ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 512.573 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-271-287

О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором

В. Л. Усольцев

Усольцев Вадим Леонидович — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).
e-mail: usl2004@mail.ru

Аннотация

В работе вводится понятие рисовского замыкания для подалгебр универсальных алгебр. Обозначим через $\triangle_A$ отношение равенства на A. Подалгебра B алгебры A называется подалгеброй Риса, если бинарное отношение $B^2 \cup \triangle_A$ есть конгруэнция алгебры A. Конгруэнция θ алгебры A называется конгруэнцией Риса, если $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры B алгебры A. Мы определяем оператор рисовского замыкания, ставя в соответствие произвольной подалгебре B алгебры A наименьшую по включению подалгебру Риса алгебры A, содержащую B. Показано, что в общем случае рисовское замыкание не коммутирует с операцией решеточного пересечения на решетке подалгебр универсальной алгебры. Как следствие, решетка подалгебр Риса в общем случае не является подрешеткой решетки подалгебр.

Неодноэлементная универсальная алгебра называется рисовски простой, если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной. В работе дается характеризация рисовски простых алгебр в терминах рисовского замыкания.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов, то есть, унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Получено полное описание рисовски простых алгебр в некоторых подклассах класса алгебр с одним оператором и тернарной основной операцией. Для алгебр из этих классов описано строение решеток подалгебр Риса. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы решетка подалгебр Риса алгебр из данных классов являлась цепью.

Ключевые слова: рисовское замыкание, подалгебра Риса, конгруэнция Риса, рисовски простая алгебра, алгебра с операторами.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:
В. Л. Усольцев. О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 271–287.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 512.573 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-271-287

On Rees closure in some classes of algebras with an operator

V. L. Usoltsev

Usol'tsev Vadim Leonidovich — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social-Pedagogical University (Volgograd).
e-mail: usl2004@mail.ru

Abstract

In this paper we introduce the concept of Rees closure for subalgebras of universal algebras. We denote by $\triangle_A$ the identity relation on A. A subalgebra B of algebra A is called a Rees subalgebra whenever $B^2 \cup \triangle_A$ is a congruence on A. A congruence θ of algebra A is called a Rees congruence if $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ for some subalgebra B of A. We define a Rees closure operator by mapping arbitrary subalgebra B of algebra A into the smallest Rees subalgebra that contains B. It is shown that in the general case the Rees closure does not commute with the operation $\wedge$ on the lattice of subalgebras of universal algebra. Consequently, in the general case, a lattice of Rees subalgebras is not a sublattice of lattice of subalgebras.

A non-one-element universal algebra A is called a Rees simple algebra if any Rees congruence on A is trivial. We characterize Rees simple algebras in terms of Rees closure.

Universal algebra is called an algebra with operators if it has an additional set of unary operations acting as endomorphisms with respect to basic operations. We described Rees simple algebras in some subclasses of the class of algebras with one operator and a ternary basic operation. For algebras from these classes, the structure of lattice of Rees subalgebras is described. Necessary and sufficient conditions for the lattice of Rees subalgebras of algebras from these classes to be a chain are obtained.

Keywords: Rees closure, Rees subalgebra, Rees congruence, Rees simple algebra, algebra with operators.

Bibliography: 29 titles.

For citation:
V. L. Usoltsev, 2021, "On Rees closure in some classes of algebras with an operator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 271–287.

Введение

В последнее время в алгебре возрастает интерес к различным операторам замыкания, связанным с производными структурами универсальных алгебр (см. например, [1] – [3]). Обзор [4] дает представление о классических результатах в этой области. Операторы замыкания рассматриваются в нем с общих позиций — как Галуа-замыкания, в контексте соответствий Галуа, возникающих между операциями и отношениями на алгебрах.

В работе [1] А. Г. Пинус вводит понятие гамильтонова замыкания на универсальных алгебрах как оператора замыкания на решетке подалгебр, связанного со свойством гамильтоновости. Универсальная алгебра называется *гамильтоновой* [5], [6], если любая ее подалгебра является классом некоторой конгруэнции этой алгебры. Определяемый в [1] оператор ставит в соответствие произвольной подалгебре B алгебры A ее *гамильтоново замыкание* $\overline{B}$, то есть, наименьшую по включению подалгебру алгебры A, содержащую B и являющуюся классом некоторой конгруэнции алгебры A. Тогда гамильтоновы алгебры можно рассматривать как алгебры, каждая подалгебра которых гамильтоново замкнута, то есть, совпадает со своим гамильтоновым замыканием.

В настоящей работе вводится близкое к рассмотренному выше понятие рисовского замыкания как оператора замыкания на решетке подалгебр произвольной универсальной алгебры, связанного с понятиями подалгебры Риса и конгруэнции Риса. Понятие конгруэнции Риса, первоначально введенное для полугрупп, в работе [7] обобщается на произвольные универсальные алгебры. Возникающие при этом определения, приведенные ниже, даны в формулировках монографии [8].

Обозначим через $\triangle_A$ нулевую конгруэнцию алгебры A. Конгруэнция θ алгебры A называется *конгруэнцией Риса*, если $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры B алгебры A. Подалгебра B алгебры A называется *подалгеброй Риса*, если $B^2 \cup \triangle_A$ есть конгруэнция алгебры A. Алгебра A называется *алгеброй Риса*, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса. Класс алгебр называется *рисовским*, если каждая его алгебра является алгеброй Риса. Характеризация алгебр Риса и рисовских многообразий алгебр дается в [9], [10]. В [11] изучаются конгруэнции Риса, задаваемые на алгебрах идеалами в смысле А. Урсини (см., например, [12]). В [13] рассматриваются конгруэнции Риса на решетках. В монографии [8] также уделяется значительное внимание подалгебрам и конгруэнциям Риса.

Обозначим через $SubA$ решетку подалгебр универсальной алгебры A, а через $ConA$ — решетку ее конгруэнций. Положим $\emptyset \in SubA$. В [7] показано, что при этом условии совокупность всех подалгебр Риса алгебры A образует решетку $Sub_R A$ относительно включения. Там же были изучены некоторые свойства решетки рисовских подалгебр. Отметим, что поскольку $\emptyset \in SubA$, то и совокупность всех конгруэнций Риса алгебры A образует полную решетку $Con_R A$ относительно включения, нулем и единицей которой являются нулевая и единичная конгруэнции $\triangle_A = \emptyset^2 \cup \triangle_A$ и $\bigtriangledown_A = A^2 \cup \triangle_A$ алгебры A.

Пусть A — произвольная универсальная алгебра. Определим отображение C_R из решетки $SubA$ в $SubA$, поставив в соответствие произвольной подалгебре $B \in SubA$ наименьшую по включению подалгебру Риса $\overline{B}_R$ алгебры A, содержащую B. В работе показано, что отображение C_R является оператором замыкания на $SubA$, и что рисовское замыкание в общем случае не коммутирует с операцией решеточного пересечения на $SubA$. Дается также характеризация рисовски замкнутых подалгебр. Далее мы рассматриваем решетку подалгебр Риса $Sub_R A$ как решетку рисовски замкнутых подалгебр алгебры A.

В [1] было введено понятие *гамильтоново простой алгебры*, как алгебры A, в которой гамильтоново замыкание любой ее неодноэлементной подалгебры совпадает с A. Рассматривая его аналог для рисовского замыкания, мы показываем, что он эквивалентен понятию *рисовски простой алгебры* [14], то есть, неодноэлементной алгебры, на которой любая конгруэнция Риса тривиальна. Естественный интерес в этом случае также представляет понятие, в некотором смысле противоположное рисовской простоте: *конгруэнц-алгеброй Риса* [14] называется алгебра, каждая конгруэнция которой является рисовской. Для гамильтонова замыкания противоположным к гамильтоновой простоте является свойство гамильтоновости. В случае же рисовского замыкания аналогом гамильтоновости выступает свойство быть алгеброй Риса, однако, понятия алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в общем случае достаточно сильно различаются. Так, например, любой унар является алгеброй Риса, но в то же время конгруэнц-алгебры Риса в классе унаров образуют достаточно узкий подкласс (см. [15]).

Далее в работе даются полное описание рисовски простых алгебр и описание строения решеток рисовских подалгебр в классах алгебр $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$ с оператором f и тернарной основной операцией, определяемых ниже. *Алгеброй с операторами* называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из *операторов* — унарных операций, перестановочных с любой операцией из Ω_1, то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1, называемых *основными*. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то унар $\langle A, f\rangle$ называется *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

В [16] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ задается тернарная операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f. Эта операция определяется следующим образом. Через $f^n(z)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу z; $f^0(z) = z$. Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \leqslant k(y,z) \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{1}$$

Из (1) следует, что операция p удовлетворяет тождествам Пиксли $p(y, y, x) = p(x, y, y) = p(x, y, x) = x$ и, как следствие, является мальцевской. Основные результаты, полученные при изучении свойств алгебр $\langle A, p, f\rangle$, см. в [17] — [23].

На основе подхода, предложенного в [16], в работе [24] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ определяется тернарная операция $s(x, y, z)$, названная *симметрической*, перестановочная с операцией f:

$$s(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) < k(y,z); \\ y, & \text{если } k(x,y) = k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) > k(y,z). \end{cases} \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что операция s удовлетворяет тождествам $s(y, y, x) = s(x, y, y) = s(y, x, y) = x$. Как следствие, она также является мальцевской, и, кроме того, операцией меньшинства (см. [25]). В [21] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f\rangle$, в [19] — гамильтоновы, а в [23] — конгруэнц-когерентные алгебры данного класса.

Операцией почти единогласия (near-unanimity operation) (см., напр., [26], [27]) называется n-арная операция φ, удовлетворяющая тождествам $\varphi(x, \ldots, x, y) = \varphi(x, \ldots, x, y, x) = \ldots = \varphi(y, x, \ldots, x) = x$ ($n \geqslant 3$). В тернарном случае φ называют *операцией большинства* (см. [25]).

В [28] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$, также на основе подхода из [16], задается операция большинства $m(x, y, z)$, перестановочная с операцией f:

$$m(x,y,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x,y) \geqslant k(y,z); \\ x, & \text{если } k(x,y) < k(y,z). \end{cases} \tag{3}$$

В [28] описаны простые и строго простые алгебры в классе алгебр $\langle A, m, f\rangle$, в [19] — гамильтоновы алгебры данного класса.

В [29] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ для $n \geqslant 3$ определяется n-арная операция почти единогласия $g^{(n)}$, перестановочная с операцией f, и при $n = 3$ совпадающая с операцией $m(x, y, z)$. Там же дается полное описание простых алгебр в классе алгебр $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$. В [14] полностью описаны алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в данном классе.

Основные определения и конструкции

Под *тривиальными* подалгебрами алгебры A будем понимать $\emptyset$ и A. Все другие подалгебры алгебры A будем называть *нетривиальными*.

Алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции (единичную $\bigtriangledown_A$ и нулевую $\triangle_A$). Класс конгруэнции θ, порожденный элементом x, обозначается через $[x]\theta$.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар. Для любых целых чисел $n > 0$, $m \geqslant 0$ положим

$$C_n^m = \langle a \mid f^m(a) = f^{m+n}(a)\rangle.$$

Унар C_n^0 называется *циклом длины* n.

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n > 0$, и *непериодическим* в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются, соответственно, множества периодических и непериодических элементов унара A. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *периодическим*, если $A = T(A)$, и *унаром без кручения*, если $A = D(A)$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$. *Глубиной* $t(A)$ *унара* A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то говорят, что унар имеет бесконечную глубину.

Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$. Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$.

Связный унар с неподвижным элементом называется *корнем*. Через D_m обозначается подунар произвольного корня, состоящий из всех элементов с глубиной, не превосходящей m, где m удовлетворяет неравенству $0 \leqslant m \leqslant t(A)$, если $t(A)$ конечна, и неравенству $0 \leqslant m < t(A)$ в противном случае. *Корнем без нетривиальных узлов* называется связный унар $\langle A, f\rangle$ с неподвижным элементом a, в котором не существует узловых элементов, отличных от a.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Через β_n обозначается бинарное отношение, заданное на корне $\langle A, f\rangle$ по правилу [18]: $x\beta_n y$ для $x, y \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $t(x) \leqslant n$, $t(y) \leqslant n$.

Рисовское замыкание

Напомним, что отображение $C_R : SubA \to SubA$, где A — произвольная универсальная алгебра, любой подалгебре $B \in SubA$ ставит в соответствие наименьшую по включению подалгебру Риса $\overline{B}_R$ алгебры A, содержащую B.

Из определения подалгебры Риса следует, что пересечение произвольной совокупности подалгебр Риса алгебры A, содержащих некоторую подалгебру $B \in SubA$, также является подалгеброй Риса алгебры A, содержащей B. А поскольку совокупность подалгебр Риса, включающих в себя B, непуста (она содержит, например, алгебру A), то определение отображения C_R корректно. Далее из определения C_R вытекает следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть A — произвольная универсальная алгебра. Тогда отображение $C_R : SubA \to SubA$, определенное выше, является оператором замыкания на решетке $SubA$.*

Подалгебру $\overline{B}_R$ назовем *рисовским замыканием* подалгебры B. Будем называть подалгебру *рисовски замкнутой*, если она совпадает со своим рисовским замыканием. Очевидно, что рисовски замкнутыми подалгебрами алгебры A будут ее подалгебры Риса, и только они. Отсюда, решетка C_R-замкнутых подалгебр алгебры A есть в точности решетка $Sub_R A$ ее подалгебр Риса. Из предложения 1 следует, что решетка подалгебр Риса произвольной алгебры является полной.

Из определения подалгебры Риса, данного в [7], непосредственно вытекает следующая характеризация рисовски замкнутых подалгебр.

Замечание 1. *Пусть B — подалгебра универсальной алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Подалгебра B рисовски замкнута тогда и только тогда, когда для любой n-арной операции $f \in \Omega$ и любых*

$a, b \in B$, $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ *выполняются следующие условия:*

$$\begin{cases} f(a, x_1, \ldots, x_{n-1}), f(b, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B & \text{или } f(a, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(b, x_1, \ldots, x_{n-1}); \\ f(x_1, a, \ldots, x_{n-1}), f(x_1, b, \ldots, x_{n-1}) \in B & \text{или } f(x_1, a, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, b, \ldots, x_{n-1}); \\ \qquad\qquad\qquad \ldots & \\ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a), f(x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \in B & \text{или } f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, b). \end{cases}$$

Предложение 2. *Рисовское замыкание в общем случае не коммутирует с операцией решеточного пересечения на $SubA$.*

Доказательство предложения 2 будет приведено в заключительной части работы, после доказательства необходимых утверждений. Непосредственно из предложения 2 получаем следующее следствие.

Следствие 1. *Решетка $Sub_R A$ рисовских подалгебр произвольной алгебры A в общем случае не является подрешеткой решетки $SubA$.*

Предложение 3. *Универсальная алгебра A рисовски проста тогда и только тогда, когда рисовское замыкание любой ее непустой неодноэлементной подалгебры совпадает с A.*

Доказательство. Пусть алгебра A рисовски проста. Тогда она неодноэлементна, и любая ее конгруэнция Риса тривиальна. Пусть B — непустая неодноэлементная подалгебра алгебры A. Так как $\overline{B}_R$ — подалгебра Риса в A, то отношение $\theta = \overline{B}_R^2 \cup \triangle_A$ является конгруэнцией Риса на A. По условию, конгруэнция θ тривиальна. Отсюда, имеем либо $\overline{B}_R^2 \subseteq \triangle_A$, либо $\overline{B}_R^2 = \bigtriangledown_A$. Первый случай ведет к противоречию. Действительно, поскольку подалгебра B неодноэлементна, то и $|\overline{B}_R| > 1$, откуда $\overline{B}_R^2 \not\subseteq \triangle_A$. Последний случай влечет $\overline{B}_R = A$.

Обратно, пусть теперь алгебра A такова, что рисовское замыкание любой ее непустой неодноэлементной подалгебры совпадает с A. Предположим, что найдется нетривиальная конгруэнция $\theta \in Con_R A$. Так как θ — конгруэнция Риса, то $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры Риса $B \in Sub_R A$. Отсюда, $\overline{B}_R = B$. Поскольку $\theta \neq \triangle_A$, то $|B| > 1$. Тогда, по условию, $\overline{B}_R = A$, то есть, $B = A$, откуда $\theta = \bigtriangledown_A$, что противоречит предположению. □

Рисовски простые алгебры

Далее везде через $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$ будем обозначать алгебры с оператором f и операциями $p(x, y, z)$, $s(x, y, z)$, $m(x, y, z)$, определенными по правилам (1), (2), (3) соответственно. Заметим, что по определениям операций p, s, m, любой подунар унара $\langle A, f\rangle$ является подалгеброй алгебр $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$.

Лемма 1. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) — (3). Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ несвязен, $\theta \in Con\langle A, d, f\rangle$ и $\theta \neq \bigtriangledown_A$, то любой класс конгруэнции θ содержится в некоторой компоненте связности унара $\langle A, f\rangle$.*

Доказательство. Для алгебры $\langle A, p, f\rangle$ утверждение было доказано в лемме 3 [20].

Пусть K — произвольный класс конгруэнции θ. Обозначим его порождающий элемент через b. Тогда $b \in B$ для некоторой компоненты связности B унара $\langle A, f\rangle$. Если класс K одноэлементен, то утверждение леммы очевидно.

Пусть K неодноэлементен. Тогда он содержит такой элемент a, что $a \neq b$. Предположим, что $a \notin B$. Тогда a содержится в компоненте связности, отличной от B. Последнее влечет $k(a, b) = \infty$. По лемме 11 [23] для алгебры $\langle A, s, f\rangle$ и лемме 5 [14] для алгебры $\langle A, m, f\rangle$, имеем $(a, b) \notin \theta$, что противоречит условию $a, b \in K$. □

Следствие 2. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил* (1) — (3). *Если унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, то рисовское замыкание любой подалгебры B алгебры $\langle A, d, f\rangle$, унарный редукт $\langle B, f\rangle$ которой также несвязен, совпадает с A.*

Доказательство. Предположим, что $\overline{B}_R \neq A$. Тогда найдется такая неединичная конгруэнция Риса $\theta \in Con_R\langle A, d, f\rangle$, что $\theta = \overline{B}_R^2 \cup \triangle_A$. Так как $B \subseteq \overline{B}_R$, то унарный редукт подалгебры $\overline{B}_R$ несвязен. С другой стороны, по лемме 1, класс $\overline{B}_R$ конгруэнции θ содержится в некоторой компоненте связности унара $\langle A, f\rangle$, что ведет к противоречию. $\Box$

Лемма 2. *Пусть θ — ненулевая конгруэнция Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил* (1) — (3). *Если неодноэлементный класс B конгруэнции θ содержит элемент b, для которого $k(f(b), b) = \infty$, то $\theta = \bigtriangledown_A$.*

Доказательство. Предположим, что $\theta \neq \bigtriangledown_A$. Так как $\theta \in Con_R\langle A, d, f\rangle$, то $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой подалгебры B алгебры $\langle A, d, f\rangle$. Пусть $b \in B$ и $k(f(b), b) = \infty$. Тогда $f(b) \in B$, откуда $b\theta f(b)$. Поскольку $\theta \neq \bigtriangledown_A$, то для алгебр $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$ выполняются условия лемм 2 [20], 11 [23] и 5 [14] соответственно. Тогда из условия $b\theta f(b)$ следует неравенство $k(f(b), b) < \infty$, что ведет к противоречию. $\Box$

Следствие 3. *Если B — непустая неодноэлементная подалгебра алгебры $\langle A, d, f\rangle$, содержащая элемент b, для которого $k(f(b), b) = \infty$, то рисовское замыкание подалгебры B совпадает с A.*

Доказательство. Предположим, что $\overline{B}_R \neq A$. Тогда найдется такая неединичная конгруэнция Риса $\theta \in Con_R\langle A, d, f\rangle$, что $\theta = \overline{B}_R^2 \cup \triangle_A$. Так как $B \subseteq \overline{B}_R$, то $|\overline{B}_R| > 1$ и, значит, $\theta \neq \triangle_A$. Тогда, по лемме 2, $\theta = \bigtriangledown_A$, что противоречит выбору θ. $\Box$

Лемма 3. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил* (1) — (3). *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар без кручения, то алгебра $\langle A, d, f\rangle$ рисовски проста.*

Доказательство. Пусть B — произвольная непустая неодноэлементная подалгебра алгебры $\langle A, d, f\rangle$. Зафиксируем элемент $b \in B$. Поскольку $\langle A, f\rangle$ — унар без кручения, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $f^n(f(b)) \neq f^n(b)$, откуда $k(f(b), b) = \infty$. Отсюда, по следствию 3 из леммы 2, $\overline{B}_R = A$. Тогда, по предложению 3, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ рисовски проста. $\Box$

Лемма 4. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил* (1) — (3). *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар, содержащий подунар S, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, то алгебра $\langle A, d, f\rangle$ рисовски проста.*

Доказательство. Пусть B — произвольная непустая неодноэлементная подалгебра алгебры $\langle A, d, f\rangle$. В силу связности $\langle A, f\rangle$ имеем $S \subseteq B$. Зафиксируем элемент $b \in S$. Так как $n > 1$, то $f(b) \neq b$. Предполагая, что $k(f(b), b) = m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, получаем $f^m(f(b)) = f^m(b)$, откуда $f(f^m(b)) = f^m(b)$, то есть, $n = 1$, что противоречит условию. Таким образом, $k(f(b), b) = \infty$. Тогда, как и выше, по следствию 3 из леммы 2 и предложению 3, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ рисовски проста. $\Box$

Лемма 5. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил* (1) — (3). *Если $\langle A, f\rangle$ — несвязный унар, не содержащий неодноэлементных компонент связности, имеющих неподвижные элементы, то алгебра $\langle A, d, f\rangle$ рисовски проста.*

Доказательство. Предположим, что алгебра $\langle A, d, f\rangle$ имеет нетривиальную конгруэнцию Риса $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ для некоторой своей подалгебры B. В силу нетривиальности θ, подалгебра B неодноэлементна. По лемме 1, класс B конгруэнции θ содержится в некоторой компоненте связности C унара $\langle A, f\rangle$. В силу своей связности, C является либо унаром без кручения, либо периодическим унаром.

В первом случае подунар $B \subseteq C$ — также унар без кручения. Тогда $k(f(b), b) = \infty$ для фиксированного элемента $b \in B$. Отсюда, по следствию 3 из леммы 2 и предложению 3, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ рисовски проста, что противоречит предположению.

Во втором случае C имеет подунар S, изоморфный C_n^0 для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и содержащийся в любом подунаре данной компоненты связности. Поскольку $B \subseteq C$, то C неодноэлементна. Так как по условию C не содержит неподвижного элемента, то $n > 1$. Тогда для фиксированного элемента $b \in S \subseteq B$ снова получаем $k(f(b), b) = \infty$, что опять ведет к противоречию. □

Лемма 6. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) — (3), причем унар $\langle A, f\rangle$ является корнем. Конгруэнция β_n на $\langle A, f\rangle$ является конгруэнцией Риса на алгебре $\langle A, d, f\rangle$ при любом n.*

Доказательство. Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень. Обозначим через a его неподвижный элемент и зафиксируем произвольное число $n < t(A)$. По леммам 15 [18] и 9 [23], отношение β_n, заданное на $\langle A, f\rangle$, является конгруэнцией алгебры $\langle A, d, f\rangle$. По предложению 1 [20], подунар D_n унара $\langle A, f\rangle$ является подалгеброй в $\langle A, d, f\rangle$. Из определения конгруэнции β_n следует, что $D_n = [a]\beta_n$. Докажем, что все классы конгруэнции β_n, отличные от D_n, одноэлементны.

Пусть $b \in A \backslash D_n$. Тогда $t(b) > n$. Предположим, что найдется элемент $c \in A$, для которого $b \neq c$ и $b\beta_n c$. Отсюда, по определению конгруэнции β_n, имеем $t(b) \leqslant n$, что противоречит выбору элемента b. Таким образом, $[b]\beta_n = \{b\}$ для всех $b \in A \backslash D_n$. Отсюда, $\beta_n = D_n^2 \cup \triangle_A$.

В случае, когда $t(A) < \infty$ и $n = t(A)$, имеем $\beta_n = \triangledown_A \in Con_R\langle A, d, f\rangle$. □

Следствие 4. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) — (3). Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ является корнем, то подунар D_n унара $\langle A, f\rangle$ является собственной подалгеброй Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$ при любом $n < t(A)$.*

Лемма 7. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ несвязен и содержит неодноэлементную компоненту связности B, имеющую неподвижный элемент, а β_n — конгруэнция унара $\langle B, f\rangle$, определенная в конце раздела 2. Тогда бинарное отношение $\overline{\beta_n} = \beta_n \cup \triangle_A$ на A является конгруэнцией Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) – (3).*

Доказательство. Пусть число n удовлетворяет неравенству $0 \leqslant n \leqslant t(B)$, если $t(B)$ конечна, и неравенству $0 \leqslant n < t(B)$ в противном случае. Из определений (1) – (3) следует, что подунар D_n унара $\langle B, f\rangle$ является подалгеброй в $\langle A, d, f\rangle$. Из равенства $\overline{\beta_n} = \beta_n \cup \triangle_A$ следует, что для любых $x, y \in A$ условие $x\overline{\beta_n}y$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x, y \in D_n$, либо $x = y$, то есть, $\overline{\beta_n} = D_n^2 \cup \triangle_A$. Докажем, что $\overline{\beta_n}$ — конгруэнция алгебры $\langle A, d, f\rangle$.

Пусть $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$, $x_1\overline{\beta_n}y_1$, $x_2\overline{\beta_n}y_2$, $x_3\overline{\beta_n}y_3$. Если $x_i = y_i$ или $x_i, y_i \in D_n$ для $i = 1, 2, 3$, то $d(x_1, x_2, x_3)\overline{\beta_n}d(y_1, y_2, y_3)$. Рассмотрим другие возможные случаи.

Случай 1. $x_1, y_1 \in D_n$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.

Пусть $x_2, x_3 \in B \backslash D_n$. Тогда $t(x_2) > n$, $t(x_3) > n$ и, значит, по лемме 10 [18], $k(x_1, x_2) = t(x_2) = k(y_1, x_2) = k(y_1, y_2)$. При этом, $k(x_2, x_3) = k(y_2, y_3)$. Отсюда, с учетом определений (1) – (3), имеем $d(x_1, x_2, x_3) = d(y_1, x_2, x_3) = d(y_1, y_2, y_3)$, то есть, $d(x_1, x_2, x_3)\overline{\beta_n}d(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $x_2 \in B \backslash D_n$, $x_3 \notin B$. Тогда $k(x_2,x_3)=\infty$. В то же время, опять $k(x_1,x_2)=t(x_2)=k(y_1,x_2)=k(y_1,y_2)$. Из определений (1), (2) и условий $x_2=y_2$, $x_3=y_3$ следует, что $p(x_1,x_2,x_3)=x_3=p(y_1,y_2,y_3)$ и $s(x_1,x_2,x_3)=x_3=s(y_1,y_2,y_3)$. По определению (3), $m(x_1,x_2,x_3)=x_1\overline{\beta_n}y_1=m(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть теперь $x_2 \notin B$, $x_3 \in B \backslash D_n$. Тогда, как и выше, $k(x_2,x_3)=\infty$. При этом, поскольку элемент x_2 и элементы x_1,y_1 лежат в разных компонентах связности, то $k(x_1,x_2)=\infty=k(y_1,x_2)$. Из определений (1), (3) вытекает, что $p(x_1,x_2,x_3)=x_3=p(y_1,y_2,y_3)$ и $m(x_1,x_2,x_3)=x_3=m(y_1,y_2,y_3)$. По определению (2), $s(x_1,x_2,x_3)=x_2=s(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть, наконец, $x_2,x_3 \notin B$. Тогда $k(x_1,x_2)=\infty=k(y_1,x_2)$, что исключает ситуацию $k(x_1,x_2)<k(x_2,x_3)$. По определению (3), $m(x_1,x_2,x_3)=x_3=m(y_1,y_2,y_3)$. Если $k(x_1,x_2)>k(x_2,x_3)$, то $p(x_1,x_2,x_3)=x_1\overline{\beta_n}y_1=p(y_1,y_2,y_3)$ и $s(x_1,x_2,x_3)=x_1\overline{\beta_n}y_1=s(y_1,y_2,y_3)$. Если же $k(x_1,x_2)=k(x_2,x_3)$, то $p(x_1,x_2,x_3)=x_3=p(y_1,y_2,y_3)$ и $s(x_1,x_2,x_3)=x_2=s(y_1,y_2,y_3)$.

Случай 2. $x_2,y_2 \in D_n$, $x_1=y_1$, $x_3=y_3$.

Пусть $x_1,x_3 \in B \backslash D_n$. Тогда $t(x_1)>n$, $t(x_3)>n$. Отсюда, $k(x_1,x_2)=t(x_1)=k(x_1,y_2)=k(y_1,y_2)$, $k(x_2,x_3)=t(x_3)=k(y_2,x_3)=k(y_2,y_3)$ и, по определениям (1), (3), имеем $p(x_1,x_2,x_3)=p(y_1,y_2,y_3)$ и $m(x_1,x_2,x_3)=m(y_1,y_2,y_3)$. Из определения (2) получаем либо $s(x_1,x_2,x_3)=s(y_1,y_2,y_3)$, либо $s(x_1,x_2,x_3)=x_2\overline{\beta_n}y_2=s(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть теперь $x_1 \in B \backslash D_n$, $x_3 \notin B$. Тогда $k(x_1,x_2)=t(x_1)=k(x_1,y_2)$ и $k(x_2,x_3)=\infty=k(y_2,x_3)$. Отсюда, $p(x_1,x_2,x_3)=x_3=p(y_1,y_2,y_3)$, $s(x_1,x_2,x_3)=x_3=s(y_1,y_2,y_3)$ и $m(x_1,x_2,x_3)=x_1=m(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть теперь $x_1 \notin B$, $x_3 \in B \backslash D_n$. Это влечет $k(x_1,x_2)=\infty=k(x_1,y_2)$ и $k(x_2,x_3)=t(x_3)=k(y_2,x_3)$. Отсюда, $p(x_1,x_2,x_3)=x_1=p(y_1,y_2,y_3)$, $s(x_1,x_2,x_3)=x_1=s(y_1,y_2,y_3)$ и $m(x_1,x_2,x_3)=x_3=m(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть, наконец, $x_1,x_3 \notin B$. Тогда $k(x_1,x_2)=\infty=k(x_1,y_2)$ и $k(x_2,x_3)=\infty=k(y_2,x_3)$. В этом случае $p(x_1,x_2,x_3)=x_3=p(y_1,y_2,y_3)$, $m(x_1,x_2,x_3)=x_3=m(y_1,y_2,y_3)$ и $s(x_1,x_2,x_3)=x_2\overline{\beta_n}y_2=s(y_1,y_2,y_3)$.

Случай 3. $x_3,y_3 \in D_n$, $x_1=y_1$, $x_2=y_2$.

Пусть $x_1,x_2 \in B \backslash D_n$. Тогда $t(x_1)>n$, $t(x_2)>n$. Отсюда, $k(x_2,x_3)=t(x_2)=k(x_2,y_3)$. С учетом этого, как и выше, имеем: либо $p(x_1,x_2,x_3)=x_1=p(y_1,y_2,y_3)$, либо $p(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=p(y_1,y_2,y_3)$; либо $s(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=s(y_1,y_2,y_3)$, либо $s(x_1,x_2,x_3)=x_2=s(y_1,y_2,y_3)$, либо $s(x_1,x_2,x_3)=x_1=s(y_1,y_2,y_3)$; либо $m(x_1,x_2,x_3)=x_1=m(y_1,y_2,y_3)$, либо $m(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=m(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть теперь $x_1 \in B \backslash D_n$, $x_2 \notin B$. Тогда $k(x_1,x_2)=\infty=k(y_1,y_2)$ и $k(x_2,x_3)=\infty=k(x_2,y_3)$. Отсюда, $p(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=p(y_1,y_2,y_3)$, $s(x_1,x_2,x_3)=x_2=s(y_1,y_2,y_3)$ и $m(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=m(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть теперь $x_1 \notin B$, $x_2 \in B \backslash D_n$. Это влечет $k(x_1,x_2)=\infty$ и $k(x_2,x_3)=t(x_2)=k(x_2,y_3)$. Отсюда, $p(x_1,x_2,x_3)=x_1=p(y_1,y_2,y_3)$, $s(x_1,x_2,x_3)=x_1=s(y_1,y_2,y_3)$ и $m(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=m(y_1,y_2,y_3)$.

Пусть, наконец, $x_1,x_2 \notin B$. Тогда $k(x_2,x_3)=\infty=k(x_2,y_3)$. В этом случае $p(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=p(y_1,y_2,y_3)$, а для других операций либо $s(x_1,x_2,x_3)=x_2=s(y_1,y_2,y_3)$, либо $s(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=s(y_1,y_2,y_3)$, и либо $m(x_1,x_2,x_3)=x_1=m(y_1,y_2,y_3)$, либо $m(x_1,x_2,x_3)=x_3\overline{\beta_n}y_3=m(y_1,y_2,y_3)$.

Случай 4. $x_1,y_1,x_2,y_2 \in D_n$, $x_3=y_3$.

Поскольку $t(x_1)\leqslant n$, $t(x_2)\leqslant n$, то $k(x_1,x_2)\leqslant n$. Аналогично, $k(y_1,y_2)\leqslant n$.

Пусть $x_3 \in B \backslash D_n$. Тогда $t(x_3)>n$ и, следовательно, $k(x_2,x_3)=t(x_3)=k(y_2,x_3)>n$. Если же $x_3 \notin B$, то $k(x_2,x_3)=\infty=k(y_2,x_3)$. И в том, и в другом случае из (1) – (3) получаем $p(x_1,x_2,x_3)=x_3=p(y_1,y_2,y_3)$, $s(x_1,x_2,x_3)=x_3=s(y_1,y_2,y_3)$ и $m(x_1,x_2,x_3)=x_1\overline{\beta_n}y_1=m(y_1,y_2,y_3)$.

Случай 5. $x_2,y_2,x_3,y_3 \in D_n$, $x_1=y_1$.

Аналогичен случаю 4.

Случай 6. $x_1, y_1, x_3, y_3 \in D_n$, $x_2 = y_2$.

Если $x_2 \in B \backslash D_n$, то $k(x_1, x_2) = t(x_2) = k(y_1, x_2)$ и $k(x_2, x_3) = t(x_2) = k(x_2, y_3)$. Если же $x_2 \notin B$, то $k(x_1, x_2) = \infty = k(y_1, x_2)$ и $k(x_2, x_3) = \infty = k(x_2, y_3)$. И в том, и в другом случае из (1) – (3) имеем $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = p(y_1, y_2, y_3)$, $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 = s(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Таким образом, $\overline{\beta_n} \in Con\langle A, d, f\rangle$. Тогда, поскольку $\overline{\beta_n} = D_n^2 \cup \triangle_A$, то $\overline{\beta_n}$ — конгруэнция Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$. $\square$

Следствие 5. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ несвязен и содержит неодноэлементную компоненту связности B, имеющую неподвижный элемент, а $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) — (3). Тогда при любом $n < t(B)$ подунар D_n компоненты связности B является собственной подалгеброй Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$.*

Следствие 6. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, содержит неодноэлементную компоненту связности B, имеющую неподвижный элемент, и $t(B) = \infty$. Тогда бинарное отношение $\overline{\beta} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\beta_n}$ на A, где β_n — конгруэнция унара $\langle B, f\rangle$, является конгруэнцией Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) – (3).*

Для доказательства достаточно заметить, что $B \in Sub\langle A, d, f\rangle$, $\overline{\beta}$ является конгруэнцией на $\langle A, d, f\rangle$, как объединение возрастающей цепочки конгруэнций, а из определения отношения $\overline{\beta_n}$ следует, что $\overline{\beta} = B^2 \cup \triangle_A$.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) — (3). Алгебра $\langle A, d, f\rangle$ рисовски проста тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*
(1) $\langle A, f\rangle$ — связный унар без кручения;
(2) $\langle A, f\rangle$ — связный унар, содержащий подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$;
(3) $\langle A, f\rangle$ — неодноэлементный унар, содержащий такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$;
(4) $\langle A, f\rangle$ — несвязный унар, каждая компонента связности которого является либо унаром без кручения, либо одноэлементным унаром, либо унаром, содержащим подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$.

Доказательство. *Необходимость.* Если унар $\langle A, f\rangle$ одноэлементен, то алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не является рисовски простой по определению. Пусть $\langle A, f\rangle$ — неодноэлементный связный унар, не удовлетворяющий условиям (1)–(3) теоремы. Тогда он периодичен, содержит подунар, изоморфный C_1^0, и такой элемент $c \in A$, что $t(c) > 1$. Таким образом, $\langle A, f\rangle$ — корень, для которого $t(A) > 1$. Обозначим его неподвижный элемент через a. По лемме 6, отношение $\beta_1 \in Con\langle A, d, f\rangle$ является конгруэнцией Риса. Из условия $t(A) > 1$ и связности унара $\langle A, f\rangle$ следует, что найдется такой элемент $b \in A$, что $t(b) = 1$. Отсюда, $b \neq a$ и $a\beta_1 b$. Тогда $|[a]\beta_1| > 1$ и значит, $\beta_1 \neq \triangle_A$. С другой стороны, $\beta_1 \neq \bigtriangledown_A$, так как $t(A) > 1$. Таким образом, β_1 — нетривиальная конгруэнция Риса на $\langle A, d, f\rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ несвязен и не удовлетворяет условию (4) теоремы. Тогда он содержит неодноэлементную компоненту связности B, имеющую неподвижный элемент b. Рассматривая конгруэнцию β_1 на $\langle B, f\rangle$, по лемме 7 получаем, что $\overline{\beta_1}$ — конгруэнция Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$. Так как $|B| > 1$, то $\overline{\beta_1} \neq \triangle_A$. Зафиксируем элемент $a \in A \backslash B$. Предполагая, что $\overline{\beta_1} = \bigtriangledown_A$, имеем $a\overline{\beta_1}b$, откуда $a \in B$, что противоречит выбору элемента a. Таким образом, $\overline{\beta_1}$ — нетривиальная конгруэнция Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$.

Достаточность. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ — связный. Если $\langle A, f\rangle$ — унар без кручения, то утверждение теоремы следует из леммы 3. В случае, когда $\langle A, f\rangle$ — унар, содержащий подунар S, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, оно вытекает из леммы 4. Пусть, наконец, $\langle A, f\rangle$ — неодноэлементный унар, содержащий такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.

Тогда, по теоремам 2 [18], 9 [21] и 2 [28] алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является простой, а, следовательно, и рисовски простой.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ несвязен. Из условия (4) теоремы следует, что он не содержит неодноэлементных компонент связности, имеющих неподвижные элементы. Отсюда, по лемме 5, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ является рисовски простой. $\square$

Решетки подалгебр Риса

Предложение 4. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$ и идемпотентными основными операциями. Если решетка $Sub_R\langle A, \Omega\rangle$ является цепью, то унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит одноэлементные подунары B и C. Так как основные операции алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ идемпотентны, то подунары B и C являются ее подалгебрами. Одноэлементные подалгебры рисовски замкнуты, то есть, являются подалгебрами Риса. При этом, B и C не сравнимы в $Sub_R\langle A, \Omega\rangle$, так как лежат в разных компонентах связности унара $\langle A, f\rangle$. $\square$

Опишем теперь строение решеток рисовских подалгебр в классах алгебр $\langle A, p, f\rangle$, $\langle A, s, f\rangle$, $\langle A, m, f\rangle$.

Лемма 8. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил* (1) — (3). *Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является двухэлементной цепью $\{\emptyset, A\}$.*

Доказательство. Так как унар $\langle A, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то и алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не имеет одноэлементных подалгебр.

Если унар $\langle A, f\rangle$ связен, то, учитывая условия леммы, он либо является унаром без кручения, либо содержит подунар C_n^0 для некоторого $n > 1$. Если же унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, то каждая его компонента связности является либо унаром без кручения, либо унаром, содержащим подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$.

По теореме 1, во всех перечисленных случаях алгебра $\langle A, d, f\rangle$ рисовски проста. Отсюда, по предложению 3, рисовское замыкание любой ее непустой подалгебры совпадает с A. $\square$

Лемма 9. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил* (1) — (3). *Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ является корнем, то нетривиальными рисовски замкнутыми подалгебрами в $\langle A, d, f\rangle$ являются подалгебры вида D_m, где $0 \leqslant m < t(A)$, и только они.*

Доказательство. Сразу же заметим, что по следствию 4 из леммы 6, подунар D_n унара $\langle A, f\rangle$ является подалгеброй Риса алгебры $\langle A, d, f\rangle$ при любом неотрицательном $n < t(A)$. Другими словами, подалгебра D_n рисовски замкнута.

Пусть B — произвольная непустая подалгебра алгебры $\langle A, d, f\rangle$. Тогда $\langle B, f\rangle$ — подунар унара $\langle A, f\rangle$. В случае, когда $t(A) = 0$, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ одноэлементна и утверждение леммы очевидно, поэтому далее полагаем, что $t(A) > 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $t(A)$ конечна. В силу данного условия, множество глубин элементов в любой системе порождающих подунара $\langle B, f\rangle$ ограничено сверху, а значит, имеет наибольший элемент. В ходе доказательства леммы 7 [20] показано, что в таком случае наибольшая глубина элементов во всех системах порождающих унара $\langle B, f\rangle$ одинакова. Обозначим ее через m и докажем, что рисовское замыкание подалгебры B алгебры $\langle A, d, f\rangle$ совпадает с D_m.

Так как $t(A) > 0$, то $m > 0$. Из определения подалгебры D_m следует, что $B \subseteq D_m \in Sub_R\langle A, d, f\rangle$. Отсюда, по определению рисовского замыкания, $\overline{B}_R \subseteq D_m$. Докажем обратное включение.

Пусть $x \in D_m$, откуда $t(x) \leqslant m$. По условию, найдется элемент $b \in B \subseteq \overline{B}_R$, для которого $t(b) = m$. Если $x = b$, то $x \in \overline{B}_R$. Пусть $x \neq b$. Поскольку $\overline{B}_R \in Sub_R\langle A, d, f\rangle$, то $f(b) \in \overline{B}_R$ и найдется конгруэнция $\theta \in Con\langle A, d, f\rangle$, для которой $\theta = \overline{B}^2_R \cup \triangle_A$. Из условия $b, f(b) \in \overline{B}_R$ следует, что $b\theta f(b)$. Поскольку $m > 0$, то $b \neq f(b)$, откуда $t(f(b)) < t(b)$. Тогда, по лемме 10 [18], $k(b, f(b)) = t(b) = m$. Если $t(x) < m = t(b)$, то $k(x, b) = t(b)$. Если же $t(x) = m = t(b)$, то, по той же лемме 10 [18], $k(x, b) \leqslant t(b)$. Таким образом, в общем случае, $k(x, b) \leqslant k(b, f(b))$. Отсюда, по определению (1) имеем $p(x, b, f(b)) = f(b)$. Тогда $f(b) = p(x, b, f(b))\theta p(x, b, b) = x$ и, следовательно, $x\theta b$, то есть, $x \in \overline{B}_R$. Из определения (2) имеем $s(x, b, f(b)) \in \{b, f(b)\}$, откуда аналогично получаем $x \in \overline{B}_R$. И наконец, из определения (3) следует, что $x = m(f(b), b, x)\theta m(b, b, x) = b$, откуда снова $x \in \overline{B}_R$. Тогда $D_m \subseteq \overline{B}_R$ и, окончательно, $\overline{B}_R = D_m$.

Пусть теперь $t(A)$ бесконечна. Рассуждая как в случае ее конечности, получаем, что либо во всех системах порождающих подунара $\langle B, f\rangle$ множество глубин их элементов не ограничено, либо все его системы порождающих имеют одну и ту же наибольшую глубину элементов m. Во втором случае, аналогично доказанному выше, $\overline{B}_R = D_m$.

Допустим теперь, что множество глубин элементов в некоторой системе порождающих подунара $\langle B, f\rangle$ не ограничено и докажем, что тогда рисовское замыкание подалгебры B совпадает с A, то есть, является тривиальной подалгеброй. Предположим, что $\overline{B}_R \neq A$. Тогда найдутся элемент $c \in A\backslash\overline{B}_R$ и такая неединичная конгруэнция $\theta \in Con_R A$, что $\theta = \overline{B}^2_R \cup \triangle_A$. По условию, существует также элемент $b \in B \subseteq \overline{B}_R$, для которого $t(b) > t(c)$. Из последнего неравенства, по лемме 10 [18], получаем $k(c, b) = t(b)$. Кроме того, $f(b) \in B \subseteq \overline{B}_R$, так как $B \in Sub\langle A, d, f\rangle$. Из условия $b, f(b) \in \overline{B}_R$ следует, что $b\theta f(b)$. Поскольку $t(b) > t(c)$, то $t(b) > 0$, откуда $b \neq f(b)$ и $t(f(b)) < t(b)$. Тогда, снова по лемме 10 [18], $k(b, f(b)) = t(b)$. Отсюда, $p(c, b, f(b)) = f(b)$. Учитывая равенство $p(c, b, b) = c$, получаем $f(b)\theta c$, что противоречит условию $c \notin \overline{B}_R$. Аналогично получаем противоречия из соотношений $b = s(c, b, f(b))\theta s(c, b, b) = c$ и $c = m(f(b), b, c)\theta m(b, b, c) = b$. Окончательно, $\overline{B}_R = A$. $\square$

Следствие 7. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) — (3), а унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ является корнем. Если $t(A)$ конечна, то решетка $Sub_R A$ является цепью длины $t(A) + 1$. Если же $t(A)$ бесконечна, то $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ изоморфна частично упорядоченному множеству $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей.*

Лемма 10. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) — (3). Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ несвязен и содержит хотя бы один одноэлементный подунар, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ изоморфна кардинальной сумме цепей, пополненной внешними нулем и единицей, где слагаемым суммы взаимно однозначно соответствуют компоненты связности унара $\langle A, f\rangle$, содержащие одноэлементный подунар. Для каждой компоненты связности E с одноэлементным подунаром, соответствующее ей слагаемое кардинальной суммы либо является цепью длины $t(E)$ (в случае, если $t(E)$ конечна), либо изоморфно цепи $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей (если $t(E)$ бесконечна).*

Доказательство. По следствию 2 из леммы 1, рисовское замыкание любой подалгебры $B \in Sub\langle A, d, f\rangle$, имеющей несвязный унарный редукт, совпадает с A. Таким образом, далее достаточно рассмотреть подалгебры, унарные редукты которых содержатся в компонентах связности унара $\langle A, f\rangle$. Пусть B — подалгебра алгебры $\langle A, d, f\rangle$, унарный редукт $\langle B, f\rangle$ которой лежит в некоторой компоненте связности E унара $\langle A, f\rangle$.

Если компонента E не содержит одноэлементный подунар, она либо является унаром без кручения, либо имеет подунар S, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$. В первом случае B не содержит периодических элементов, а значит, $k(b, f(b)) = \infty$ для некоторого $b \in B$. Во втором случае $S \subseteq B$. Фиксируя $b \in S$, из условия $n > 1$ снова получаем $k(b, f(b)) = \infty$. При этом, из отсутствия одноэлементных подунаров в E следует, что $|B| > 1$. Тогда подалгебра B удовлетворяет условиям следствия 3 из леммы 2, откуда $\overline{B}_R = A$.

Пусть теперь E имеет одноэлементный подунар. Тогда, по следствию 5 из леммы 7, для любого $n < t(E)$ имеем $D_n \in Sub_R\langle A, d, f\rangle$, то есть, подалгебра D_n алгебры $\langle A, d, f\rangle$ рисовски замкнута. Если $t(E) = m < \infty$, то D_m совпадает с E. Так как по лемме 7, $\overline{\beta_{t(E)}} \in Con_R\langle A, d, f\rangle$, то $\overline{E}_R = E$, то есть, подалгебра $D_{t(E)}$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ также рисовски замкнута. С другой стороны, рассуждая по аналогии с доказательством леммы 9, получаем, что $\overline{B}_R = D_k$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant m$. Отсюда, рисовские замыкания всех непустых подалгебр алгебры $\langle A, d, f\rangle$, содержащихся в E, образуют в решетке $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ цепь длины $t(E)$.

Пусть теперь $t(E) = \infty$. Как и выше, по следствию 5 из леммы 7, при любом $n < t(E)$ подалгебра D_n алгебры $\langle A, d, f\rangle$ рисовски замкнута. Сама подалгебра E также рисовски замкнута, что вытекает из следствия 6 из леммы 7. Далее, как и выше, $\overline{B}_R = D_k$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant m$. Таким образом, рисовские замыкания всех непустых подалгебр, содержащихся в E, образуют в решетке $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ цепь, изоморфную цепи $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leqslant\rangle$, с присоединенной внешней единицей.

Поскольку компоненты связности унара не пересекаются, то частично упорядоченное множество всех нетривиальных рисовски замкнутых подалгебр алгебры $\langle A, d, f\rangle$ изоморфно кардинальной сумме цепей, откуда следует утверждение леммы. □

Из лемм 8, 10 и следствия 7 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\langle A, d, f\rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d, заданной по одному из правил (1) — (3). Справедливы следующие утверждения:*
(1) Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является двухэлементной цепью $\{\emptyset, A\}$.
(2) Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ является связным унаром с одноэлементным подунаром. Если $t(A)$ конечна, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является цепью длины $t(A)+1$. Если же $t(A)$ бесконечна, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ изоморфна цепи $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей.
(3) Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ несвязен и содержит хотя бы один одноэлементный подунар, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ изоморфна кардинальной сумме цепей, пополненной внешними нулем и единицей, где слагаемым суммы взаимно однозначно соответствуют компоненты связности унара $\langle A, f\rangle$, содержащие одноэлементный подунар. Для каждой компоненты связности E с одноэлементным подунаром, соответствующее ей слагаемое кардинальной суммы либо является цепью длины $t(E)$ (в случае, если $t(E)$ конечна), либо изоморфно цепи $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей (если $t(E)$ бесконечна).

Следствие 8. *Атомами решетки $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ являются либо одноэлементные подалгебры алгебры $\langle A, d, f\rangle$, либо, в случае отсутствия таких подалгебр, сама алгебра A. Других атомов в $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ нет.*

Следствие 9. *Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то единственным коатомом решетки $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является пустая подалгебра. В противном случае, если $\langle A, f\rangle$ связный, то решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ имеет единственный коатом $D_{t(A)-1}$ только при условии $t(A) < \infty$; при $t(A) = \infty$ коатомов в $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ нет. Если же унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, то коатомами $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ являются его компоненты связности, содержащие одноэлементные подунары, и только они.*

Следствия 8 и 9 вытекают непосредственно из теоремы 2.

Следствие 10. *Решетка $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является цепью тогда и только тогда, когда унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, d, f\rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара.*

Доказательство. Необходимость утверждения вытекает из предложения 4.

Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара. Тогда он либо не имеет одноэлементных подунаров, либо является корнем, либо изоморфен сумме корня и подунара, не содержащего неподвижных элементов. Во всех этих случаях, по теореме 2, $Sub_R\langle A, d, f\rangle$ является цепью. □

Докажем теперь предложение 2.

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\langle A, p, f\rangle$, где $A = \{a, b, c, d\}$ и $f(a) = a$, $f(b) = a$, $f(c) = a$, $f(d) = c$, а операция p задана по правилу (1). Непосредственно замечаем, что унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ является корнем, а множества $B = \{a, b\}$ и $C = \{a, c\}$ есть его подунары. Тогда, по определению (1), B и C являются подалгебрами алгебры $\langle A, p, f\rangle$. Так как $t(b) = t(c) = 1$, то, по лемме 9, $\overline{B}_R = D_1 = \overline{C}_R$, откуда $\overline{B}_R \wedge \overline{C}_R = D_1 = \overline{\{a, b, c\}}$. С другой стороны, $B \wedge C = \{a\}$, а значит, $\overline{(B \wedge C)}_R = \{a\}$. Таким образом, $\overline{B}_R \wedge \overline{C}_R \neq \overline{(B \wedge C)}_R$. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пинус А. Г. Гамильтоново замыкание на универсальных алгебрах // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 3 (325). С. 610–616.

2. Пинус А. Г. О классическом Галуа-замыкании для универсальных алгебр // Известия вузов. Математика. 2014. № 2. С. 47–53.

3. Пинус А. Г. Об одном из логических замыканий на универсальных алгебрах // Сибирские электронные матем. известия. 2015. Т. 12. С. 698–703.

4. Pöschel R. Galois connections for operations and relations. In: Galois connections and applications. K. Denecke, M. Erné, S. L. Wismath (Eds). Dordrecht; Boston: Kluwer academic publishers, 2004. P. 231–258.

5. Csákány B. Abelian properties of primitive classes of universal algebras // Acta. Sci. Math. 1964. Vol. 25. P. 202–208.

6. Shoda K. Zur theorie der algebraischen erweiterungen // Osaka Math. Journal. 1952. Vol. 4. P. 133–143.

7. Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. V. 29. P. 229–239.

8. Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. Vienna: Heldermann-Verl., 2003. 192 p.

9. Chajda I., Duda J. Rees algebras and their varieties // Publ. Math. (Debrecen). 1985. V. 32. P. 17–22.

10. Šešelja B., Tepavčević A. On a characterization of Rees varieties // Tatra Mountains Math. Publ. 1995. V. 5. P. 61–69.

11. Chajda I. Rees ideal algebras // Math. Bohem. 1997. V. 122, No. 2. P. 125–130.

12. Gumm P. H., Ursini A. Ideals in universal algebras // Algebra Universalis. 1984. Vol. 19. P. 45–54.

13. Szász G. Rees factor lattices. Publ. Math. 1968. Vol. 15. P. 259–266.

14. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 4(60). С. 157–166.

15. Усольцев В. Л. Конгруэнц-алгебры Риса в классах унаров и алгебр с операторами // Международная алгебраическая конференция, посв. 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша. Тез. докладов. М.: Издательство МГУ, 2018. С. 199–201.

16. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л.А. Скорнякова. Волгоград, 1999. С. 31–32.

17. Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201–202.

18. Usoltsev, V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, no. 2. P. 281–293.

19. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 3(51). С. 100–113.

20. Усольцев В. Л. О гамильтоновом замыкании на классе алгебр с одним оператором // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 4(56). С. 284–302.

21. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.

22. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. "Ест. и физ.-мат. науки". 2005. № 4(13). С. 17–24.

23. Лата А. Н. О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2(62). С. 154–172.

24. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p, заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 2(38). С. 127–134.

25. Szendrei A. Clones in universal algebra. Montréal: Les presses de l'Université de Montréal, 1986. 166 p.

26. Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. 1975. V. 143. P. 165–174.

27. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms // Algebra Universalis. 2008. Vol. 58. P. 119–128.

28. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 4(48). С. 196–204.

29. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.

REFERENCES

1. Pinus, A. G. 2014, "Hamiltonian closure on universal algebras" , *Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal*, vol. 55, no. 3(325), pp. 610–616 (Russian); translated in *Siberian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 3(325), pp. 498–502. DOI: 10.1134/S0037446614030112

2. Pinus, A. G. 2014, "The classical Galois closure for universal algebras" , *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, no. 2, pp. 47–53 (Russian); translated in *Russian Mathematics*, vol. 58, no. 2, pp. 39–44. DOI: 10.3103/S1066369X14020066

3. Pinus, A. G. 2015, "On some of logical closures on universal algebras" , *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya (Siberian Electronic Mathematical Reports)*, vol. 12, pp. 698–703 (Russian). DOI: 10.17377/semi.2015.12.055

4. Pöschel, R. 2004, "Galois connections for operations and relations" , pp. 231–258. In: Denecke, K., Erné, M. & Wismath, S. L. (Eds). 2004, "Galois connections and applications" , *Kluwer academic publishers*, Dordrecht; Boston, 501 p.

5. Csákány, B. 1964, "Abelian properties of primitive classes of universal algebras" , *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 25, pp. 202–208. (Russian)

6. Shoda, K. 1952, "Zur theorie der algebraischen erweiterungen" , *Osaka Mathematical Journal*, vol. 4, pp. 133–143.

7. Tichy, R. F. 1981, "The Rees congruences in universal algebras" , *Publications de l'Institut Mathematique (Beograd)*, vol. 29, pp. 229–239.

8. Chajda, I., Eigenthaler, G. & Langer, H. 2003, "Congruence classes in universal algebra" , *Heldermann Verlag*, Vienna, 192 pp.

9. Chajda, I. & Duda, J. 1985, "Rees algebras and their varieties" , *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 32, pp. 17–22.

10. Šešelja, B. & Tepavčević, A. 1995, "On a characterization of Rees varieties" , *Tatra Mountains Mathematical Publications*, vol. 5, pp. 61–69.

11. Chajda, I. 1997, "Rees ideal algebras" , *Mathematica Bohemica*, vol. 122, no. 2, pp. 125–130.

12. Gumm, P. H. & Ursini, A. 1984, "Ideals in universal algebras" , *Algebra Universalis*, vol. 19, pp. 45–54.

13. Szász, G. 1968, "Rees factor lattices" , *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 15, pp. 259–266.

14. Usol'tsev, V. L. 2016, "Rees algebras and Rees congruence algebras of one class of algebras with operator and basic near-unanimity operation" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, issue 4(60), pp. 157–166. (Russian)

15. Usol'tsev, V. L. 2018, "Rees congruence algebras in classes of unars and algebras with operators" , *Mezhdunarodnaya algebraicheskaya conferentsia posvyashchennaya 110-letiyu so dnya rozhdeniya professora A. G. Kurosha. Tezisy dokladov (International Algebraic Conference dedicated to the 110th anniversary of the birth of Professor A. G. Kurosh. Abstracts)*, *Moscow State University Publishing House*, Moscow, pp. 199–201. (Russian)

16. Kartashov, V. K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skornyakova (Universal algebra and application: theses of International workshop dedicated memory of prof. L.A. Skornyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)

17. Usol'tsev, V. L. 2008, "Unars with ternary Mal'tsev operation", *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 63, no. 5, pp. 201–202 (Russian); translated in *Russian mathematical surveys*, 2008, vol. 63, no. 5, pp. 986-988. DOI: 10.1070/RM2008v063n05ABEH004572

18. Usoltsev, V. L. 2010, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 281-293. DOI: 10.1007/S1095800997306

19. Usol'tsev, V. L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 15, issue 3(51), pp. 100–113. (Russian)

20. Usol'tsev, V. L. 2015, "On Hamiltonian closure on class of algebras with one operator", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, issue 4(56), pp. 284–302. (Russian)

21. Usol'tsev, V. L. 2012, "On polynomially complete and Abelian unars with Mal'tsev operation", *Uchenye Zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, vol. 6(50), part 2, pp. 229–236. (Russian)

22. Usol'tsev, V. L. 2005, "On subdirect irreducible unars with Mal'tsev operation", *Izvestiya VGPU. Seriya "Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki"*, no. 4(13), pp. 17-24. (Russian)

23. Lata, A. N. 2017, "On congruence coherent Rees algebras and algebras with an operator", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, issue 2(62), pp. 154–172. (Russian)

24. Usol'tsev, V. L. 2011, "Free algebras in the variety of unars with Mal'tsev operation that defined by identity $p(x, y, x) = y$", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 12, issue 2(38), pp. 127–134. (Russian)

25. Szendrei, A. 1986, "Clones in universal algebra", *Les presses de l'Université de Montréal*, Montréal, 166 pp.

26. Baker, K. A. & Pixley, A. 1975, "Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 143, pp. 165–174. DOI: 10.1007/BF01187059

27. Marković, P. & McKenzie, R. 2008, "Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms", *Algebra Universalis*, vol. 58, pp. 119–128. DOI: 10.1007/s00012-008-2049-1

28. Usol'tsev, V. L. 2013, "On strictly simple ternary algebras with operators", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14, issue 4(48), pp. 196–204. (Russian)

29. Usol'tsev, V. L. 2016, "On congruence lattices of algebras with one operator and basic near-unanimity operation", *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzhya*, issue 2, pp. 28–30. (Russian)