер последней меры, количество мер и шаг размеров мер группы с номером m. Значения шагов $\delta_1,\ldots,\delta_5$ размеров мер в группах определены рядом 1:10:20:200:2000 относительно размера шага мер в первой группе. Количество мер в группах подчинено зависимости $n_m = K_m - K_(m-1)$, причем K_m и K_{m-1} — значения отношений размеров последних мер групп с номерами m и $m-1$ соответственно к значению шага размеров в группе с номером m, причем $K_1,\ldots,K_5$ — целые натуральные числа в интервалах $100 \leqslant K_1 \leqslant 150$, $12 \leqslant K_2 \leqslant 62$, $7 \leqslant K_3 \leqslant 57$, $2 \leqslant K_4 \leqslant 52$, $1 \leqslant K_5 \leqslant 10$ для групп $1,\ldots,5$ соответственно, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{5} K_i = (N-1) + A_{1-1}(1/\delta_1 + 1/\delta_2 + 1/\delta_3 + 1/\delta_4 + 1/\delta_5) + (n_1-1)1/\delta_1(1/\delta_2 + 1/\delta_3 + 1/\delta_4 + \\ +1/\delta_5) + n_2\delta_2(1/\delta_3 + 1/\delta_4 + 1/\delta_5) + n_3\delta_3(1/\delta_4 + 1/\delta_5) + n_4\delta_4/\delta_5,$$

где $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$.

Технический результат заключается в повышении эффективности набора за счет уменьшения количества мер и массы набора и расширении технологических возможностей."

Анализ исходного диофантова уравнения (1) и областей определения переменных в нём позволяет установить, что количество вариантов сочетаний значений 6-и переменных составляет более 10-и млрд.

Понятно, что для каждого значения N имеется большое количество вариантов сочетаний значений $K_1,\ldots,K_5$ (в качестве примера приведём лишь одно из возможных решений для $N = 55$: $K_1 = 120$; $K_2 = 18$; $K_3 = 20$; $K_4 = 10$; $K_5 = 10$, кроме этого набора программа 2 находит ещё 4).

В первом приближении предлагаемый способ решения (1) позволяет уменьшить общее количество вариантов сочетаний $K_1,\ldots,K_5$ для всех значений N до 7 822 045 вместо 10 182 290 760, что существенно сокращает объём дальнейших вычислений в 1301,7 раза.

Если решения (1) получены, то можно решить одну прикладную задачу машиностроения в области проектирования мерительного инструмента, в частности, наборов концевых мер длины. Традиционные универсальные наборы [3] концевых мер длины состоят, как правило, из пяти групп мер с определённым количеством мер в группе, в которых размеры мер возрастают с заданным шагом. Часто используемые шаги (начиная от первой и далее к пятой группе) – 0,005 мм, 0,01 мм, 0,05 мм, 0,1 мм, 0,5 мм, 1 мм и 10 мм (могут быть и другие шаги). К сожалению, изобретатель мерных плиток (концевых мер), шведский инженер Карл Иогансон не раскрыл секрета создания наборов, в связи с чем вопрос оптимальности их структуры до настоящего времени остаётся открытым.

Практическое приложение решения (1) в рассматриваемой области: обеспечивает возможность подготовки данных для формирования универсальных наборов концевых мер длины с заданным общим количеством мер в наборе, определение количества мер с заданным шагом в группах мер набора, определение размера каждой концевой меры набора. Окончательным итогом перечисленных работ является получение массива наборов для каждого N и выбор из этих массивов наиболее целесообразных по критериям заказчика набора (решение задачи оптимизации).

Как было установлено при анализе многих существующих наборов, количество мер $n_1,\ldots,n_5$ в каждой из 5-и групп может быть найдено по полученным из (1) значениям $K_1,\ldots,K_5$ (принятые значения шагов в группах: 0,005 мм, 0,05 мм, 0,1 мм, 1 мм и 10 мм) с использованием зависимостей (13):

$$n_1 = (K_1 - 99); \quad n_2 = (K_2 - 0,1K_1); \quad n_3 = (K_3 - 0,5K_2); \\ n_4 = (K_4 - 0,1K_3); \quad n_5 = (K_5 - 0,1K_4). \tag{13}$$

После нахождения $n_1,\ldots,n_5$ можно получить массивы размеров мер $A_{i\,j}$ для каждой группы набора (здесь i — номер меры в j-ой группе набора) по зависимостям (13) таблицы:

Таблица 1: Формулы (13) для нахождения значений $A_{i\,j}$ для N_m.

№ группы J	$A_{1\,j}$	$A_{2\,j}$	$A_{3\,j}$	$\ldots$	$A_{n_1\,j}$
1	$A_{1\,1} = 0,500$	$A_{2\,1} = = A_{1\,1} + 0,005$	$A_{31} = = A_{11} + 2 \cdot 0,005$	$\ldots$	$A_{n_1 1} = A_{11} + +(n_1 - 1) \cdot 0,005$
2	$A_{12} = A_{n_1 1} + +0,050$	$A_{22} = A_{12} + +0,050$	$A_{32} = A_{12} + +2 \cdot 0,050$	$\ldots$	$A_{n_2 2} = A_{12} + +(n_2 - 1) \cdot 0,050$
3	$A_{13} = A_{n_2 2} + +0,100$	$A_{23} = A_{13} + +0,100$	$A_{33} = A_{13} + +2 \cdot 0,100$	$\ldots$	$A_{n_3 3} = A_{13} + +(n_3 - 1) \cdot 0,100$
4	$A_{14} = A_{n_3 3} + +1,000$	$A_{24} = A_{14} + +1,000$	$A_{34} = A_{14} + +2 \cdot 1,000$	$\ldots$	$A_{n_4 4} = A_{14} + +(n_4 - 1) \cdot 1,000$
5	$A_{15} = A_{n_4 4} + +10,000$	$A_{25} = A_{15} + +10,000$	$A_{35} = A_{15} + +2 \cdot 10,000$	$\ldots$	$A_{n_5 5} = A_{15} + +(n_5 - 1) \cdot 10,000$

Корректировка модели

Анализ результатов, полученных с помощью программы Fot1, показал, что в первоначальной модели, описываемой уравнением (1), не учтена связь между целочисленными значениями величин n_1, $\ldots$, n_5 и значениями $K_1,\ldots,K_5$. Анализируя формулы (13), мы видим, что K_1, K_3, K_4 должны быть кратны 10, а K_2 должно быть чётным.

Для получения новой модели введём новые целочисленные переменные $k_1^*,\ldots,k_5^*$, заданные равенствами $k_1 = 10k_1^*$, $k_2 = 2k_2^*$, $k_3 = 10k_3^*$, $k_4 = 10k_4^*$, $k_5 = k_5^*$, $N = N^*$.

Диофантово уравнение (1) в новых переменных преобразуется к виду:

$$90k_1^* + 10k_2^* + 90k_3^* + 90k_4^* + 10k_5^* = 10N^* + 990. \tag{14}$$

После сокращения всех коэффициентов на 10, получаем более простые уравнения:

$$9k_1^* + k_2^* + 9k_3^* + 9k_4^* + k_5^* = N^* + 99, \tag{15}$$

$$9k_1^* + k_2^* + 9k_3^* + 9k_4^* + k_5^* = N^*. \tag{16}$$

Из набора $k_1 = 120$, $k_2 = 18$, $k_3 = 20$, $k_4 = 10$, $k_5 = 10$, $N = 55$, который является частным решением неоднородного диофантова уравнения (1), мы легко получаем частное решение неоднородного диофантова уравнения (15): $k_1^* = 12$, $k_2^* = 9$, $k_3^* = 2$, $k_4^* = 1$, $k_5^* = 10$, $N = 55$.

В новых переменных меняется параллелепипед

$$\Pi = [100; 200] \times [12; 62] \times [7; 57] \times [2; 52] \times [1; 10] \times [47; 122]$$

на параллелепипед $\Pi^* = [10; 20] \times [6; 31] \times [1; 5] \times [1; 5] \times [1; 10] \times [47; 122]$, который содержит $K^* = 11 \cdot 26 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 76 = 5434000$ целых точек, что в 1873,81 раз меньше количества целых точек в параллелепипеде Π.

Если положить $\vec{k}_0^* = (12, 9, 2, 1, 10)$, $N_0^* = 55$, то общим решением уравнения (15) будет сдвинутая решётка

$$\Lambda_1 + (\vec{k}_0^*, N_0^*) = \{(\vec{k}^*, N^*) | 9k_1^* + k_2^* + 9k_3^* + 9k_4^* + k_5^* = N^* + 99\}, \tag{17}$$

где неполная решётка Λ_1 решений однородного диофантова уравнения (16) задана равенством

$$\Lambda_1 = \{(\vec{k}^*, N^*) | 9k_1^* + k_2^* + 9k_3^* + 9k_4^* + k_5^* = N^*\}. \tag{18}$$

Очевидно, что каждому набору целых чисел $(k_1^*, k_3^*, k_4^*, k_5^*, N^*)$ соответствует целая точка

$$(k_1^*, N^* - 9k_1^* - 9k_3^* - 9k_4^* - k_5^*, k_3^*, k_4^*, k_5^*, N^*) \in \Lambda_1.$$

Неполная решётка Λ_1 имеет вид

$$\Lambda_1 = \{(k_1^*, N^* - 9k_1^* - 9k_3^* - 9k_4^* - k_5^*, k_3^*, k_4^*, k_5^*, N^*) | k_1^*, k_3^*, k_4^*, k_5^*, N^* \in \mathbb{Z}\} \tag{19}$$

и задается базисом из 5 векторов $\vec{\lambda}_1^* = (1, -9, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_2^* = (0, -9, 1, 0, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_3^* = (0, -9, 0, 1, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_4^* = (0, -1, 0, 0, 1, 0)$, $\vec{\lambda}_5^* = (0, 1, 0, 0, 0, 1)$.

Указанный базис позволяет легко получить новую модификацию программ Fot и Fot1. Ниже приведены эти модификации программ. Расчёты показали, что общее число наборов равно 40479. Таким образом, учёт дополнительных условий позволил сократить перебор возможных наборов ещё в 193,237 раза, что позволило в программе Fot2 сохранять сами наборы для последующего анализа.

```
Fot2(p) := | T[10,5] ← 0, j ← 0, j1 ← 0
           | for N ∈ 47 .. 122
           |   for k5 ∈ −9 .. 0
           |     for k4 ∈ 0 .. 4
           |       for k3 ∈ −1 .. 3
           |         for k1 ∈ −2 .. 8
           |           | k2 ← N − 55 − 9·(k1 + k3 + k4) − k5
           |           | if (−3 ≤ k2)·(k2 ≤ 22)
           |           |   | T[j,0] ← 10·k1 + 120, T[j,1] ← 2·k2 + 18, T[j,2] ← 10·k3 + 20
           |           |   | T[j,3] ← 10·k4 + 10, T[j,4] ← k5 + 10, T[j,5] ← N
           |           |   | j ← j + 1
           | T^T
```

Fot2(1) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	110	120	130	100	110	120	100	110	100	100
1	56	38	20	56	38	20	38	20	20	56
2	10	10	10	20	20	20	30	30	40	10
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	20
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	47	47	47	47	47	47	47	47	47	...

Fot2(1) =

	40469	40470	40471	40472	40473	40474	40475	40476	40477	40478
0	150	120	130	140	110	120	130	100	110	120
1	26	62	44	26	62	44	26	62	44	26
2	20	30	30	30	40	40	40	50	50	50
3	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
5	122	122	122	122	122	122	122	122	122	...

Другой вариант этой программы дает возможность по заданному N находить все решения с указанными значением этой переменной. В частности, из результатов работы программы видно, что при $N^* = 55$ мы имеем 235 различных наборов.

Вторая корректировка модели

Дальнейший анализ полученных результатов по второй модели показал, что вторая модель учла только целочисленность величин $n_1, \ldots, n_5$. Это привело к переходу от неполной решётки Λ к неполной решётке Λ_1, которые связаны следующим образом: неполная решётка Λ_1 получена сжатием по трём направлениям в 10 раз, а по одному в два раза из подрешётки неполной решётки Λ. Но условие (13) содержит ещё одно важное требование — все величины $n_1, \ldots, n_5$ могут принимать только натуральные значения. Это требование приведёт к тому,

```
Fot3(N) := | T_{35,5} ← 0, j ← 0, j1 ← 0
           | for k5 ∈ −9 .. 0
           |   for k4 ∈ 0 .. 4
           |     for k3 ∈ −1 .. 3
           |       for k1 ∈ −2 .. 8
           |         | k2 ← N − 55 − 9·(k1 + k3 + k4) − k5
           |         | if (−3 ≤ k2)·(k2 ≤ 22)
           |         |   | T_{j,0} ← 10·k1 + 120, T_{j,1} ← 2·k2 + 18, T_{j,2} ← 10·k3 + 20
           |         |   | T_{j,3} ← 10·k4 + 10, T_{j,4} ← k5 + 10, T_{j,5} ← N
           |         |   | j ← j + 1
           | T^T
```

Fot3(55) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	120	130	140	110	120	130	100	110	120	100
1	54	36	18	54	36	18	54	36	18	36
2	10	10	10	20	20	20	30	30	30	40
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...

Fot3(55) =

	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221
0	100	110	100	100	110	120	130	100	110	120
1	38	20	20	20	54	36	18	54	36	18
2	10	10	20	10	10	10	10	20	20	20
3	30	30	30	40	10	10	10	10	10	10
4	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55

Fot3(55) =

	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234
0	100	110	120	100	110	100	100	110	100	100
1	54	36	18	36	18	18	36	18	18	18
2	10	10	10	20	20	30	10	10	20	10
3	20	20	20	20	20	20	30	30	30	40
4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...

что областью допустимых значений будет не параллелепипед Π^*, а некоторая более сложная многогранная фигура. Приступим к её нахождению.

Из условия (13), переписанного в терминах $k_1^*,\ldots,k_5^*$, получим новые условия

$$10k_1^* \geqslant 100, \quad 2k_2^* - k_1^* \geqslant 1, \quad 10k_3^* - k_2^* \geqslant 1, \quad 10k_4^* - k_3^* \geqslant 1, \quad k_5^* - k_4^* \geqslant 1. \tag{20}$$

Новую область изменения величин $k_1^*,\ldots,k_5^*$ перепишем как систему неравенств, в которой величины определяются сверху вниз:

$$\begin{cases} 1 \leqslant k_5^* \leqslant 10 \\ 1 \leqslant k_4^* \leqslant \min(k_5^* - 1, 5) \\ 1 \leqslant k_3^* \leqslant \min(10k_4^* - 1, 5) \\ 6 \leqslant k_2^* \leqslant \min(10k_3^* - 1, 31) \\ 10 \leqslant k_1^* \leqslant \min(2k_2^* - 1, 20) \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leqslant k_5^* \leqslant 10 \\ 1 \leqslant k_4^* \leqslant \min(k_5^* - 1, 5) \\ 1 \leqslant k_3^* \leqslant 5 \\ 6 \leqslant k_2^* \leqslant \min(10k_3^* - 1, 31) \\ 10 \leqslant k_1^* \leqslant \min(2k_2^* - 1, 20) \end{cases} \tag{21}$$

Так как согласно (19) переменные k_1^*,k_3^*,k_4^*,k_5^* — свободные, а k_2^* через них выражается, то (21) перепишем в новом виде:

$$\begin{cases} 2 \leqslant k_5^* \leqslant 10 \\ 1 \leqslant k_4^* \leqslant \min(k_5^* - 1, 5) \\ 1 \leqslant k_3^* \leqslant 5 \\ \max\left(6, \frac{k_1^*+1}{2}\right) \leqslant k_2^* \leqslant \min(10k_3^* - 1, 31) \\ 10 \leqslant k_1^* \leqslant 20 \end{cases} \tag{22}$$

Теперь выпишем выражение для k_2^* с учетом, что это координата сдвинутой на вектор $(12, 9, 2, 1, 10)$ точки неполной решётки Λ_1. Получим:

$$k_2^* = 9 + (N - 55) - 9(k_1^* - 12) - 9(k_3^* - 2) - 9(k_4^* - 1) - (k_5^* - 10) = N - 9k_1^* - 9k_3^* - 9k_4^* - k_5^* + 99.$$

После этих преобразований легко написать программу, реализующую третью модель.

```
Fot4(p) := | T_{10,5} ← 0, j ← 0, j1 ← 0
           | for N ∈ 47..122
           |   | N1 ← N + 99
           |   | for k5 ∈ 2..10
           |   |   | k41 ← min(k5 − 1, 5)
           |   |   | for k4 ∈ 1..k41
           |   |   |   for k3 ∈ 1..5
           |   |   |     for k1 ∈ 10..20
           |   |   |       | k2 ← N1 − 9·(k1 + k3 + k4) − k5
           |   |   |       | if (max(6, (k1 + 1)/2) ≤ k2)·(k2 ≤ min(31, 10k3 − 1))
           |   |   |       |   | T_{j,0} ← 10·k1, T_{j,1} ← 2·k2, T_{j,2} ← 10·k3
           |   |   |       |   | T_{j,3} ← 10·k4, T_{j,4} ← k5, T_{j,5} ← N
           |   |   |       |   | j ← j + 1
           | T^T
```

Fot4(1) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	130	110	120	100	110	100	130	110	120	100
1	18	36	18	36	18	18	16	34	16	34
2	10	20	20	30	30	40	10	20	20	30
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
5	47	47	47	47	47	47	47	47	47	...

Fot4(1) =

	17512	17513	17514	17515	17516	17517	17518	17519	17520	17521
0	130	150	130	140	110	120	130	100	110	120
1	26	26	44	26	62	44	26	62	44	26
2	50	20	30	30	40	40	40	50	50	50
3	40	50	50	50	50	50	50	50	50	50
4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
5	122	122	122	122	122	122	122	122	122	122

Расчеты показывают, что третьей модели удовлетворяют уже только 17522 набора. Таким образом, сокращение по сравнению с исходным полным перебором произошло в 581114,6 раза.

Другой вариант этой программы дает возможность по заданному N находить все решения с указанными значением этой переменной. В частности, из результатов работы программы видно, что при $N = 55$ мы имеем 86 различных наборов.

Заключение

По специальной программе [7] можно определить характеристики каждого спроектированного набора (количества составляемых из не более чем 5-и мер набора размеров без повторов, суммарная длина мер набора, масса набора и др.).

Завершающим этапом исследования наборов является поиск оптимального набора. Для этого требуется специальная программа, разработка которой ведётся в настоящее время в Оренбургском государственном университете.

Анализ данных, приведённых в конце 3-его раздела, наводит на мысль, что так как количество всевозможных наборов, получаемых программой Fot, слишком велико (7822045), а простой функции $F(N, K1, K2, K3, K4, K5)$, которая могла бы быть критерием оптимальности, пока неизвестно, то, по-видимому, надо обратиться к идеям нейросетей Хопфилда [12], [13] и машинного обучения [5], чтобы реализовать отбор оптимальных решений.

При работе над данной проблемой авторы столкнулись, по-видимому, с достаточно типичной ситуацией, возникающей при взаимодействии представителей инженерных специальностей с математиками. Характер их взаимодействия носил итерационный характер, который, в частности, был связан со спецификой взаимодействия в условиях COVID-ой пандемии и

```
Fot5(N) := | T_{10,5} ← 0, j ← 0, j1 ← 0
           | N1 ← N + 99
           | for k5 ∈ 2..10
           |   | k41 ← min(k5 − 1, 5)
           |   | for k4 ∈ 1..k41
           |   |   for k3 ∈ 1..5
           |   |     for k1 ∈ 10..20
           |   |       | k2 ← N1 − 9·(k1 + k3 + k4) − k5
           |   |       | if (max(6, (k1 + 1)/2) ≤ k2)·(k2 ≤ min(31, 10k3 − 1))
           |   |       |   | T_{j,0} ← 10·k1, T_{j,1} ← 2·k2, T_{j,2} ← 10·k3
           |   |       |   | T_{j,3} ← 10·k4, T_{j,4} ← k5, T_{j,5} ← N
           |   |       |   | j ← j + 1
           | T^T
```

Fot5(55) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	140	120	130	100	110	120	100	110	100	120
1	16	34	16	52	34	16	34	16	16	32
2	10	20	20	30	30	30	40	40	50	20
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...

Fot5(55) =

	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
0	100	110	100	120	100	110	100	110	100	100
1	36	18	18	18	36	18	18	18	18	18
2	30	30	40	10	20	20	30	10	20	10
3	10	10	10	20	20	20	20	30	30	40
4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...

необходимостью общения только по электронной почте, при этом необходимо отметить, что авторы из Тулы и Оренбурга не были знакомы лично и имели возможность только достаточно лаконичной переписки.

Специфика этого итерационного общения отразилась в структуре статьи. Мы посчитали такую форму представления результатов совместной работы уместной, так как она может послужить примером для молодых исследователей, как можно эффективно организовывать межпредметное общение представителей разных специальностей.

Подчеркнём, что необходимость привлечения для дальнейших исследований указанных выше соображений не отпала после корректировки модели, так как исследование 44959 возможных набора для поиска оптимальных, когда нет формализованных критериев, превосходит возможности отдельного исследователя. И даже после второй корректировке, после которой осталось всего 17522 наборов, актуальность дальнейших исследований с помощью высказанных предположений не пропала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

2. Виноградов И. М. Основы теории чисел М.: Наука 1982

3. ГОСТ 9038-90. Меры длины концевые плоскопараллельные. Технические условия (с Изменением N 1). УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Государственного комитета СССР по управлению качеством продукции и стандартам от 25.01.90 №86.

4. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.

5. Г.Г. Малинецкий. Математические основы синергетики. Москва, URSS, 2009.

6. А. А. Муллабаев, А. П. Фот. Оптимизация наборов концевых мер и щупов // ВЕСТНИК ОГУ, 2005. — No 4. — С.152-153.

7. Св.-во гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2016611967. Российская Федерация. Программа «Расчет набора концевых мер и его характеристик по универсальной функции и относительной металлоемкости» / А.П.Фот (RU), Р.М.Джалмухамедов (RU); правообладатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет».– № 2015663252; дата поступления 28.12.2015 г.; дата регистр. в Реестре программ для ЭВМ 15.02.2016 г. – Опубл. 20.03.2016 г.

8. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

9. Патент RU №2629686 C1 МПК G01B5/02 (2006.01). Универсальный набор концевых мер /М. Ю. Тарова (РФ), А. П. Фот (РФ); Акционерное общество "Военно-промышленная корпорация "Научно-производственное объединение машиностроения" (RU) — № 2016107665 — Заявлено 02.03.2016 — Решение о выдаче патента от 14.07.2017 — Опубл. 31.08.2017, Бюл. № 2.

10. Хинчин А. Я. Цепные дроби.– Харьков. 1956.

11. Фот, А. П. Об использовании математического моделирования в некоторых задачах машиностроения / А. А. Муллабаев, А. П. Фот, С. И. Павлов // Вестник ОГУ, 2006. — №2. — С. 75–82.

12. B.V.Kryzhanovsky, L.B.Litinskii, A.L.Mikaelian. «Vector-neuron models of associative memory», Proc. of Int. Joint Conference on Neural Networks IJCNN-04, Budapest-2004, pp. 909–1004.

13. B.V.Kryzhanovsky, B.M.Magomedov, A.L.Mikaelian. «A Domain model of neural network», Doklady Mathematics vol.71, pp. 310–314 (2005).

14. TESA Technology:

    https://technobearing.ru/d/877366/d/tesa2014-2015-compressed-206-221.pdf

15. Mitutoyo Corporation:

    https://www.mitutoyo.co.jp/eng/products/gaugeblock/gaugeblock.html

REFERENCES

1. Borevich Z. I., Shafarevich I. R., 1985, "Number Theory." Moscow: Nauka.

2. Vinogradov I. M., 1982, "Fundamentals of Number Theory." Moscow: Nauka.

3. GOST 9038-90. Length measures are plane-parallel end measures. Technical specifications (with Change N 1). APPROVED AND PUT INTO EFFECT BY the Resolution of the State Committee of the USSR on Product Quality Management and Standards of 25.01.90 No. 86.

4. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia. 420 p.

5. G. G. Malinetsky, 2009, "Mathematical foundations of synergetics." *Moscow, URSS.*

6. A. A. Mullabaev, A. P. Fot., 2005, "Optimization of sets of end measures and probes" *VESTNIK OSU*, . — No 4. — p. 152–153.

7. St.-vo state reg. program for computer No. 2016611967. Russian Federation. Program "Calculation of a set of end measures and its characteristics according to the universal function and relative metal capacity"/ A. P. Fot(RU), R. M. Dzhalmukhamedov(RU); copyright holder – Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education "Orenburg State University".- No. 2015663252; date of receipt 28.12.2015; date of registration. in the Register of Computer Programs 15.02.2016-Publ. 20.03.2016.

8. Sobolev S. L., 1974, "Introduction to the theory of cubature formulas." Moscow: Nauka, .

9. Patent RU No. 2629686 C1 IPC G01B5 / 02 (2006.01). Universal set of end measures / M. Yu. Tarova (RF), A. P. Fot (RF); Joint Stock Company "Military-Industrial Corporation "Scientific and Production Association of Mechanical Engineering" (RU) - - - No. 2016107665 - - - Declared 02.03.2016 - - - Decision to grant a patent dated 14.07.2017 - - - Publ. 31.08.2017, Byul. No. 2.

10. Khinchin A. Ya., 1956, "Chain fractions." — Kharkiv.

11. Fot, A. P., 2006, "On the use of mathematical modeling in some problems of mechanical engineering" / A. A. Mullabaev, A. P. Fot, S. I. Pavlov / / *Vestnik OSU*, . — №2. — P. 75–82.

12. B.V.Kryzhanovsky, L.B.Litinskii, A.L.Mikaelian. «Vector-neuron models of associative memory», Proc. of Int. Joint Conference on Neural Networks IJCNN-04, Budapest-2004, pp. 909–1004.

13. B.V.Kryzhanovsky, B.M.Magomedov, A.L.Mikaelian. «A Domain model of neural network», Doklady Mathematics vol.71, pp. 310–314 (2005).

14. TESA Technology:

    https://technobearing.ru/d/877366/d/tesa2014-2015-compressed-206-221.pdf

15. Mitutoyo Corporation:

    https://www.mitutoyo.co.jp/eng/products/gaugeblock/gaugeblock.html