

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-257-270

**Подпрямая неразложимость и атомы решеток конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией**

В. Л. Усольцев

**Усольцев Вадим Леонидович** — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

*e-mail: usl2004@mail.ru*

**Аннотация**

В статье изучаются атомы решеток конгруэнций и подпрямая неразложимость алгебр с одним оператором и основной операцией меньшинства, определенной специальным образом и называемой симметрической. Операцией меньшинства называется тернарная операция  $d(x, y, z)$ , удовлетворяющая тождествам  $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$ . Алгебра подпрямая неразложима, если она имеет наименьшую ненулевую конгруэнцию. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух непустых непересекающихся частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов. Операторами называются унарные операции, действующие как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочные с основными операциями. Решетка с нулем называется атомной, если любой ее элемент содержит некоторый атом. Решетка с нулем называется точечной (atomistic), если любой ее ненулевой элемент представляется как решеточное объединение некоторого множества атомов.

Показано, что решетка конгруэнций алгебр с одним оператором и основной симметрической операцией является атомной. Описано строение атомов в решетках конгруэнций алгебр данного класса. Получено полное описание подпрямых неразложимых алгебр в данном классе, а также алгебр, имеющих точечную решетку конгруэнций.

*Ключевые слова:* подпрямая неразложимая алгебра, решетка конгруэнций, атом решетки конгруэнций, атомная решетка, алгебра с операторами.

*Библиография:* 24 названия.

**Для цитирования:**

В. Л. Усольцев. Подпрямая неразложимость и атомы решеток конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 257–270.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-257-270

**The subdirect irreducibility and the atoms of congruence lattices of algebras with one operator and the symmetric main operation**

V. L. Usoltsev

**Usoltsev Vadim Leonidovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social-Pedagogical University (Volgograd).

*e-mail: usl2004@mail.ru*

**Abstract**

In that paper we study atoms of congruence lattices and subdirectly irreducibility of algebras with one operator and the main symmetric operation. A ternary operation  $d(x, y, z)$  satisfying identities  $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$  is called a minority operation. The symmetric operation is a minority operation defined by specific way. An algebra  $A$  is called subdirectly irreducible if  $A$  has the smallest nonzero congruence. An algebra with operators is an universal algebra whose signature consists of two nonempty non-intersectional parts: the main one which can contain arbitrary operations, and the additional one consisting of operators. The operators are unary operations that act as endomorphisms with respect to the main operations, i.e., one that permutable with main operations. A lattice  $L$  with zero is called atomic if any element of  $L$  contains some atom. A lattice  $L$  with zero is called atomistic if any nonzero element of  $L$  is a join of some atom set.

It shown that congruence lattices of algebras with one operator and main symmetric operation are atomic. The structure of atoms in the congruence lattices of algebras in given class is described. The full describe of subdirectly irreducible algebras and of algebras with an atomistic congruence lattice in given class is obtained.

**Keywords:** subdirectly irreducible algebra, congruence lattice, atom of congruence lattice, atomic lattice, algebra with operators.

**Bibliography:** 24 titles.

**For citation:**

V. L. Usoltsev, 2021, "The subdirect irreducibility and the atoms of congruence lattices of algebras with one operator and the symmetric main operation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 257–270.

**Введение**

Подпрямо неразложимые алгебры играют важную роль в универсальной алгебре. Алгебра подпрямо неразложима, если она имеет наименьшую ненулевую конгруэнцию, называемую монолитом. Хорошо известно (см., например, [1]), что любая алгебра разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых алгебр, а любое многообразие алгебр вполне определяется своими подпрямо неразложимыми алгебрами. Известно также, что любая алгебра сигнатуры, содержащей не менее одной операции ариности большей либо равной двум, вложима в некоторую подпрямо неразложимую алгебру той же сигнатуры. Более того, в некоторых классах алгебр любая алгебра изоморфна фактор-алгебре некоторой подпрямо неразложимой

алгебры по ее монолиту [2]. В связи с изложенным выше, естественный интерес вызывает задача описания подпрямых неразложимых алгебр в различных классах алгебр (см. [3]–[9]).

В терминах теории решеток неоднородная алгебра подпрямая неразложима тогда и только тогда, когда решетка ее конгруэнций имеет атом, содержащийся во всех ненулевых конгруэнциях алгебры. Элемент  $a$  решетки  $\langle L, \leq \rangle$  с нулем  $0$  называется атомом, если для любого  $x \in L$  из  $0 < x \leq a$  следует, что  $x = a$ . Решетка с нулем называется атомной, если любой ее элемент содержит некоторый атом. Таким образом, описание атомов и изучение условий атомарности решеток конгруэнций облегчает исследование подпрямых неразложимых алгебр. В [10] были описаны атомы в решетках конгруэнций унаров, то есть алгебр с одной унарной операцией. Там же были получены необходимые и достаточные условия, при которых решетка конгруэнций унара является точечной. Решетка с нулем называется точечной (atomistic), если любой ее ненулевой элемент представляется как решеточное объединение некоторого множества атомов.

В настоящей работе изучаются атомы решеток конгруэнций и подпрямые неразложимые алгебры в классе алгебр  $\langle A, s, f \rangle$  с оператором  $f$  и основной операцией меньшинства  $s(x, y, z)$ , определенной ниже. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух непустых непересекающихся частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов. Операторами называются унарные операции, действующие как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочные с основными операциями. Свойства алгебр с дополнительной унарной операцией, связанные с подпрямой неразложимостью, рассматривались в [11]. Подпрямые неразложимые алгебры с операторами изучались в [6], [12].

Алгебры с операторами естественным образом связаны с унарами. Если  $f$  — унарная операция из сигнатуры  $\Omega$ , то унар  $\langle A, f \rangle$  называется унарным редуктом алгебры  $\langle A, \Omega \rangle$ . Мы изучаем алгебры с операторами в терминах их унарных редуктов. Это позволяет с единых позиций рассматривать алгебры с операторами, имеющие различные основные сигнатуры.

Операцией меньшинства (см., например, [13]) называется тернарная операция  $d(x, y, z)$ , удовлетворяющая тождествам  $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$ . Из определения следует, что операция меньшинства является мальцевской.

В [14] на произвольном унаре  $\langle A, f \rangle$  задается тернарная операция  $p(x, y, z)$ , перестановочная с операцией  $f$ . Основные результаты, полученные при изучении свойств конгруэнций алгебр  $\langle A, p, f \rangle$  с оператором  $f$ , приводятся в [15]. В [12] полностью описаны подпрямые неразложимые алгебры в классе алгебр  $\langle A, p, f \rangle$ . В [16] получено описание атомов решеток конгруэнций алгебр данного класса, а также алгебр этого класса, имеющих точечную решетку конгруэнций.

В [17] показано, что на любом унаре  $\langle A, f \rangle$  можно так задать тернарную операцию  $s(x, y, z)$ , что алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  становится алгеброй с оператором  $f$ . Предложенная конструкция восходит к [14]. Пусть  $\langle A, f \rangle$  — произвольный унар и  $x, y \in A$ . Для любого элемента  $z$  унара  $\langle A, f \rangle$  через  $f^n(z)$  обозначается результат  $n$ -кратного применения операции  $f$  к элементу  $z$ ; при этом  $f^0(z) = z$ . Положим  $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$ , а также  $k(x, y) = \min M_{x,y}$ , если  $M_{x,y} \neq \emptyset$ , и  $k(x, y) = \infty$ , если  $M_{x,y} = \emptyset$ . Положим далее

$$s(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) следует, что операция  $s$  удовлетворяет тождествам  $s(x, y, y) = s(y, y, x) = s(y, x, y) = x$ , то есть является операцией меньшинства. Таким образом, класс алгебр  $\langle A, s, f \rangle$  содержится в многообразии, определенном тождествами операции меньшинства и тождеством перестановочности  $f(s(x, y, z)) = s(f(x), f(y), f(z))$ . Отсюда, в свою очередь, вытекает, что данный

класс является конгруэнц-модулярным.

Слабой операцией почти единогласия (WNU, weak near-unanimity operation) (см., например, [18]) называется идемпотентная  $n$ -арная операция  $d$ , где  $n > 1$ , для которой выполняются тождества  $d(y, x, \dots, x) = d(x, y, \dots, x) = \dots = d(x, x, \dots, y)$ . Алгебры, имеющие термальную слабую операцию почти единогласия находят применение в рамках алгебраического подхода [19] к исследованию вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях алгебры. Поскольку  $s(x, x, x) = x$  и  $s(x, x, y) = s(x, y, x) = s(y, x, x)$  для любых  $x, y$ , то операция  $s$  является тернарной слабой операцией почти единогласия. В духе работы [18] операция  $s$  была названа в [17] симметрической. В [20] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр  $\langle A, s, f \rangle$ , в [21] — гамильтоновы алгебры данного класса.

## Основные определения и обозначения

Обозначим через  $\text{Con } A$  решетку конгруэнций универсальной алгебры  $A$ , а через  $\nabla_A$  и  $\Delta_A$  — единичную и нулевую конгруэнции алгебры  $A$  соответственно. Класс конгруэнции  $\theta$ , порожденный элементом  $x$ , обозначим через  $[x]\theta$ .

Для любых чисел  $n > 0$ ,  $m \geq 0$  положим  $C_n^m = \langle a | f^m(a) = f^{m+n}(a) \rangle$ . Унар  $C_n^0$  называется циклом длины  $n$ . Элемент унара называется циклическим, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом; в противном случае будем называть элемент нециклическим. Через  $C_n^\infty$  обозначается объединение возрастающей последовательности унаров  $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \dots$ , где  $n > 0$  и  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots$ . Элемент  $a$  унара называется периодическим, если  $f^t(a) = f^{t+n}(a)$  для некоторых  $t \geq 0$  и  $n \geq 1$ , и непериодическим в противном случае. Через  $T(A)$  и  $D(A)$  обозначаются множества всех периодических и непериодических элементов унара  $A$  соответственно. Унар  $\langle A, f \rangle$  называется периодическим, если  $A = T(A)$ , и унаром без кручения, если  $A = D(A)$ . Если  $a$  — периодический элемент, то наименьшее из чисел  $t$ , для которых  $f^t(a) = f^{t+n}(a)$  при некоторых  $n \geq 1$ , называется глубиной элемента  $a$  и обозначается через  $t(a)$ . Глубиной  $t(A)$  унара  $A$  называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если  $T(A) \neq \emptyset$ . Если множество  $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$  не ограничено, глубина унара принимается формально равной бесконечности. Объединение двух непересекающихся унаров  $B$  и  $C$  называется их суммой и обозначается через  $B + C$ . Унар  $\langle A, f \rangle$  называется связным, если для любых  $x, y \in A$  выполняется условие  $f^n(x) = f^m(y)$  при некоторых  $n \geq 0$ ,  $m \geq 0$ . Максимальный по включению связный подунар унара  $A$  называется компонентой связности унара  $A$ . Элемент  $a$  унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы  $b$  и  $c$  (возможно, циклические), отличные от  $a$ , что  $f(b) = a = f(c)$ . Элемент  $a$  унара  $\langle A, f \rangle$  называется неподвижным, если  $f(a) = a$ . Связный унар с неподвижным элементом называется корнем. Корнем без нетривиальных узлов называется корень, не имеющий узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного. Через  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_f$  обозначается подунар унара  $\langle A, f \rangle$ , порожденный элементами  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Если элементы  $a, b$  удовлетворяют условию  $a \notin \langle b \rangle_f$ ,  $b \notin \langle a \rangle_f$ , то будем говорить, что они  $f$ -независимы.

Пусть  $B$  — подунар произвольного унара  $\langle A, f \rangle$ . Через  $\theta_B$  обозначается конгруэнция унара  $\langle A, f \rangle$ , определенная по правилу [3]: условие  $x\theta_B y$  для  $x, y \in A$  выполняется тогда и только тогда, когда либо  $x = y$ , либо  $x, y \in B$ .

Пусть  $v$  — узловый элемент унара  $\langle A, f \rangle$ . Через  $\theta_v$  обозначается конгруэнция унара  $\langle A, f \rangle$ , определенная по правилу [12]: условие  $x\theta_v y$  для любых  $x, y \in A$  выполняется тогда и только тогда, когда либо  $x = y$ , либо  $x, y \in f^{-1}(v)$ .

Пусть  $k \in \mathbb{N}$ . Через  $\sigma_k$  обозначается конгруэнция  $\text{Ker } f^k$  алгебры  $\langle A, \Omega \cup \{f\} \rangle$  с оператором  $f$  и произвольной основной сигнатурой  $\Omega$ . Положим также  $\sigma_0 = \Delta_A$ .

## Атомы решеток конгруэнций алгебр $\langle A, s, f \rangle$

Далее везде через  $\langle A, s, f \rangle$  обозначается алгебра с оператором  $f$  и операцией  $s(x, y, z)$ , определенной по правилу (1).

**ЛЕММА 1.** *Отношение  $\theta_v$  на унаре  $\langle A, f \rangle$ , содержащем узловой элемент  $v$ , является атомарной конгруэнцией алгебры  $\langle A, s, f \rangle$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем, что отношение  $\theta_v$  стабильно относительно операции  $s$ .

Пусть  $x_1\theta_v x_2, y_1\theta_v y_2, z_1\theta_v z_2$  для  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in A$ . Отсюда,  $f(x_1) = f(x_2)$ ,  $f(y_1) = f(y_2)$  и  $f(z_1) = f(z_2)$ . Обозначим  $a_1 = s(x_1, y_1, z_1)$ ,  $a_2 = s(x_2, y_2, z_2)$ . Предположим, что  $(a_1, a_2) \notin \theta_v$ . Тогда  $a_1 \neq a_2$ , причем  $a_1 \notin f^{-1}(v)$  или  $a_2 \notin f^{-1}(v)$ . Учитывая перестановочность операций  $f$  и  $s$ , имеем  $f(a_1) = f(s(x_1, y_1, z_1)) = s(f(x_1), f(y_1), f(z_1)) = s(f(x_2), f(y_2), f(z_2)) = f(s(x_2, y_2, z_2)) = f(a_2)$ . Из полученного равенства следует, что утверждения  $a_1 \notin f^{-1}(v)$  и  $a_2 \notin f^{-1}(v)$  выполняются одновременно.

По определению (1), достаточно рассмотреть шесть случаев:

- 1)  $s(x_1, y_1, z_1) = z_1, s(x_2, y_2, z_2) = y_2$ ;
- 2)  $s(x_1, y_1, z_1) = z_1, s(x_2, y_2, z_2) = x_2$ ,
- 3)  $s(x_1, y_1, z_1) = y_1, s(x_2, y_2, z_2) = z_2$ ;
- 4)  $s(x_1, y_1, z_1) = y_1, s(x_2, y_2, z_2) = x_2$ ,
- 5)  $s(x_1, y_1, z_1) = x_1, s(x_2, y_2, z_2) = z_2$ ;
- 6)  $s(x_1, y_1, z_1) = x_1, s(x_2, y_2, z_2) = y_2$ .

Рассмотрим случай 1). По предположению,  $z_1 \neq y_2$  и, как показано выше,  $z_1 \notin f^{-1}(v)$ ,  $y_2 \notin f^{-1}(v)$ . Последнее, по определению отношения  $\theta_v$ , влечет  $y_1 = y_2, z_1 = z_2$ . При этом  $x_1 \neq x_2$ , так как  $a_1 \neq a_2$ . Тогда  $f(x_1) = v = f(x_2)$ . Из условий  $s(x_1, y_1, z_1) = z_1, s(x_2, y_2, z_2) = y_2$  вытекают соотношения

$$k(x_1, y_1) < k(y_1, z_1), \quad k(x_2, y_1) = k(y_1, z_1). \quad (2)$$

Заметим, что поскольку  $y_1 = y_2 \notin f^{-1}(v)$  и  $x_1 \in f^{-1}(v)$ , то  $k(x_1, y_1) \neq 0, k(x_1, y_2) \neq 0$ . Если  $k(x_1, y_1) = \infty$ , то получаем противоречие с (2). Утверждение  $k(x_2, y_1) = \infty$  противоречит условию  $f(a_1) = f(a_2)$ .

Пусть  $k(x_1, y_1) = n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f^n(y_1) = f^n(x_1) = f^{n-1}(v) = f^{n-1}(f(x_2)) = f^n(x_2)$ , откуда  $k(x_2, y_1) < \infty$  и, более того,  $k(x_2, y_1) \leq k(x_1, y_1)$ . Аналогично, если  $k(x_2, y_1)$  конечно, то  $k(x_1, y_1) < \infty$  и  $k(x_1, y_1) \leq k(x_2, y_1)$ . Таким образом, в случае конечности одного из чисел  $k(x_1, y_1), k(x_2, y_1)$  имеем  $k(x_1, y_1) = k(x_2, y_1)$ , что снова противоречит (2).

Случаи 3), 4), 6) приводятся к противоречию аналогично случаю 1).

Рассмотрим случай 2). По предположению,  $z_1 \neq x_2$  и  $z_1 \notin f^{-1}(v), x_2 \notin f^{-1}(v)$ . Из определения отношения  $\theta_v$  получаем  $x_1 = x_2, z_1 = z_2$ . При этом  $y_1 \neq y_2$ , так как  $a_1 \neq a_2$ . Тогда  $f(y_1) = v = f(y_2)$ . Из условий  $s(x_1, y_1, z_1) = z_1, s(x_2, y_2, z_2) = x_2$  вытекают соотношения

$$k(x_2, y_1) < k(y_1, z_2), \quad k(x_2, y_2) > k(y_2, z_2). \quad (3)$$

Используя условие  $f(y_1) = v = f(y_2)$ , по аналогии со случаем 1) получаем  $k(x_2, y_1) = k(x_2, y_2)$  и  $k(y_1, z_2) = k(y_2, z_2)$ , что противоречит (3).

Случай 5) приводится к противоречию аналогично случаю 2).

Таким образом,  $\theta_v \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$ .

Теперь докажем, что  $\theta_v$  — атом  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ . Предположим, что  $\Delta_A < \gamma < \theta_v$  для некоторой конгруэнции  $\gamma \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$ . Тогда  $(b, c) \in \theta_v$  для некоторой пары  $(b, c) \notin \gamma$ , откуда  $b \neq c$  и  $f(b) = v = f(c)$ . Так как  $\Delta_A < \gamma$ , то  $(d, e) \in \gamma$  для некоторых различных элементов  $d, e \in A$ . Из  $\gamma < \theta_v$  следует  $(d, e) \in \theta_v$ , а значит  $f(d) = v = f(e)$ . Тогда  $k(e, d) = 1$  и  $f(b) = f(c) = f(e)$ , откуда  $k(b, e) \leq 1, k(c, e) \leq 1$ .

Если  $k(b, e) < 1$ , то  $b = e$ . Отсюда,  $d = s(b, e, d)\gamma s(b, d, d) = b$ , то есть,  $d\gamma b$ . При  $k(c, e) < 1$  получаем  $c = e$ , откуда  $d = s(c, e, d)\gamma s(c, d, d) = c$ . Тогда  $b\gamma d\gamma c$ , что противоречит выбору пары  $(b, c)$ . Если же  $k(c, e) = 1$ , то  $e = s(c, e, d)\gamma s(c, d, d) = c$ , откуда  $b\gamma d\gamma e\gamma c$ , что опять ведет к противоречию.

Если  $k(b, e) = 1$ , то  $e = s(b, e, d)\gamma s(b, d, d) = b$ . Если  $k(c, e) < 1$ , то есть,  $e = c$ , то получаем противоречие с выбором пары  $(b, c)$ . Если же  $k(c, e) = 1$ , то  $e = s(c, e, d)\gamma s(c, d, d) = c$ , что снова ведет к противоречию.  $\square$

Из лемм 1 [22] и 11.2 [23] вытекает следующая лемма.

**ЛЕММА 2.** Пусть унар  $\langle A, f \rangle$  содержит цикл неединичной длины, а  $\theta$  — нетривиальная конгруэнция алгебры  $\langle A, s, f \rangle$ . Тогда любой класс конгруэнции  $\theta$  содержит не более одного циклического элемента унара  $\langle A, f \rangle$ .

**ЛЕММА 3.** Пусть  $\langle A, f \rangle$  — связный периодический унар с единственным узловым элементом  $v$ , содержащий цикл неединичной длины  $h$ . Тогда любой неоднородный класс произвольной ненулевой конгруэнции  $\theta$  алгебры  $\langle A, s, f \rangle$  содержит циклический элемент.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $b, c \in A$  — различные нециклические элементы, причем  $b\theta c$ . Рассмотрим сначала случай, когда один из них выражается через другой с помощью операции  $f$ . Пусть, для определенности,  $c = f^m(b)$  для некоторого  $m > 0$ . Отсюда,  $b\theta f^{km}(b)$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда при подходящем  $l$  выполнится условие  $lm > t(b)$ , откуда  $f^{lm}(b)$  — искомый циклический элемент.

Пусть теперь элементы  $b$  и  $c$   $f$ -независимы. Положим сначала, что  $t(b) = t(c) = p \in \mathbb{N}$ . Разделим  $p$  на  $h$  с остатком:  $p = dh + r$ , где  $d \geq 0$  и  $0 \leq r < h$ . Обозначим через  $a$  такой циклический элемент из  $A$ , что  $f^r(a) = v$ . Тогда  $f^p(b) = v = f^{dh}(f^r(a)) = f^p(a)$ . При этом, для любых  $l < p$  имеем  $f^l(a) \neq f^l(b)$ , поскольку элемент  $f^l(b)$  нециклический. Отсюда,  $k(a, b) = p$ . Из условия  $t(b) = t(c) = p$  имеем  $f^p(b) = f^p(c)$ . Предположение, что  $f^l(b) = f^l(c)$  для некоторого  $l < p$  противоречит условию единственности узлового элемента. Отсюда,  $k(b, c) = p = k(a, b)$ . Тогда  $s(a, b, c) = b$ . С другой стороны,  $s(a, b, b) = a$ , откуда  $a\theta b\theta c$ .

Теперь положим  $t(b) \neq t(c)$ . Без ограничения общности примем, что  $t(b) = t(c) + m$  для некоторого  $m > 0$ . Разделим  $m$  на  $h$  с остатком:  $m = dh + r$ ,  $d \geq 0$ ,  $0 \leq r < h$ . Из условия  $b\theta c$  и леммы 11.2 [23] следует, что  $f^p(b) = f^p(c)$  для некоторого  $p$ . Поскольку для всех  $l < t(b)$  в силу единственности узлового элемента выполняется условие  $f^l(b) \neq f^l(c)$ , то  $p \geq t(b)$ . Запишем  $p = t(b) + k$ ,  $k \geq 0$ . Тогда верны следующие равенства:  $f^p(b) = f^{t(b)+k}(b) = f^k(v)$ ,  $f^p(c) = f^{t(b)+k}(c) = f^{t(c)+m+k}(c) = f^{t(c)+dh+r+k}(c) = f^{dh+r+k}(v) = f^{r+k}(v)$ , откуда получаем  $f^k(v) = f^{r+k}(v)$ . Так как  $f^k(v)$  — циклический элемент, а  $r < h$ , то  $r = 0$ . Таким образом,  $t(b) = t(c) + dh$ , откуда  $f^{t(b)}(b) = v = f^{t(c)+dh}(c) = f^{t(b)}(c)$  и, окончательно,  $k(b, c) = t(b)$ .

Разделим  $t(b)$  на  $h$  с остатком:  $t(b) = th + q$ , где  $t \geq 0$ ,  $0 \leq q < h$ . Обозначим через  $a$  циклический элемент  $f^{h-q}(v)$ . Тогда  $v = f^q(a) = f^{q+th}(a)$ . Отсюда,  $k(a, b) = t(b) = k(b, c)$ . Из последнего равенства, как и выше, получаем  $a\theta c$ .  $\square$

**ЛЕММА 4.** Пусть  $\langle A, f \rangle$  — связный периодический унар с единственным узловым элементом  $v$ , содержащий цикл неединичной длины  $h$ ,  $\theta$  — нетривиальная конгруэнция алгебры  $\langle A, s, f \rangle$ ,  $x, a \in A$ , где  $a$  — циклический элемент,  $x$  — нециклический элемент, для которого  $|[x]\theta| > 1$ , и  $r$  — остаток от деления  $t(x)$  на  $h$ . Тогда условие  $a\theta x$  выполняется в том и только в том случае, когда  $a = f^{h-r}(v)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость.** Пусть  $a\theta x$ . По лемме 11.2 [23],  $k(a, x) = p$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ , а значит,  $f^p(a) = f^p(x)$  и, следовательно, элемент  $f^p(x)$  — циклический. Тогда, по определению глубины элемента,  $t(x) \leq p$ , откуда  $p = t(x) + m$  для некоторого  $m \geq 0$ . Отсюда,  $f^p(a) = f^{t(x)+m}(x) = f^m(f^{t(x)}(x)) = f^m(v)$ . Так как операция  $f$  на цикле инъективна,

то  $f^{p-m}(a) = v$ , откуда  $f^{t(x)}(a) = v$ . По условию,  $t(x) = dh + r$  для некоторого  $d \geq 0$ . Тогда из  $f^{dh+r}(a) = v$  следует  $a = f^{h-r}(v)$ .

*Достаточность.* Пусть  $a = f^{h-r}(v)$ . Так как  $|[x]\theta| > 1$ , то по лемме 3 найдется такой циклический элемент  $z \in A$ , что  $z\theta x$ . Тогда  $f^{t(x)}(z)\theta f^{t(x)}(x) = v$ . Так как  $f^{t(x)}(z)$  и  $v$  — циклические элементы, то по лемме 2 имеем  $f^{t(x)}(z) = v$ . Поскольку по условию,  $t(x) = dh + r$  для некоторого  $d \geq 0$ , то  $v = f^{dh+r}(z) = f^r(z)$ , откуда  $z = f^{h-r}(v) = a$ .  $\square$

**ЛЕММА 5.** Пусть унар  $\langle A, f \rangle$  содержит собственный подунар  $B$ , изоморфный  $C_1^1$ , причем для всех  $x \in A \setminus B$  выполняется  $f(x) \neq a$ , где  $a$  — неподвижный элемент  $B$ . Тогда отношение  $\theta_B$  — атом решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В общем случае унар  $\langle A, f \rangle$  можно представить как  $E + D$ , где  $E$  — компонента связности, содержащая подунар  $B$ , а  $D$  — либо произвольный подунар, либо  $\emptyset$  (в случае связности  $\langle A, f \rangle$ ).

Пусть  $x_1\theta_B x_2$ ,  $y_1\theta_B y_2$ ,  $z_1\theta_B z_2$  для  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in A$ . Обозначим  $a_1 = s(x_1, y_1, z_1)$ ,  $a_2 = s(x_2, y_2, z_2)$  и предположим, что  $(a_1, a_2) \notin \theta_B$ . Рассуждая как при доказательстве леммы 1, получаем, что  $f(a_1) = f(a_2)$ , условия  $a_1 \notin B$ ,  $a_2 \notin B$  выполняются одновременно, и без ограничения общности достаточно рассмотреть лишь два из возникающих случаев для значений  $a_1, a_2$ , а именно, случаи  $a_1 = x_1$ ,  $a_2 = z_2$  и  $a_1 = z_1$ ,  $a_2 = y_2$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $a_1 = x_1$ ,  $a_2 = z_2$ . По предположению,  $x_1 \neq z_2$ ,  $x_1 \notin B$ ,  $z_2 \notin B$ . Тогда из  $x_1\theta_B x_2$ ,  $z_1\theta_B z_2$  следует, что  $x_1 = x_2$ ,  $z_1 = z_2$ . Так как  $a_1 \neq a_2$ , то  $y_1 \neq y_2$ , а значит,  $\{y_1, y_2\} = B$ . Из условий  $s(x_1, y_1, z_1) = x_1$ ,  $s(x_2, y_2, z_2) = z_2$  вытекают соотношения

$$k(x_1, y_1) > k(y_1, z_1), \quad k(x_1, y_2) < k(y_2, z_1). \quad (4)$$

Так как  $f(a_1) = f(a_2)$ , то элементы  $x_1, z_2$  лежат в одной компоненте связности.

Пусть  $x_1, z_2 = z_1 \in E$ . Тогда из  $x_1, z_1 \notin B$  вытекает  $t(x_1) > t(y_1)$ ,  $t(x_1) > t(y_2)$ ,  $t(z_1) > t(y_1)$ ,  $t(z_1) > t(y_2)$  и, следовательно, по лемме 10 [24],  $k(x_1, y_1) = t(x_1) = k(x_1, y_2)$  и  $k(y_1, z_1) = t(z_1) = k(y_2, z_1)$ , что противоречит (4). Пусть теперь  $x_1, z_2 = z_1 \in D$  (в случае, если  $\langle A, f \rangle$  несвязен). Тогда  $k(x_1, y_1) = \infty = k(x_1, y_2)$  и  $k(y_1, z_1) = \infty = k(y_2, z_1)$ , что снова ведет к противоречию.

Теперь рассмотрим случай, когда  $a_1 = z_1$ ,  $a_2 = y_2$ . По предположению,  $z_1 \neq y_2$  и  $z_1, y_2 \notin B$ . Последнее, по определению отношения  $\theta_B$ , влечет  $y_1 = y_2$ ,  $z_1 = z_2$ . При этом  $x_1 \neq x_2$ , так как  $a_1 \neq a_2$ . Тогда  $\{x_1, x_2\} = B$ . Из условий  $s(x_1, y_1, z_1) = z_1$ ,  $s(x_2, y_2, z_2) = y_2$  вытекают соотношения

$$k(x_1, y_1) < k(y_1, z_1), \quad k(x_2, y_1) = k(y_1, z_1). \quad (5)$$

Пусть  $y_1 \in E$ . Из  $y_1 \notin B$  вытекает  $t(y_1) > t(x_1)$ ,  $t(y_1) > t(x_2)$  и, следовательно, по лемме 10 [24],  $k(x_1, y_1) = t(y_1) = k(x_2, y_1)$ . Последнее равенство противоречит условию (5). Если  $y_1 \in D$ , то  $k(x_1, y_1) = \infty = k(x_2, y_1)$ , что также ведет к противоречию.

Атомарность конгруэнции  $\theta_B \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$  следует из ее определения.  $\square$

**ЛЕММА 6.** Пусть  $\langle A, f \rangle$  — связный периодический унар с единственным узловым элементом  $v$  и циклом длины  $h > 1$ . Пусть также элементы  $x, y \in A$  различны и не циклически,  $t(x) \leq p$ ,  $t(y) \leq p$  и  $f^p(x) = f^p(y)$  для некоторого  $p > 0$ . Тогда  $t(x) \equiv t(y)(h)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $h > 1$ , то  $f^{t(x)}(x) = v = f^{t(y)}(y)$ . Из условий  $t(x) \leq p$ ,  $t(y) \leq p$  следует, что  $p = t(x) + l$ ,  $p = t(y) + k$  для некоторых  $l, k \geq 0$ . Отсюда,  $f^{t(x)+l}(x) = f^{t(y)+k}(y)$ ,  $f^l(f^{t(x)}(x)) = f^k(f^{t(y)}(y))$  и  $f^l(v) = f^k(v)$ . Поскольку  $v$  — циклический элемент, то  $l \equiv k(h)$ , откуда, учитывая  $t(x) + l = t(y) + k$ , имеем  $t(x) \equiv t(y)(h)$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 1.** Если  $\langle A, s, f \rangle$  — алгебра с оператором  $f$  и операцией  $s(x, y, z)$ , определенной по правилу (1), то решетка конгруэнций алгебры  $\langle A, s, f \rangle$  является атомной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  проста, то утверждение теоремы очевидно, поэтому далее полагаем, что  $\langle A, s, f \rangle$  имеет нетривиальную конгруэнцию.

Докажем сначала, что решетка  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  имеет хотя бы один атом. По теореме 9 [20], унар  $\langle A, f \rangle$  неизоморфен корню глубины 1, а операция  $f$  неинъективна на  $A$ . Тогда найдутся такие различные элементы  $u, w \in A$ , что  $f(u) = f(w)$ . Если  $f(u) \notin \{u, w\}$ , то элемент  $f(u)$  — узловой, и по лемме 1 решетка  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  имеет атом  $\theta_{f(u)}$ . В противном случае либо  $u$ , либо  $w$  является неподвижным элементом. Без ограничения общности положим, что  $f(u) = u$ . Если элемент  $u$  — узловой, то  $\theta_u$  — атом. В противном случае  $\{u, w\}$  — подунар унара  $\langle A, f \rangle$ , удовлетворяющий условиям леммы 5, и по этой лемме, конгруэнция  $\theta_{\{u, w\}}$  — атом.

Очевидно, что единичная конгруэнция включает любой атом решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ . Зафиксируем произвольную нетривиальную конгруэнцию  $\varphi \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$  и докажем, что она содержит некоторый атом. Поскольку  $\varphi$  нетривиальна, то  $a\varphi b$  для некоторых различных  $a, b \in A$ . Тогда либо эти элементы  $f$ -независимы, либо один выражается через другой с помощью операции  $f$ . Кроме того, по лемме 11.2 [23],  $k(a, b) = p$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ , то есть  $f^p(a) = f^p(b)$ .

*Случай 1.* Пусть  $a \notin \langle b \rangle_f$ ,  $b \notin \langle a \rangle_f$ .

Обозначим элемент  $f^p(a)$  через  $v$ . Из определения  $k(a, b)$  следует, что  $f^{p-1}(a) \neq f^{p-1}(b)$ . Пусть сначала элемент  $v$  не является неподвижным. Если  $f^p(a) = f^{p-1}(a)$  или  $f^p(a) = f^{p-1}(b)$ , то либо  $f^{p-1}(a)$ , либо  $f^{p-1}(b)$  — неподвижный, что противоречит предположению. Отсюда, элемент  $v$  — узловой, и тогда по лемме 1 конгруэнция  $\theta_v$  — атом. Из условия  $a\varphi b$  следует  $f^{p-1}(a)\varphi f^{p-1}(b)$ . С другой стороны,  $f(f^{p-1}(a)) = v = f(f^{p-1}(b))$ , откуда  $f^{p-1}(a)\theta_v f^{p-1}(b)$ . Тогда  $\varphi \cap \theta_v \neq \Delta_A$ , что влечет  $\theta_v \subseteq \varphi$ .

Пусть теперь  $f(v) = v$ . Тогда  $a, b$  — периодические элементы. Положим  $t(a) = t(b)$ . Тогда из условия  $k(a, b) = p$  следует  $t(a) = p = t(b)$  и  $\langle a \rangle_f \cap \langle b \rangle_f = \{v\}$ . Отсюда  $|f^{p-1}(a), v, f^{p-1}(b)| = 3$  и  $f^{p-1}(a)\theta_v f^{p-1}(b)$ . Тогда, как и выше,  $\theta_v \subseteq \varphi$ .

Предположим теперь, что  $t(a) \neq t(b)$  и без ограничения общности положим  $t(a) > t(b)$ . Поскольку  $t(f(a)) = t(a) - 1$ ,  $t(f(b)) = t(b) - 1$ , то по лемме 10 [24],  $k(f(a), f(b)) = t(a) - 1$  и  $k(f(b), b) = t(b)$ , откуда  $k(f(a), f(b)) \geq k(f(b), b)$ . Тогда  $s(f(a), f(b), b) \in \{f(a), f(b)\}$ . С другой стороны,  $s(f(a), f(a), b) = b$ . Так как  $f(a)\varphi f(b)$ , то  $b\varphi f(b)$ . Из последнего следует, что все элементы подунара  $\langle a, b \rangle_f$  принадлежат классу  $[v]\varphi$ . Поскольку  $a \neq b$  и  $f^p(a) = f^p(b)$ , то найдутся такие наименьшие числа  $m \leq t(a)$ ,  $q \leq t(b)$ , что  $f^m(a) = f^q(b)$ . Обозначим элемент  $f^m(a)$  через  $w$ . По условию случая 1 имеем  $m > 0$ ,  $q > 0$ . Тогда  $f^{m-1}(a) \neq f^{q-1}(b)$ , то есть, элемент  $w$  — узловой. Отсюда,  $(f^{m-1}(a), f^{q-1}(b)) \in \varphi \cap \theta_w$ , что влечет  $\theta_w \subseteq \varphi$ .

*Случай 2.* Пусть, без ограничения общности,  $b = f^k(a)$  для некоторого  $k > 0$ . Тогда  $f^p(a) = f^k(f^p(a))$ , то есть, элемент  $f^p(a)$  — циклический, и  $\langle a \rangle_f \cong C_h^t$  для некоторых  $t \geq 0$ ,  $h \geq 1$ . По лемме 2, элементы  $a, b$  не могут быть циклическими одновременно. Отсюда элемент  $a$  — не циклический и  $0 < t(a) \leq p$ .

Пусть  $h > 1$ . Тогда подунар  $\langle a \rangle_f$  имеет единственный узловой элемент  $v = f^{t(a)}(a)$ , и  $t = t(a)$ . Предположим сначала, что элемент  $b$  — циклический. В этом случае подунар  $\langle a \rangle_f$  удовлетворяет условиям леммы 4, а значит, из  $a\varphi b$  следует  $b = f^{h-r}(v)$ , где  $r$  — остаток от деления  $t(a)$  на  $h$ . Отсюда  $t(a) = dh + r$  для некоторого  $d \geq 0$ . При  $r > 0$  имеем  $f^{r-1}(b) = f^{h-1}(v)$ . Тогда  $f^{t(a)-1}(b) = f^{dh+r-1}(b) = f^{r-1}(b)$ . Из  $a\varphi b$  получаем  $f^{t(a)-1}(a)\varphi f^{t(a)-1}(b) = f^{r-1}(b)$ . В то же время, из  $f(f^{t(a)-1}(a)) = v = f(f^{r-1}(b))$  следует  $f^{t(a)-1}(a)\theta_v f^{r-1}(b)$ , а значит,  $\theta_v \subseteq \varphi$ . Если же  $r = 0$ , то  $b = f^h(v) = v$  и  $f^{dh}(a) = b$ . Тогда  $(f^{dh-1}(a), f^{dh-1}(b)) \in \varphi \cap \theta_v$ , и снова  $\theta_v \subseteq \varphi$ .

Пусть теперь элемент  $b$  — нециклический. Из  $t(a) \leq p$  следует  $t(b) \leq p$ . Тогда по лемме 6,  $t(a) \equiv t(b)(h)$ , откуда  $t = t(a) = t(b) + dh$  для некоторого  $d > 0$ . Отсюда  $f^{t-1}(b) = f^{t(b)+dh-1}(b) = f^{dh-1}(v) = f^{h-1}(v)$ . Учитывая  $f(f^{t-1}(a)) = v = f(f^{h-1}(v))$ , получаем  $f^{t-1}(a)\theta_v f^{h-1}(v) = f^{t-1}(b)$ . Тогда  $(f^{t-1}(a), f^{t-1}(b)) \in \varphi \cap \theta_v$ , что влечет  $\theta_v \subseteq \varphi$ .

Положим теперь  $h = 1$ . Тогда  $\langle a \rangle_f$  содержит подунар  $B \cong C_1^1$ . Обозначим его неподвижный элемент через  $v$  и положим  $B = \{c, v\}$ , то есть,  $f(c) = v$ , откуда  $f^{t(a)-1}(a) = c$ . Так как

$b = f^k(a)$ , то  $t(a) = t(b) + k$ . Отсюда,  $f^{t(a)-1}(b) = f^{t(b)+k-1}(b) = f^{k-1}(v) = v$ .

По условию,  $f^{t(a)-1}(a)\varphi f^{t(a)-1}(b)$ . Если элемент  $v$  — узловой, то  $f^{t(a)-1}(a) = c\theta_v v = f^{t(a)-1}(b)$  и, следовательно,  $\theta_v \subseteq \varphi$ . В противном случае  $B$ , являющийся подунаром также и унара  $\langle A, f \rangle$ , удовлетворяет условиям леммы 5, и значит,  $\theta_B$  — атом решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ . Поскольку  $f^{t(a)-1}(b) = v\theta_B c = f^{t(a)-1}(a)$ , то получаем  $\theta_B \subseteq \varphi$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Неодноэлементная алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  подпрямой неразложима тогда и только тогда, когда решетка  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  имеет единственный атом.*

Вытекает из следствия 19.3 [1, с. 71].

**ТЕОРЕМА 2.** *Пусть  $\langle A, s, f \rangle$  — алгебра с оператором  $f$  и операцией  $s(x, y, z)$ , определенной по правилу (1). Атомами решетки конгруэнций алгебры  $\langle A, s, f \rangle$  являются те и только те конгруэнции, которые определены одним из следующих способов:*

- 1)  $\nabla_A$ , если операция  $f$  инъективна на  $A$ , либо унар  $\langle A, f \rangle$  является корнем глубины 1;
- 2)  $\theta_v$ , если унар  $\langle A, f \rangle$  не изоморфен корню глубины 1 и содержит узловой элемент  $v$ ;
- 3)  $\theta_B$ , если унар  $\langle A, f \rangle$  не изоморфен корню глубины 1 и имеет собственный подунар  $B \cong C_1^1$ , где для всех  $x \in A \setminus B$  элемент  $f(x)$  не совпадает с неподвижным элементом подунара  $B$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** *Достаточность.* В случае 1) утверждение следует из теоремы 9 [20]. Для случаев 2) и 3) оно вытекает из лемм 1 и 5 соответственно.

*Необходимость.* Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  не проста. Тогда, по теореме 9 [20], операция  $f$  не инъективна на  $A$ , а унар  $\langle A, f \rangle$  не изоморфен корню глубины 1. Пусть  $\varphi$  — атом решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ . В силу нетривиальности  $\varphi$  найдутся такие различные  $a, b \in A$ , что  $a\varphi b$ . Рассуждая как в доказательстве теоремы 1, получаем, что во всех рассматриваемых случаях выполняется либо  $\theta_v \subseteq \varphi$ , либо  $\theta_B \subseteq \varphi$ , где элемент  $v$  и подунар  $B$  унара  $\langle A, f \rangle$  удовлетворяют условиям случаев 2) и 3) соответственно. Учитывая атомарность  $\varphi$ , отсюда и из лемм 1, 5 имеем  $\varphi = \theta_v$ , либо  $\varphi = \theta_B$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 2.** *Пусть алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  подпрямой неразложима. Тогда унар  $\langle A, f \rangle$  имеет не более одного узлового элемента.*

## Подпрямой неразложимые алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$

**ЛЕММА 7.** *Пусть  $\langle A, f \rangle$  — связный унар без кручения. Алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  подпрямой неразложима тогда и только тогда, когда  $\langle A, f \rangle$  имеет единственный узловой элемент, либо операция  $f$  инъективна.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** *Необходимость.* Пусть операция  $f$  не инъективна на  $A$  и  $\langle A, f \rangle$  либо имеет более одного узлового элемента, либо не содержит узловых элементов. В первом случае по следствию 2 алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  не является подпрямой неразложимой. Предположим, что  $\langle A, f \rangle$  не содержит узловых элементов. Поскольку  $f$  не инъективна, то  $f(a) = f(b)$  для некоторых различных  $a, b \in A$ . По предположению,  $f(a) \in \{a, b\}$ , то есть, какой-то из элементов  $a, b$  является неподвижным, что противоречит условию.

*Достаточность.* Если  $f$  инъективна на  $A$ , то по теореме 9 [20] алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  проста. Если же  $\langle A, f \rangle$  имеет единственный узловой элемент  $v$ , то из теоремы 9 [20], теоремы 2 и отсутствия периодических элементов в  $\langle A, f \rangle$  следует, что  $\theta_v$  — единственный атом  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ . Тогда, по следствию 1,  $\langle A, s, f \rangle$  подпрямой неразложима.  $\square$

**ЛЕММА 8.** *Пусть  $\langle A, f \rangle$  — связный унар, содержащий собственный подунар  $B \cong C_h^0$ ,  $h > 1$ . Алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  подпрямой неразложима тогда и только тогда, когда  $\langle A, f \rangle$  имеет единственный узловой элемент.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме 9 [20] алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  не проста. Пусть  $\langle A, f \rangle$  имеет единственный узловой элемент  $v$ . Поскольку  $h > 1$ , то  $\langle A, f \rangle$  не содержит неподвижных элементов. Отсюда, по теореме 2 единственным атомом решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  является  $\theta_v$ . Обратно, поскольку подунар  $B$  — собственный и  $h > 1$ , то  $\langle A, f \rangle$  имеет узловой элемент, а его единственность вытекает из следствия 2.  $\square$

**ЛЕММА 9.** Пусть  $\langle A, f \rangle$  — неодноэлементный корень с неподвижным элементом  $a$ . Алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда  $\langle A, f \rangle$  — корень без нетривиальных узлов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость.** Пусть  $\langle A, f \rangle$  не изоморфен корню без нетривиальных узлов. Тогда он имеет узловой элемент  $v \neq a$ . Отсюда,  $|A| > 3$  и  $t(A) \geq 2$ . Тогда найдется такой элемент  $b \in A$ , что  $a = f(b)$ . Обозначим  $B = \{a, b\}$ . Поскольку множество  $B$  замкнуто относительно операции  $f$  и  $|A| > 3$ , то  $B$  — собственный подунар унара  $\langle A, f \rangle$ . Если элемент  $a$  не узловой, то подунар  $B$  удовлетворяет условиям леммы 5 и значит,  $\theta_B$  — атом решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ . По теореме 2 конгруэнция  $\theta_v$  также является атомом. Так как  $\theta_v \neq \theta_B$ , то по следствию 1 алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  не является подпрямо неразложимой. Если же элемент  $a$  узловой, то утверждение вытекает из следствия 2.

**Достаточность.** Пусть  $a$  — узловой элемент унара  $\langle A, f \rangle$ . По условию, он единственен. Если  $t(A) = 1$ , то по теореме 9 [20] алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  проста, а значит, и подпрямо неразложима. Если  $t(A) > 1$ , то по теореме 2 конгруэнция  $\theta_a$  — неединичный атом. В силу связности унар  $\langle A, f \rangle$  не содержит подунаров, удовлетворяющих условиям леммы 5. Тогда  $\theta_a$  — единственный атом решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ .

Пусть теперь унар  $\langle A, f \rangle$  не содержит узловых элементов. Тогда он изоморфен  $C_1^t$  для некоторого  $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  и, следовательно, содержит подунар  $B \cong C_1^1$ . Если  $B = A$ , то по теореме 9 [20] алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  проста. Если же  $B$  — собственный подунар в  $\langle A, f \rangle$ , то  $f(x) \neq a$  для всех  $x \in A \setminus B$ , то есть,  $B$  удовлетворяет условиям леммы 5. Так как унар  $\langle A, f \rangle$  — связный, то он не содержит других таких подунаров. Отсюда  $\theta_B$  — единственный атом решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $\langle A, s, f \rangle$  — алгебра с оператором  $f$  и операцией  $s(x, y, z)$ , определенной по правилу (1). Алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда унар  $\langle A, f \rangle$  удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1)  $\langle A, f \rangle$  — унар с инъективной операцией;
- 2)  $\langle A, f \rangle$  изоморфен  $C_1^t$ , где  $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ;
- 3)  $\langle A, f \rangle$  — связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент, который является циклическим;
- 4)  $\langle A, f \rangle$  — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент;
- 5)  $\langle A, f \rangle$  является суммой одной компоненты связности вида 2)–4) и произвольного числа компонент вида 1).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность.** В случае 1) утверждение следует из теоремы 9 [20]. Для случаев 2), 3) и 4) оно вытекает из лемм 9, 8 и 7 соответственно. В случае 5) оно следует из лемм 7–9 и леммы 11.8 [23].

**Необходимость.** По следствию 2 достаточно рассмотреть случай, когда унар  $\langle A, f \rangle$  имеет не более одного узлового элемента. Положим сначала, что он имеет единственный узловой элемент  $v$ . Тогда  $\langle A, f \rangle$  неизоморфен унарам из пунктов 1), 2) условия теоремы. Если  $\langle A, f \rangle$  — связный, то по леммам 7–9 достаточно рассмотреть случай, когда он имеет неподвижный элемент  $a$ , не совпадающий с  $v$ . В этом случае элемент  $a$  не является узловым и  $a = f(b)$  для некоторого  $b \in A$ . Обозначим подунар  $\{a, b\}$  через  $B$ . По теореме 2, отношения  $\theta_v$  и  $\theta_B$  являются несовпадающими атомами решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ , что противоречит следствию 1.

Если  $\langle A, f \rangle$  несвязен, то его можно разложить в сумму компоненты  $D$ , содержащей элемент  $v$ , и подунара  $E$ . Предположим, что подунар  $D$  неизоморфен ни одному из унаров, перечисленных в пунктах 2)–4) условия теоремы, или операция  $f$  на подунаре  $E$  не инъективна. В первом из этих случаев, как и выше,  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  содержит более одного атома, то есть, по следствию 1,  $\langle A, s, f \rangle$  не является подпрямой неразложимой. Во втором случае найдутся такие различные элементы  $a, b \in E$ , что  $f(a) = f(b)$ . В силу отсутствия в подунаре  $E$  узловых элементов, получаем, что  $f(a) \in \{a, b\}$ . Таким образом, унар  $\langle A, f \rangle$  содержит собственный подунар  $B$ , изоморфный  $C_1^1$  и удовлетворяющий условиям леммы 5. Поскольку  $v \notin E$ , то  $\theta_v \neq \theta_B$ , откуда  $\langle A, s, f \rangle$  снова не будет подпрямой неразложимой.

Пусть теперь унар  $\langle A, f \rangle$  не содержит узловых элементов. В этом случае любая его компонента связности либо изоморфна  $C_1^t$ , где  $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , либо операция  $f$  на ней инъективна. Если  $\langle A, f \rangle$  неизоморфен унарам из условия теоремы, то он имеет более одной компоненты связности, изоморфной  $C_1^t$ . Тогда из леммы 5 вытекает, что  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  имеет более одного атома.  $\square$

**ЛЕММА 10.** Пусть  $\langle A, s, f \rangle$  — алгебра с неинъективным оператором  $f$ . Тогда решеточное объединение всех атомов  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  совпадает с конгруэнцией  $\sigma_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если алгебра  $\langle A, s, f \rangle$  проста, то по теореме 9 [20], унар  $\langle A, f \rangle$  изоморфен корню глубины 1. Тогда, по лемме 1 [24],  $\sigma_1 = \nabla_A$ .

Пусть теперь  $\langle A, s, f \rangle$  не проста. Обозначим через  $\{\varphi_j | j \in J\}$  совокупность всех атомов решетки  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ , а через  $\pi$  — решеточное объединение всех ее атомов.

Пусть  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ ,  $(x, y) \in \sigma_1$ . Тогда  $f(x) = f(y)$ . Если  $f(x) \notin \{x, y\}$ , то  $f(x)$  — узловой элемент, откуда  $(x, y) \in \theta_{f(x)}$ . По теореме 2,  $\theta_{f(x)}$  — атом, следовательно,  $(x, y) \in \pi$ . Если же  $f(x) \in \{x, y\}$ , то без ограничения общности положим  $f(x) = x$ . Если элемент  $x$  — узловой, то рассуждения аналогичны приведенным выше. В ином случае  $\{x, y\}$  является подунаром, удовлетворяющим условию леммы 5. Тогда  $\theta_{\{x, y\}}$  — атом, и  $(x, y) \in \theta_{\{x, y\}}$  влечет  $(x, y) \in \pi$ .

Пусть теперь  $(x, y) \in \pi$ . Тогда найдется такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $(x, y) \in \varphi_{j_1} \circ \varphi_{j_2} \circ \dots \circ \varphi_{j_k}$ , где  $j_i \in J$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Отсюда  $x\varphi_{j_1}z_1, z_1\varphi_{j_2}z_2, \dots, z_{k-1}\varphi_{j_k}y$  для некоторых  $z_1, z_2, \dots, z_{k-1} \in A$ . Так как  $\langle A, s, f \rangle$  не проста, то из теоремы 2 следует, что для всех  $a, b \in A$  и любого атома  $\varphi_j$ ,  $j \in J$  условие  $a\varphi_jb$  влечет  $f(a) = f(b)$ . Отсюда,  $f(x) = f(y)$ , и значит,  $(x, y) \in \sigma_1$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 3.** Пусть  $\langle A, s, f \rangle$  — неодноэлементная алгебра с оператором  $f$  и операцией  $s(x, y, z)$ , определенной по правилу (1). Решетка  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  является точечной тогда и только тогда, когда  $\langle A, f \rangle$  удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) операция  $f$  инъективна на  $A$ ;
- 2) унар  $\langle A, f \rangle$  содержит такой элемент  $a$ , что  $f(x) = a$  для любого  $x \in A$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточность следует из теоремы 9 [20]. Докажем необходимость утверждения.

Пусть  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$  — точечная решетка и операция  $f$  не инъективна на  $A$ . Поскольку  $|A| > 1$ , то  $\nabla_A \neq \Delta_A$ . Отсюда,  $\nabla_A$  является решеточным объединением некоторого множества атомов  $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ . Тогда, по лемме 10,  $\nabla_A \subseteq \sigma_1$ , откуда  $\nabla_A = \sigma_1$ . Отсюда по лемме 1 [24] получаем, что унар  $\langle A, f \rangle$  является корнем глубины 1, то есть на  $\langle A, f \rangle$  выполняется условие 2) теоремы.  $\square$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Д. М. Многообразия алгебр. Новосибирск: ВО “Наука”, Сибирская издательская фирма, 1992. 205 с.

2. McKenzie R., Stanovský D. Every quasigroup is isomorphic to a subdirectly irreducible quasigroup modulo its monolith // *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 2006. Vol. 72. P. 59–64.
3. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras  $\langle A; f \rangle$  // *Arch. Math. (Basel)* 1970. Vol. 21. P. 256–264.
4. Płonka J. Subdirectly irreducible groupoids in some varieties // *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 1983. Vol. 24. № 4. P. 631–645.
5. Garcia P., Esteva F. On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras // *Studia Logica*. 1995. Vol. 55. P. 319–346.
6. Celani S. A. Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Vol. 2006, Article ID 21835. P. 1–20.
7. Ésik Z., Imreh B. Subdirectly irreducible commutative automata // *Acta Cybernetica*. 1981. Vol. 5. № 3. P. 251–260.
8. Chajda I., Länger H. Subdirectly irreducible commutative multiplicatively idempotent semirings // *Algebra Universalis*. 2016. Vol. 76. P. 327–337.
9. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Характеризация подпрямо неразложимых полигонов // *Прикладная дискретная математика*. 2015. № 1(27). С. 5–16.
10. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1972. Vol. 36. P. 34–38.
11. Loi N. V., Wiegandt R. Subdirect irreducibility of algebras and acts with an additional unary operation // *Miskolc Mathematical Notes*. 2005. Vol. 6. № 2. P. 217–224.
12. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // *Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. "Ест. и физ.-мат. науки"*. 2005. № 4(13). С. 17–24.
13. Szendrei A. Clones in universal algebra. Montréal: Les presses de l'Université de Montréal, 1986. 166 p.
14. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // *Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л. А. Скорнякова*. Волгоград, Перемена, 1999. С. 31–32.
15. Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // *Успехи математических наук*. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201–202.
16. Усольцев В. Л. Строение атомов в решетках конгруэнций алгебр одного класса унаров с мальцевской операцией // *Современные проблемы гуманитарных и естественных наук: Мат. XVIII Межд. научно-практ. конф. 26-27 марта 2014*. М.: Спецкнига, 2014. С. 39–44.
17. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией  $p$ , заданного тождеством  $p(x, y, x) = y$  // *Чебышевский сб.* 2011. Т. 12. Вып. 2(38). С. 127–134.
18. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // *Algebra Universalis*. 2008. Vol. 59. № 3-4. P. 463–489.
19. Bulatov A., Krokhin A., Jeavons P. The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach // *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra*. Berlin: Springer-Verlag, 2005. P. 181–213.

20. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.
21. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 3(51). С. 100–113.
22. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.
23. Лата А. Н. О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2(62). С. 154–172.
24. Usoltsev V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, № 2. P. 281–293.

## REFERENCES

1. Smirnov, D. M. 1992, “Mnogoobraziya algebr” [“Varieties of algebras“], VO “Nauka“, Sibirskaya izdatel'skaya firma, Novosibirsk, 205 p. (Russian)
2. McKenzie, R. & Stanovský, D. 2006, “Every quasigroup is isomorphic to a subdirectly irreducible quasigroup modulo its monolith“, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, vol. 72, pp. 59–64.
3. Wenzel, G. H. 1970, “Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras  $\langle A; f \rangle$ “, *Archiv der Mathematik, Basel*, vol. 21, pp. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912
4. Płonka, J. 1983, “Subdirectly irreducible groupoids in some varieties“, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 24, no. 4, pp. 631–645.
5. Garcia, P. & Esteve, F. 1995, “On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras“, *Studia Logica*, vol. 55, pp. 319–346. DOI: 10.1007/BF01061240
6. Celani, S. A. 2006, “Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators“, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2006, Article ID 21835, pp. 1–20. DOI: 10.1155/IJMMS/2006/21835
7. Ésik, Z. & Imreh, B. 1981, “Subdirectly irreducible commutative automata“, *Acta Cybernetica*, vol. 5, no. 3, pp. 251–260.
8. Chajda, I. & Länger, H. 2016, “Subdirectly irreducible commutative multiplicatively idempotent semirings“, *Algebra Universalis*, vol. 76, pp. 327–337. DOI: 10.1007/s00012-016-0403-2
9. Kozhukhov, I. B. & Haliullina, A. R. 2015, “A characterization of subdirectly irreducible acts“, *Prikladnaya diskretnaya matematika*, vol. 1, pp. 5–16 (Russian).
10. Berman, J. 1972, “On the congruence lattices of unary algebras“, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 36, pp. 34–38. DOI: 10.1090/S0002-9939-1972-0309833-6
11. Loi, N. V. & Wiegandt, R. 2005, “Subdirect irreducibility of algebras and acts with an additional unary operation“, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 6, no. 2, pp. 217–224.
12. Usoltsev, V. L. 2005, “On subdirectly irreducible unars with Mal'tsev operation“, *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya "Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki"*, vol. 4, pp. 17–24 (Russian).

13. Szendrei, A. 1986, "Clones in universal algebra", *Les presses de l'Université de Montréal*, Montréal, 166 p.
14. Kartashov, V.K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skornyakova (Universal algebra and application: theses of Int. workshop dedicated memory of prof. L. A. Skornyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)
15. Usoltsev, V.L. 2008, "Unars with ternary Mal'tsev operation", *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 63, no. 5, pp. 201–202; translated in *Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, no. 5, pp. 986–987.
16. Usoltsev, V.L. 2014, "The structure of atoms in the congruence lattices of algebras in one class of unars with the Mal'tsev operation", *Sovremennye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk: Materialy XVIII mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (Modern problems of humanitarian and natural sciences: Proc. XVIII Int. scientific-practical conf.)*, Moscow, pp. 39–44 (Russian).
17. Usoltsev, V.L. 2011, "Free algebras in the variety of unars with Mal'tsev operation that defined by identity  $p(x, y, x) = y$ ", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no. 2(38), pp. 127–134. (Russian)
18. Maróti M., McKenzie R. 2008, "Existence theorems for weakly symmetric operations", *Algebra Universalis*, vol. 59, no. 3-4, pp. 463–489.
19. Bulatov A., Krokhin A. & Jeavons P. 2005, "The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach", *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra*, Berlin, Springer-Verlag, pp.181-213.
20. Usoltsev, V.L. 2012, "On polynomially complete and Abelian unars with Mal'tsev operation", *Uchenye Zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, vol. 6(50), part 2, pp. 229–236. (Russian)
21. Usoltsev, V.L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 15, no. 3(51), pp. 100–113. (Russian)
22. Usoltsev, V.L. 2016, "On congruence lattices of algebras with one operator and basic near-unanimity operation", *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzhya*, vol. 2, pp. 28–30 (Russian).
23. Lata, A.N. 2017, "On congruence coherent Rees algebras and algebras with an operator", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 18, no. 2(62), pp. 154–172. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-154-172
24. Usoltsev, V.L. 2010, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 164, no. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1007/S1095800997306