

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 514.172.4+514.177.2

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-160-182

Завершение доказательства теоремы Брунна
элементарными средствами

Ф. М. Малышев

Малышев Фёдор Михайлович — Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
(г. Москва).e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Аннотация

Брунн в 1887 году сформулировал теорему о трёх параллельных сечениях выпуклого тела с одинаковыми по площади крайними сечениями, но не получающимися друг из друга параллельным сдвигом, утверждающую, что площадь среднего сечения строго больше, а корректно доказал, как заметил Минковский, что только не меньше. Исключение равенства, считавшегося до сих пор наиболее трудным в теореме, доказывается вплоть до настоящего времени многими авторами, привлекая серьёзную математику. В статье предлагается принципиально иной геометрический подход к доказательству теоремы, благодаря чему для корректного завершения исходного доказательства Брунна можно ограничиться элементарными средствами, доступными школьникам, минуя трудности с равенством, причём предлагаемые рассуждения распространяются на все размерности, как и сама теорема, на что указывал Брунн. Пусть, в общем случае, $V_n(Q)$ — n -мерный объём тела $Q \subset \mathbb{R}^n$, L_0, L_1 — параллельные гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащие соответственно выпуклые тела P_0, P_1 , а L — параллельная им гиперплоскость, находящаяся строго между ними, и P — пересечение L с выпуклой оболочкой объединения $P_0 \cup P_1$. Теорема Брунна утверждает, что если P_1 не получается из P_0 параллельным переносом и $V_n(P_1) = V_n(P_0) = v > 0$, то $V_n(P) > v$. В 1887 году Брунн строго доказал, что $V_n(P) \geq v$, используя эффективный приём *одновременного одинакового деления* объёмов P_0, P_1 гиперплоскостью в $\mathbb{R}^{n+1}$. В предлагаемой статье это называется *рассечением Брунна*. Для строго неравенства $V_n(P) > v$ оставалось небольшим "шевелением" перейти от тела P_1 к другому выпуклому телу $\tilde{P}_1$, $V_n(\tilde{P}_1) = v$, так, что $V_n(P) > V_n(\tilde{P})$, где $\tilde{P}$ — новое сечение в гиперплоскости L , возникающее после замены P_1 на $\tilde{P}_1$. Поскольку $V_n(\tilde{P}) \geq v$, то $V_n(P) > v$. Проще всего такая замена P_1 на $\tilde{P}_1$ осуществляется в случае выпуклых многогранников P_0 , которыми можно приближать выпуклые тела сколь угодно близко. Совсем просто требуемая замена P_1 на $\tilde{P}_1$ осуществляется, когда в качестве P_0 выступают n -мерные симплексы, на которые выпуклый многогранник может разбиваться *рассечениями Брунна*. До настоящего времени не предлагался очерченный выше достаточно наивный естественный геометрический способ доказательства строгого неравенства $V_n(P) > v$ как бы в лоб может из-за того, что изначально теорема формулировалась не для выпуклых многогранников P_0, P_1 , а для произвольных выпуклых тел. Главная же причина, по мнению автора, заключается в алгебраическом представлении $P = (1-t)P_0 + tP_1$, где t — отношение расстояния от L_0 до L к расстоянию от L_0 до L_1 , $0 < t < 1$. Это приводит к соблазну переходить в доказательствах теоремы от $\mathbb{R}^{n+1}$ к $\mathbb{R}^n$ и использовать эквивалентную формулировку теоремы, считая $L_0 = L_1 = \mathbb{R}^n$. В результате от ситуации общего положения, когда $L_0 \neq L_1$, перешли в особенность $L_0 = L_1$, в условиях которой существенно уменьшаются возможности для привлечения геометрической интуиции и, как следствие, уменьшаются возможности для более простых наглядных геометрических обоснований неравенства $V_n(P) > v$. Настоящей статьёй показывается, что при доказательстве теоремы в эквивалентной формулировке следует, напротив, пространство $\mathbb{R}^n$ включать в $\mathbb{R}^{n+1}$ и использовать изначально формулировку теоремы, когда основным инструментом доказательства элементарными средствами становится *рассечение*

Брунна. Справедливости ради следует отметить, что многочисленные приложения настоящей теоремы, полученные Минковским и другими авторами, связаны как раз с её эквивалентной формулировкой, со смешанными объёмами, с алгебраическими представлениями $P = (1 - t)P_0 + tP_1$, называемыми суммами Минковского.

Ключевые слова: выпуклые многогранники, симплексы, треугольники, объёмы, неравенство Брунна – Минковского.

Библиография: 31 названий.

Для цитирования:

Ф. М. Малышев. Завершение доказательства теоремы Брунна элементарными средствами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 160–182.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 514.172.4+514.177.2

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-160-182

Completion of the proof of Brunn's theorem by elementary means

F. M. Malyshev

Malyshev Fedor Mikhailovich — Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Abstract

Brunn in 1887 formulated a theorem on three parallel sections of a convex body with extreme sections of the same area, but not obtained from each other by a parallel shift, asserting that the area of the middle section is strictly larger, and correctly proved, as Minkowski noted, that only not less. The elimination of equality, which was still considered the most difficult in the theorem, has been proved up to the present time by many authors, using serious mathematics. The article proposes a fundamentally different geometric approach to the proof of the theorem, due to which, for the correct completion of Brunn's original proof, one can restrict oneself to the elementary means available to schoolchildren, bypassing the difficulties with equality. The proposed reasoning extends to all dimensions, like the theorem itself, as pointed out by Brunn. Let, in the general case, $V_n(Q)$ be the n -dimensional volume of the body $Q \subset \mathbb{R}^n$, L_0, L_1 be parallel hyperplanes in $\mathbb{R}^{n+1}$, containing respectively convex bodies P_0, P_1 , and L is a parallel hyperplane, located strictly between them, and P is the intersection of L with the convex hull $P_0 \cup P_1$. Brunn's theorem states that if P_1 is not obtained from P_0 by parallel translation and $V_n(P_1) = V_n(P_0) = v > 0$, then $V_n(P) > v$. In 1887, Brunn rigorously proved that $V_n(P) \geq v$ using the effective trick of the division of the volumes P_0, P_1 by a hyperplane in $\mathbb{R}^{n+1}$. In this article, this is called *Brunn cuts*. For the strictly inequality $V_n(P) > v$, it remained a small "perturbation" go from the body P_1 to another convex body $\tilde{P}_1$, $V_n(\tilde{P}_1) = v$, so that $V_n(P) > V_n(\tilde{P})$, where $\tilde{P}$ is a new section in the hyperplane L arising after replacing P_1 with $\tilde{P}_1$. Since $V_n(\tilde{P}) \geq v$, then $V_n(P) > v$. The easiest way is to replace P_1 with $\tilde{P}_1$ in the case of convex polytopes P_0 , which can approximate convex bodies arbitrarily close. The required replacement of P_1 by $\tilde{P}_1$ is quite simple, when n -dimensional simplices act as P_0 , into which the convex polytope can be split by *Brunn cuts*. Until now, the sufficiently naive natural geometric method outlined above has not been proposed for proving the strict inequality $V_n(P) > v$, as it were head-on, due to the fact that initially the theorem was formulated not for convex polytopes P_0, P_1 , but for arbitrary convex bodies. The main reason, according to the author, lies in the algebraic representation $P = (1 - t)P_0 + tP_1$, where t is the ratio of the distance

from L_0 to L to the distance from L_0 to L_1 , $0 < t < 1$. This leads to the temptation to go over in the proofs of the theorem from $\mathbb{R}^{n+1}$ to $\mathbb{R}^n$ and use the equivalent statement of the theorem, assuming $L_0 = L_1 = \mathbb{R}^n$. As a result, from the general situation, when $L_0 \neq L_1$, passed into the singularity $L_0 = L_1$, in the conditions of which the possibilities for attracting geometric intuition are significantly reduced and, as a consequence, the possibilities for simpler visual geometric justifications of the inequality $V_n(P) > v$ are significantly reduced. This article shows that in the proof of the theorem in an equivalent formulation, on the contrary, the space $\mathbb{R}^n$ should be included in $\mathbb{R}^{n+1}$ and use the original formulation of the theorem, when the main tool of the proof the elementary means are *Brunn cuts*. For the sake of fairness, it should be noted that numerous applications of this theorem, obtained by Minkowski and other authors, are connected precisely with its equivalent formulation, with mixed volumes, with algebraic representations $P = (1-t)P_0 + tP_1$, called Minkowski sums.

Keywords: convex polyhedra, simplices, triangles, volumes, Brunn-Minkowski inequality

Bibliography: 31 titles.

For citation:

F. M. Malyshev, 2021, "Completion of the proof of Brunn's theorem by elementary means", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 160–182.

Введение

В статье речь идёт о следующей известной геометрической теореме Брунна–Минковского, имеющей много обобщений и приложений в различных областях математики (см., например, [1, 2, 3, 4]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть в двух параллельных гиперплоскостях L_0, L_1 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, содержатся выпуклые тела P_0, P_1 одинакового n -мерного объёма $v > 0$, и пусть P – сечение выпуклой оболочки их объединения гиперплоскостью L , параллельной L_0, L_1 и находящейся строго между ними. Тогда n -мерный объём тела P будет не меньше v , причём, если равен v , то P_1 получается из P_0 параллельным переносом.

Из ближайших обобщений этой теоремы приведём неравенство

$$\sqrt[n]{V_n(Q_0 + Q_1)} \geq \sqrt[n]{V_n(Q_0)} + \sqrt[n]{V_n(Q_1)}$$

для непустых компактов Q_0, Q_1 в $\mathbb{R}^n$, $Q_0 + Q_1 = \{a + b \mid a \in Q_0, b \in Q_1\}$ [1].

У данной теоремы не простая судьба. При $n = 1$ она очевидна. При $n = 2$ теорема уже является содержательной, её сформулировал Н. Брунн в 1887 году [5]. Он заметил также, что теорема может быть распространена на случай $n \geq 3$. Б.Н. Делоне ([6], стр. 39) отмечал: "Сам Брунн доказал лишь первую часть этой теоремы (1887 г.), второй же, дополнительной части об условиях равенства площади промежуточного сечения площадям первых двух сечений ему сначала строго доказать не удалось, на что обратил внимание Минковский. Впоследствии были даны Минковским и Бруном доказательства и дополнительной части. Любопытно, что Минковский закончил свою известную книгу "Geometrie der Zahlen" [7] как раз на 56-м параграфе (1896 г.), в котором надо было дать доказательство теоремы Бруна, так что "Geometrie der Zahlen" обрывается, так сказать, на полуслове. По смерти Минковского (1909 г.) в его бумагах было найдено это доказательство и напечатано (1910 г.) через 14 лет после появления "Geometrie der Zahlen" в виде последнего, заключительного её 57-го параграфа [7]". Даты и ссылки на [7] вставлены в цитату автором настоящей работы. Любопытно, что по каким-то причинам доказательства теоремы Брунна (так она тогда называлась) в книге [7] за 1896 год не оказалось. Видимо Минковского не совсем устраивали имевшиеся на тот момент доказательства.

Впоследствии теорема доказывалась многими авторами. Необходимые ссылки имеются, например, в книгах [1, 8, 9, 10, 11], в обзорах [4], [12]. В работе [13] приводится доказательство через монотонные отображения, которое хоть и не элементарное, но достаточно мощное для случая равенства. Наиболее прозрачным из известных автору представляется аналитическое доказательство индукцией по n со стр. 844 – 846 книги [14]. Наиболее геометрическим, как представляется, является доказательство из книги [10], использующее симметризацию Штейнера, основанную на принципе Кавальери, из-за чего не может быть отнесено к элементарным.

Б.Н. Делоне считал эту теорему "*хотя, быть может, и трудно доказуемой, но самой по себе довольно очевидной*" ([15], стр. 37). Ощутимое несоответствие между *очевидностью* теоремы и существенной неэлементарностью её доказательств в части строгого неравенства (из-за чего она часто приводится без доказательства) имело место до настоящего времени даже для $n = 2$. Данная теорема, кроме её многочисленных приложений для изопериметрических оптимизационных задач, относится к основам теории выпуклых многогранников, поэтому желательно иметь её геометрическое доказательство элементарными методами, доступное школьникам и студентам младших курсов. Брунн в 1887 году был буквально в шаге от такого доказательства, что и будет продемонстрировано в настоящей статье.

Распространение утверждаемого теоремой неравенства Брунна–Минковского на различные многообразия и дискретные структуры продолжается до настоящего времени (см, например, [16]–[24]).

1.1. Основные понятия и используемые обозначения. Для доступного введения в теорию выпуклых множеств можно порекомендовать первую главу книги [25]. Под телом в $\mathbb{R}^n$ в статье понимается ограниченное замкнутое выпуклое множество положительного n -мерного объёма.

Договоримся через $[X]$ обозначать выпуклую оболочку множества X в евклидовом пространстве, через ∂X – множество граничных точек выпуклого множества X . Через $\bar{X}$ и $\overset{\circ}{X}$ обозначаем соответственно замыкание и множество внутренних точек множества X . Для точек $B_1, \dots, B_k$ выпуклый многогранник $\{B_1, \dots, B_k\}$ обозначаем $[B_1, \dots, B_k]$.

Если тело P_1 получается из P_0 параллельным переносом, то пишем $P_1 \parallel P_0$, иначе $P_1 \nparallel P_0$. Тела и многогранники, а при $n = 2$ области и многоугольники, предполагаются выпуклыми. Для n -мерного объёма тела $Q \subset \mathbb{R}^n$ используем обозначение $V_n(Q)$. Через Δ_n обозначаем n -мерный симплекс.

Гиперплоскость $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$, задающая разбиение $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}^- \cup \mathcal{L}^+$ на замкнутые полупространства $\mathcal{L}^-$, $\mathcal{L}^+$, $\mathcal{L}^- \cap \mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, считаем опорной для тела $Q \subset \mathbb{R}^n$, если $\emptyset \neq Q \cap \mathcal{L} \subset \partial Q$. Опорную гиперплоскость $\mathcal{L}$ считаем ориентированной с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, перпендикулярным к гиперплоскости $\mathcal{L}$ и направленным в сторону от тела Q . Обозначаем $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(Q)$ и считаем, что $Q \subset \mathcal{L}^- = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$. Множество всех возможных нормалей $\mathbf{n}$ отождествляем с единичной сферой $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ с центром в начале координат $\mathcal{O}$. Очень часто вместо заведомо справедливого равенства $Q = \bigcap_{\mathbf{n} \in S^{n-1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$ можно пользоваться равенствами $Q = \bigcap_{\mathbf{n} \in X} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$ для специальных подмножеств $X \subset S^{n-1}$, вплоть до конечных подмножеств X в случае выпуклых многогранников Q .

Через $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} = \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}(P_0, P_1)$, $\mathbf{n} \in S^{n-1}$, обозначаем боковую опорную гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$ для тела $[P_0 \cup P_1]$ такую, что $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} \cap L_0 = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_0)$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} \cap L_1 = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_1)$. Ясно, что $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} \cap [P_0 \cup P_1] = [(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_0) \cap P_0) \cup (\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_1) \cap P_1)]$. Замкнутые полупространства $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^-$ и $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^+$ определяются по аналогии с $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^+$, $[P_0 \cup P_1] \subset \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^-$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^- \cup \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^+ = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^- \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^+ = \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}$. Обратим внимание, что вектор $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ не обязан быть перпендикулярным гиперплоскости $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}$. Тело $[P_0 \cup P_1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является пересечением замкнутой полосы между гиперплоскостями L_0 и L_1 с множеством $\bigcap_{\mathbf{n} \in S^{n-1}} \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^-$.

1.2. Рассечение Брунна для одновременного одинакового деления объёмов P_0 , P_1 . Пусть M – гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, разбивающая тела P_0 и P_1 соответственно на части P'_0 , P''_0 и P'_1 , P''_1 , $P_0 = P'_0 \cup P''_0$, $P_1 = P'_1 \cup P''_1$, причём $V_n(P'_0) = V_n(P'_1)$ и P'_0 , P'_1 находятся по одну

сторону от гиперплоскости M . Тогда P_0'', P_1'' находятся по другую сторону от гиперплоскости M и $V_n(P_0'') = V_n(P_1'')$, так как $V_n(P_0) = V_n(P_1)$. Если утверждение теоремы справедливо для пар тел P_0', P_1' и P_0'', P_1'' , то оно будет справедливо и для тел P_0, P_1 . Действительно, тогда

$$\begin{aligned} V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) &\geq V_n(L \cap [P_0' \cup P_1']) + V_n(L \cap [P_0'' \cup P_1'']) \geq \\ &\geq V_n(P_0') + V_n(L \cap [P_0'' \cup P_1'']) \geq V_n(P_0') + V_n(P_0'') = V_n(P_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, если $P_1 \nparallel P_0$, то либо $P_1' \nparallel P_0'$, либо $P_1'' \nparallel P_0''$. Иначе, при $P_1' \parallel P_0'$ и $P_1'' \parallel P_0''$ имели бы $P_0 \parallel P_1$, так как соответствующие векторы сдвига для $P_1' \parallel P_0'$ и $P_1'' \parallel P_0''$ будут одинаковы, они совпадают с вектором сдвига для $(P_1 \cap M) \parallel (P_0 \cap M)$. Таким образом, при $P_1 \nparallel P_0$ одно из двух последних неравенств в цепочке (1) является строгим.

Обратим внимание, что первое неравенство в цепочке (1) в общем случае нельзя заменять равенством, например, из-за точек $[A, B] \cap L \in [P_0 \cup P_1] \cap L$, $A \in P_0'$, $B \in P_1''$, которые, возможно, не принадлежат $(L \cap [P_0' \cup P_1']) \cup (L \cap [P_0'' \cup P_1''])$.

1.3. Основная идея предлагаемого доказательства теоремы. Её утверждение (если игнорировать тривиальную ситуацию $P_1 \parallel P_0$) выражается импликацией

$$P_1 \nparallel P_0 \Rightarrow V_n(P) > v, \quad (2)$$

где $P = L \cap [P_1 \cup P_0]$. Импликация (2) доказывается с помощью неравенства

$$V_n(P) = V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) \geq v, \quad v = V_n(P_0) = V_n(P_1), \quad (3)$$

для которого уже имеются доказательства элементарными средствами.

Используя приближения выпуклого тела P_0 многогранниками, доказательство импликации (2) может быть сведено к случаю, когда тело P_0 является выпуклым многогранником. В свою очередь, с помощью многократных рассечений Брунна доказательство импликации (2) в случае многогранников P_0 сводится к n -мерным симплексам, когда $P_0 = \Delta_n$, а P_1 произвольное тело.

Благодаря неравенству (3), справедливость импликации (2) следует из справедливости импликации

$$P_1 \nparallel P_0 \Rightarrow \exists \tilde{P}_1 \subset L_1, V_n(\tilde{P}_1) = v : V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) > V_n(L \cap [P_0 \cup \tilde{P}_1]). \quad (4)$$

Если заранее известно, что при заданном P_0 на некотором P_1^* достигается минимум $V_n(L \cap [P_0 \cup P_1])$ по всем P_1 с $V_n(P_1) = v$, то для доказательства (2) с помощью (4) неравенство (3) не требуется.

В случае $P_0 = \Delta_n$ построение требуемого выпуклого тела $\tilde{P}_1$ в (4) осуществляется в два этапа незначительными "шевелениями" границы ∂P_1 . Пусть A и $B \neq C$ вершины симплекса P_0 . Вначале увеличиваем P_1 до $\hat{P}_1$ так, что $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}(P_0, \hat{P}_1) = \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}(P_0, P_1)$ для всех $\mathbf{n} \in S^{n-1}$, для которых $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\Delta_n) \cap \Delta_n \neq \{A\}$. Новое положение $(\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}(P_0, \hat{P}_1) \neq \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}(P_0, P_1))$ могут занимать (удаляясь от P_1) только боковые опорные гиперплоскости $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}(P_0, \hat{P}_1)$ для тех $\mathbf{v} \in S^{n-1}$, для которых $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\Delta_n) \cap \Delta_n = \{A\}$. Затем на столько же уменьшаем n -мерный объём тела $\hat{P}_1$, переходя к телу $\tilde{P}_1$ так, что для некоторого одного конкретного $\mathbf{m} \in S^{n-1}$ такого, что $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(\Delta_n) \cap \Delta_n \supseteq [B, C]$, боковая опорная гиперплоскость $\mathfrak{L}_{\mathbf{m}}(P_0, \tilde{P}_1)$ (содержащая $[B, C]$) оставляет часть объёма тела $\hat{P}_1$ в полупространстве $\mathfrak{L}_{\mathbf{m}}^+(P_0, \tilde{P}_1)$, или, иначе и точнее, в полупространстве $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}^+(\tilde{P}_1) \subset L_1 \supset \hat{P}_1$. В результате, при сохранении n -мерного объёма на уровне гиперплоскости L_1 , на уровне гиперплоскости L уменьшение n -мерного объёма на втором этапе будет строго больше, нежели его увеличение на первом этапе. Обратим внимание, что в результате предлагаемых перестроек $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(P_1) \neq \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\hat{P}_1)$, $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(P_1) \neq \mathcal{L}_{\mathbf{m}}(\tilde{P}_1)$, но $\mathfrak{L}_{\mathbf{v}}(\Delta_n, P_1) \cap L_0 = \mathfrak{L}_{\mathbf{v}}(\Delta_n, \hat{P}_1) \cap L_0 = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\Delta_n)$, как и $\mathfrak{L}_{\mathbf{m}}(\Delta_n, P_1) \cap L_0 = \mathfrak{L}_{\mathbf{m}}(\Delta_n, \tilde{P}_1) \cap L_0 = \mathcal{L}_{\mathbf{m}}(\Delta_n)$.

Новизна представленного наивного геометрического подхода, обеспечившего простоту доказательства импликации (2) как бы в лоб, видится в следующем.

1.3.1. Ранее вместо импликации (4) доказывалась непосредственно импликация: $V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) = v \Rightarrow P_1 \parallel P_0$. Этот нюанс оказался решающим.

1.3.2. Ранее выпуклые тела P_0 только приближались "снизу" прямоугольными параллелепипедами. В нашем случае многогранник P_0 исчерпывается n -мерными симплексами полностью.

1.3.3. Начиная с Минковского рассматривали эквивалентную формулировку теоремы (2), полагая $L_0 = L_1 = \mathbb{R}^n$ и $P = (1 - t)P_0 + tP_1$, $0 < t < 1$, использовали так называемые смешанные объёмы. (При $L_0 \neq L_1$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ выпуклое тело $P = L \cap [P_0 \cup P_1]$ тоже представляется суммой Минковского $P = (1 - t)P_0 + tP_1$, если расстояния от L к L_0 и к L_1 относятся как t к $1 - t$.) Автор склонен думать, что как раз это обстоятельство: уход от ситуации общего положения ($L_0 \neq L_1$) в особенность ($L_0 = L_1$) явилось одной из причин, из-за которой возникла трудность со строгим неравенством в теореме, длившаяся с 1887 года до настоящего времени. Переход от $\mathbb{R}^{n+1}$ к $\mathbb{R}^n$ может приводить ещё к непониманию смысла теоремы. Например, в переводе [26] второго издания книги с названием "Геометрия чисел" (как у [7]) на стр. 12 в ошибочной формулировке теоремы подразумеваются построения как в $\mathbb{R}^{n+1}$, так и в $\mathbb{R}^n$. Здесь, справедливости ради, следует оговориться, что многочисленные приложения настоящей теоремы (2), полученные Минковским и другими авторами, связаны как раз со смешанными объёмами, с алгебраическими представлениями $P = (1 - t)P_0 + tP_1$ в виде суммы Минковского.

1.4. Содержание статьи (план доказательства). В § 2, состоящем из пп. 2.1, 2.2, 2.3, доказательство импликации (2) сводится к её очень частному случаю, к доказательству импликации (4) с $P_0 = \Delta_n$. В п. 2.1 доказывается неравенство (3) с помощью рассечений Брунна. В п. 2.2 доказывается лемма о том, что произвольный выпуклый многогранник $P_0 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, последовательными рассечениями Брунна может быть разбит на n -мерные симплексы (первое сечение производится как в п. 1.2, затем отдельные части независимо рассекаются аналогичным образом). При $n = 2$ выпуклый многоугольник рассекается на треугольники по диагоналям. В п. 2.3 импликация (2) доказывается в предположении, что справедлива импликация (4) в частном случае, когда $P_0 = \Delta_n$.

В § 3 приводятся два доказательства импликации (2) для рассмотренного первоначально Брунном в [5] случая $n = 2$. Одно аналитическое (с целью дополнительно подчеркнуть важность обращения к симплексам), другое геометрическое, реализующее схему рассуждений п. 1.3. Оба доказательства доступны школьникам. Представляется, что оба из этих доказательств могут претендовать на доказательство в книгу [27] в последующих её изданиях, если теорема Брунна – Минковского когда-либо будет там представлена.

В § 4 содержатся необходимые предварительные замечания общего характера, которые будут использоваться в § 5 при доказательстве импликации (4) с $P_0 = \Delta_n$. Принципиально новым в § 4 является содержание п. 4.2, относящееся к особенностям доказательства, связанным с увеличением размерности n . Там для выпуклых тел P_1 используем обозначение Q . Для каждого выпуклого тела $Q \subset L_1 = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в случае $P_0 = \Delta_n \subset L_0$, $V_n(Q) = V_n(\Delta_n)$, строится расширяющийся ряд из n выпуклых тел

$$Q = Q^{(1)} \subseteq Q^{(2)} \subseteq \dots \subseteq Q^{(n-1)} \subseteq Q^{(n)} = \hat{\Delta}_n, \quad (5)$$

в котором $\hat{\Delta}_n \subset L_1$ – минимальный симплекс, содержащий Q и гомотетичный симплексу Δ_n с положительным коэффициентом гомотетии. Тело $Q^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, задаётся пересечением полупространств всех опорных гиперплоскостей тела Q уровней $j \geq i$, а к уровню $j \in \{1, \dots, n\}$ отнесены те опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_n(Q)$, $\mathbf{n} \in S^{n-1}$, для которых параллельные им опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_n(\hat{\Delta}_n)$ содержат грани $\hat{\Delta}_n$ размерности $j - 1$ и не содержат граней большей

размерности, т.е. в опорной гиперплоскости $\mathcal{L}_n(\hat{\Delta}_n)$ содержится ровно j вершин симплекса $\hat{\Delta}_n$, $|\hat{\Delta}_n \cap \mathcal{L}_n(\hat{\Delta}_n)| = |\Delta_n \cap \mathcal{L}_n(\Delta_n)| = j$. Всё множество опорных гиперплоскостей уровня j , $j = 1, \dots, n$, естественным образом разбивается на C_n^j подмножеств, отвечающих конкретным подмножествам вершин симплекса $\hat{\Delta}_n$ (или Δ_n) мощности j . Телу Q приписываем порядок $i \in \{1, \dots, n\}$ (относительно Δ_n), если $Q = Q^{(1)} = Q^{(2)} = \dots = Q^{(i-1)} = Q^{(i)} \neq Q^{(i+1)}$. Считаем Q телом общего положения, если $Q = Q^{(1)} \neq Q^{(2)}$. Когда $Q = Q^{(i)}$, $i > 1$, тело Q считаем особым. Если $Q \nparallel \Delta_n$, то $Q \neq \hat{\Delta}_n = Q^{(n)}$, и тогда при $Q = Q^{(i)} \neq Q^{(i+1)}$ обязательно $i \leq n - 1$. Для выпуклого тела Q порядка i чем меньше $j \in \{i, i + 1, \dots, n\}$, тем точнее тело Q приближается телом $Q^{(j)}$. Другими словами, папа Карло, выстругивая Q , следовал бы по ряду (5) в обратном порядке, начиная с самой грубой заготовки $\hat{\Delta}_n$. В общем случае, чем меньше $j \in \{i + 1, \dots, n - 1\}$, тем больше у него работы для получения $Q^{(j)}$ из $Q^{(j+1)}$.

Доказательство импликации (4) в § 5 для $n \geq 3$ и $P_0 = \Delta_n$ разбито на пп. 5.1 и 5.2. В п. 5.1 импликация (4) доказывается для выпуклых тел $P_1 = Q = Q^{(1)} \neq Q^{(2)}$ общего положения аналогично геометрическому доказательству теоремы (2) для $n = 2$ из п. 3.2, реализующему схему рассуждений п. 1.3. В п. 5.2 импликация (4) доказывается для выпуклых тел $P_1 = Q = Q^{(i)} \neq Q^{(i+1)}$ порядка $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ индукцией по i путём рассматриваемых в п. 1.2 рассечений Брунна, при которых P'_0, P''_0 – симплексы, а выпуклое тело P'_1 имеет порядок $i - 1$. Размерность $n = 3$ (когда ещё есть возможность для наглядного представления) в п. 5.2.1 рассматривается отдельно, чтобы случай $n \geq 4$ в п. 5.2.2 воспринимался проще.

Рассечений Брунна вместе с леммой из п. 2.2 и ряда (5) оказалось достаточно (как показывается далее в §§ 2–5) для доказательства неравенства (2) в общем случае.

1.5. Столь пространное введение приведено в надежде на то, что после этого некоторым читателям по их желанию даже не потребуется знакомиться собственно с доказательствами из §§ 2–5. Приводимые там рассуждения можно отнести к не сложным упражнениям на выпуклые множества, которые заведомо проще предлагаемых в монографии [25]. При написании доказательств не было цели уменьшения объёма статьи, измеряемого числом страниц. Если измерять формальными выкладками, начиная с аксиоматики Пеано, то сокращение до элементарности по сравнению с ранее известными доказательствами теоремы сомнений не вызывает, особенно это касается случая $n = 2$. Для изложения полного пусть не подробного доказательства теоремы по предлагаемой схеме хватило четырёх страниц тезисов [28].

1.6. Ранее в [29] (см., также [30]) на основе этих же идей приводились другие доказательства теоремы Брунна – Минковского. Там, в частности, рассматривалась возможность получения неравенства (3) непосредственно из утверждения (4). Для этого при фиксированном P_0 достаточно было убедиться в наличии выпуклых тел Q_1 , на которых достигается минимум функции $F(Q) = V_n(L \cap [P_0 \cup Q])$. Предварительно стандартным способом доказывалась компактность множества $\mathfrak{X}$ всех выпуклых тел Q с достаточно большой верхней границей для их диаметра и с $V_n(Q) = v$ (точнее классов эквивалентности таких тел Q относительно параллельных переносов) в специальной метрике, эквивалентной метрике Хаусдорфа, и доказывалась непрерывность функции $F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$. В работе [29] в некоторых ситуациях строятся семейства выпуклых тел $P_1(s)$, $V_n(P_1(s)) = v$, $s \in [0, 1]$, $P_1(0) = P_1$, $P_1(1) \parallel P_0$, для которых функции $f(s) = V_n(L \cap [P_0 \cup P_1(s)])$ строго монотонно убывают на отрезке $[0, 1]$. Доказательство леммы о разбиении выпуклого многогранника на симплексы при рассечениях Брунна из п. 1.2 в работе [29] не такое наглядное, как в п. 2.2 ниже.

1.7. Геометрическим неравенствам обычно отвечают одна или несколько оптимизационных задач. Для неравенства (2) в [31] имеется достаточно наглядная оптимизационная задача прикладного практического происхождения. В [31] для замкнутых выпуклых тел X и Q в $\mathbb{R}^n$ рассматривается множество $\Gamma_Q(X) = \bigcup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n: \\ \emptyset \neq (v+Q) \cap X = \partial(v+Q) \cap X}} (v + Q)$, называемое Q -границей

для тела X . В работе [31] доказывается теорема о том, что при заданных Q с $V_n(Q) > 0$ и

$v = V_n(X) > 0$ минимум объёма Q -границы $V_n(\Gamma_Q(X))$ достигается для единственного (с точностью до параллельных сдвигов) тела X_0 , гомотетичного с положительным коэффициентом гомотетии Q -границе точки.

Сведение доказательства теоремы (2) к проверке импликации (4) для $P_0 = \Delta_n$

В п. 2.1 этого параграфа с помощью рассечений Брунна доказывается неравенство (3). В п. 2.2 доказывается лемма о том, что произвольный выпуклый многогранник $P_0 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, последовательными рассечениями Брунна может быть разбит на n -мерные симплексы. В п. 2.3 импликация (2) доказывается в предположении, что уже справедлива импликация (4) с $P_0 = \Delta_n$. Импликация (4) в случае $P_0 = \Delta_n$ будет доказана в §5.

2.1. Доказательство неравенства (3). После рассечения Брунна (см. п. 1.2) неравенство (3) для пары выпуклых тел P_0, P_1 , $V_n(P_0) = V_n(P_1)$, следует из таких же неравенств, но для пар выпуклых тел P'_0, P'_1 , $V_n(P'_0) = V_n(P'_1)$, и P''_0, P''_1 , $V_n(P''_0) = V_n(P''_1)$. К каждой из пар P'_0, P'_1 и P''_0, P''_1 также при необходимости можно применять рассечение Брунна. К некоторым из далее получаемых частей тоже можно применять рассечение Брунна. После $N - 1$ рассечений возникают разбиения $P_0 = \bigcup_{i=1}^N P_0^{(i)}$, $P_1 = \bigcup_{i=1}^N P_1^{(i)}$ такие, что каждому ломтю $P_0^{(i)} \subseteq P_0$, $i = 1, \dots, N$, отвечает свой ломоть $P_1^{(i)} \subseteq P_1$, причём $V_n(P_0^{(i)}) = V_n(P_1^{(i)})$ и, согласно (1), $V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) \geq \sum_{i=1}^N V_n(L \cap [P_0^{(i)} \cup P_1^{(i)}])$. В результате, неравенство (3) будет следовать из неравенств $V_n(L \cap [P_0^{(i)} \cup P_1^{(i)}]) \geq V_n(P_0^{(i)}) = V_n(P_1^{(i)})$, $i = 1, \dots, N$, которые, при достаточно большом N , по отдельности могут легко устанавливаться.

Приступим теперь непосредственно к доказательству неравенства (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперплоскости L_0 и L_1 будем отождествлять с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n$. Поместим тело $P_0 \subset L_0$ в сетку из n -мерных одинаковых кубиков со стороной $\varepsilon > 0$, получающихся в результате разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ n семействами гиперплоскостей в L_0 , перпендикулярных соответственно $\mathbf{n}_i$, $i = 1, \dots, n$. Назовём их верхними гиперплоскостями. Из каждого семейства потребуется только конечное число гиперплоскостей, которые либо пересекаются с телом P_0 либо находятся в непосредственной близости к нему. Пересекающиеся с границей ∂P_0 кубики назовём граничными. Возникающее разбиение тела P_0 на кубики и небольшие их части индуцирует разбиение тела P_1 на параллелепипеды и небольшие их части следующим образом.

Семейство верхних гиперплоскостей, перпендикулярных $\mathbf{n}_1$ и пересекающихся с телом P_0 , индуцирует в результате рассечений Брунна однозначно задаваемое семейство такого же числа нижних гиперплоскостей в L_1 , перпендикулярных $\mathbf{n}_1$ и разрезающих тело P_1 . Предварительно верхние гиперплоскости, перпендикулярные $\mathbf{n}_1$ и пересекающиеся с телом P_0 , как-то линейно упорядочиваются. В соответствии с этой упорядоченностью производятся один за другим рассечения Брунна. Однозначность возникающих нижних гиперплоскостей и независимость их от введённой упорядоченности обеспечивается тем, что соответственные пары из верхних и нижних ломтей (включая крайние) между каждыми парами соответственных верхних и нижних гиперплоскостей должны иметь одинаковые n -мерные объёмы.

Каждый образовавшийся ломоть в P_1 , независимо от остальных ломтей P_1 , аналогично разбивается семейством гиперплоскостей, перпендикулярных $\mathbf{n}_2$, исходя из уже имеющегося разбиения (такими же гиперплоскостями) соответствующего ломтя из P_0 . И так для всех остальных по порядку векторов $\mathbf{n}_3, \dots, \mathbf{n}_n$, при этом каждый раз рассечения ломтей, образовавшихся на предыдущем этапе, происходят независимо друг от друга. После чего граничные кубики в P_0 и соответствующие им ломти Q_1 в P_1 исключаем из дальнейшего рассмотрения.

После этого тело P_1 помещаем в такую же сетку из n -мерных кубиков со стороной, для

определённости, тоже ε . Эта сетка индуцирует разбиение на параллелепипеды (или небольшие их части вблизи границы ∂P_1) каждого не исключённого ранее ломтя Q_1 тела P_1 . Каждому такому ломтю Q_1 (n -мерного объёма ε^n) отвечает кубик Q_0 в P_0 , на котором как и выше, другими n сериями рассечений Брунна индуцируется разбиение на параллелепипеды, отвечающее возникшему разбиению на параллелепипеды (или их части) ломтя Q_1 . Каждый раз роль тела P_0 играет ломоть Q_1 , а соответствующий ему кубик Q_0 играет роль тела P_1 .

Долю ломтя Q_1 , не являющуюся параллелепипедом (соприкасающуюся с границей ∂P_1 , содержащуюся в кубике, пересекающемся с границей ∂P_1), исключаем из дальнейшего рассмотрения вместе с соответствующей долей (в виде параллелепипеда) кубика Q_0 .

Суммарный объём всех оставшихся параллелепипедов в P_0 и в P_1 за счёт выбора $\varepsilon > 0$ достаточно малым будет приближаться снизу к ν сколь угодно близко, так как исключённые доли содержатся в сколь угодно малых окрестностях границ ∂P_0 и ∂P_1 .

Между оставшимися параллелепипедами в P_0 и P_1 имеет место взаимно однозначное соответствие, причём n -мерные объёмы двух соответственных параллелепипедов $\Pi_0 \subseteq P_0$ и $\Pi_1 \subseteq P_1$ одинаковы, $L \cap [\Pi_0 \cup \Pi_1] \subseteq L \cap [P_0 \cup P_1]$. По построению для любых двух пар соответственных параллелепипедов (Π'_0, Π'_1) , (Π''_0, Π''_1) обязательно $V_n((L \cap [\Pi'_0 \cup \Pi'_1]) \cap (L \cap [\Pi''_0 \cup \Pi''_1])) = 0$. Благодаря сделанным замечаниям и суммированию по всем оставленным соответственным парам параллелепипедов из P_0 и P_1 , неравенство (3) достаточно доказать для двух прямоугольных параллелепипедов Π_0, Π_1 со сторонами $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$, $j = 0, 1$, для которых $a_1^{(0)} \cdot \dots \cdot a_n^{(0)} = a_1^{(1)} \cdot \dots \cdot a_n^{(1)} = \nu$. Тогда неравенство (3) принимает вид $\prod_{i=1}^n \left((1-t)a_i^{(0)} + ta_i^{(1)} \right) \geq \nu$ или

$t^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{1-t}{t} + \frac{a_i^{(1)}}{a_i^{(0)}} \right) \geq 1$. Справедливость последнего неравенства следует из того, что минимум произведения $p = p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (\tau + x_i)$ при $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, заданном $\tau = \frac{1-t}{t}$ и $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, достигается только при $x_1 = \dots = x_n = 1$ и равен $(\tau + 1)^n$. Действительно, при замене $x_i \neq x_j$ на $x'_i = x'_j = \sqrt{x_i x_j}$ величина p становится строго меньшей, поэтому $p(x_1, \dots, x_n) > p'' = p(x''_1, \dots, x''_n)$, причём произведение p'' можно сделать сколь угодно близким к $(\tau + 1)^n$ за счёт того, что все компоненты $x''_1, \dots, x''_n$ можно сделать несколькими заменами пар различных компонент на равные сколь угодно близкими к 1. В результате неравенство (3) для параллелепипедов Π_0, Π_1 , а значит и для произвольных тел P_0, P_1 , доказано.

2.2. Доказательство теоремы (2) для выпуклых многогранников P_0 в предположении справедливости импликаций (4) для $P_0 = \Delta_n$. В этих предположениях импликации (2) для $P_0 = \Delta_n$ следуют из (4) и (3). После этого теорема (2) для выпуклых многогранника P_0 и произвольного тела P_1 доказывается с помощью многократного использования рассечений Брунна. Каждый из многогранников P'_0 и P''_0 , полученных после первого рассечения, можно продолжать аналогично независимо разбивать своими гиперплоскостями на пары многогранников, с которыми поступаем так же до тех пор, пока все части многогранника P_0 не окажутся n -мерными симплексами. На такую возможность указывает следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Произвольный выпуклый ограниченный многогранник P_0 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, за конечное число последовательных рассечений гиперплоскостями можно разбить на симплексы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по n . Выделяя в многограннике P_0 какую-либо вершину A , можно считать P_0 "пирамидой" с вершиной A и неровным "основанием", состоящим из нескольких его $(n-1)$ -мерных граней (несодержащих A). Гиперплоскость $E \subset \mathbb{R}^n$, содержащая вершину A и одну из $(n-2)$ -мерных граней, общую для двух $(n-1)$ -мерных граней "основания", разбивает P_0 на две "пирамиды", в каждой из которых число граней "основания" по крайней мере на 1 меньше, чем в "основании" у P_0 . Дальнейшие независимые разбиения частей P_0 гиперплоскостями $E \ni A$ оставят во всех "основаниях" по одной

$(n - 1)$ -мерной грани, которые по предположению индукции разбиваются на $(n - 1)$ -мерные симплексы, а значит и P_0 разбивается на n -мерные симплексы.

Лемма доказана.

2.3. Доказательство теоремы (2) в предположении справедливости импликаций (4) для $P_0 = \Delta_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P_0 и $P_1 \not\parallel P_0$ два выпуклых тела одинакового n -мерного объёма. Рассмотрим многогранник P'_0 , содержащийся в теле P_0 , n -мерный объём которого можно сделать сколь угодно близким n -мерному объёму P_0 (например, P'_0 – выпуклая оболочка совокупности внутренних ε -кубиков из п. 2.1). Тело $P'_1 \subseteq P_1$ получаем последовательными отсечениями Брунна частей P_1 гиперплоскостями, параллельными $(n - 1)$ -мерным граням многогранника P'_0 , отслеживая каждый раз (в соответствии с п. 1.2) равенство отсекаемых объёмов у P_0 и P_1 . Приближения P'_0 к P_0 осуществляем настолько близко, что $P'_1 \not\parallel P'_0$.

Благодаря (1), для доказательства теоремы (2), учитывая доказанное в п. 2.2 неравенство $V_n(L \cap [P'_0 \cup P'_1]) > V_n(P'_0) = V_n(P'_1)$, останется применить доказанные в п. 2.1 неравенства $V_n(L \cap [Q_0 \cup Q_1]) \geq V_n(Q_0) = V_n(Q_1)$ ко всем отсекаемым парам соответственных ломтей $Q_0 \subset P_0$, $Q_1 \subset P_1$.

Импликация (2) доказана, но пока только в предположении, что справедливы импликации (4) для симплексов P_0 и произвольных тел P_1 . Последнее при $n \geq 3$ будет доказано в § 5.

Доказательства теоремы (2) для $n = 2$

Согласно результатам предыдущего параграфа для доказательства строгого неравенства в (2) при $n = 2$ достаточно убедиться в справедливости импликации (4) для треугольника P_0 . Далее в § 3 считаем $P_0 = \Delta_2$, $P_1 \not\parallel P_0$.

3.1. Аналитическое доказательство теоремы (2) для $n = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{\Delta}_2$ минимальный треугольник, содержащий область P_1 и гомотетичный Δ_2 с коэффициентом гомотетии большим 1 (см. рис. 1). Пусть A_1, A_2, A_3 – вершины треугольника Δ_2 , а B_1, B_2, B_3 – соответствующие вершины треугольника $\hat{\Delta}_2$, и, наконец, M_1, M_2, M_3 – области (не выпуклые в общем случае) соответственно при вершинах B_1, B_2, B_3 , на которые разбивается замыкание множества $\hat{\Delta}_2 \setminus P_1$.

Выпуклая оболочка $[\Delta_2 \cup P_1]$ множества $\Delta_2 \cup P_1$ получается из усечённой пирамиды $[\Delta_2 \cup \hat{\Delta}_2]$ с основаниями Δ_2 и $\hat{\Delta}_2$ исключением пирамид $\Lambda_i = \Lambda(A_i, M_i) = [\{A_i\} \cup M_i]$ с вершинами A_i и основаниями M_i , $i = 1, 2, 3$. Поясним это. Тело $[\Delta_2 \cup P_1]$ есть пересечение всех полупространств, содержащих Δ_2 и P_1 , поэтому его боковая поверхность состоит из отрезков $[A, B]$, $A \in \partial\Delta_2$, $B \in \partial P_1$, содержащихся в опорных плоскостях $\mathfrak{L}_n$, $n \in S^1$, общих для Δ_2 и P_1 . Треугольник Δ_2 и область P_1 должны находиться по одну сторону от опорных плоскостей $\mathfrak{L}_n$, которые однозначно восстанавливаются по прямым $\mathcal{L}_n(P_1) = L_1 \cap \mathfrak{L}_n$, $n \in S^1$, опорным для области P_1 в плоскости L_1 .

Просматривая по кругу все возможные положения прямой $\mathcal{L}_n(P_1)$, $n \in S^1$, замечаем, что боковая поверхность тела $[\Delta_2 \cup P_1]$ состоит из отрезков $[A, B]$, $A = A_i$, $i = 1, 2, 3$, $B \in \partial M_i \setminus \partial \hat{\Delta}_2$, а также (при $\mathcal{L}_n(P_1) \supset [B_i, B_j]$) из трапеций с основаниями $[A_i, A_j]$ и $P_1 \cap \mathfrak{L}_n(P_1) = P_1 \cap [B_i, B_j]$, вырождающихся в треугольники, когда пересечение $P_1 \cap [B_i, B_j]$ состоит из одной точки.

Пусть площади треугольника Δ_2 и области P_1 равны $v = 1$, и линейный размер треугольника Δ_2 (например, с точностью до постоянного множителя, его периметр) равен 1. Положим площадь треугольника $\hat{\Delta}_2$ равной (при $P_1 \not\parallel P_0$) $1 + \delta$, $\delta > 0$, $\delta = V_2(M_1) + V_2(M_2) + V_2(M_3)$. Расстояния от L до L_0 и L_1 относятся как t к $1 - t$, $0 < t < 1$. Тогда по гомотетии линейный размер треугольника $\hat{\Delta}_2$ равен $\sqrt{1 + \delta}$, а линейный размер треугольника $\Delta'_2 = [\Delta_2 \cup \hat{\Delta}_2] \cap L$ равен $1 + t(\sqrt{1 + \delta} - 1)$, и, в свою очередь, площадь треугольника Δ'_2 равна $(1 - t + t\sqrt{1 + \delta})^2$.

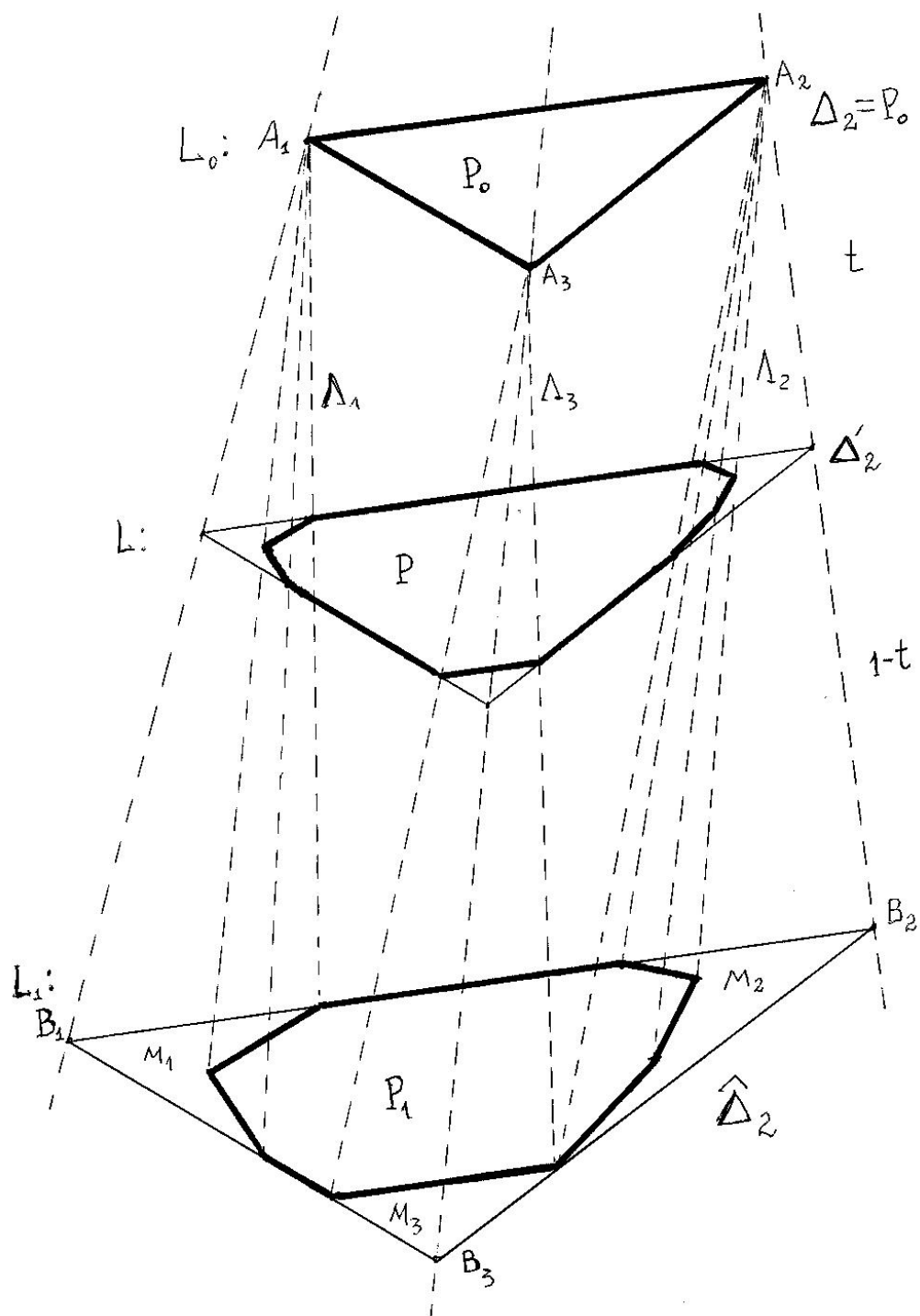


Рис. 1

Для получения площади сечения P нужно из площади треугольника Δ'_2 вычесть суммарную площадь пересечений плоскости L с тремя пирамидами, исключаемыми из усечённой пирамиды $[\Delta_2 \cup \hat{\Delta}_2]$ (см. рис. 1). В результате для площади сечения P имеем:

$$V_2(P) = (1 - t + t\sqrt{1 + \delta})^2 - t^2\delta = 1 + 2t(1 - t)(\sqrt{1 + \delta} - 1) > 1.$$

В импликации (4) можно положить $\tilde{P}_1 \parallel \Delta_2$.

Теорема (2) при $n = 2$ аналитическим способом доказана.

3.2. Геометрическое доказательство теоремы (2) для $n = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительные рассуждения относительно устройства области $P = L \cap [\Delta_2 \cup P_1]$ те же, что и в первом аналитическом доказательстве. Пусть вершина $B_2 \notin P_1$ (см. рис. 2), $V_2(M_2) = \delta_2 > 0$. Рассмотрим $\hat{P}_1 = P_1 \cup M_2$. Тогда $V_2(L \cap [\Delta_2 \cup \hat{P}_1]) = V_2(P \cup (L \cap \Lambda(A_2, M_2))) = V_2(P) + t^2\delta_2$. Отсечём от области $\hat{P}_1$ прямой, параллельной B_1B_3 , область Ω площади δ_2 . Останется область $\tilde{P}_1$, для которой

$$\begin{aligned} V_2(\tilde{P}_1) &= V_2(P_1), \tilde{P} = L \cap [\Delta_2 \cup \tilde{P}_1] \subset L \cap [\Delta_2 \cup \hat{P}_1], \\ (L \cap [\Delta_2 \cup \hat{P}_1]) \setminus (L \cap [\Delta_2 \cup \tilde{P}_1]) &\supseteq L \cap [(A_1, A_3) \cup \Omega] \supset \\ &\supset (L \cap \Lambda(A_1, \Omega)) \cup (L \cap \Lambda(A_3, \Omega)). \end{aligned}$$

В результате,

$$\begin{aligned} V_2(\tilde{P}) &= V_2(L \cap [\Delta_2 \cup \tilde{P}_1]) \leq \\ &\leq V_2(P) + t^2\delta_2 - V_2((L \cap \Lambda(A_1, \Omega)) \cup (L \cap \Lambda(A_3, \Omega))) < \\ &< V_2(P) + t^2\delta_2 - t^2\delta_2 = V_2(P). \end{aligned}$$

Теорема (2) при $n = 2$ вторым геометрическим способом доказана.

Предварительные замечания к случаю $n \geq 3$

В настоящем параграфе через Q обозначаем произвольное выпуклое тело $Q \subset L_1 = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $P_0 = \Delta_n \subset L_0$, $V_n(Q) = V_n(\Delta_n) = v$. Одним из таких Q является тело P_1 , фигурирующее в импликации (4), доказываемой в § 5 для произвольных n -мерных симплексов P_0 . На протяжении всего § 4 вместо $\mathcal{L}_n(Q)$ будем использовать обозначение $\mathcal{L}_n$.

Если α – аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющее $(n+1)$ -ю координату неизменной, то $L \cap [\alpha(P_0) \cup \alpha(P_1)] = \alpha(L \cap [P_0 \cup P_1])$. С точки зрения доказываемой теоремы конкретная форма симплекса Δ_n не так существенна, поскольку аффинным преобразованием α , сохраняющим n -мерный объём (например, с определителем 1 у матрицы линейной части преобразования α), произвольный симплекс $\Delta_n = [A_1, \dots, A_n, A_{n+1}]$ переводится в правильный симплекс, у которого все рёбра одной длины. Это доказывается, например, индукцией по n . Вначале представляемое горизонтально основание $\Delta_{n-1} = [A_1, \dots, A_n]$ пирамиды Δ_n с вершиной A_{n+1} переводится в правильный симплекс Δ_{n-1} с центром в начале координат. Затем вершина пирамиды A_{n+1} переводится по горизонтали (при неподвижном основании) на вертикальную координатную ось. Наконец, растяжениями основания пирамиды и изменением её высоты (передвижением вершины A_{n+1} вдоль вертикальной координатной оси) можно получить правильный симплекс Δ_n прежнего объёма.

4.1. В этом пункте симплекс Δ_n считаем правильным. Будем также считать $v = 1$ и $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) \in [1, 2]$. В этом случае тело Q содержится в шаре ограниченного радиуса R .

Если диаметры тел Q не ограничены, а расстояния от L до L_0 и от L до L_1 относятся как t к $1 - t$, $t \in (0, 1)$, то для некоторого Q найдутся точки $B_1, \dots, B_r \in Q$, $r > \frac{2}{(1-t)^n}$, для которых $(L \cap [\{B_i\} \cup \Delta_n]) \cap (L \cap [\{B_j\} \cup \Delta_n]) = \emptyset$ для всех $1 \leq i < j \leq r$. Тогда $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) \geq$

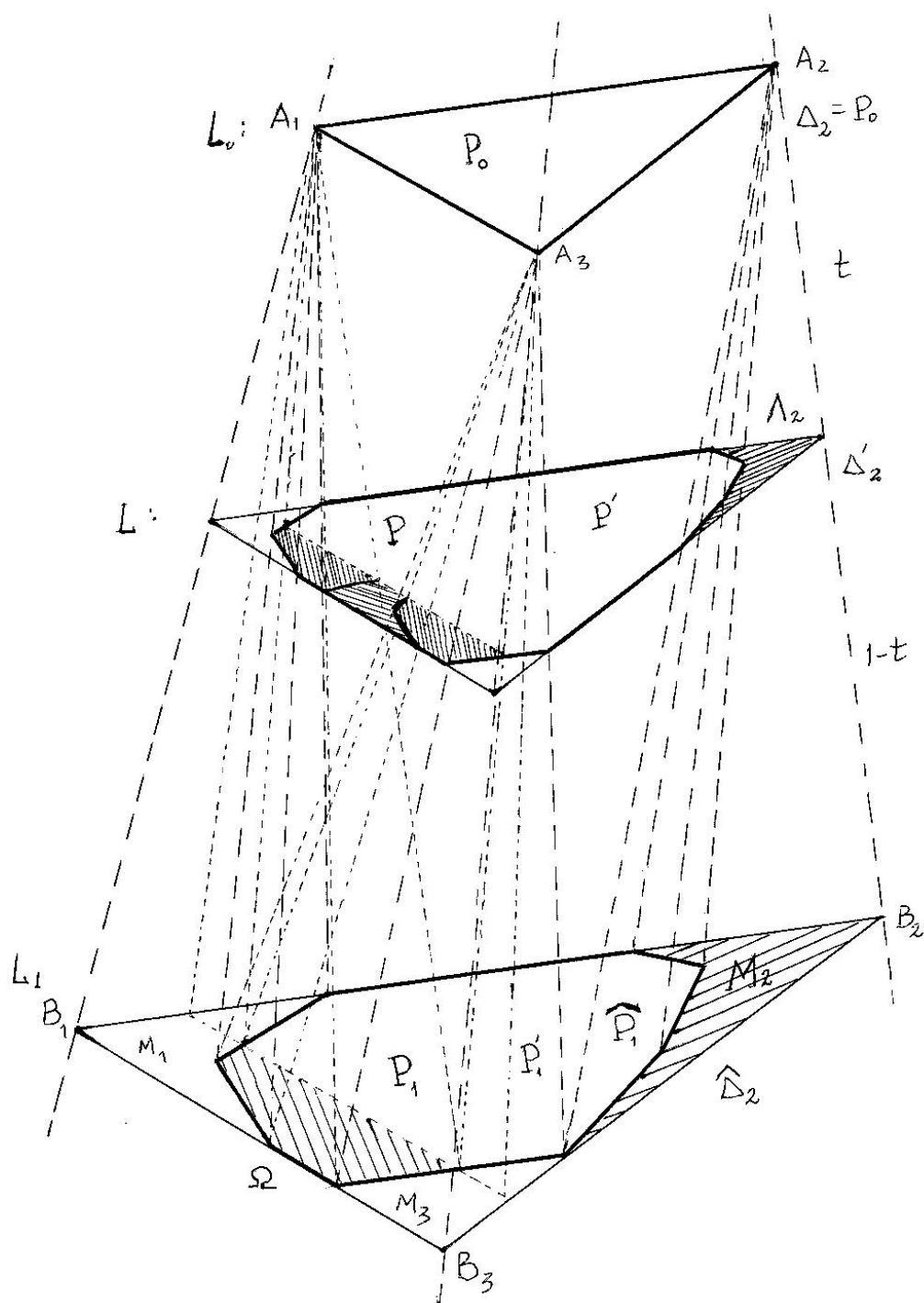


Рис. 2

$\sum_{i=1}^r V_n(L \cap [\{B_i\} \cup \Delta_n]) = r(1-t)^n > 2$. Полученное противоречие указывает на ограниченность радиуса R , с верхней оценкой, зависящей только от $n \geq 3$ и $t \in (0, 1)$.

Будем говорить, что некоторая характеристика, относящаяся к телу Q , имеет *гарантированную* величину, если она имеет нижнюю оценку в виде положительной константы, зависящей только от $n \geq 3$ и $t \in (0, 1)$.

4.1.1. Для любого $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ расстояние $h = h_{\mathbf{n}} = \rho(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}, \mathcal{L}_{-\mathbf{n}}) \leq 2R$ между опорными для Q гиперплоскостями $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и $\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}$ гарантировано, поскольку $V_n(Q) = 1$, а для всех гиперплоскостей $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ величина $V_{n-1}(Q \cap \mathcal{L})/R^{n-1}$ меньше зависящей от n константы. В то же время для некоторой гиперплоскости $\mathcal{L}' \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ величина $V_{n-1}(Q \cap \mathcal{L}')$ гарантирована, не меньше $\frac{1}{2R}$.

4.1.2. При любом $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ для гиперплоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)}$, параллельной гиперплоскостям $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и $\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}$ и расположенной строго по середине между ними, гарантировано значение $V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap Q)$. Действительно, если $\mathcal{L}'$ – гиперплоскость из предыдущего п. 4.1.1 и $\rho(\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}, \mathcal{L}') < \frac{h_{\mathbf{n}}}{2}$, а вершина $B \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \cap Q$, то даже значение $V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap [\{B\} \cup (\mathcal{L}' \cap Q)]) \leq V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap Q)$ гарантировано, меньше по сравнению с $V_{n-1}(Q \cap \mathcal{L}')$ не более чем в 2^{n-1} раз.

4.1.3. Пусть $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ и гиперплоскость $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ такая, что $\mathcal{L}^- \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{\mathbf{n}}) = d < h_{\mathbf{n}}/2$. Значение $V_n(\mathcal{L}^+ \cap Q)/d^n$ гарантировано согласно предыдущему подпункту, поскольку гарантировано $V_n([\{B\} \cup (\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap Q)])$, $B \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \cap Q$.

4.2. Для точек сферы S^{n-1} с центром в начале координат "плоскостями" размерности $k = 0, 1, \dots, n-2$ считаем пересечения векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$ размерности $k+1$ с открытыми полусферами (без границ в виде "экваторов" S^{n-2}). Выпуклой оболочкой пары точек $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in S^{n-1}$ с угловым расстоянием меньшим 180° считаем "отрезок" $[\mathbf{n}, \mathbf{m}] \subset S^{n-1}$, являющийся пересечением сферы S^{n-1} и угла с вершиной в начале координат и лучами вдоль векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. Это позволяет использовать на сфере S^{n-1} аналоги понятий и терминов, относящихся к выпуклым множествам евклидова пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, и позволяет рассматривать структуру разбиения сферы S^{n-1} на i -мерные "симплексы", $i = 0, 1, \dots, n-1$, по типу устройства границы n -мерного симплекса Δ_n .

Пусть: $\hat{\Delta}_n = \hat{\Delta}_n(Q) = [B_1, \dots, B_{n+1}]$ – минимальный симплекс, содержащий тело $Q \subset L_1$ и гомотетичный симплексу $P_0 = \Delta_n \subset L_0$ с положительным коэффициентом гомотетии, $\mathbf{n}_j \in S^{n-1}$, $j = 1, \dots, n+1$, – нормаль $(n-1)$ -мерной грани $[B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_{n+1}]$ симплекса $\hat{\Delta}_n$. Обозначим $\mathcal{N}_0 = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n+1}\}$. Для собственного подмножества $\mathbf{a} \subset \mathcal{N}_0$ с $|\mathbf{a}| = i+1 \geq 2$ обозначим $\mathcal{N}_{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}] \setminus \partial[\mathbf{a}]$ – внутренность i -мерного "симплекса" $[\mathbf{a}] \subset S^{n-1}$. Считаем $\mathcal{N}_{\{\mathbf{n}_j\}} = \{\mathbf{n}_j\}$, $j = 1, \dots, n+1$, по определению. Полагая $\mathcal{N}_i = \bigsqcup_{\mathbf{a} \subset \mathcal{N}_0: |\mathbf{a}|=i+1} \mathcal{N}_{\mathbf{a}}$, получаем $S^{n-1} = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{N}_i$. Если $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}} \subset \mathcal{N}_{n-i}$, $\mathbf{a} = \{\mathbf{n}_{j_1}, \dots, \mathbf{n}_{j_{n-i+1}}\}$, то $\hat{\Delta}_n \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\hat{\Delta}_n)$ является $(i-1)$ -мерной гранью симплекса $\hat{\Delta}_n$ с вершинами B_j , $j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{j_1, \dots, j_{n-i+1}\}$. Во введении в п. 1.4 опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ тела Q с нормальными $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-i}$, были отнесены к уровню i , $i = 1, \dots, n$.

Полагая $\mathcal{M}_i = \bigsqcup_{k=0}^{n-i} \mathcal{N}_k$, $i = 1, \dots, n$, получаем строгие вложения

$$S^{n-1} = \mathcal{M}_1 \supsetneq \mathcal{M}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{M}_{n-1} \supsetneq \mathcal{M}_n = \mathcal{N}_0, \quad (6)$$

задающие ряд (5) с $Q^{(i)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{M}_i} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $i = 1, \dots, n$, $Q^{(1)} = Q$, $Q^{(n)} = \hat{\Delta}_n$. Телу Q приписываем (по отношению к Δ_n) порядок j , $j = 1, \dots, n-1$, если $Q = Q^{(j)} \neq Q^{(j+1)}$. Если $Q \parallel \Delta_n$, то $Q = Q^{(n)} = \hat{\Delta}_n$ имеет порядок n .

Совокупность из $2^{n+1} - 2$ подмножеств $\mathcal{N}_{\mathbf{a}} \subset S^{n-1}$, $\mathbf{a} \subset \mathcal{N}_0$, $|\mathbf{a}| = 1, \dots, n$, на которые разбилась сфера S^{n-1} , упорядочим по мере увеличения $k = |\mathbf{a}|$. При каждом $k \in \{1, \dots, n\}$ всю совокупность открытых $(k-1)$ -мерных "граней" общим числом $\binom{n+1}{k}$ линейно упорядочиваем произвольным образом. Наряду с (6) рассмотрим более плотный ряд

$$S^{n-1} = \mathcal{M}_1 = \mathcal{H}_1 \supsetneq \mathcal{H}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{H}_{2^n - n - 3} \supsetneq \mathcal{H}_{2^n + 1 - n - 2} = \mathcal{N}_0, \quad (7)$$

в котором $\mathcal{H}_{s+1}$, $s = 1, \dots, 2^{n+1} - n - 3$, получается удалением из множества $\mathcal{H}_s$ открытой "границы" $\mathcal{N}_a$ с максимальным (в $\mathcal{H}_s$) номером. Аналогом (5) является тоже более плотный ряд

$$Q = Q^{(1)} = R^{(1)} \subseteq R^{(2)} \subseteq \dots \subseteq R^{(2^{n+1}-n-3)} \subseteq R^{(2^{n+1}-n-2)} = \widehat{\Delta}_n, \quad (8)$$

в котором $R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_s} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $s = 1, \dots, 2^{n+1} - n - 2$. Для каждого $\mathcal{M}_j$, $j = 1, \dots, n$, в (7) найдётся $\mathcal{H}_{s(j)} = \mathcal{M}_j$, $s(j) \in \{1, \dots, 2^{n+1} - n - 2\}$.

4.2.1. Если $Q = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j+1)}$, $j = 1, \dots, n - 1$, то для некоторого $s \in \{s(j), s(j) + 1, \dots, s(j + 1) - 1\}$ в (8) имеем $Q = R^{(s)} \subsetneq R^{(s+1)}$, и найдётся подмножество $\mathbf{a}_1 \subset \mathcal{N}_0$ мощности $n - j + 1$, $\mathbf{a}_1 = \{\mathbf{n}_{i_1}, \dots, \mathbf{n}_{i_{n-j+1}}\}$, для которого $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$, $Q = R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_s} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = R^{(s+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$. Обозначим $R^{(s+1)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(j,j+1)}$.

Пусть $\{k_1, \dots, k_j\} = \{1, \dots, n + 1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\}$. Для всех нормалей $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$ гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ параллельна грани $[B_{k_1}, \dots, B_{k_j}]$, содержащейся в аффинном подпространстве $B_{k_1} + U$, параллельном $(j-1)$ -мерному линейному подпространству $U = \langle \overrightarrow{B_{k_1}, B_{k_2}}, \dots, \overrightarrow{B_{k_1}, B_{k_j}} \rangle$ в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $Q = Q^{(j,j+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, то с каждой точкой $x \in \overset{\circ}{Q}^{(j,j+1)} \cap \partial Q$ на границе ∂Q будут содержаться все точки из $(x + U) \cap Q^{(j,j+1)}$. Все эти точки содержатся в $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$ для всех $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$ и для всех $\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}$.

Справедливо и обратное, если $x \in \overset{\circ}{Q}^{(j,j+1)}$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(Q) \supset x + U$, то обязательно $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$. Приведём этому очевидному факту формальное доказательство от противного. Пусть $\mathbf{u} \notin \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$. Поскольку $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\widehat{\Delta}_n) \supset [B_{k_1}, \dots, B_{k_j}]$, то $\mathbf{u} \in \partial \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1} = \partial[\mathbf{a}_1]$, поэтому $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_2}$, $|\mathbf{a}_2| < |\mathbf{a}_1|$. В результате номер открытого "симплекса" $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_2}$ меньше номера открытого "симплекса" $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$, поэтому, согласно правилу построения ряда (7), $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_2} \subset \mathcal{H}_{s+1}$ и $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{s+1}$. Последнее означает, что $Q^{(j,j+1)} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{u}}^-(Q)$. Но это противоречит тому, что точка $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{u}}^-(Q)$ является внутренней для тела $Q^{(j,j+1)}$.

4.2.2. В случае тела общего положения в обозначениях п. 4.2.1 имеем $j = 1$ и $Q = Q^{(1)} \subsetneq Q^{(2)}$, $Q^{(1)} = R^{(1)}$, $Q^{(2)} = R^{(n+2)}$. Тогда найдутся $s \in \{1, \dots, n + 1\}$ и $\mathbf{a}_0 \subset \mathcal{N}_0$ мощности n , для определённости $\mathbf{a}_0 = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n\}$, для которых $\mathcal{H}_{s+1} = \mathcal{H}_s \setminus \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$, $Q = R^{(s)} \subsetneq R^{(s+1)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(1,2)}$. Поскольку $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$ и $Q = R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(1,2)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, то

$$Q^{(1,2)} \setminus Q = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}} (Q^{(1,2)} \cap \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+) = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}} \left(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+ \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \partial[\mathbf{a}_0]} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- \right). \quad (9)$$

Второе равенство в (9) справедливо согласно далее доказываемым интуитивно очевидным равенствам

$$Q^{(1,2)} \cap \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+ = \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+ \cap \bigcap_{\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^- \quad (10)$$

для всех $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$. Напомним, что $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_0} = [\mathbf{a}_0] \setminus \partial[\mathbf{a}_0]$. Настоящий параграф закончим доказательством равенств (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этих равенств воспользуемся разбиением $S^{n-1} = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0} \sqcup \partial[\mathbf{a}_0] \sqcup (S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0])$, для которого $\partial[\mathbf{a}_0] \subsetneq \mathcal{H}_{s+1} \subseteq \partial[\mathbf{a}_0] \sqcup (S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]) = S^{n-1} \setminus \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$. Векторы из подмножеств $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$, $\partial[\mathbf{a}_0]$, $S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$ сферы S^{n-1} обозначаем соответственно как $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$, $\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]$ и $\mathbf{w} \in S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$. Равенства (10) будут следовать из включений

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+ \cap \bigcap_{\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^- \subset \mathcal{L}_{\mathbf{w}}^- \quad (11)$$

для всех $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$ и $\mathbf{w} \in S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0] \supseteq \mathcal{H}_{s+1} \setminus \partial[\mathbf{a}_0]$.

При $n = 2$ включения (11) очевидны (см. рис. 3). В этом случае $\mathbf{a}_0 = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\} = \partial[\mathbf{a}_0]$, $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \alpha_2 \mathbf{n}_2$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $-\mathbf{v} \in S^1 \setminus [\mathbf{a}_0]$. Включение (11) выполнено, так как точка пересечения прямых L_v и L_w (если таковая есть) находится за пределами отрезка $[C, D]$ или совпадает с одним из его концов.

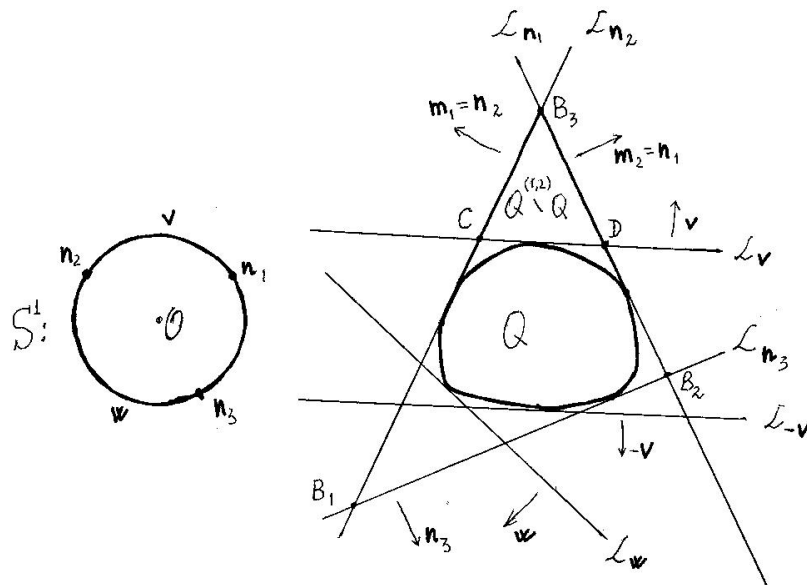


Рис. 3

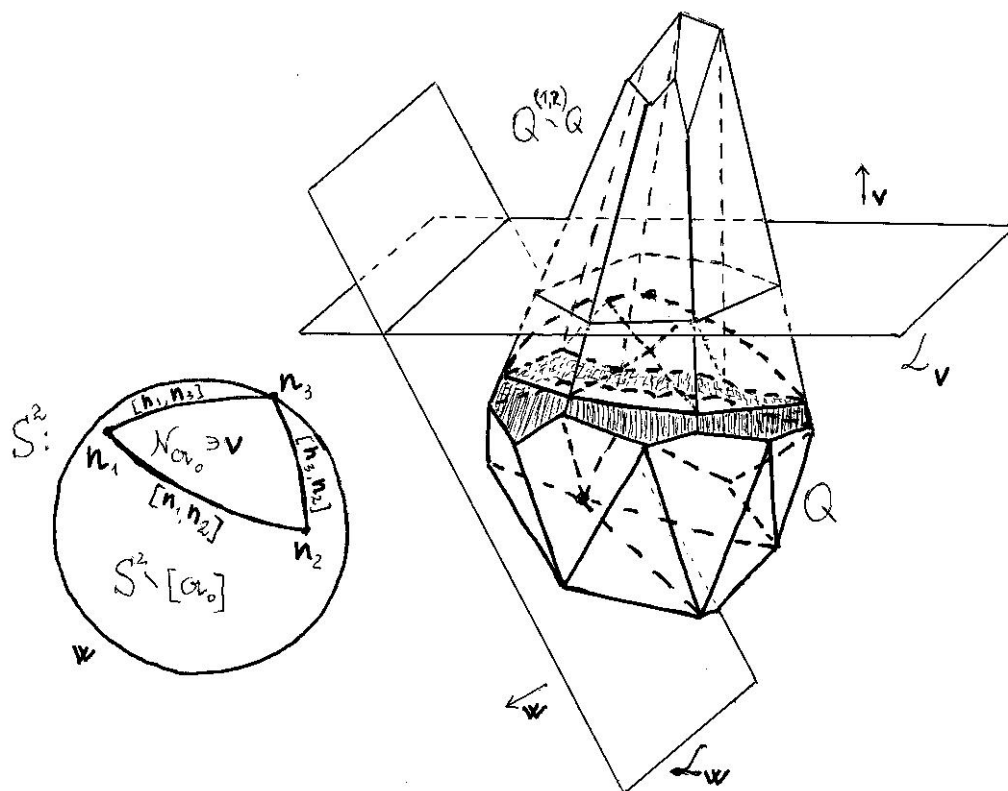


Рис. 4

Пусть $n \geq 3$ (см. рис. 4 для $n = 3$). Без ограничения общности векторы $\overrightarrow{B_{n+1}}, \overrightarrow{B_i}, i = 1, \dots, n$, можно считать взаимно перпендикулярными. В пространстве $\mathbb{R}^n$ предполагаем систему координат с ортонормальным базисом $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i = \alpha_i \overrightarrow{B_{n+1}}, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n$. Тогда $\mathbf{n}_i = -\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$. Для $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$ имеем $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n, v_i < 0, i = 1, \dots, n$. Для $\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]$ имеем $\mathbf{m} = m_1 \mathbf{e}_1 + \dots + m_n \mathbf{e}_n, m_i \leq 0, i = 1, \dots, n$, и существует $j \in \{1, \dots, n\}$ с $m_j = 0$. Наконец, для $\mathbf{w} \in S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$ имеем $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + \dots + w_n \mathbf{e}_n$ и существует $j \in \{1, \dots, n\}$ с $w_j > 0$. Для $\mathbf{w} = -\mathbf{v} \in S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$ включение (11) очевидно. При $\mathbf{w} \neq -\mathbf{v}$ рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ плоскость $U_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ и ортогональное к ней подпространство $U_{n-2} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n = U_2 \oplus U_{n-2}$. Проекция тел Q и $Q^{(1,2)}$ на плоскость U_2 параллельно подпространству U_{n-2} обозначим соответственно как $\hat{Q}$ и $\hat{Q}^{(1,2)}$.

Опорными прямыми для выпуклых областей $\hat{Q}$ и $\hat{Q}^{(1,2)}$ будут соответственно прямые $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \cap U_2$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(Q^{(1,2)}) \cap U_2$ для нормалей $\mathbf{n} \in S^1 = S^{n-1} \cap U_2$. На окружности S^1 будет ровно две различных нормали $\mathbf{m}_+, \mathbf{m}_- \in \partial[\mathbf{a}_0]$. Укажем их. Если нормаль $\mathbf{u} \in S^1$ перпендикулярна $\mathbf{v}$, то $\mathbf{m}_+ = \mathbf{v} \cos \varphi_+ + \mathbf{u} \sin \varphi_+$, где $\varphi_+ = \min_{i=1, \dots, n} \varphi_{+,i}, \varphi_{+,i} \in (0, \pi), (\mathbf{v} \cos \varphi_{+,i} + \mathbf{u} \sin \varphi_{+,i}, \mathbf{e}_i) = 0$ или $\operatorname{ctg} \varphi_{+,i} = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)}{(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i)}$. Аналогично определяется $\mathbf{m}_- = \mathbf{v} \cos \varphi_- - \mathbf{u} \sin \varphi_-$. Множество $S^1 \setminus \{\mathbf{m}_+, \mathbf{m}_-\}$ разбивается на две дуги, на одной нормали из $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$, а на другой – из $S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$. После этого доказательство включения (11) сводится к разобранному случаю $n = 2$ (см. рис. 3). Включения (11) выполнены, так как они имеют место для проекций.

Равенства (10) доказаны.

Доказательство импликации (4) для $P_0 = \Delta_n$ и $n \geq 3$

Доказательство. С помощью аффинных преобразований, сохраняющих $(n+1)$ -мерный объём и оставляющих гиперплоскости L_0, L, L_1 на месте, любой n -мерный симплекс $\Delta_n \subset L_0$ можно перевести в правильный. Поэтому, доказав импликацию (4) для какого-то одного симплекса Δ_n , она будет справедлива для произвольного симплекса Δ_n заданного объёма. Вместо P_1 будем использовать обозначение $Q \subset L_1, Q \not\parallel \Delta_n, V_n(Q) = \underline{V}_n(\Delta_n) = v$. Согласно (3) $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) \geq v$, и если $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) > v$, то в качестве $\tilde{P}_1$ в (4) можно взять $\tilde{Q} \parallel \Delta_n$. Останется проверить, что равенство $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) = v$ невозможно при $Q \not\parallel \Delta_n$. В п. 5.1 это устанавливается для тел Q общего положения, $Q = Q^{(1)}$, а в п. 5.2 для тел Q порядка $j = 2, \dots, n-1$ индукцией по j , в п. 5.2.1 для $n = 3$, а в п. 5.2.2 для $n \geq 4$. Каждый раз, предполагая равенство $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) = v$, будем получать противоречие в виде строгого неравенства $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) > v$.

5.1. Пусть $Q \subset L_1 = \mathbb{R}^n$ является телом общего положения, $Q = Q^{(1)} \subsetneq Q^{(2)}$. Далее рассуждения п. 3.2, относящиеся к $n = 2$ (см. рис. 2), перенесём на случай $n \geq 3$.

В обозначениях далее используемого п. 4.2.2 имеем $V_n(Q^{(1,2)}) = V_n(Q) + \delta = v + \delta, \delta > 0$. Пусть одна конкретная опорная гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\Delta_n)$ содержит какое-либо ребро $[B, C]$ симплекса Δ_n . С помощью гиперплоскости в L_1 с нормалью $\mathbf{u}$ отсечём от тела $Q^{(1,2)}$ тело Ω с $V_n(\Omega) = \delta$. Тогда для $\tilde{Q} = Q^{(1,2)} \setminus \Omega$ имеем $V_n(\tilde{Q}) = V_n(Q) = v$. Обозначим $P = L \cap [\Delta_n \cup Q]$, $P^{(1,2)} = L \cap [\Delta_n \cup Q^{(1,2)}], \tilde{P} = L \cap [\Delta_n \cup \tilde{Q}], V_n(P) \geq v$. Проверим, что $V_n(P) > \underline{V}_n(\tilde{P})$.

Пусть $x \in [\Delta_n \cup Q^{(1,2)}] \setminus [\Delta_n \cup Q]$ и y – точка пересечения луча $A_{n+1} + \alpha \overrightarrow{A_{n+1}}, \alpha \geq 0$, с плоскостью L_1 . Поскольку $x \in [\Delta_n \cup Q^{(1,2)}]$, а $A_{n+1} \in \mathcal{L}_{\mathbf{m}}(\Delta_n)$ для всех $\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]$, то $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^-(\Delta_n, Q)$ для всех $\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]$ и поэтому $y \in \bigcap_{\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^-$. Для некоторого $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$ имеем $x \in \mathring{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+(\Delta_n, Q)$, из-за чего $y \in \mathring{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+$. Согласно (9) имеем $y \in Q^{(1,2)} \setminus Q$. Следовательно $[\Delta_n \cup Q^{(1,2)}] \setminus [\Delta_n \cup Q] = \{A_{n+1}\} \cup (Q^{(1,2)} \setminus Q) \setminus \{A_{n+1}\}$. Таким образом, $V_n(P^{(1,2)}) = V_n(P) + t^n \delta$. Как и в п. 3.2 убеждаемся (см. рис. 2), что

$$V_n(P^{(1,2)}) - V_n(\tilde{P}) \geq V_n([B, C] \cup \Omega) =$$

$$= V_n \left(\bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \left((L \cap [\{B\} \cup \Omega]) + \alpha(1-t)\overrightarrow{B, C} \right) \right) > \\ > V_n(L \cap [\{B\} \cup \Omega]) = t^n \delta,$$

поэтому $V_n(\tilde{P}) < V_n(P^{(1,2)}) - t^n \delta = V_n(P) + t^n \delta - t^n \delta = V_n(P)$.

5.2. Пусть теперь $Q = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j+1)}$, $2 \leq j \leq n-1$. Как и в п. 4.1 здесь нам будет удобно считать симплекс Δ_n правильным и $v = 1$. Обозначим $w(Q) = V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n])$. Пусть, вопреки доказываемому, $w(Q) = 1$.

5.2.1. Если $n = 3$, то $j = 2$, $Q = Q^{(2)} \subsetneq Q^{(3)} = \hat{\Delta}_3$. Тогда, согласно далее используемому п. 4.2.1 для некоторого $s \in \{5, \dots, 10\}$ имеем $Q = R^{(s)} \subsetneq R^{(s+1)}$, и найдётся подмножество $\mathbf{a}_1 \subset \mathcal{N}_0 = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4\}$ мощности $3 - 2 + 1 = 2$, для которого $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$, $Q = R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_s} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = R^{(s+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $R^{(s+1)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(2,3)} \supsetneq Q$. Пусть для определённости $\mathbf{a}_1 = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$. Тогда $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \setminus \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$.

Рассмотрим точку $x \in \overset{\circ}{Q}^{(2,3)} \cap \partial Q$. Согласно п. 4.2.1 вместе с точкой x в $Q^{(2,3)} \cap \partial Q$ содержится отрезок $Q^{(2,3)} \cap \{x + \alpha \overrightarrow{B_3, B_4} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Таким образом (см. рис. 5), если $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$, то $[B_3, B_4] \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$ и $\mathbf{n}_0 \in (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$. Выбрав внутреннюю точку $B'_4 \in [B_1, B_4]$ поближе к

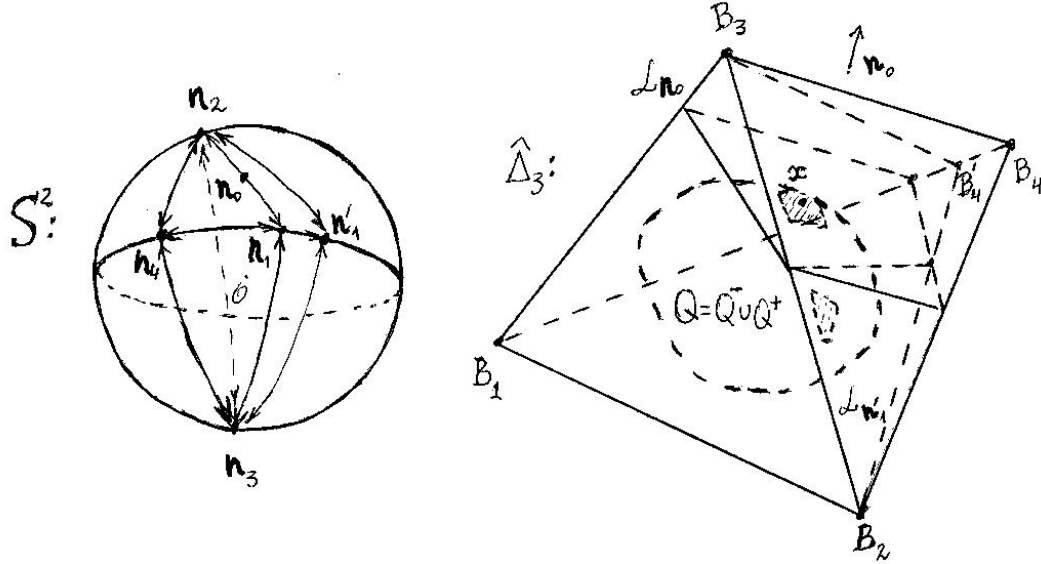


Рис. 5

B_4 , симплекс $\hat{\Delta}_3$ плоскостью $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$, содержащей треугольник $\Delta_{B_3 B_2 B'_4}$, разбиваем на два симплекса. Ориентация плоскости $\mathcal{L}$ выбрана так, что $B_4 \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^+$. Симплекс $\Delta_3 \subset L_0$ разбиваем на два симплекса плоскостью $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)} \subset L_0$, параллельной $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$. Плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$ параллельно перенесём (не выходя из L_1) в положение $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}$ так, что $V_3(\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^+ \cap Q) = V_3(\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)+} \cap \Delta_3)$. Положим $Q^+ = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^+$, $Q^- = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^-$, $Q = Q^- \cup Q^+$, $\Delta_3^- = \Delta_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)-}$, $\Delta_3^+ = \Delta_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)+}$, $\Delta_3 = \Delta_3^- \cup \Delta_3^+$.

Согласно п. 4.1.3 точку $B'_4 \in [B_1, B_4]$ можно выбрать на столько близкой к вершине B_4 , что точка x останется внутри $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^-$, из-за чего тело Q^- будет иметь порядок 1 (относительно симплекса Δ_3^-), что (благодаря параллельности) достаточно проверить в случае $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$. Проверим. Плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3^-) = \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$ содержит только вершину B_3 симплекса $\hat{\Delta}_3^- \supset$

Q^- , иначе она содержала бы (вместе с B_4) три вершины симплекса $\hat{\Delta}_3$. Если, например, $B'_4 \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$, то $\triangle_{B_3 B_4 B'_4} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$ и поэтому $\triangle_{B_3 B_4 B_1} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$ (см. рис. 5). При $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1} \neq \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$ каждая грань симплекса $\hat{\Delta}_3^-$ параллельна соответствующей грани симплекса $\hat{\Delta}_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$, плоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3^-)$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1})$ тоже параллельны, поэтому и в общем случае тело Q^- будет иметь порядок 1 по отношению к симплексу Δ_3^- .

Пусть $V_3(\Delta_3^-) = V_3(Q^-) = v^-$, $V_3(\Delta_3^+) = V_3(Q^+) = v^+$, $v^- + v^+ = 1$. Согласно (3) имеем $w(Q^-) \geq v^-$, $w(Q^+) \geq v^+$. По доказанному в п. 5.2.1 справедливо строгое неравенство $w(Q^-) > v^-$. В результате (см. п. 1.2) имеем

$$1 = w(Q) \geq w(Q^-) + w(Q^+) \geq w(Q^-) + v^+ > v^- + v^+ = 1.$$

Импликация (4) для $P_0 = \Delta_n$ и $n = 3$ доказана.

5.2.2. Пусть теперь $Q = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j+1)}$, $2 \leq j \leq n-1$, $n \geq 4$. Снова согласно далее используемому п. 4.2.1 для некоторых $s \in \{s(j), s(j)+1, \dots, s(j+1)-1\}$ и подмножества $\mathbf{a}_1 \subset \mathcal{N}_0$ мощности $n-j+1$, $\mathbf{a}_1 = \{\mathbf{n}_{i_1}, \dots, \mathbf{n}_{i_{n-j+1}}\}$ имеем: $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$,

$$Q = R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_s} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = R^{(s+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-,$$

$$R^{(s+1)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(j,j+1)} \supsetneq Q = Q^{(j,j+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-.$$

Положим $\{k_1, \dots, k_j\} = \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\}$. Рассмотрим точку $x \in \overset{\circ}{Q}^{(j,j+1)} \cap \partial Q$. Согласно п. 4.2.1 вместе с точкой x в $Q^{(j,j+1)} \cap \partial Q$ содержится $(j-1)$ -мерное тело $Q^{(j,j+1)} \cap (x + U)$, где U — $(j-1)$ -мерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$, параллельное грани $[B_{k_1}, \dots, B_{k_j}]$. Таким образом, если $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$, то $[B_{k_1}, \dots, B_{k_j}] \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$ и, согласно п. 4.2.1, других вершин симплекса $\hat{\Delta}_n$ в $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$ нет, т.е. обязательно $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$.

На ребре $[B_{i_1}, B_{k_j}]$ симплекса $\hat{\Delta}_n = [B_1, \dots, B_{n+1}]$ выберем внутреннюю точку B'_{k_j} ближе к B_{k_j} . Симплекс $[B_1, \dots, B_{n+1}]$ разбиваем на два симплекса гиперплоскостью $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$, содержащей $(n-1)$ -мерный симплекс $\{[B_i] \mid i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, k_j\}\} \cup \{B'_{k_j}\}$, а симплекс $\Delta_n \subset L_0$ разобьём на два симплекса параллельной $\mathcal{L}$ гиперплоскостью $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)} \subset L_0$. Ориентация гиперплоскости $\mathcal{L}$ выбрана так, что $B_{k_j} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^+$.

Гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$ параллельно перенесём в положение $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}$ так, чтобы $V_n(\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^+ \cap Q) = V_n(\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)+} \cap \Delta_n)$. Положим $Q^+ = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^+$, $Q^- = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^-$, $Q = Q^- \cup Q^+$, $\Delta_n^- = \Delta_n \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)-}$, $\Delta_n^+ = \Delta_n \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)+}$, $\Delta_n = \Delta_n^- \cup \Delta_n^+$.

Согласно п. 4.1.3 точку $B'_{k_j} \in [B_{i_1}, B_{k_j}]$ можно выбрать на столько близкой к вершине B_{k_j} , что точка x останется внутри $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^-$, из-за чего многогранник Q^- будет относиться к классу $j-1$, что (благодаря параллельности) достаточно проверить в случае $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$. Проверим. Гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n^-) = \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$ содержит (согласно п. 4.2.1) только вершины $B_{k_1}, \dots, B_{k_{j-1}}$ симплекса $\hat{\Delta}_n^- \supset Q^-$, иначе она содержала бы (вместе с B_{k_j}) $j+1$ вершину симплекса $\hat{\Delta}_n$. Если, например, $B'_{k_j} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$, то $\triangle_{B_{k_{j-1}} B_{k_j} B'_{k_j}} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$ и поэтому $\triangle_{B_{i_1} B_{k_{j-1}} B_{k_j}} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$ (см. рис. 5 для $n=3$).

Коль скоро тело Q^- имеет порядок $j-1$ относительно симплекса Δ_n^- , то, применив индукцию по j и (1), имеем $1 = w(Q) \geq w(Q^-) + w(Q^+) \geq w(Q^-) + V_n(Q^+) > V_n(Q^-) + V_n(Q^+) = V_n(Q) = 1$.

Импликация (4) для $P_0 = \Delta_n$ и $n \geq 4$ доказана.

Этим завершено доказательство теоремы (2) для произвольных выпуклых тел P_0, P_1 и $n \geq 2$.

В заключении автор благодарит Р.Н. Карасёва за оказанные консультации и предоставленную литературу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго, Ю. Д., Залгаллер, В. А. 1980, "Геометрические неравенства." Наука, Л., 288 с.
2. Федерер, Г. 1987, "Геометрическая теория меры." Наука, Москва, 760 с.
3. Булдыгин, В. В., Харазишвили, А. Б., 1985, "Неравенство Брунна – Минковского и его приложения." Наукова Думка, Киев, 200 с.
4. Gardner, R. J. 2002, "The Brunn–Minkowski inequality", *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 39, no. 3, pp. 355–405.
5. Brunn, H. 1887, "Uber Ovale und Eiflachen." Inag. Diss., Munchen, 86 pp.
6. Делоне, Б. Н. 1936, "Доказательство неравенства Брунна – Минковского", *Успехи математических наук*, в. 2, стр. 39–46.
7. Minkowski, H. 1896, 1910, "Geometrie der Zahlen." Leipzig-Berlin, 278 pp.
8. Хадвигер, Г. "Лекции об объёме, площади поверхности и изометрии." Наука, Москва, 416 с.
9. Лейхтвейс, К. 1985, "Выпуклые множества." Наука, М., 336 с.
10. Бляшке, В. 1967, "Круг и шар." Наука, М., 232 с.
11. Schneider, R. 2013, "Convex Bodies: The Brunn–Minkowski theory" *Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its applications*, **151**. Cambridge University Press, Cambridge, xvii+736 pp.
12. Barthe, F. 2006, "The Brunn–Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities", *Proc. International Congress Math.*, Madrid, Spain, pp. 1529–1546.
13. Ball, K. 2004, "An Elementary Introduction to Monotone Transportation" *LNM*, no. 1850, pp. 41–52.
14. Александров, А. Д. 1950, "Выпуклые многогранники." ГИТТЛ, М. – Л., 428 с.
15. Делоне, Б. Н. 1936, "Герман Минковский", *Успехи математических наук*, в. 2, стр. 32 – 38.
16. Bollobas, S., Leader, I. 1996, "Sums in the grid", *Discrete Math.*, no. 6, pp. 31–48.
17. Gardner, R. J., Gronchi, P. 2001, "A Brunn–Minkowski inequality for the integer lattice", *Trans. Amer. Math. Soc.*, no. 353, pp. 3995–4024.
18. Lv, S. 2010, "Dual Brunn–Minkowski inequality for volume differences", *Geom. Dedicata*, no. 145, pp. 169–180.
19. Salani, P. 2011, "Convexity of solutions and Brunn– Minkowski inequalities for Hessian equations in $\mathbb{R}^3$ ", *Advances in Math.*, vol. 229, no. 3, pp. 1924–1948.
20. Bobkov, S. G., Madiman, M. 2012, "Reverse Brunn–Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures", *Journal of Func. Anal.*, no. 7, pp. 3309–3339.
21. Lutwak, E., Boröczky, K. J., Yang, D., Zhang, G. 2012, "The log–Brunn–Minkowski inequality", *Advances in Math.*, no. 3–4, pp. 1974–1997.

22. Gardner, R. J., Hug, D., Weil, W. 2014, "The Orlicz–Brunn–Minkowski theory: A general framework, additions, and inequalities", *J. Diff. Geom.*, no. 3, pp. 427–476.
23. Berndtsson, B. 2015, "A Brunn–Minkowski type inequalities for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kahler geometry", *Inventiones math.*, vol. 200, no. 1, pp. 149–200.
24. Timergaliev, B. S. 2016, "Generalization of the Brunn–Minkowski inequality in the Form of Hadwiger for Power Moments", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 37, no. 6, pp. 794–806.
25. Белоусов, Е. Г. 1977, "Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование." МГУ, М., 196 с.
26. Грубер, П. М., Леккеркеркер, К. Г. 2008, "Геометрия чисел." Наука, М. 716 стр.
27. Айгнер, М., Циглер, Г. 2006, "Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времён Евклида до наших дней." Мир, М., 256 стр.
28. Малышев, Ф. М. 2019, "Элементарное доказательство теоремы Брунна–Минковского", *Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.И. Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров А.И. Виноградова, А.В. Малышева и Б.Ф. Скубенко.* ТГПУ им. Л. Н. Толстого, Тула, стр. 173–177.
29. Малышев, Ф. М. 2020, "Доказательство теоремы Брунна – Минковского элементарными методами", *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз.*, **182**, ВИНТИ РАН, М., 70–94.
30. Малышев, Ф. М. 2019, "Новое доказательство неравенства Брунна–Минковского", *Классическая и современная геометрия. Материалы Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения В. Т. Базылёва.* МПГУ, М., стр. 111–113.
31. Малышев, Ф. М. 1997, "Оптимизационная задача для неравенства Брунна–Минковского", *Труды МИАН*, **218**, Наука, М., стр. 262–265.

REFERENCES

1. Burago, Ju. D., Zalgaller V. A. 1980, "Geometricheskie neravenstva." [*Geometric inequality*], Nauka, Leningrad, 288 pp. (Russian)
2. Federer, H. 1969, "Geometric measure theory." Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 676 pp.
3. Buldigin, V. V., Charasishvili, A. B. 1985, "Neravenstvo Brunna – Minkovskogo i ego prilozhenij" [*Brunn – Minkowski inequality and its applications*], Naukova Dumka, Kiev, 200 pp.
4. Gardner, R. J. 2002, "The Brunn–Minkowski inequality", *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 39, no. 3, pp. 355–405.
5. Brunn, H. 1887, "Uber Ovale und Eiflachen." Inag. Diss., Munchen, 86 pp.
6. Delaunay, B. N. 1936, "Proof of the Brunn–Minkowski inequality", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, no. 2. pp. 39–46.
7. Minkowski, H. 1896, 1910, "Geometrie der Zahlen." Leipzig–Berlin, 278 pp.

8. Hadwiger, Dr., H. 1957, "Vorlesungen über inhalt, oberfläche und isoperimetrie." Berlin Göttingen Heidelberg, 416 pp.
9. Leichtweis, K. 1985, "Konvexe Mengen." VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 336 pp.
10. Blaschke W. 1967, "Kreis und kugel." Berlin, 232 pp.
11. Schneider, R. 2013, "Convex Bodies: The Brunn–Minkowski theory" *Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its applications*, **151**. Cambridge University Press, Cambridge, xvii+736 pp.
12. Barthe, F. 2006, "The Brunn–Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities", *Proc. International Congress Math.*, Madrid, Spain, pp. 1529–1546.
13. Ball, K. 2004, "An Elementary Introduction to Monotone Transportation" *LNM*, no. 1850, pp. 41–52.
14. Alexandrov, A. D., 1950, "Vipuklie mnogogranniki" [*Convex Polyhedra.*], GITTL, M.–L., 428 pp. (Russian)
15. Delaunay, B. N., 1936, "Herman Minkowski", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, no. 2. pp. 32–38.
16. Bollobas, S., Leader, I. 1996, "Sums in the grid", *Discrete Math.*, no. 6, pp. 31–48.
17. Gardner, R. J., Gronchi, P. 2001, "A Brunn–Minkowski inequality for the integer lattice", *Trans. Amer. Math. Soc.*, no. 353, pp. 3995–4024.
18. Lv, S. 2010, "Dual Brunn–Minkowski inequality for volume differences", *Geom. Dedicata*, no. 145, pp. 169–180.
19. Salani, P. 2011, "Convexity of solutions and Brunn– Minkowski inequalities for Hessian equations in $\mathbb{R}^3$ ", *Advances in Math.*, vol. 229, no. 3, pp. 1924–1948.
20. Bobkov, S. G., Madiman, M. 2012, "Reverse Brunn–Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures", *Journal of Func. Anal.*, no. 7, pp. 3309–3339.
21. Lutwak, E., Boröczky, K. J., Yang, D., Zhang, G. 2012, "The log–Brunn–Minkowski inequality", *Advances in Math.*, no. 3–4, pp. 1974–1997.
22. Gardner, R. J., Hug, D., Weil, W. 2014, "The Orlicz–Brunn–Minkowski theory: A general framework, additions, and inequalities", *J. Diff. Geom.*, no. 3, pp. 427–476.
23. Berndtsson, B. 2015, "A Brunn–Minkowski type inequalities for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kahler geometry", *Inventiones math.*, vol. 200, no. 1, pp. 149–200.
24. Timergaliev, B. S. 2016, "Generalization of the Brunn–Vinkowski inequality in the Form of Hadwiger for Power Moments", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 37, no. 6, pp. 794–806.
25. Belousov, E. G. 1977, "Vvedenie v vipuklii analiz i celochislennoe programmirovaniye." [*Introduction to Convex Analysis and Integer Programming.*], MGU, Moscow, 196 pp. (Russian)
26. Gruber P. M., Lekkerkerker, C. G. 1987, "Geometry of numbers." North–Holland, Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo, 716 pp.
27. Aigner M., Ziegler G. M. 1998, "Proofs from the book." Springer, Berlin, 256 pp.

28. Malyshev F. M. 2019, "An elementary proof of the Brunn - Minkowski theorem." *Materiali XVII Mejdunarodnoi konferencii "Algebra, teorij chisel i diskretnaj geometrij"* (Proc. 17th Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry"). TGPU, Tula, pp. 173–177.
29. Malyshev F. M. 2020, "Proof of the Brunn - Minkowski theorem by elementary methods" ,*Itogi nauki i tehniki. Ser. Contemporary math. and its appl. Thematic overview.* **182**, VINITI RAN, Moscow, pp. 70–94.
30. Malyshev F. M. 2019, "New proof of the Brunn - Minkowski inequality." *Materiali Mejdunarodnoi konferencii "Klassicheskaj i sovremennaj geometrij"* (Proc. Int. Conf. "Classical and modern geometry"). MPGU, Moscow, pp. 111–113.
31. Malyshev F. M. 1997, "Optimization problem for the Brunn-Minkowski inequality", *Trudi MIAN*, Nauka, Moscow, pp. 262–265.