ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-236-256

Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II

А. С. Самсонов

Самсонов Алексей Сергеевич — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости, формулируются и доказываются теоремы для некоторых элементов прямых произведений p-адических полей. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — пополнение $\mathbb{Q}$ по p-адической норме, поле Ω_p — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел, а пополнение $\mathbb{Q}$ по g-адической псевдонорме это кольцо $\mathbb{Q}_g$, иными словами $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. Рассматривается кольцо $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, содержащее $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Вопросы о трансцендентности и алгебраической независимости над $\mathbb{Q}_g$ элементов Ω_g привели к результатам полученным в статье. При соблюдении некоторых условий можно делать соответствующие выводы не только для чисел вида $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, где $a_k \in \mathbb{Z}_g$, а неотрицательные рациональные числа r_k образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность. Но и для чисел вида $f(\alpha)$, где $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$. Кроме того, пусть $\widehat{\mathbb{Q}} \cong \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$ — кольцо полиадических чисел, тогда, рассматривая элементы кольца $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$, можно делать аналогичные выводы для чисел вида $f(\alpha)$, где $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]]$, $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, $a_k \in \mathbb{Z}_g$, $g = (p_1, \dots, p_n, \dots)$.

Ключевые слова: p-адические числа, g-адические числа, полиадические числа, трансцендентность, алгебраическая независимость.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. С. Самсонов. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 236–256.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-236-256

Arithmetic properties of direct product of p-adic fields elements, II

A. S. Samsonov

Samsonov Aleksei Sergeevich — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Abstract

The article takes a look at transcendence and algebraic independence problems, introduces statements and proofs of theorems for some kinds of elements from direct product of p-adic fields and polynomial estimation theorem. Let $\mathbb{Q}_p$ be the p-adic completion of $\mathbb{Q}$, Ω_p be the completion of the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \ldots p_n$ be a composition of separate prime numbers, $\mathbb{Q}_g$ be the g-adic completion of $\mathbb{Q}$, in other words $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. The ring $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$, a subring $\mathbb{Q}_g$, transcendence and algebraic independence over $\mathbb{Q}_g$ are under consideration. Here are appropriate theorems for numbers not only like $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j g^{r_j}$ where $a_j \in \mathbb{Z}_g$, and non-negative rationals r_j increase strictly unbounded. But, for numbers $f(\alpha)$, where $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$. Furthermore, let $\widehat{\mathbb{Q}} \cong \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$ be the ring of polyadic numbers, then, the article takes a look at $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$, there are similar results for numbers like $f(\alpha)$, where $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]]$, $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, $a_k \in \mathbb{Z}_g$, $g = (p_1, \ldots, p_n, \ldots)$.

Keywords: p-adic numbers, g-adic numbers, polyadic numbers, transcendence, algebraic independence.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. S. Samsonov, 2021, "Arithmetic properties of direct product of p-adic fields elements, II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 236–256.

Введение

Используются следующие обозначения: p — простое число, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $|x|_p = p^{-ord_p x}$ — p-адическая норма; $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме; Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$; $K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца K, например $\mathbb{Q}_p[x]$, $K[x_1, \ldots, x_m]$ — кольцо многочленов от m переменных над кольцом K.

Для g-адических чисел используются следующие обозначения: $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение различных простых чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g-адических чисел, $|x|_g$ — g-адическая псевдонорма; $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g-адической псевдонорме; построено кольцо Ω_g — расширение кольца $\mathbb{Q}_g$, $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.

Для полиадических чисел используются следующие обозначения: все простые числа пронумерованы $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$; $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ — кольцо целых полиадических чисел; $\widehat{\mathbb{Q}} = \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$, $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$.

Основные понятия и определения

Определение 1. *Обозначим* $\Phi:\ \mathbb{Q}_g \to \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ *— прямой изоморфизм колец, а* $\Psi:\ \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n} \to \mathbb{Q}_g$ *— обратный.*

Замечание 1. *Описание изоморфизма* $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ *см. в [22], с. 59.*

Утверждение 1. *Множество* $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$ *— кольцо, которое содержит кольцо* $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ *в качестве подкольца.*

Содержание этого утверждения очевидно.

Замечание 2. *Пространство* $\mathbb{Q}_g$ *представляет из себя множество* $\{\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)\}$*, где* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *пробегает множество* $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$.

Теперь мы построим пространство Ω_g. В силу предыдущего замечания, мы можем дополнить множество $\mathbb{Q}_g$ недостающими элементами и обозначить их $\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ пробегает множество $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$. Более того, продолжение изоморфизма Ψ, которое мы построим, будет отображать элементы $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в $\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, поэтому совпадение обозначений не приведет к конфликту.

Определение 2. *Пусть* $\Omega_g = \{\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)\}$*, где* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *пробегает* $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$*. Алгебраическую структуру заимствуем из кольца* $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.

Утверждение 2. *Кольцо* Ω_g *содержит* $\mathbb{Q}_g$ *в качестве подкольца. Существует продолжение изоморфизма* $\Psi:\ \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n} \to \Omega_g$ *и продолжение обратного изоморфизма* $\Phi:\ \Omega_g \to \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.

Доказательство. В силу замечания 2 и определения 2, очевидно, что кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Продолжение изоморфизма Ψ определим следующим образом, пусть Ψ отображает элемент $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в $\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Такое отображение будет изоморфизмом в силу определения 2. Изоморфизм Φ продолжим, как обратный к Ψ.

Замечание 3. *Далее, нет смысла упоминать названия изоморфизмов, они будут опущены, поскольку обозначения не вызывают разночтений. Если* $\alpha \in \Omega_g$*, то* $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$*, где* $\beta_k \in \Omega_{p_k}$*. Аналогично, если* $\alpha \in \mathbb{Q}_g$*, то* $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$*, если* $\alpha \in \mathbb{Z}_g$*, то* $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$*. Любой многочлен* $G \in \mathbb{Q}_g[x]$ *можно представить в виде*

$$G = (P_1, P_2, \ldots, P_n),\ \text{где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = (P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \ldots, P_n(\beta_n)),\ \text{где } \alpha \in \Omega_g,\ \alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Аналогично, если $G \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m]$*, то* $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \ldots, x_m]$.

Определение 3. *Обозначим* $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ *— кольцо целых полиадических чисел,* $\widehat{\mathbb{Q}} = \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$*,* $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$.

Замечание 4. *Кольцо* $\widehat{\mathbb{Q}} \supset \widehat{\mathbb{Z}}$ *содержит в себе кольцо целых полиадических чисел в качестве подкольца, а кольцо* $\widehat{\Omega} \supset \widehat{\mathbb{Q}}$ *содержит в себе кольцо* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *в качестве подкольца.*

Замечание 5. *Если* $\alpha \in \widehat{\Omega}$, *то* $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$, *где* $\beta_k \in \Omega_{p_k}$. *Аналогично, если* $\alpha \in \widehat{\mathbb{Q}}$, *то* $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$, *если* $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}$, *то* $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$. *Любой многочлен* $G \in \widehat{\mathbb{Q}}[x]$ *можно представить в виде*

$$G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots), \text{ где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = (P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \ldots, P_n(\beta_n), \ldots), \text{ где } \alpha \in \widehat{\Omega},\ \alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots).$$

Аналогично, если $G \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m]$, *то* $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \ldots, x_m]$.

Определение 4. *Обозначим* $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$.

Определение 5. *Обозначим* $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \beta_k \neq 0\}$. *Обозначим* $\widehat{\mathbb{Z}}^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{N},\ \beta_k \neq 0\}$.

Хотелось бы ввести обозначение $A \backslash \widehat{0}$, которое бы исключало из множества A, являющегося прямым произведением, все такие элементы, что хотя бы одна из компонент тождественно равна нулю, иными словами, исключить нули и делители нуля. Это обозначение представим в следующем виде.

Определение 6. $\mathbb{Z}_g \backslash \widehat{0} := \mathbb{Z}_g^*$, $\widehat{\mathbb{Z}} \backslash \widehat{0} := \widehat{\mathbb{Z}}^*$, $\mathbb{Q}_g[x] \backslash \widehat{0} := \{G = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P_k \not\equiv 0\}$, $\widehat{\mathbb{Q}}[x] \backslash \widehat{0} := \{G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] : \forall k \in \mathbb{N},\ P_k \not\equiv 0\}$ *и так далее.*

Замечание 6. *Следующие определения раскрывают смысл глобального соотношения, которое говорит о наличии соответствующего соотношения для каждой компоненты.*

Определение 7. *Пусть* $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$ *элементом* Ω_g, *если для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 8. *Пусть* $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$ *элементами* Ω_g, *если для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Определение 9. *Пусть* $\alpha \in \widehat{\Omega}$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементом* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 10. *Пусть* $\alpha_i \in \widehat{\Omega}$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n}, \ldots)$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементами* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Определение 11. *Степенной ряд* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, *будем называть глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$, *если для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(f_k) \not\equiv 0$.

Определение 12. *Степенные ряды* $f_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$, $f_i = (f_{i,1}, \ldots, f_{i,n})$, $i = 1, \ldots, m$, *будем называть глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$, *если для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(f_{1,k}, \ldots, f_{m,k}) \not\equiv 0$.

Определение 13. *Степенной ряд* $f(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_jz^j\in\widehat{\mathbb{Z}}[[z]]$, $f=(f_1,\dots,f_n,\dots)$, *будем называть глобально трансцендентным над* $\widehat{\mathbb{Q}}$, *если для любого* $k\in\mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G=(P_1,P_2,\dots,P_n,\dots)\in\widehat{\mathbb{Q}}[x]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(f_k)\not\equiv 0$.

Определение 14. *Степенные ряды* $f_i(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_{i,j}z^j\in\widehat{\mathbb{Z}}[[z]]$, $f_i=(f_{i,1},\dots,f_{i,n},\dots)$, $i=1,\dots,m$, *будем называть глобально алгебраически независимыми над* $\widehat{\mathbb{Q}}$, *если для любого* $k\in\mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G=(P_1,P_2,\dots,P_n,\dots)\in\widehat{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_m]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(f_{1,k},\dots,f_{m,k})\not\equiv 0$.

Формулировки теорем и сведение доказательств и рассуждений к p-адическому случаю

Лемма 1. *Пусть*
1) числа r_k *и* s_k, *где* $k=1,2,\dots$ *являются неотрицательными и рациональными,* $r_1,r_2,\dots$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *последовательность;*
2) существует бесконечное множество номеров j *таких, что число* r_{j+1} *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1,r_1,\dots,r_j$ *и чисел* s_k;
3) числа r'_k *такие, что разность* r'_k-r_k *является неотрицательным целым числом, аналогично для* s'_k-s_k;
4) неубывающая последовательность t_k, *где* $k=1,2,\dots$ *является упорядоченной* r'_k.

Тогда существует бесконечное множество номеров j *таких, что число* t_{j+1} *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1,t_1,\dots,t_j$ *и чисел* s'_k.

Замечание 7. *Последовательность* r'_k *стремится к* $+\infty$, *поэтому неубывающая* t_k *существует, а четвертый пункт условия является корректным.*

Доказательство. Предположим противное, тогда множество подходящих номеров конечно. Пусть номер n_0 последний из таких, что число t_{n_0} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1,t_1,\dots,t_{n_0-1}$ и чисел s'_k. Если нет ни одного подходящего номера, пусть $n_0=1$. Поскольку t_{n_0+1} является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1,t_1,\dots,t_{n_0}$ и чисел s'_k. Получается, что t_{n_0+2}, как линейная комбинация с целыми коэффициентами чисел $1,t_1,\dots,t_{n_0+1}$ и чисел s'_k, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1,t_1,\dots,t_{n_0}$ и чисел s'_k. Таким образом, каждое следующее число в последовательности t_m, при $m>n_0$, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1,t_1,\dots,t_{n_0}$ и чисел s'_k.

Получается, что существует лишь конечное множество из чисел t_k таких, что их нельзя представить линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1,t_1,\dots,t_{n_0}$ и чисел s'_k. Поскольку в распоряжении есть число 1, нету разницы в том, использовать ли числа t_k,s'_k или числа r_k,s_k, существование линейной комбинации от этого не зависит. Значит, существует лишь конечное множество из чисел r_k таких, что их нельзя представить линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел 1, s_k и фиксированного конечного подмножества чисел r_k. Но это, очевидно, противоречит второму условию леммы.

Теорема 1. *Пусть* $g=p_1\dots p_n$,

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jz^j\in\mathbb{Z}_g[[z]],\ \sum_{j=1}^{\infty}c_jz^j\in\mathbb{Z}_g[[z]]\backslash\widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_g,\ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$;
3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Предположим противное, тогда числа $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_m)$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g при некотором $m \geqslant 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число $f(\alpha_1)$ не является глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g. Следовательно, считая $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\alpha_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \ldots, \alpha_{\mu,n})$, $f(\alpha_\mu) = (f_1(\alpha_{\mu,1}), \ldots, f_n(\alpha_{\mu,n}))$, существуют $t \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant t \leqslant n$, и $G = (G_1, \ldots, G_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash 0$ такие, что $G_t(f_t(\alpha_{1,t}), \ldots, f_t(\alpha_{m,t})) = 0$. Значит, числа $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}. Пусть $a_{k,\mu} = (a_{k,\mu,1}, \ldots, a_{k,\mu,n})$, тогда

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu,t} g^{r_{k,\mu}},\ \text{где } a_{k,\mu,t} \in \mathbb{Z}_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*$, воспользуемся тем, что $p_t = (p_t/g)g$, $(p_t/g) \in U_{p_t}$ и освободим коэффициенты от целых степеней p_t,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{r'_{k,\mu}},\ \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Воспользуемся леммой 1 и упорядочим числа $r'_{k,\mu}$ отдельно для каждого $\mu = 1, \ldots, m$, получим

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{t_{k,\mu}},\ \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Поскольку не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом, значит, для каждого $\mu = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$. Таким образом доказательство сводится к следующему p-адическому случаю.

Теорема 2. *Пусть*

$$f_t(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_{j,t} \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{t_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t},\ a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}.

Доказательство будет проведено позднее, в более удобных обозначениях.

Теорема 3. *Пусть $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]],\ \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]] \backslash \widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \widehat{\Omega},\ a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$;
3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

Доказательство повторяет предыдущее, тем не менее, есть некоторые отличия, которые полезно представить в явном виде. Предположим противное, тогда числа $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_m)$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементами $\widehat{\Omega}$ при некотором $m \geqslant 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число $f(\alpha_1)$ не является глобально трансцендентным над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементом $\widehat{\Omega}$. Следовательно, считая $f = (f_1, \ldots, f_n, \ldots)$, $\alpha_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \ldots, \alpha_{\mu,n}, \ldots)$, $f(\alpha_\mu) = (f_1(\alpha_{\mu,1}), \ldots, f_n(\alpha_{\mu,n}), \ldots)$, существуют $t \in \mathbb{N}$ и $G = (G_1, \ldots, G_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ такие, что $G_t(f_t(\alpha_{1,t}), \ldots, f_t(\alpha_{m,t})) = 0$. Значит, числа $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}. Пусть $a_{k,\mu} = (a_{k,\mu,1}, \ldots, a_{k,\mu,n}, \ldots)$, тогда

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu,t} p_t^{r_{k,\mu}},\ \text{где } a_{k,\mu,t} \in \mathbb{Z}_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*$, освободим коэффициенты от целых степеней p_t,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{r'_{k,\mu}},\ \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Воспользуемся леммой 1 и упорядочим числа $r'_{k,\mu}$ отдельно для каждого $\mu = 1, \ldots, m$, получим

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{t_{k,\mu}},\ \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Поскольку не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом, значит, для каждого $\mu = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$. Таким образом доказательство сводится к p-адическому случаю, который можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Пусть*

$$f_t(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_{j,t} \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{t_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t},\ a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}.

Доказательство. Это теорема 2, при $g = p_t$.

Теорема 5. *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$.

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_g,\ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$, $\mu' = 1, \ldots, m$;

3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Повторяя ход рассуждений, использовавшихся для теоремы 1, предположим существование алгебраической зависимости

$$G_t(f_{1,t}(\alpha_{1,t}), \ldots, f_{1,t}(\alpha_{m,t}); \ldots; f_{l,t}(\alpha_{1,t}), \ldots, f_{l,t}(\alpha_{m,t})) = 0,$$

и сведем к следующему p-адическому случаю.

Теорема 6. *Пусть*

$$f_{\lambda,t}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_{j,\lambda,t}z^j\in\mathbb{Z}_p[[z]],\ \lambda=1,\dots,l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_{\mu,t}=\sum_{k=1}^{\infty}a'_{k,\mu,t}g^{t_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu,t}\in\Omega_{p_t},\ a'_{k,\mu,t}\in U_{p_t},\ \mu=1,\dots,m.$$

Пусть

1) для любого $\mu=1,\dots,m$ *положительные рациональные числа* $t_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k\to+\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu=1,\dots,m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $t_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1,t_{1,\mu},\dots,t_{k,\mu}$ *и чисел* $t_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и* $\mu'\neq\mu$.

Тогда элементы $f_{\lambda,t}(\alpha_{\mu,t})$, *где индексы пробегают значения* $\lambda=1,\dots,l$, $\mu=1,\dots,m$, *представляют собой алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_{p_t}$ *элементы* Ω_{p_t}.

Доказательство будет проведено позднее, в более удобных обозначениях.

Теорема 7. *Пусть* $g=(p_1,p_2,\dots,p_n,\dots)$, *функции*

$$f_{\lambda}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_{j,\lambda}z^j\in\widehat{\mathbb{Z}}[[z]],\ \lambda=1,\dots,l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$.

$$\alpha_{\mu}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k,\mu}g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu}\in\widehat{\Omega},\ a_{k,\mu}\in\widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu=1,\dots,m.$$

Пусть

1) для любого $\mu=1,\dots,m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k\to+\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu=1,\dots,m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1,r_{1,\mu},\dots,r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu'\neq\mu$, $\mu'=1,\dots,m$;

3) не существует номеров k, k', μ *таких, что разница* $r_{k,\mu}-r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f_{\lambda}(\alpha_{\mu})$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементы* $\widehat{\Omega}$.

Доказательство. Повторяя ход рассуждений, использовавшихся для теорем 3 и 5, учитывая отличия, сведем к p-адическому случаю, который можно сформулировать следующим образом.

Теорема 8. *Пусть*

$$f_{\lambda,t}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_{j,\lambda,t}z^j\in\mathbb{Z}_p[[z]],\ \lambda=1,\dots,l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_{\mu,t}=\sum_{k=1}^{\infty}a'_{k,\mu,t}p_t^{t_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu,t}\in\Omega_{p_t},\ a'_{k,\mu,t}\in U_{p_t},\ \mu=1,\dots,m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *положительные рациональные числа* $t_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*
2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $t_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, t_{1,\mu}, \dots, t_{k,\mu}$ *и чисел* $t_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и* $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_{\lambda,t}(\alpha_{\mu,t})$, *где индексы пробегают значения* $\lambda = 1, \dots, l$, $\mu = 1, \dots, m$, *представляют собой алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_{p_t}$ *элементы* Ω_{p_t}.

Доказательство. Это теорема 6, при $g = p_t$.

Завершение доказательств, разбор p-адических случаев

Для начала сформулируем в удобных обозначениях теоремы 2 и 6, которые осталось доказать.

Теорема 9. *Пусть* $g = p_1, \dots, p_\nu$ — *произведение различных простых чисел,* $\nu \geqslant 1$, *простое число* p *является одним из членов этого произведения,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_j \neq 0$ *хотя бы для одного* $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_p,\ a_{k,\mu} \in U_p,\ \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*
2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и* $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ *представляют собой алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_p$ *элементы* Ω_p.

Замечание 8. *Условие* $c_j \neq 0$ *подразумевает, что степенной ряд* $f(z)$, *рассматриваемый как функция, отличается от константы. Положительность* $r_{k,\mu}$ *обеспечивает сходимость при вычислении значений* $f(\alpha_\mu)$.

Теорема 10. *Пусть* $g = p_1, \dots, p_\nu$ — *произведение различных простых чисел,* $\nu \geqslant 1$, *простое число* p *является одним из членов этого произведения, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],\ \lambda = 1, \dots, l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_p,\ a_{k,\mu} \in U_p,\ \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть
1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_p$ элементы Ω_p.

Лемма 2. *Пусть $L|K$ расширение некоторого поля K, степенные ряды $f_1, \ldots, f_l \in K[[z]]$ являются алгебраически независимыми над L, тогда и только тогда, когда они являются алгебраически независимыми над K.*

Доказательство этого факта, по сути, но в частном случае, приведено у Шидловского [23], лемма 2 на 91 с. Очевидно, что из алгебраической независимости над L, следует алгебраическая независимость над K, остается показать, что при наличии алгебраической зависимости $P(f_1, \ldots, f_l) = 0$, над L, существует многочлен P^* с коэффициентами из K такой, что $P^*(f_1, \ldots, f_l) = 0$. Для этого, считая коэффициенты многочлена P неопределенными переменными, вычисляя и приравнивая к нулю коэффициенты перед степенями z, составим систему из счетного числа линейных однородных уравнений с коэффициентами из поля K. Из этой системы можно выбрать минимальную линейно независимую подсистему, и она имеет нетривиальное решение, в силу существования P. Поскольку система однородная, то можно выбрать решение из поля K, так мы получим коэффициенты многочлена P^*.

Лемма 3. *Пусть степенной ряд*

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

такой, что $d_j \neq 0$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k},\ \alpha \in \Omega_p,\ a_k \in U_p.$$

Пусть
1) положительные рациональные числа r_k образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;
2) существует бесконечное множество номеров k таких, что число r_{k+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_1, \ldots, r_k$.

Тогда из $\varphi'(\alpha) \neq 0$ следует $\varphi(\alpha) \neq 0$.

Замечание 9. *Есть некоторые очевидные соображения, но на них стоит обратить внимание, поскольку они неоднократно будут использоваться. Можно вычислить формальную производную*

$$\varphi^{(i)}(z) = \sum_{j=i}^{\infty} j \ldots (j-i+1) d_j z^{j-i}.$$

Поскольку

$$\left| \frac{j!}{i!(j-i)!} d_j \alpha^{j-i} \right|_p = \left| \tbinom{j}{i} d_j \alpha^{j-i} \right|_p \leqslant |\alpha|_p^{j-i}$$

и $|\alpha|_p < 1$, значит

$$\operatorname{ord}_p \frac{\varphi^{(i)}(\alpha)}{i!} > 0,$$

это помогает увидеть сходимость рядов там, где она может быть не сразу очевидна.

Доказательство. Предположим противное, пусть $\varphi'(\alpha) \neq 0$, но $\varphi(\alpha) = 0$. Положим

$$\alpha^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k g^{r_k}.$$

Тогда $\mathrm{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) = r_{n+1}$, поскольку $\varphi(\alpha) = 0$, получим

$$\varphi(\alpha^{(n)}) = \varphi(\alpha + (\alpha^{(n)} - \alpha)) = \varphi'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(\alpha^{(n)} - \alpha)^2 + \ldots$$

Для достаточно больших n

$$\mathrm{ord}_p\, \varphi(\alpha^{(n)}) = \mathrm{ord}_p(\varphi'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha)) = \mathrm{ord}_p\, \varphi'(\alpha) + r_{n+1}.$$

Из этого равенства мы и получим противоречие, представляя $\mathrm{ord}_p\, \varphi'(\alpha^{(n)})$, $\mathrm{ord}_p\, \varphi(\alpha)$, а значит и r_{n+1} в виде линейных комбинаций чисел $1, r_1, \ldots, r_n$.

Во-первых, число

$$\varphi'(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} j d_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k} \right)^{j-1}$$

отлично от нуля. Как конечная линейная комбинация, $\mathrm{ord}_p\, \varphi'(\alpha) = u + u_1 r_1 + \ldots + u_h r_h$, где $u, u_1, \ldots, u_h$ — неотрицательные целые числа. Значит, достаточно выбрать $n \geqslant h$.

Во-вторых, каждое слагаемое из

$$\varphi(\alpha^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k g^{r_k} \right)^{j}$$

имеет порядок, являющийся линейной комбинацией чисел $1, r_1, \ldots, r_n$ с неотрицательными коэффициентами.

Таким образом, для любого достаточно большого n, число r_{n+1} представляет собой линейную комбинацию чисел $1, r_1, \ldots, r_n$ с целыми коэффициентами, что противоречит условиям леммы.

Лемма 4. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_j \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k},\ \alpha \in \Omega_p,\ a_k \in U_p.$$

Тогда $f'(\alpha) \neq 0$.

Доказательство. Пусть натуральное число q минимальное из тех, что $f^{(q)}(\alpha) \neq 0$, в силу условий для f такое q должно существовать, в противном случае

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + \ldots = f(\alpha).$$

Предположим, что $q > 1$, определим

$$\varphi(z) = f^{(q-1)}(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

значит $\varphi(\alpha) = 0$ и $\varphi'(\alpha) \neq 0$, но это противоречит лемме 3. Таким образом, $q = 1$, $f'(\alpha) \neq 0$.

Замечание 10. *Мы показали, что при обращении в нуль всех производных в некоторой точке, ряд состоит только из первого слагаемого — константы.*

Утверждение 3. *Пусть $f_1, \ldots, f_l$ имеют вид*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

и являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k},\ \alpha \in \Omega_p,\ a_k \in U_p.$$

Тогда $f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)$ являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_l]$ отличный от константы, определим $\varphi(z) = P(f_1(z), \ldots, f_l(z))$. Тогда,

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

и достаточно показать, что $\varphi(\alpha) \neq 0$. Очевидно, существует такое $q \in \mathbb{N}$, что $\varphi^{(q)}(\alpha) \neq 0$, поскольку $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \ldots = 0$ означало бы, что φ является константой, $\varphi(z) = d_0$,

$$P(f_1(z), \ldots, f_l(z)) = d_0,$$

это противоречит алгебраической независимости $f_1, \ldots, f_l$ над $\mathbb{Q}_p$.

Рассмотрим функцию $\varphi^{(q-1)}(z)$, которая не может быть константой, а благодаря лемме 3 можно утверждать, что $\varphi^{(q-1)}(\alpha) \neq 0$. Если $q = 1$, тогда $\varphi(\alpha) \neq 0$, что эквивалентно $P(f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)) \neq 0$. Если $q > 1$, повторим рассуждение и рассмотрим отличную от константы функцию $\varphi^{(q-2)}(z)$, причем $\varphi^{(q-2)}(\alpha) \neq 0$, и так далее, пока не получится, что $\varphi(\alpha) \neq 0$, а это и требовалось доказать.

Замечание 11. *Следующие две леммы нужны для доказательства теоремы 10, они немного обобщают и повторяют то, что уже было сказано.*

Лемма 5. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ удовлетворяют условиям теоремы 9.*

Для каждого $\mu = 1, \ldots, m$, пусть

$$\varphi_\mu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,\mu} z^j,$$

где все $d_{j,\mu} \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m]]$, причем $d_{j,\mu} \neq 0$ хотя бы для одного $j = j(\mu) \in \mathbb{N}$. Тогда из $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$ следует $\varphi_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, тогда $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, но $\varphi_\mu(\alpha_\mu) = 0$ для некоторого $\mu \in \{1, \ldots, m\}$. Определяя $\alpha_\mu^{(n)}$ как n-ую частичную сумму

$$\alpha_\mu^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},$$

ряда для α_μ в теореме 9, получаем

$$\varphi(\alpha_\mu^{(n)}) = \varphi'_\mu(\alpha_\mu)(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu) + \frac{\varphi''_\mu(\alpha_\mu)}{2!}(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu)^2 + \ldots$$

Поскольку $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, значит порядок вхождения p в правую часть равенства равен $\mathrm{ord}_p(\varphi'_\mu(\alpha_\mu)(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu))$ для каждого достаточно большого $n \geqslant n_\mu$, значит

$$\mathrm{ord}_p\, \varphi_\mu(\alpha_\mu^{(n)}) = \mathrm{ord}_p\, \varphi'_\mu(\alpha_\mu) + r_{n+1,\mu}. \tag{1}$$

Для оценки $\mathrm{ord}_p\, \varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ заметим, что

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} j d_{j,\mu} \alpha_\mu^{j-1}$$

$$d_{j,\mu} \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m]].$$

Определение для $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ в теореме 9 дает понять, что $\varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ это сумма произведений элемента из U_p и рациональной степени g, которая получается как конечная линейная комбинация с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и $r_{k,\mu}$, где $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \{1, \ldots, m\}$. Тут надо заметить, что избавиться от натуральных степеней p в коэффициентах действительно возможно, поскольку $p = (p/g)g$, где $p/g \in U_p$. Таким образом $\mathrm{ord}_p\, \varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ является некоторой линейной комбинацией, которую можно зафиксировать. Обозначим k_μ самый большой из таких первых индексов k, что $r_{k,v}$ появляется для некоторого $v \in \{1, \ldots, m\}$ с целым положительным коэффициентом в зафиксированной линейной комбинации.

Аналогичное рассмотрение и оценка значения $\mathrm{ord}_p\, \varphi_\mu(\alpha_\mu^{(n)})$ позволяет сказать, что это значение является конечной линейной комбинацией с целыми неотрицательным коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{n,\mu}$ и $r_{k,\mu'}$, где $\mu' \in \{1, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, m\}$. Учитывая равенство (1), получается, что для каждого достаточно большого $n \geqslant \max\{n_\mu, k_\mu\}$, число $r_{n+1,\mu}$ является конечной линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{n,\mu}$ и некоторых $r_{k,\mu'}$, где $\mu' \neq \mu$. Но это противоречит предположению об элементах $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Лемма 6. *Для $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ соответствующих условиям леммы 5,*

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$$

для $\mu = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Для каждого $\mu = 1, \ldots, m$ существует минимальное $q_\mu \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi_\mu^{(q_\mu)}(\alpha_\mu) \neq 0$. Если $q_\mu = 1$, доказано. При $q_\mu > 1$ рассмотрим функцию

$$\psi_\mu(z) = \varphi_\mu^{(q_\mu - 1)}(z) \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m]],$$

которая удовлетворяет условиям леммы 5. Если $\psi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, получается $\psi_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, значит $\varphi_\mu^{(q_\mu - 1)}(\alpha_\mu) \neq 0$, что противоречит выбору q_μ, значит $q_\mu = 1$.

Далее докажем теорему 9 индукцией по m. Начнем с $m = 1$, напишем $\alpha = \alpha_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, как в лемме 3. Положим $\gamma = f(\alpha)$, и пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ является многочленом минимальной степени таким, что $P(\gamma) = 0$, предполагая противное, а именно, что γ является алгебраическим над $\mathbb{Q}_p$. Как и в доказательстве леммы 3, пусть $\alpha^{(n)}$ обозначает n-ую частичную сумму ряда для α, положим $\gamma^{(n)} = f(\alpha^{(n)})$.

Далее мы должны исследовать разницу $\gamma^{(n)} - \gamma$. Очевидно,

$$\gamma^{(n)} - \gamma = f(\alpha^{(n)}) - f(\alpha) = f'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\alpha^{(n)} - \alpha)^2 + \ldots,$$

где, как мы знаем благодаря лемме 4, $f'(\alpha) \neq 0$. Таким образом,

$$\mathrm{ord}_p(\gamma^{(n)} - \gamma) = \mathrm{ord}_p\, f'(\alpha) + \mathrm{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) \tag{2}$$

для любого достаточно большого n.

В силу выбора P

$$P(\gamma^{(n)}) = P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma) + \frac{P''(\gamma)}{2!}(\gamma^{(n)} - \gamma)^2 + \ldots = P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma) + P^*(\gamma^{(n)} - \gamma), \tag{3}$$

где ряд $P^*(X) = \sum\limits_{i=2}^{\infty}(P^{(i)}(\gamma)/i!)X^i \in \mathbb{C}_p[[X]]$ и $\operatorname{ord}_p(P^{(i)}(\gamma)/i!) \geqslant 0$. Для достаточно больших n порядок правой части равенства (3) равен $\operatorname{ord}_p(P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma))$, учитывая равенство (2) и $P'(\gamma) \neq 0$, получается

$$\operatorname{ord}_p P(\gamma^{(n)}) = \operatorname{ord}_p P'(\gamma) + \operatorname{ord}_p f'(\alpha) + \operatorname{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) \tag{4}$$

для любого достаточно большого n.

Теперь попытаемся получить желаемое противоречие из равенства (4). Как и в доказательстве леммы 3, существует такое $h \in \mathbb{N}$, что

$$\operatorname{ord}_p f'(\alpha) = u + u_1 r_1 + \ldots + u_h r_h, \operatorname{ord}_p P'(\gamma) = v + v_1 r_1 + \ldots + v_h r_h,$$

где $u, u_1, \ldots, u_h, v, v_1, \ldots, v_h \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, что $\operatorname{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) = r_{n+1}$. Также, посмотрим на $\operatorname{ord}_p P(\gamma^{(n)})$. Считая $e_0, \ldots, e_J \in \mathbb{Z}_p$ это коэффициентами P, получим

$$P(\gamma^{(n)}) = \sum_{i=0}^{J} e_i f(\alpha^{(n)})^i = \sum_{i=0}^{J} e_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k g^{r_k}\right)^j\right)^i.$$

Следовательно, $\operatorname{ord}_p P(\gamma^{(n)})$ является линейной комбинацией чисел $1, r_1, \ldots, r_n$ с неотрицательным целыми коэффициентами. Как можно заключить из равенства (4), для любого достаточно большого числа $n \geqslant h$, число r_{n+1} представляется линейной комбинацией чисел $1, r_1, \ldots, r_n$ с целыми коэффициентами, что противоречит условию теоремы 9.

Для осуществления шага индукции, определим

$$\gamma_\mu = f(\alpha_\mu),\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Мы предполагаем, что $m > 1$, а элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$, но любые $m-1$ элементов являются алгебраически независимыми. Пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_m]$ это отличный от константы многочлен минимальной степени по совокупности переменных такой, что

$$P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) = 0. \tag{5}$$

Согласно предположению индукции, P зависит от каждой переменной X_μ и

$$\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \neq 0,\ \mu = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

в силу минимальности P. Тогда, из равенства (5)

$$P(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)(X_\mu - \gamma_\mu) + P^*(X_1 - \gamma_1, \ldots, X_m - \gamma_m), \tag{7}$$

где каждый моном полинома P^*, выраженный через $X_1 - \gamma_1, \ldots, X_m - \gamma_m$, имеет степень не ниже двух и коэффициент неотрицательного порядка.

Определим

$$\alpha_\mu^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ A_\mu^{(n)} = \alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu = -\sum_{k>n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \tag{8}$$

и

$$\gamma_\mu^{(n)} = f(\alpha_\mu^{(n)}), \tag{9}$$

тогда

$$\gamma_\mu^{(n)} - \gamma_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n)})^i. \tag{10}$$

Для некоторых $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}_0$, значения которых мы планируем уточнить позже, можно заключить из (7) и (10), что

$$P(\gamma_1^{(n_1)}, \ldots, \gamma_m^{(n_m)}) = \sum_{\mu=1}^{m} f'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) A_\mu^{(n_\mu)} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n_\mu)})^i + P^*(\gamma_1^{(n_1)} - \gamma_1, \ldots, \gamma_m^{(n_m)} - \gamma_m). \tag{11}$$

Из (6) и леммы 4 получаем

$$B_\mu = f'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \neq 0,\ \mu = 1, \ldots, m,$$

и определяя $b_\mu = \operatorname{ord}_p B_\mu$, $\mu = 1, \ldots, m$, не умаляя общности, можно предположить, что

$$b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_m. \tag{12}$$

Поскольку

$$f'(\alpha_\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j \alpha_\mu^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}} \right)^{j-1},$$

p-адические порядки членов, которые не были взаимно уничтожены в правой части равенства, являются конечными линейными комбинациями с целыми неотрицательными коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, r_{2,\mu}, \ldots$. Аналогично для членов в правой части равенства

$$\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) = \sum e_\mu(i_1, \ldots, i_m) f(\alpha_1)^{i_1} \ldots f(\alpha_m)^{i_m},\ e_\mu(\ldots) \in \mathbb{Z}_p,$$

где сумма распространяется на конечное число комбинаций $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}_0^m$ и имеет порядки, которые являются конечными линейными комбинациями с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и всех $r_{k,v}$, где $k \in \mathbb{N}$, $v = 1, \ldots, m$. Поэтому, можно утверждать, что каждое b_μ является конечной линейной комбинацией с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и всех $r_{k,v}$. Для каждого $\mu = 1, \ldots, m$, можно зафиксировать подобную линейную комбинацию для b_μ и среди всех $k \in \mathbb{N}$ выбрать максимальное значение из таких, что хотя бы одно из чисел $r_{k,v}$ встречается хотя бы в одной из m упомянутых линейных комбинаций, пусть n_0 будет этим максимальным.

Теперь выберем $n_1 > n_0$ согласно следующим условиям:

$$r_{n_1+1,1} > b_1, \tag{13}$$

$$\begin{cases} r_{n_1+1,1} \text{ не является конечной линейной комбинацией с целыми коэффициентами} \\ \text{чисел } 1, r_{1,1}, \ldots, r_{n_1,1}, \text{ и чисел } r_{k,\mu'}, \text{ где } \mu' \in \{2, \ldots, m\}. \end{cases} \tag{14}$$

Наконец, зафиксируем такие $n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}_0$, что

$$b_1 + r_{n_1+1,1} < \ldots < b_m + r_{n_m+1,m}, \tag{15}$$

учитывая неравенство (12),

$$r_{n_1+1,1} < \ldots < r_{n_m+1,m}. \tag{16}$$

Поскольку $\mathrm{ord}_p\, A_\mu^{(n_\mu)} = r_{n_\mu+1,\mu}$, то для достаточно больших n_μ, учитывая равенства (8), предположения о последовательностях r и неравенство (15), можно получить

$$\mathrm{ord}_p \left(\sum_{\mu=1}^{m} f'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) A_\mu^{(n_\mu)} \right) = b_1 + r_{n_1+1,1}. \tag{17}$$

Остается изучить порядки второго и третьего выражений из правой части равенства (11). Понятно, что для любых $i \geqslant 2$, $\mu = 1, \ldots, m$ получается

$$\mathrm{ord}_p \left(\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n_\mu)})^i \right) \geqslant 2r_{n_i+1,1} > b_1 + r_{n_1+1,1},$$

в силу неравенств (13) и (16). Как уже отмечалось, степени мономов для выражения $P^*(\gamma_1^{(n_1)} - \gamma_1, \ldots, \gamma_m^{(n_m)} - \gamma_m)$ не ниже двух, значит порядки не меньше, чем $2r_{n_1+1,1} > b_1 + r_{n_1+1,1}$. Тогда, вместе с напоминанием о равенстве (17), можно заключить, что $P(\gamma_1^{(n_1)}, \ldots, \gamma_m^{(n_m)})$ не обнуляется, поскольку

$$\mathrm{ord}_p\, P(\gamma_1^{(n_1)}, \ldots, \gamma_m^{(n_m)}) = b_1 + r_{n_1+1,1}. \tag{18}$$

С другой стороны, из равенств (8) и (9) видно, что

$$\gamma_\mu^{(n)} = f(\alpha_\mu^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}} \right)^j,$$

таким образом, можно вычислить $\mathrm{ord}_p\, P(\gamma_1^{(n_1)}, \ldots, \gamma_m^{(n_m)})$ как линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами чисел $1, r_{1,1}, \ldots, r_{n_1,1}, \ldots, r_{1,m}, \ldots, r_{n_m,m}$. Однако, учитывая равенство (18), получаем искомое противоречие с условиями $n_1 > n_0$ и (14). Теорема 9 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 10. Также, рассуждение индукцией по m. База индукции, при $m = 1$, уже была доказана в утверждении 3, теперь необходимо осуществить переход. Предположим, что $m > 1$, теорема уже доказана для каждого подмножества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m\}$, а требуется провести доказательство для $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Предположим противное, а именно, пусть $l \cdot m$ чисел $f_\lambda(\alpha_\mu)$, $\lambda = 1, \ldots, l$, $\mu = 1, \ldots, m$, являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$. Пусть отличный от константы многочлен

$$P \in \mathbb{Z}_p[\underline{X}] = Z_p[X_{1,1}, \ldots, X_{1,m}; \ldots; X_{l,1}, \ldots, X_{l,m}] \tag{19}$$

такой, что

$$P(\underline{\gamma}) = P(\gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{1,m}; \ldots; \gamma_{l,1}, \ldots, \gamma_{l,m}) = 0, \tag{20}$$

где $\gamma_{\lambda,\mu} = f_\lambda(\alpha_\mu)$. В силу предположения индукции, не может произойти такого, что для некоторого μ, многочлен P не зависит от набора переменных $(X_{1,\mu}, \ldots, X_{l,\mu})$.

Из соотношений (19) и (20) получается, что

$$P(\underline{X}) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma})(X_{\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda,\mu}) + P^*(\underline{X} - \underline{\gamma}), \tag{21}$$

где каждый моном полинома P^*, состоит из произведения разностей вида $X_{\lambda,\mu}-\gamma_{\lambda,\mu}$, имеет степень не меньше двух и коэффициент неотрицательного порядка.

Пусть $\alpha_\mu^{(n)}$ и $A_\mu^{(n)}$ определены согласно соотношениям (8), а $\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)}=f_\lambda(\alpha_\mu^{(n)})$. Перед тем, как подставить в соотношение (21) вместо переменных $X_{\lambda,\mu}$ значения $\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)}$, сделаем предварительные вычисления:

$$\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)}-\gamma_{\lambda,\mu}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_\lambda^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!}(A_\mu^{(n)})^i=f'_\lambda(\alpha_\mu)A_\mu^{(n)}+\sum_{i\geqslant 2}\dots \tag{22}$$

Считая, что n зависит от μ, будем записывать n_μ, из (21) и (22) получаем:

$$\begin{aligned}&P(\gamma_{1,1}^{(n_1)},\dots,\gamma_{1,m}^{(n_m)};\dots;\gamma_{l,1}^{(n_1)},\dots,\gamma_{l,m}^{(n_m)})=\\&=\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{l}f'_\lambda(\alpha_\mu)\frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma})A_\mu^{(n_\mu)}+\sum_{\mu}\sum_{\lambda}\frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma})\sum_{i\geqslant 2}\frac{f_\lambda^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!}(A_\mu^{(n_\mu)})^i+\\&+P^*(\gamma_{1,1}^{(n_1)}-\gamma_{1,1},\dots,\gamma_{1,m}^{(n_m)}-\gamma_{1,m};\dots;\gamma_{l,1}^{(n_1)}-\gamma_{l,1},\dots,\gamma_{l,m}^{(n_m)}-\gamma_{l,m})\end{aligned} \tag{23}$$

Теперь докажем, что для каждого $\mu=1,\dots,m$, сумма

$$B_\mu^*=\sum_{\lambda=1}^{l}f'_\lambda(\alpha_\mu)\frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma})$$

не обнуляется. Рассмотрим многочлен

$$Q_\mu(X_{1,\mu},\dots,X_{l,\mu})=P(\gamma_{1,1},\dots,X_{1,\mu},\dots,\gamma_{1,m};\dots;\gamma_{l,1},\dots,X_{l,\mu},\dots,\gamma_{l,m}), \tag{24}$$

тут, если посмотреть на равенство (20), $X_{\lambda,\mu}$ заменяет $\gamma_{\lambda,\mu}$ для каждого $\lambda=1,\dots,l$. Покажем, что $Q_\mu(X_{1,\mu},\dots,X_{l,\mu})\not\equiv 0$. В противном случае наличие решения $P(\underline{\gamma})=0$ говорит о том, что значения переменных $X_{1,\mu},\dots,X_{l,\mu}$ можно изменить любым образом и получить новое решение. Понятно, что существует набор значений $X_{1,\mu},\dots,X_{l,\mu}\in\mathbb{Z}_p$, при котором $P(\underline{X})\not\equiv 0$, иначе очевидно, что многочлен не зависит от остальных переменных, а это противоречит предположению индукции. С другой стороны, подставляя такой набор значений $X_{1,\mu},\dots,X_{l,\mu}$ в многочлен P, получится новый многочлен, который зависит лишь от оставшихся переменных и его существование противоречит предположению индукции. Значит, $Q_\mu(X_{1,\mu},\dots,X_{l,\mu})$ отличный от константы многочлен с коэффициентами из

$$\mathbb{Z}_p[\gamma_{1,1},\dots,\gamma_{1,\mu-1},\gamma_{1,\mu+1},\dots,\gamma_{1,m};\dots;\gamma_{l,1},\dots,\gamma_{l,\mu-1},\gamma_{l,\mu+1},\dots,\gamma_{l,m}].$$

Поскольку функции $f_1,\dots,f_l$ являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$, в силу леммы 2, функции являются алгебраически независимыми над $\mathbb{C}_p$, значит каждая функция

$$\varphi_\mu(z)=Q_\mu(f_1(z),\dots,f_l(z)),\ \mu=1,\dots,m \tag{25}$$

отлична от константы. Учитывая равенство (24), получаем:

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu)=\sum_{\lambda=1}^{l}f'_\lambda(\alpha_\mu)\frac{\partial Q_\mu}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\gamma_{1,\mu},\dots,\gamma_{l,\mu})=B_\mu^*. \tag{26}$$

С другой стороны, функции $\varphi_\mu(z)$, заданные соотношением (25), представляются степенными рядами, как в лемме 5, значит, благодаря лемме 6, мы знаем, что $\varphi'_\mu(\alpha_\mu)\neq 0$, $\mu=1,\dots,m$, а в силу (26), $B_\mu^*\neq 0$.

Определим $b^*_\mu = \mathrm{ord}_p\, B^*_\mu$, не умаляя общности

$$b^*_1 \geqslant \ldots \geqslant b^*_m.$$

Опять же, каждое из b^*_μ представляет конечную линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и $r_{k,v}$. При каждом $\mu = 1, \ldots, m$ зафиксируем линейную комбинацию для b^*_μ. Далее, используя b^*_μ вместо b_μ, повторим ход рассуждения для теоремы 9, выберем новые $n_1, \ldots, n_m$, достаточно большие, чтобы

$$\mathrm{ord}_p \left(\sum_{\mu=1}^{m} B^*_\mu A^{(n_\mu)}_\mu \right) = b^*_1 + r_{n_1+1,1}.$$

И так же, как при доказательстве теоремы 9, получаем противоречие, поскольку в силу выбора чисел n_μ, возвращаясь к равенству (23), порядок правой части равен $b^*_1 + r_{n_1+1,1}$ и представляется недопустимой линейной комбинацией, которая получается при вычислении порядка в левой части равенства.

Заключение

Данная статья, как исследование, продолжает некоторые работы П. Бундшу и В.Г. Чирского. Доказанные теоремы обобщают некоторые результаты из [5], [6] в том смысле, что для частного случая $g = p$ уже были доказаны в соответствующих формулировках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. Transcendental numbers in the p-adic domain // Amer. J. Math., 1966, V. 88, P. 279–307.

2. Amice Y. Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.

3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2004, V. XIII, №2, P. 241–260.

4. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд. доп. М.: Наука, 1985.

5. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math., 2002, V. 79, P. 345–352.

6. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm., 2004, V. 113, №4, P. 309–326.

7. Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th., 2015, V. 5, iss. 1-2, P. 14–20.

8. Чирский В. Г. Метод Зигеля-Шидловского в p-адической области. // Фундаментальная и прикладная математика. 2005, Т. 11, №6, С. 221–230.

9. Chirskii V. G. Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ // Russian Journ. of Math. Physics, 2013, V. 20, №2, P. 149–154.

10. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук, 2014, Т. 459, №6, С. 677–679.

11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. мат., 2014, Т. 78, №6, С. 193—210.

12. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Моск. ун-та, Сер.1, мат., мех., 2015, №1, С. 59–61.

13. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышёвский сборник, 2015, Т. 16, вып. 1, С. 254–264.

14. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат., 2017, Т. 81, №2, С. 215—232.

15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journ. of Math. Physics, 2017, V. 24, №2, P. 153–171.

16. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических f-рядов // Доклады академии наук, 2018, Т. 483, №3, С. 257—259.

17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series // Doklady Mathematics, 2018, V. 98, №3, P. 589-–591.

18. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journ. of Math. Physics, 2019, V. 26, №3, P. 286–305.

19. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journ. of Math. Physics, 2020, V. 27, №2, P. 175–184.

20. Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции; пер. с англ. В. В. Шокурова, под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1982.

21. Mahler K. Uber transzendente p-adische Zahlen // Compos. Math. 1935, V. 2, P. 259–275.

22. Mahler K. p-adic numbers and their functions; second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

23. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

REFERENCES

1. Adams W. 1966, "Transcendental numbers in the p-adic domain", *Amer. J. Math.*, vol. 88, pp. 279–307.

2. Amice Y. 1975, Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris.

3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. 2004, "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241–260.

4. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. 1985, Teoriya Chisel, [The theory of numbers], third edition. "Nauka", Moscow.

5. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2002, "On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I", *Arch. Math.*, vol. 79, pp. 345–352.

6. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2004, "On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II", *ActaArithm.*, vol. 113, no. 4, pp. 309–326.

7. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2015, “Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$”, *Moscow Journ. of Comb. and Number Th.*, vol. 5, iss. 1–2, pp. 14–20.

8. Chirskii V. G. 2005, “Siegel—Shidlovskii method in p-adic domain”, *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 6, pp. 221–230.

9. Chirskii V. G. 2013, “Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 20, no. 2, pp. 149–154.

10. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of poliadic series with periodic coefficients”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 459, no. 6, pp. 677–679.

11. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of hypergeometric series with irrational parameters”, *Izv. RAN. Ser. mat.*, vol. 78, no. 6, pp. 193—210.

12. Chirskii V. G. 2015, “On the arithmetic properties of Euler-type series”, *Vestnik Mosk. Univ. Ser.1, mat., mech.*, no. 1, pp. 59–61.

13. Chirskii V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integer numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.

14. Chirskii V. G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Izv. RAN. Ser. mat.* vol. 81, no. 2, pp. 215–232.

15. Chirskii V. G. 2017, “Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153–171.

16. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 483, no. 3, pp. 257–259.

17. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Dokladi Mathematics*, vol. 98, no. 3, pp. 589–591.

18. Chirskii V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 286–305.

19. Chirskii V. G. 2020, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric series”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 27, no. 2, pp. 175–184.

20. Koblitz N. 1982, p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, 2nd ed.

21. Mahler K. 1935, “Uber transzendente p-adische Zahlen”, *Compos. Math.*, vol. 2, pp. 259–275.

22. Mahler K. 1981, p-adic numbers and their functions, second edition, Cambridge University Press, Cambridge.

23. Shidlovskii A. B. 1987, Transcendentnie chisla, [Transcendental numbers], “Nauka”, Moscow.