ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-183-201

Матрица относительной лесной доступности ориентированного пути и ориентированного цикла

Б. Мханна

Мханна Батуль — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрены свойства матрицы относительной лесной доступности ориентированного цикла и ориентированного пути.

Во введении представлена история вопроса, дан обзор основных идей и результатов работы.

Во втором разделе собраны основные понятия теории графов, и дано "графовое" представление матрицы относительной лесной доступности орграфа Г: $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}))_{n\times n}}{f}, i, j = 1\dots n$, где f_{ij} – количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Г, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, а f – общее количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Г.

В третьем разделе рассмотрены вопросы построения и исследования матрицы относительной лесной доступности ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$. Рассмотрены примеры построения матрицы относительной лесной доступности ориентированного пути для малых значений n. Приведены иллюстрации "графовой" процедуры построения матрицы $\mathbb{F}$. Доказано, что матрица относительной лесной доступности ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}, n \geq 2$, связана с последовательностью $1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...$ степеней числа 2. Другими словами, элементы f_{ij}, формирующие матрицу, представляют собой элементы множества $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}\}$, заполняющие столбцы матрицы: первый столбец состоит из последовательно убывающих чисел $2^{n-1}, ..., 2, 1$; второй столбец, начинаясь с 0, содержит на втором месте (пересечение с главной диагональю) число 2^{n-2}, в то время как следующие элементы представляют собой последовательно убывающие числа $2^{n-3}, ..., 2, 1$; третий столбец, содержащий нули на двух позициях, расположенных над главной диагональю, содержит на третьем месте (пересечение с главной диагональю) число 2^{n-2}, в то время как следующие элементы представляют собой последовательно убывающие числа $2^{n-3}, ..., 2$, и т.д. Величина f равна 2^{n-1}.

В четвертом разделе аналогичные рассуждения проведены для матрицы относительной лесной доступности для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$.

В заключении подведены итоги работы.

Ключевые слова: матрица относительной лесной доступности, ориентированный путь, ориентированный цикл, граф, орграф, остовные сходящиеся леса, число Мерсенна.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Б. Мханна. Матрица относительной лесной доступности ориентированного пути и ориентированного цикла // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 183–201.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-183-201

Matrix of relative forest accessibility of the oriented path and the oriented cycle

B. Mhanna

Mhanna Batool — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Abstract

In this paper we consider the properties of the matrix of relative forest accessibility of the oriented cycle and the properties of the matrix of relative forest accessibility of the oriented path.

The introduction contains the history of the problem and provides an overview of the main ideas and results presented in the article.

The second section gives basic concepts of the graph theory and a "graphical" representation of the matrix of relative forest accessibility of the digraph Γ: $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}))}{f}, i, j = 1 \ldots n$, where f_{ij} is the number of spanning converging rooted forests of the digraph Γ, in which the vertices i and j belong to the same tree converging to j, and f is the total number spanning converging rooted forests of the digraph Γ.

The third section deals with the construction and research of the matrix of relative forest accessibility of the oriented path $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$. Examples of constructing the matrix of relative forest accessibility of oriented path for small values of n are considered. Illustrations of the "graphical" procedure of building the matrix $\mathbb{F}$ are given. It is proved that the matrix of relative forest accessibility for the directed path $\overrightarrow{P_n}, n \geq 2$, is related to the sequence $1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...$ of powers of 2. In other words, the elements of f_{ij} that form the matrix are elements of the set $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}\}$ filling the columns of the matrix: the first column consists of sequentially decreasing numbers $2^{n-1}, ..., 2, 1$; the second column, starting at 0, contains in the second place (the intersection with the main diagonal) the number 2^{n-2}, while the following elements are consecutively decreasing numbers 2^{n-3}, ..., 2, 1; the third column, containing zeros in two positions above the main diagonal, contains in the third place (the intersection with the main diagonal) the number 2^{n-2}, while the following elements are sequentially decreasing numbers $2^{n-3}, ..., 2$, etc. The value of f is equal to 2^{n-1}.

In the fourth section, similar considerations for matrix of relative forest accessibility of the oriented cycle $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$, are represented.

In the conclusion, the results of the work are summed up.

Keywords: the matrix of relative forest accessibility, oriented path, oriented cycle, graph, digraph, spanning converging forests, Mersenne number.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

B. Mhanna, 2021, "Matrix of relative forest accessibility of the oriented path and the oriented cycle", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 183–201.

Введение

Матрица относительной лесной доступности имеет широкий спектр приложений. Она является мерой близости вершин графов и орграфов.

Матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F} = ((F_{ij}))_{n \times n}, i, j = 1 \dots n$, для неориентированного пути $P_n, n \geq 2$, как и для неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...$ чисел Фибоначчи. (Напомним, что $\Phi_0 = 0, \Phi_1 = 1$, в то время как $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$ для $n \geq 2$.) [7]

В этой статье мы рассматриваем свойства матрицы относительной лесной доступности ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$, и свойства матрицы относительной лесной доступности ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$.

Матрица относительной лесной доступности

Основные понятия теории графов

Вспомним некоторые базовые понятия теории (ориентированных) графов. [1], [8]

Ориентированный граф (*орграф*) – граф, ребрам которого присвоено направление. Направленные ребра называются *дугами*. Граф, ни одному ребру которого не присвоено направление, называется *неориентированным*. Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связен.

Орграф называется (реберно) *взвешенным*, если каждой дуге присвоено некоторое числовое значение – *вес*. *Вес взвешенного орграфа* определяется произведением весов его дуг; вес любого орграфа, который не имеет дуг, равен 1. Вес множества орграфов – это сумма весов его членов; в случае, если веса дуг орграфов равны 1, то вес множества орграфов - это количество его членов.

Сходящееся дерево – слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для выходящей степени, а оставшиеся вершины имеют для выходящей степени значение 1. *Сходящийся лес* орграфа Γ – остовной подграф орграфа Γ, все компоненты которого являются сходящимися деревьями.

Матрица относительной лесной доступности орграфа

Пусть $\Gamma = (V, E)$ – орграф с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг $E(\Gamma) \subset \{\langle i, j \rangle | i, j \in V, i \neq j\}$. (В ориентированном случае $\overleftarrow{(i, j)} = \langle i, j \rangle$ – дуга из вершины j в вершину i.)

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}(\Gamma) = \overleftarrow{\mathcal{F}}$ – множество всех остовных сходящихся лесов орграфа Γ. Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}(\Gamma) = \overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}$ – множество всех остовных сходящихся лесов орграфа Γ, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j.

Матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F} = ((F_{ij}))_{n \times n}$ орграфа Γ имеет следующее "графовое" представление [6]:

$$\mathbb{F} = ((F_{ij}))_{n \times n} = ((f_{ij}))_{n \times n}(\Gamma)/f(\Gamma), \ i, j = 1, 2, ..., n,$$

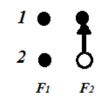
где $f_{ij}(\Gamma) = f_{ij}$ – количество всех остовных сходящихся лесов Γ, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j, а $f(\Gamma) = f$ – количество всех остовных сходящихся лесов в орграфе Γ.

Матрица относительной лесной доступности ориентированного пути

Ориентированный путь на двух вершинах

Рассмотрим ориентированный путь на двух вершинах (рис. 3.1.1), то есть ориентированный граф $\overrightarrow{P_2} = (V, E)$, где $V = \{1, 2\}$, $E = \{\overleftarrow{(1,2)}\}$ (в ориентированном случае $\overleftarrow{(i,j)} = \langle i, j\rangle$ – дуга из вершины j в вершину i). Для ориентированного пути $\overrightarrow{P_2}$ мы получим 2 остовных сходящихся лесов (рис. 3.1.1).

Орграф $\overrightarrow{P_2}$.



Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{P_2}$.

Рис. 3.1.1. Орграф $\overrightarrow{P_2}$ и остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{P_2}$.

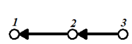
Вспоминая, что $f_{ij}(\overrightarrow{P_2})$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_2}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j, а $f(\overrightarrow{P_2})$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_2}$, получаем: $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_2}) = \{F_1, F_2\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_2}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_3}) = \{F_2\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_2}) = \{F_1\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\overrightarrow{P_2}) = 2$, $f_{12}(\overrightarrow{P_2}) = 0$, $f_{21}(\overrightarrow{P_2}) = 1$, $f_{22}(\overrightarrow{P_2}) = 2$, $f(\overrightarrow{P_2}) = 2$.

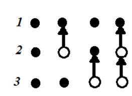
Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}(\overrightarrow{P_2})))_{2\times 2}}{f(\overrightarrow{P_2})}$, получим $\mathbb{F} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ориентированный путь на трех вершинах

Рассмотрим ориентированный путь на трех вершинах (рис. 3.2.1), то есть орграф $\overrightarrow{P_3} = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\overleftarrow{(1,2)}, \overleftarrow{(2,3)}\}$.



Орграф $\overrightarrow{P_3}$.



Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{P_3}$.

Рис. 3.2.1. Орграф $\overrightarrow{P_3}$ и остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{P_3}$.

Для ориентированного пути $\overrightarrow{P_3}$ мы получим 4 остовных сходящихся лесов (рис. 3.2.1). Вспоминая, что $f_{ij}(\overrightarrow{P_3})$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_3}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j, а $f(\overrightarrow{P_3})$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_3}$, получаем: $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_3}) = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_3}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_3}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_3}) = \{F_2, F_4\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_3}) = \{F_1, F_3\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_3}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 3}(\overrightarrow{P_3}) = \{F_4\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 3}(\overrightarrow{P_3}) = \{F_3\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 3}(\overrightarrow{P_3}) = \{F_1, F_2\}$.

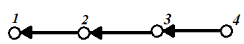
Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\overrightarrow{P_3}) = 4$, $f_{12}(\overrightarrow{P_3}) = 0$, $f_{13}(\overrightarrow{P_3}) = 0$, $f_{21}(\overrightarrow{P_3}) = 2$, $f_{22}(\overrightarrow{P_3}) = 2$, $f_{23}(\overrightarrow{P_3}) = 0$, $f_{31}(\overrightarrow{P_3}) = 1$, $f_{32}(\overrightarrow{P_3}) = 1$, $f_{33}(\overrightarrow{P_3}) = 2$, $f(\overrightarrow{P_3}) = 4$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}(\overrightarrow{P_3})))_{3\times 3}}{f(\overrightarrow{P_3})}$, получим $\mathbb{F} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

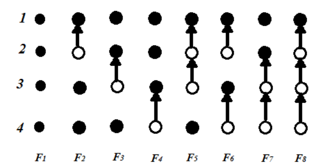
Ориентированный путь на четырех вершинах

Рассмотрим ориентированный путь на четырех вершинах (рис. 3.3.1), то есть орграф $\overrightarrow{P_4} = (V, E)$, где $V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{\overleftarrow{(1,2)}, \overleftarrow{(2,3)}, \overleftarrow{(3,4)}\}$.

Для ориентированного пути $\overrightarrow{P_4}$ мы получим 8 остовных сходящихся лесов (рис. 3.3.1).



Орграф $\overrightarrow{P_4}$.



Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{P_4}$.

Рис. 3.3.1. Орграф $\overrightarrow{P_4}$ и остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{P_4}$.

Вспоминая, что $f_{ij}(\overrightarrow{P_4})$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_4}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, а $f(\overrightarrow{P_4})$ – количество всех остовных сходящихся лесов пути $\overrightarrow{P_4}$, получаем: $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_4}) = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_4}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_4}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 1}(\overrightarrow{P_4}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_4}) = \{F_2, F_5, F_6, F_8\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_4}) = \{F_1, F_3, F_4, F_7\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_4}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 2}(\overrightarrow{P_4}) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 3}(\overrightarrow{P_4}) = \{F_5, F_8\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 3}(\overrightarrow{P_4}) = \{F_3, F_7\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 3}(\overrightarrow{P_4}) = \{F_1, F_2, F_4, F_6\}$.

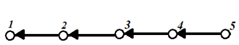
Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\overrightarrow{P_4}) = 8$, $f_{12}(\overrightarrow{P_4}) = 0$, $f_{13}(\overrightarrow{P_4}) = 0$, $f_{14}(\overrightarrow{P_4}) = 0$, $f_{21}(\overrightarrow{P_4}) = 4$, $f_{22}(\overrightarrow{P_4}) = 4$, $f_{23}(\overrightarrow{P_4}) = 0$, $f_{24}(\overrightarrow{P_4}) = 0$, $f_{31}(\overrightarrow{P_4}) = 2$, $f_{32}(\overrightarrow{P_4}) = 2$, $f_{33}(\overrightarrow{P_4}) = 4$, $f_{34}(\overrightarrow{P_4}) = 0$, $f_{41}(\overrightarrow{P_4}) = 1$, $f_{42}(\overrightarrow{P_4}) = 1$, $f_{43}(\overrightarrow{P_4}) = 2$, $f_{44}(\overrightarrow{P_4}) = 4$, $f = 8$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}(\overrightarrow{P_4})))_{4\times 4}}{f(\overrightarrow{P_4})}$, получим $\mathbb{F} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

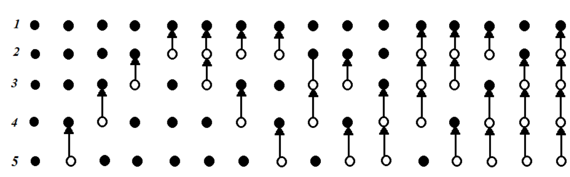
Ориентированный путь на пяти вершинах

Рассмотрим ориентированный путь на пяти вершинах (рис. 3.4.1), то есть орграф $\overrightarrow{P_5} = (V, E)$, где $V = \{1,2,3,4,5\}$, $E = \{\overleftarrow{(1,2)}, \overleftarrow{(2,3)}, \overleftarrow{(3,4)}, \overleftarrow{(4,5)}\}$.

Для ориентированного пути $\overrightarrow{P_5}$ мы получим 16 остовных сходящихся лесов (рис. 3.4.1).



Орграф $\overrightarrow{P_5}$.



Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{P_5}$.

Рис. 3.4.1. Орграф $\overrightarrow{P_5}$ и остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{P_5}$.

Вспоминая, что $f_{ij}(\overrightarrow{P_5})$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_5}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, а $f(\overrightarrow{P_5})$ – количество всех остовных сходящихся лесов пути $\overrightarrow{P_5}$, получаем: $f_{11}(\overrightarrow{P_5}) = 16$, $f_{12}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{13}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{14}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{15}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{21}(\overrightarrow{P_5}) = 8$, $f_{22}(\overrightarrow{P_5}) = 8$, $f_{23}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{24}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{25}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{31}(\overrightarrow{P_5}) = 4$, $f_{32}(\overrightarrow{P_5}) = 4$, $f_{33}(\overrightarrow{P_5}) = 4$, $f_{34}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{35}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{41}(\overrightarrow{P_5}) = 2$, $f_{42}(\overrightarrow{P_5}) = 2$, $f_{43}(\overrightarrow{P_5}) = 4$, $f_{44}(\overrightarrow{P_5}) = 8$, $f_{45}(\overrightarrow{P_5}) = 0$, $f_{51}(\overrightarrow{P_5}) = 1$, $f_{52}(\overrightarrow{P_5}) = 1$, $f_{53}(\overrightarrow{P_5}) = 2$, $f_{54}(\overrightarrow{P_5}) = 4$, $f_{55}(\overrightarrow{P_5}) = 8$, $f = 16$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}(\overrightarrow{P_5})))_{5\times 5}}{f(\overrightarrow{P_5})}$, получим $\mathbb{F} = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Мы обсудим в следующем пункте обобщенный закон для построения матрицы относительной лесной доступности ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}, n \geq 2$.

Ориентированный путь на n вершинах, $n \geq 2$

Анализируя результаты, полученные выше для ориентированных путей $\overrightarrow{P_n}, n = 2, 3, 4, 5$, мы можем утверждать, что для указанных n матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ имеет вид

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^{n-3} & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 0 & \dots & 0 \\ 2^{n-4} & 2^{n-4} & 2^{n-3} & 2^{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2^1 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что аналогичные результаты могут быть получены для любого ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$ (рис. 3.5.1). Именно, имеет место следующая теорема.

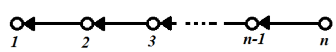


Рис. 3.5.1. Ориентированный путь $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$.

Теорема 1. Пусть $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$ – ориентированный путь на n вершинах: $\overrightarrow{P_n} = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{\overleftarrow{(1,2)}, \overleftarrow{(2,3)}, \dots, \overleftarrow{(n-1,n)}\}$. Пусть $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}))_{n\times n}}{f}, i, j = 1, 2, ..., n$ – матрица относительной лесной доступности ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$f = 2^{n-1}\ , \quad f_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1, \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n, \end{cases} \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1, \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n, \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}(\overrightarrow{P_n}) = \overleftarrow{\mathcal{F}}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$. Пусть $f(\overrightarrow{P_n}) = f^n$ – количество $|\overleftarrow{\mathcal{F}}(\overrightarrow{P_n})|$ всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$.

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j\leftarrow i}(\overrightarrow{P_n}) = \overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{j\leftarrow i}$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j. Пусть $f_{ij}(\overrightarrow{P_n}) = f^n_{ij}$ – количество $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j\leftarrow i}(\overrightarrow{P_n})|$ всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j.

Пусть $\overleftarrow{(i,j)} = \langle i,j\rangle$ – дуга из вершины j в вершину i. Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overleftarrow{(i,j)}}$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}, n \geq 2$, содержащих дугу $\overleftarrow{(i,j)}$. Пусть $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overleftarrow{(i,j)}}|$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}, n \geq 2$, содержащих дугу $\overleftarrow{(i,j)}$. Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(i,j)}}}$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}, n \geq 2$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(i,j)}$. Пусть $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(i,j)}}}|$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}, n \geq 2$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(i,j)}$.

A. Докажем, что $f^n = 2^{n-1}$.

I. Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}, k \geq 1$, может быть получено как сумма всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}, k \geq 1$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$ и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}, k \geq 1$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}, k \geq 1$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^{k+1}_{\overleftarrow{(1,2)}}|$, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}, k \geq 1$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^{k+1}_{\overline{\overleftarrow{(1,2)}}}|$, то для любого $k \geq 1$,

$$f^{k+1} = |\overleftarrow{\mathcal{F}}^{k+1}_{\overline{\overleftarrow{(1,2)}}}| + |\overleftarrow{\mathcal{F}}^{k+1}_{\overleftarrow{(1,2)}}|. \tag{1}$$

II. Покажем, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}, k \geq 1$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}, k \geq 1$.

Действительно, биекция между множествами всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$ и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}$, устанавливается путем склеивания корня **2** с корнем **1**. Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^{k+1}_{\overline{\overleftarrow{(1,2)}}}|$, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}$, равно f^k, то для любого $k \geq 1$,

$$|\overleftarrow{\mathcal{F}}^{k+1}_{\overline{\overleftarrow{(1,2)}}}| = f^k. \tag{2}$$

III. Покажем, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}, k \geq 1$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}, k \geq 1$.

Действительно, биекция между множествами всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$ и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}$, устанавливается путем удаления дуги $\overleftarrow{(1,2)}$ и склеивания корня $\mathbf{k+1}$ с вершиной

k, в случае, если не существует дуга $\overleftarrow{(k,k+1)}$. А в случае если существует дуга $\overleftarrow{(k,k+1)}$ - сохраним дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, удалим дугу $\overleftarrow{(k,k+1)}$ и склеим вершины $k+1$ и k.

Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1,2)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^{k+1}_{\overleftarrow{(1,2)}}|$, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}$, равно f^k, то для любого $k \geq 1$,

$$|\overleftarrow{\mathcal{F}}^{k+1}_{\overleftarrow{(1,2)}}| = f^k. \tag{3}$$

IV. Докажем, что $f^n = 2^{n-1}$.

Из отношений (1), (2) и (3), получим что $f^{k+1} = f^k + f^k = 2f^k, k = 1, 2, \ldots$.

Замечая, что $f^1 = 1$, получим что $f^2 = 2f^1 = 2^{2-1}$, $f^3 = 2f^2 = 2^{3-1}$, $f^4 = 2f^3 = 2^{4-1}$, $\ldots$, $f^n = 2f^{n-1} = 2^{n-1}$.

Таким образом, мы доказали что $f^n = 2^{n-1}$.

B. Докажем, что $f^n_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1; \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$

I. Докажем, что $f^n_{11} = 2^{n-1}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина 1 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 1, может быть получено как сумма всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина 1 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 1, равно f^n_{11}, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, равно f^n, то $f^n_{11} = f^n = 2^{n-1}$.

II. Докажем, что $f^n_{ii} = 2^{n-2}$, $i = 2, 3..., n$.

Действительно, биекция между множествами всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{n-1}}$ устанавливается путем склеивания корня **i** с вершиной $i-1$.

Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i, может быть получено как сумма всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{n-1}}$.

Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i, равно f^n_{ii}, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, равно f^{n-1}, то $f^n_{ii} = f^{n-1} = 2^{(n-1)-1} = 2^{n-2}$.

C. Докажем, что $f^n_{ij} = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1; \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n; \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$

I. Докажем, что $f^n_{ij} = 0, 1 \leq i < j \leq n$.

Для ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$, остовные сходящиеся леса, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, $1 \leq i < j \leq n$, не существуют. Следовательно, $f^n_{ij} = 0, 1 \leq i < j \leq n$.

II. Докажем, что $f^n_{i1} = 2^{n-i}, i = 2, 3, ..., n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, равно f^n, то $f_{21}^n = \dfrac{f^n}{2} = \dfrac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно f_{21}^n, то $f_{31}^n = \dfrac{f_{21}^n}{2} = 2^{n-3}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и 4 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно f_{31}^n, то $f_{41}^n = \dfrac{f_{31}^n}{2} = 2^{n-4}$.

Завершая рассуждения, заметим, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и n принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно $f_{n-1,1}^n$, то $f_{n1}^n = \dfrac{f_{n-1,1}^n}{2} = \dfrac{2^{n-(n-1)}}{2} = 1 = 2^{n-n}$.

Таким образом, мы доказали что $f_{i1}^n = 2^{n-i}, i = 2, 3, ..., n$.

III. Докажем, что $f_{ij}^n = 2^{n-i+j-2}, 2 \le j < i \le n$.

a. Докажем, что $f_{i2}^n = \dfrac{f_{22}^n}{2^{i-2}}, i = 3, 4, ..., n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 3 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина 2 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 2. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина 2 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 2, равно f_{22}^n, то $f_{32}^n = \dfrac{f_{22}^n}{2} = \dfrac{f_{22}^n}{2^{3-2}}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 4 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 3 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 3 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, равно f_{32}^n, то $f_{42}^n = \dfrac{f_{32}^n}{2} = \dfrac{f_{22}^n}{4} = \dfrac{f_{22}^n}{2^{4-2}}$.

Завершая рассуждения, заметим, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 2 и n принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 2 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2. Поскольку число всех остовных всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 2 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, равно $f_{n-1,2}^n$, то $f_{n2}^n = \dfrac{f_{n-1,2}^n}{2} = \dfrac{f_{22}^n}{2^{n-2}}$.

b. Докажем, что $f_{i3}^n = \dfrac{f_{33}^n}{2^{i-3}}, i = 4, 5, ..., n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 4 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина 3 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 3. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина 3 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 3, равно f_{33}^n, то $f_{43}^n = \dfrac{f_{33}^n}{2} = \dfrac{f_{33}^n}{2^{4-3}}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 5 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 4 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 4 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, равно f_{43}^n, то $f_{53}^n = \dfrac{f_{43}^n}{2} = \dfrac{f_{33}^n}{4} = \dfrac{f_{33}^n}{2^{5-3}}$.

Завершая рассуждения, заметим, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 3 и n принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 3 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3. Поскольку число всех остовных всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 3 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, равно $f_{n-1,3}^n$, то $f_{n3}^n = \dfrac{f_{n-1,3}^n}{2} = \dfrac{f_{33}^n}{2^{n-3}}$.

c. Докажем, что $f_{i,n-1}^n = \dfrac{f_{n-1,n-1}^n}{2^{i-(n-1)}}, i = n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины n и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к $n-1$, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина $n-1$ принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же $n-1$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина $n-1$ принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же $n-1$, равно $f_{n-1,n-1}^n$, то $f_{n,n-1}^n = \dfrac{f_{n-1,n-1}^n}{2} = \dfrac{f_{n-1,n-1}^n}{2^{n-(n-1)}}$.

d. Докажем, что $f_{ij}^n = 2^{n-i+j-2}, 2 \leq j < i \leq n$.

Для любых $2 \leq j < i \leq n$, $f_{ij}^n = \dfrac{f_{jj}^n}{2^{i-j}} = \dfrac{2^{n-2}}{2^{i-j}} = 2^{n-i+j-2}$. □

Очевидно, что матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$, не симметрична и является стохастической по строкам, т.е. $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$, для любого $i = 1, \ldots, n$.

Напомним, что матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ графа G на n вершинах определяется по закону $\dfrac{((f_{ij}))_{n\times n}}{f}$, где f_{ij} - количество остовных (неориентированных) корневых лесов графа G, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем i, а f – общее количество остовных корневых лесов графа G. [2], [10]

П.Ю. Чеботарев доказал ([7]), что матрица относительной лесной доступности для неориентированного пути $P_n, n \geq 2$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...$ чисел Фибоначчи.

Именно, в [7] было доказано, что для матрицы относительной лесной доступности

$\frac{((f_{ij}))_{n\times n}}{f}$ неориентированного пути $P_n, n \geq 2$, имеют место следующие соотношения: $f = \Phi_{2n}$, в то время как $f_{ij} = \Phi_{2\min(i,j)-1} \cdot \Phi_{2(n+1-\max(i,j))-1}$, $i,j = 1,...,n$.

Матрица относительной лесной доступности ориентированного цикла

Ориентированный цикл на трех вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на трех вершинах (рис. 4.1.1), то есть орграф $\overrightarrow{C_3} = (V,E)$, где $V = \{1,2,3\}$, $E = \{\overleftarrow{(1,2)}, \overleftarrow{(3,1)}, \overleftarrow{(2,3)}\}$.

Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_3}$ мы получим 7 остовных сходящихся лесов (рис. 4.1.2).

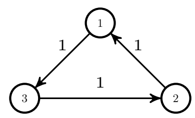


Рис. 4.1.1. Орграф $\overrightarrow{C_3}$.

Вспоминая, что $f_{ij}(\overrightarrow{C_3})$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_3}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j, а $f(\overrightarrow{C_3})$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_3}$, получаем:

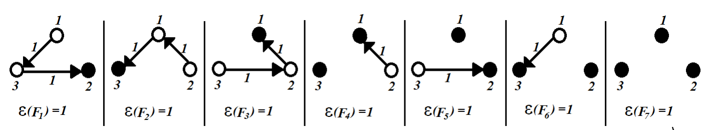


Рис. 4.1.2. Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{C_3}$.

$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_3,F_7,F_4,F_5\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_1\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_2,F_6\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_3,F_4\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_1,F_7,F_5,F_6\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_2\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_3\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_1,F_5\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_3}) = \{F_2,F_7,F_4,F_6\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\overrightarrow{C_3}) = 4$, $f_{12}(\overrightarrow{C_3}) = 1$, $f_{13}(\overrightarrow{C_3}) = 2$, $f_{21}(\overrightarrow{C_3}) = 2$, $f_{22}(\overrightarrow{C_3}) = 4$, $f_{23}(\overrightarrow{C_3}) = 1$, $f_{31}(\overrightarrow{C_3}) = 1$, $f_{32}(\overrightarrow{C_3}) = 2$, $f_{33}(\overrightarrow{C_3}) = 4$, $f(\overrightarrow{C_3}) = 7$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}(\overrightarrow{C_3})))_{3\times 3}}{f(\overrightarrow{C_3})}$, получим $\mathbb{F} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Ориентированный цикл на четырех вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на четырех вершинах (рис. 4.2.1), то есть орграф $\overrightarrow{C_4} = (V,E)$, где $V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{\overleftarrow{(1,2)}, \overleftarrow{(4,1)}, \overleftarrow{(3,4)}, \overleftarrow{(2,3)}\}$. Для этого цикла получим 15 остовных сходящихся лесов (рис. 4.2.2).

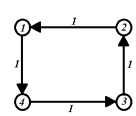


Рис. 4.2.1. Орграф $\overrightarrow{C_4}$.

Вспоминая, что $f_{ij}(\overrightarrow{C_4})$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_4}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву , сходящемуся к j, а $f(\overrightarrow{C_4})$ - количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_4}$, получаем:

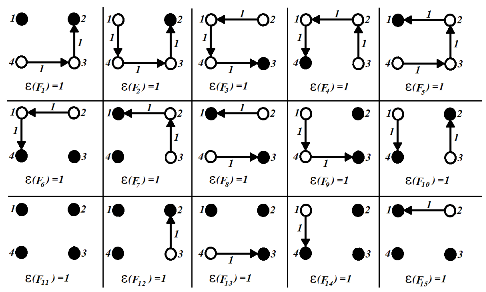


Рис. 4.2.2. Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{C_4}$.

$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_1, F_2, F_7, F_8, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{15}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_2\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_3, F_9\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_4, F_6, F_{10}, F_{14}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_2, F_7, F_8, F_{15}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_3\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_1, F_2, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_4, F_6\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_2, F_7\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_1, F_2, F_{10}, F_{12}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_2\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_3, F_6, F_8, F_9, F_{11}, F_{13}, F_{14}, F_{15}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_4\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_1, F_2\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_3, F_8, F_9, F_{13}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_4}) = \{F_4, F_6, F_7, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{14}, F_{15}\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\overrightarrow{C_4}) = 8$, $f_{12}(\overrightarrow{C_4}) = 1$, $f_{13}(\overrightarrow{C_4}) = 2$, $f_{14}(\overrightarrow{C_4}) = 4$, $f_{21}(\overrightarrow{C_4}) = 4$, $f_{22}(\overrightarrow{C_4}) = 8$, $f_{23}(\overrightarrow{C_4}) = 1$, $f_{24}(\overrightarrow{C_4}) = 2$, $f_{31}(\overrightarrow{C_4}) = 2$, $f_{32}(\overrightarrow{C_4}) = 4$, $f_{33}(\overrightarrow{C_4}) = 8$, $f_{34}(\overrightarrow{C_4}) = 1$, $f_{41}(\overrightarrow{C_4}) = 1$, $f_{42}(\overrightarrow{C_4}) = 2$, $f_{43}(\overrightarrow{C_4}) = 4$, $f_{44}(\overrightarrow{C_4}) = 8$, $f(\overrightarrow{C_4}) = 15$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}(\overrightarrow{C_4})))_{4\times 4}}{f(\overrightarrow{C_4})}$, получим $\mathbb{F} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Ориентированный цикл на пяти вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на пяти вершинах (рис. 4.3.1), то есть орграф $\overrightarrow{C_5} = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\overleftarrow{(5,1)}, \overleftarrow{(4,5)}, \overleftarrow{(3,4)}, \overleftarrow{(2,3)}, \overleftarrow{(1,2)}\}$. Для этого цикла получим 31 остовной сходящийся лес (рис. 4.3.2).

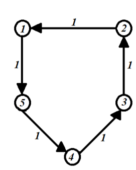


Рис. 4.3.1. Орграф $\overrightarrow{C_5}$.

Вспоминая, что $f_{ij}(\overrightarrow{C_5})$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_5}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву , сходящемуся к j, а $f(\overrightarrow{C_5})$ - количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_5}$, получаем:
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_1, F_2, F_7, F_8, F_9, F_{13}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{29}, F_{31}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_6\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_5, F_{10}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_4, F_{11}, F_{14}, F_{26}\}$,

$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{5\longleftarrow 1}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_3, F_{12}, F_{15}, F_{16}, F_{20}, F_{27}, F_{28}, F_{30}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{5\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_{23}, F_{27}, F_{28}, F_{30}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_2, F_4, F_{22}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{29}, F_{31}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_5\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_4, F_{26}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_1, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{20}\}$,

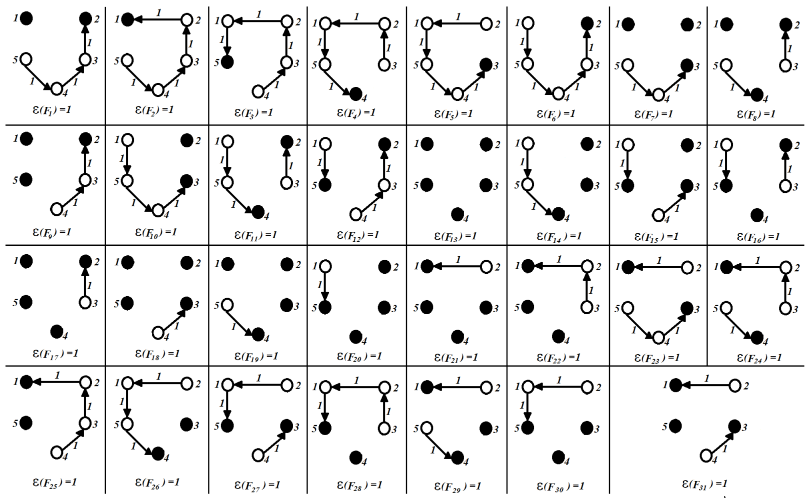


Рис. 4.3.2. Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{C_5}$.

$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_2, F_{22}, F_{24}, F_{25}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_1, F_6, F_8, F_9, F_{11}, F_{12}, F_{16}, F_{17}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_5})) = \{F_5, F_7, F_{10}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{18}, F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{23}, F_{26}, F_{27}, F_{29}, F_{30}, F_{31}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_4\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{5\longleftarrow 3}(\overrightarrow{C_5})) = \{F_3, F_{28}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_2, F_{25}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{5\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_3\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_4, F_8, F_{11}, F_{14}, F_{19}, F_{24}, F_{26}, F_{29}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_1, F_6, F_9, F_{12}\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_5, F_7, F_{10}, F_{15}, F_{18}, F_{23}, F_{27}, F_{31}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4\longleftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_4, F_8, F_{11}, F_{13}, F_{14}, F_{16}, F_{17}, F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{24}, F_{26}, F_{28}, F_{29}, F_{30}, F_{22}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1\longleftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_2\}$. $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2\longleftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_1, F_6\}$. $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3\longleftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_5, F_7, F_{10}, F_{23}\}$,
$\overleftarrow{\mathcal{F}}_{5\longleftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_3, F_9, F_{12}, F_{13}, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}, F_{20}, F_{21}, F_{22}, F_{25}, F_{27}, F_{28}, F_{30}, F_{31}\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11} = 16$, $f_{12} = 1$, $f_{13} = 2$, $f_{14} = 4$, $f_{15} = 8$, $f_{21} = 8$, $f_{22} = 16$, $f_{23} = 1$, $f_{24} = 2$, $f_{25} = 4$, $f_{31} = 4$, $f_{32} = 8$, $f_{33} = 16$, $f_{34} = 1$, $f_{35} = 2$, $f_{41} = 2$, $f_{42} = 4$, $f_{43} = 8$, $f_{44} = 16$, $f_{45} = 1$, $f_{51} = 1$, $f_{52} = 2$, $f_{53} = 4$, $f_{54} = 8$, $f_{55} = 16$, $f = 31$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}(\overrightarrow{C_5})))_{5\times 5}}{f(\overrightarrow{C_5})}$, получим $\mathbb{F} = \dfrac{1}{31}\begin{bmatrix} 16 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 16 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 16 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$.

Мы обсудим в следующем пункте обобщенный закон для построения матрицы относительной лесной доступности ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}, n \geq 3$.

Ориентированный цикл на n вершинах, $n \geq 3$

Анализируя результаты, полученные выше для ориентированных циклов $\overrightarrow{C_n}, n = 3, 4, 5$, мы можем утверждать, что для указанных n матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ имеет вид

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2^n - 1}\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 2^{n-1} & 1 & 2 & \dots & 2^{n-3} \\ 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1} & 1 & \dots & 2^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что аналогичные результаты могут быть получены для любого ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$ (рис. 4.4.1). Именно, имеет место следующая теорема.

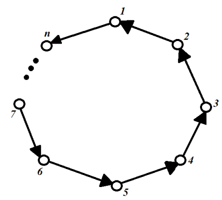


Рис. 4.4.1. Ориентированный цикл $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$.

Теорема 2. Пусть $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$ – ориентированный цикл на n вершинах: $\overrightarrow{C_n} = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{\overleftarrow{(1,2)}, \overleftarrow{(2,3)}, \ldots, \overleftarrow{(n,1)}\}$. Пусть $\mathbb{F} = \dfrac{((f_{ij}))_{n\times n}}{f}, i, j = 1, 2, ..., n$ – матрица относительной лесной доступности ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$f = 2^n - 1,\ f_{ii} = 2^{n-1},\ 1 \leq i \leq n,\ \ f_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n+i-j}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}(\overrightarrow{C_n}) = \overleftarrow{\mathcal{F}}^n$ - множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$. Пусть $f(\overrightarrow{C_n}) = f^n$ – количество $|\overleftarrow{\mathcal{F}}(\overrightarrow{C_n})|$ всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$.

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j\leftarrow i}(\overrightarrow{C_n}) = \overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{j\leftarrow i}$ - множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j. Пусть $f_{ij}(\overrightarrow{C_n}) = f^n_{ij}$ – количество $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j\leftarrow i}(\overrightarrow{C_n})|$ всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j.

Пусть $\overleftarrow{(i,j)} = \langle i, j\rangle$ – дуга из вершины j в вершину i. Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overleftarrow{(i,j)}}$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}, n \geq 3$, содержащих дугу $\overleftarrow{(i,j)}$. Пусть $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overleftarrow{(i,j)}}|$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}, n \geq 3$, содержащих дугу $\overleftarrow{(i,j)}$. Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(i,j)}}}$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}, n \geq 3$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(i,j)}$. Пусть $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(i,j)}}}|$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}, n \geq 3$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(i,j)}$.

А. Докажем, что $f^n = 2^n - 1$.

I. Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}, n \geq 3$, может быть получено как сумма всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$ и всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overleftarrow{(n,1)}}|$, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(n,1)}}}|$, то для любого $n \geq 3$,

$$f^n = |\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(n,1)}}}| + |\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overleftarrow{(n,1)}}|. \tag{4}$$

II. Покажем, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$, равно 2^{n-1}.

Действительно, каждый остовной сходящийся лес ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, который не содержит дугу $\overleftarrow{(n,1)}$, является остовным сходящимся лесом ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$. Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, т.е. $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(n,1)}}}| = f(\overrightarrow{P_n})$.

Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, равно 2^{n-1}, из теоремы 1, то $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(n,1)}}}| = f(\overrightarrow{P_n}) = 2^{n-1}$.

Таким образом,

$$|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overline{\overleftarrow{(n,1)}}}| = 2^{n-1}. \tag{5}$$

III. Покажем, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$, равно $2^{n-1}-1$.

Действительно, для любого леса F из множества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$, удаление дуги $\overleftarrow{(n,1)}$ и обозначение вершины 1 в качестве корня дает остовной сходящийся лес ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$.

Так могут быть получены все остовные сходящиеся леса ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, кроме всего ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$ с корнем **1**.

Таким образом, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n,1)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n} - 1$.

Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, равно 2^{n-1}, из теоремы 1, то $|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overleftarrow{(n,1)}}| = f(\overrightarrow{P_n}) - 1 = 2^{n-1} - 1$.

Таким образом,

$$|\overleftarrow{\mathcal{F}}^n_{\overleftarrow{(n,1)}}| = 2^{n-1} - 1. \tag{6}$$

IIII. Докажем, что $f^n = 2^n - 1$.

Из отношениий (4), (5) и (6), получим что, $f^n = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$.

B. Докажем, что $f^n_{ii} = 2^{n-1}, 1 \le i \le n$.

Действительно, биекция между множествами всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$ устанавливается путем удаления дуги $\overleftarrow{(n,1)}$, склеивания корня **i** с вершиной $i-1$ при удалении дуги, направленной от i к $i-1$, в случае, если существует дуга от вершины 1 к вершине n. В случае, если не существует дуга от вершины 1 к вершине n в остовном сходящемся лесе, в котором вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i, то это лес рассматривается как остовной сходящийся лес ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$.

Таким образом, могут быть получены все остовные сходящиеся леса ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$.

Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$.

Таким образом, $f^n_{ii} = f(\overrightarrow{P_n}) = 2^{n-1}$.

C. Докажем, что $f_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1}, & \text{если } 1 \le i < j \le n, \\ 2^{n+i-j}, & \text{если } 1 \le j < i \le n. \end{cases}$.

I. Докажем, что $f_{i1}^n = 2^{n-i}, i = 2, 3, ..., n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершина 1 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 1. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершина 1 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 1, равно f_{11}^n, то $f_{21}^n = \dfrac{f_{11}^n}{2} = \dfrac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно f_{21}^n, то $f_{31}^n = \dfrac{f_{21}^n}{2} = \dfrac{2^{n-2}}{2} = 2^{n-3}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и 4 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно f_{31}^n, то $f_{41}^n = \dfrac{f_{31}^n}{2} = \dfrac{2^{n-3}}{2} = 2^{n-4}$.

Завершая рассуждения, заметим, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и n принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, в которых вершины 1 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно $f_{n-1,1}^n$, то $f_{n1}^n = \dfrac{f_{n-1,1}^n}{2} = 2^{n-(n-1)} = 1 = 2^{n-n}$.

II. Докажем, что $f_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n+i-j}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$.

Данный результат следует из **I** с учетом изоморфности орграфа $\overrightarrow{C_n}$ и орграфа, полученного из $\overrightarrow{C_n}$ циклическим сдвигом всех вершин на единицу влево(вправо). Указанная изоморфность обеспечивает равенство $f_{ij} = f_{i+1,j+1}$; где нумерация индексов осуществляется по модулю n. Поскольку, по **I**, $f_{21} = 2^{n-2}$, то $f_{32} = f_{43} = ... = f_{n,n-1} = f_{1,n} = 2^{n-2}$; поскольку $f_{31} = 2^{n-3}$, то $f_{42} = f_{53} = ... = f_{n,n-2} = f_{1,n-1} = f_{2,n} = 2^{n-3}$; ... ; поскольку $f_{n1} = 1$, то $f_{12} = f_{23} = ... = f_{n-1,n} = 1$. □

Очевидно, что матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 2$, не симметрична и является дважды стохастической, т.е. $\sum_{i=1}^n F_{ij} = 1$, для любого $j = 1, \ldots, n$ и $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$, для любого $i = 1, \ldots, n$.

Напомним, что П.Ю. Чеботарев доказал ([7]), что матрица относительной лесной доступности для неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, связана с последовательностью Φ_0, Φ_1, $\Phi_2, ..., \Phi_n, ...$ чисел Фибоначчи.

Именно, в [7] было доказано, что для матрицы относительной лесной доступности $\dfrac{((f_{ij}))_{n\times n}}{f}$ неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, имеют место следующие соотношения: $f = \Phi_{2n-1} + \Phi_{2(n+1)-1} - 2$, в то время как $f_{ij} = \Phi_{2(|j-i|)} + \Phi_{2(n-|j-i|)}$.

Заключение

В статье представлен обзор теоретических оснований проблематики, подробно рассмотрен и проиллюстрирован на примерах "графовый" алгоритм построения матрицы относительной лесной доступности; получены общие результаты, связанные с матрицей относительной лесной доступности на ориентированных циклах и путях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметрик // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.
2. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов. – М.: LAP LAMBERT Academic publishing, 2011.
3. Basin S.L. The appearance of Fibonacci numbers and the Q matrix in electrical network theory // Math. Magazine. 1963. Vol. 36. P. 84 – 97.
4. Boesch F. T., Prodinger H. Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials // Graphs Combin. 1986. Vol. 2. P. 191 – 200.
5. Chaiken S. A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1982. Vol. 3. P. 319 – 329.
6. Chebotarev P. Y., Shamis E. V. The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups // Automat. Remote Control. 1997. Vol. 58. P. 1505 – 1514.
7. Chebotarev P. Spanning forests and the golden ratio // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156. P. 813 – 821.
8. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2020. Vol. 14. P. 291 – 307.
9. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications. 2002. Vol. 356. P. 253 – 274.
10. Chebotarev P.Y., Shamis E.V. On proximity measures for graph vertices // Automation and Remote Control. 1998. Vol. 59. P. 1443 – 1459.
11. Hilton A. J. W. Spanning trees and Fibonacci and Lucas numbers // Fibonacci Quart. 1974. Vol. 12. P. 259 – 262.
12. Koshy T. Fibonacci and Lucas Numbers // Wiley-Interscience. New York. 2001.
13. Merris R. Doubly stochastic graph matrices // Publikacije Elektrotehnickog Fakulteta Univerzitet U Beogradu. Serija. Matematika. 1997. Vol. 8. P. 64 – 71.
14. Merris R. Doubly stochastic graph matrices II // Linear and Multilinear Algebra. 1998. Vol. 45. P. 275 – 285.
15. Mowery V. O. Fibonacci numbers and Tchebycheff polynomials in ladder networks // IRE Trans. Circuit Theory. 1961. Vol. 8. P. 167 – 168.
16. Myers B. R. Number of spanning trees in a wheel // IEEE Trans. Circuit Theory. 1971. Vol. 18. P. 280 – 282.

17. Zhang X. D. A note on doubly stochastic graph matrices // Linear Algebra Appl. 2005. Vol. 407. P. 196 – 200.

18. Zhang X. D., Wu J. X. Doubly stochastic matrices of trees // Appl. Math. Lett. 2005. Vol. 18. P. 339 – 343.

19. Zhang Y., Yong X., Golin M.J. Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs // Discrete Math. 2005. Vol. 298. P. 334 – 364.

REFERENCES

1. Deza, E., Mhanna, B. "On special properties of some special quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 21 (1), P. 145 – 164.

2. Chebotarev, P., Agaev, R. 2011, "Matrix forest theorem and Laplacian matrices of orgraphs", *M.: LAP LAMBERT Academic publishing.*

3. Basin, S.L. 1963, "The appearance of Fibonacci numbers and the Q matrix in electrical network theory", *Math. Magazine*, vol. 36, P. 84 – 97.

4. Boesch, F. T., Prodinger, H. 1986, "Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials", *Graphs Combin*, vol. 2, P. 191 – 200.

5. Chaiken, S. 1982, "A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem", *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, vol. 3, P. 319 – 329.

6. Chebotarev, P. Y., Shamis, E. V. 1997, "The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups", *Automat. Remote Control*, vol. 58, P. 1505 -– 1514.

7. Chebotarev, P. 2008, "Spanning forests and the golden ratio", *Discrete Applied Mathematics*, vol. 156, P. 813 – 821.

8. Chebotarev, P., Deza, E. 2020, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, Vol. 14, P. 291 – 307.

9. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 356, P. 253 – 274.

10. Chebotarev, P. Y., Shamis E. V. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, Vol. 59, P. 1443 – 1459.

11. Hilton, A. J. W. 1974, "Spanning trees and Fibonacci and Lucas numbers", *Fibonacci Quart*, vol. 12, P. 259 -– 262.

12. Koshy, T. 2001, "Fibonacci and Lucas Numbers", *Wiley-Interscience. New York.*

13. Merris, R. 1997, "Doubly stochastic graph matrices", *Publikacije Elektrotehnickog Fakulteta Univerzitet U Beogradu. Serija. Matematika*, vol. 8, P. 64 – 71.

14. Merris, R. 1998, "Doubly stochastic graph matrices II", *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 45, P. 275 -– 285.

15. Mowery, V. O. 1961, "Fibonacci numbers and Tchebycheff polynomials in ladder networks", *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. 8, P. 167 – 168.

16. Myers, B. R. 1971, "Number of spanning trees in a wheel", *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. 18, P. 280 – 282.

17. Zhang, X. D. 2005, "A note on doubly stochastic graph matrices", *Linear Algebra Appl*, vol. 407, P. 196 – 200.

18. Zhang, X. D., Wu, J. X. 2005, "Doubly stochastic matrices of trees", *Appl. Math. Lett*, vol. 18, P. 339 – 343.

19. Zhang, Y., Yong, X. Golin, M. J. 2005, "Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs", *Discrete Math*, vol. 298, P. 334 – 364.