ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144

Неравенства типа Джексона — Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана

М. Р. Лангаршоев

Лангаршоев Мухтор Рамазонович — кандидат физико-математических наук, Подмосковный колледж «Энергия» (г. Старая Купавна).
e-mail: mukhtor77@mail.ru

Аннотация

В экстремальных задачах теории приближения функций важную роль играют точные неравенства, содержащие оценки величины наилучшего полиномиального приближения посредством усредненных значений модулей непрерывности высших порядков производных функций. В настоящей работе приводится неравенство типа А.А. Лигуна – двухсторонняя оценка наилучших весовых приближений аналитических в единичном круге функций из пространства Бергмана $B_{2,\gamma}$. Полученные неравенства позволяют установить новые связи между конструктивными и структурными свойствами функций а также для соответствующих классов функций дают оценку сверху поперечников. Вычислены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых усредненными с положительным весом модулями непрерывности высших порядков производных функций в пространстве $B_{2,\gamma}$.

Ключевые слова: аналитическая функция, модуль непрерывности, наилучшее приближение, весовое пространство Бергмана, n-поперечники.

Библиография: 12 названия.

Для цитирования:

М. Р. Лангаршоев. Неравенства типа Джексона — Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 135–144.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144

Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space

M. Langarshoev

Langarshoev Mukhtor Ramazonovich — candidate of physical and mathematical sciences, College near Moscow «Energia» (Staraya Kupavna).
e-mail: mukhtor77@mail.ru

Abstract

In extremal problems of the theory of approximation of functions an important role is played be exact inequalities of the value of the best polynomial approximation by means of averaged values of the modules of continuity of higher orders of the derived functions. In this paper we present an inequality of type Ligun-two-sided estimate for the best weighted approximate analytic functions in the unit disc from the Bergman space $B_{2,\gamma}$. The resulting inequalities allow us to establish new connections between the constructive and structural properties of the functions and for the corresponding classes of functions give an estimate from the top of the widths. The exact values of Bernstein, Kolmogorov, Gelfand, linear and projection n-widths of classes of analytic functions in unit discs defined by modules of continuity of higher orders of the derived functions in the space $B_{2,\gamma}$ averaged with positive weight are calculated.

Keywords: analytical function, modulus of continuity, best approximation, weight Bergman's space, n-widths.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
M. Langarshoev, 2021, "Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 135–144.

Введение

К настоящему времени задаче, связанной с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина для функций одной действительной переменной, посвящено значительное множество работ (см., например, работы [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] и литературу в них).

Используя вопросы наилучшего приближения функций тригонометрическими полиномами М.Ш. Шабозов и Г.А. Юсупов обобщили результаты А.А.Лигуна [3], полученные для 2π периодических функций. Ими было доказано, что если $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$, то справедливы неравенства

$$\frac{1}{A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{E_n(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)_2 \varphi(t)dt\right)^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf\limits_{n \leq k < +\infty} A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)}, \tag{1}$$

где

$$A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p},$$

и

$$\omega_m\left(f^{(r)},\delta\right)=\sup_{|t|\le\delta}\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k f^{(r)}(x+kt)\right\|$$

– модуль непрерывности m-го порядка производной $f^{(r)}(x)\in L_2^{(r)}$.

В настоящей работе мы распространяем неравенства (1) на случай аналитических в единичном круге функций $f(z)$, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, где $1\le q\le\infty$, $\gamma=\gamma(|z|)>0$ (см. [8]).

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Известно, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,\ z=\rho e^{it},0\le\rho<1$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, если

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q}<\infty,\ 1\le q\le\infty,$$

где $\gamma(\rho)\ge 0$ – суммируемая на $[0,1]$ функция. Множество всех комплексных алгебраических полиномов степени $\le n-1$ обозначим

$$\mathcal{P}_n=\left\{p_n(z):p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k,a_k\in\mathbb{C}\right\}.$$

Через

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}}=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}}:\ p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f\in B_{q,\gamma}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Величину

$$\omega_m(f,t)_{B_{q,\gamma}}=\sup\left\{\|\Delta_h^m(f,\cdot,\cdot)\|_{B_{q,\gamma}}:|h|\le t\right\}$$

$$=\sup\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|\Delta_h^m(f;\rho,u)|^q d\rho du\right)^{1/q}:|h|\le t\right\},$$

где

$$\Delta_h^m(f;\rho,u)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

– разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка.

Для $r\in\mathbb{Z}_+$ обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ обозначим через $f^{(r)}(z)=d^r f/dz^r$ $(f^{(0)}(z)\equiv f(z))$. Всюду далее полагаем

$$\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}=\left\{f(z)\in B_{q,\gamma}:\ \left\|z^r f^{(r)}\right\|_{q,\gamma}<\infty\right\},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le q\le\infty.$$

Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h)=\sup_{\substack{f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}}\frac{2^{m/2}E_n(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(z^r f^{(r)},t)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},\tag{2}$$

где $m, n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < p < \infty, \quad \varphi(t) \geq 0, \quad 0 < t \leq h, \quad 0 < h \leq \pi/n$.

Пусть X банахово пространство, S – единичный шар в X, $\mathfrak{N}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество X, $\Lambda_n \subset X$ – n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset X$ – подпространство коразмерности n, $\mathcal{L} : X$ – непрерывный линейный оператор, $\mathcal{L}^{\perp} : X \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup \left\{ \sup \left\{ \varepsilon > 0; \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N} \right\} : \Lambda_{n+1} \subset X \right\},$$

$$d^n(\mathfrak{N}, X) = \inf \left\{ \sup \left\{ \|f\|_X : \ f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n \right\} : \Lambda^n \subset X \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \|f - \varphi\|_X : \ \varphi \in \Lambda_n \right\} : f \in \mathfrak{N} \right\} : \Lambda_n \subset X \right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{N}, X) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}f\|_X : \ f \in \mathfrak{N} \right\} : \ \mathcal{L}X \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset X \right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{N}, X) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}^{\perp} f\|_X : \ f \in \mathfrak{N} \right\} : \mathcal{L}^{\perp} X \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset X \right\},$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками в пространстве X. Поскольку X – гильбертово пространство, то между перечисленными выше n-поперечниками выполняются соотношения [9]:

$$b_n(\mathfrak{N}, X) \leq d^n(\mathfrak{N}, X) \leq d_n(\mathfrak{N}, X) = \lambda_n(\mathfrak{N}, X) = \Pi_n(\mathfrak{N}, X). \tag{3}$$

Также полагаем

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) := \sup\{E_n(f) : \ f \in \mathfrak{N}\}.$$

Пусть $\Phi(t)$ $(t \geq 0)$ – произвольная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W^{(r)}_{m,p}(h, \Phi)$, $m, r \in \mathbb{N}, \quad 0 < p \leq 2$, обозначим класс функций $f \in \mathcal{B}^{(r)}_{q,\gamma}$, для которых при любых $h > 0$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t \omega^p_m(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h).$$

Положим

$$(1 - \cos nt)^m_* = \begin{cases} (1 - \cos nt)^m, & \text{если} \quad nt < \pi, \\ 2^m, & \text{если} \quad nt \geq \pi. \end{cases}$$

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p < 2$, $0 < h \leq \pi/n$, φ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\{b_{n,m,r,p}(\varphi; h)\}^{-1} \leq \mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} b_{k,m,r,p}(\varphi; h) \right\}^{-1}, \tag{4}$$

где

$$b_{k,m,r,p}(\varphi; h) = \left(\alpha^p_{k,r} \int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}, \tag{5}$$

$$\alpha_{k,r} = k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot (k - r + 1), \ k > r.$$

Доказательство. Известно [8], что для произвольной аналитической функции $f(z) \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} = 2^m \sup_{|u|\le t} \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 \left(1-\cos ku\right)^m \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho. \tag{6}$$

Воспользуемся следующим неравенством [10]

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right)^{1/2},$$

справедливым при $0 < p \le 2$ и любом $h \in \mathbb{R}_+$. С учетом соотношения (6) имеем

$$\left(\int_0^h \omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$\ge \left\{\int_0^h \left[2^m \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 (1-\cos kt)^m \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\,[\varphi(t)]^{2/p}\right]^{p/2} dt\right\}^{1/p}$$

$$\ge 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left[|c_k|^p \alpha_{k,r}^p \int_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt \left(\int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2}\right]^{2/p}\right\}^{1/2}$$

$$= 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \left[\left(\alpha_{k,r}^p \int_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)\left(\int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2}\right]^{2/p}\right\}^{1/2}$$

$$= 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \left[(b_{k,m,r,p}(\varphi;h))^p \left(\int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2}\right]^{2/p}\right\}^{1/2}$$

$$\ge 2^{m/2} \inf_{n\le k<\infty} b_{k,m,r,p}(\varphi;h)\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}$$

$$= 2^{m/2} \inf_{n\le k<\infty} b_{k,m,r,p}(\varphi;h) E_n(f)_{2,\gamma}.$$

Таким образом,

$$\frac{2^{m/2}E_n(f)_{2,\gamma}}{\left(\int_0^h \omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \le \left\{\inf_{n\le k<\infty} b_{k,m,r,p}(\varphi;h)\right\}^{-1}, \tag{7}$$

и оценка сверху получена. Чтобы получить оценки снизу в неравенстве (4) введем в рассмотрение функцию $f_0(z)=z^n\in\mathcal{B}^{(r)}_{q,\gamma}$. Для этой функции непосредственными вычислениями получаем

$$E_n(f_0)_{2,\gamma}=\left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2},$$

$$\omega_m\left(z^rf_0^{(r)},t\right)_{2,\gamma}=2^{m/2}\alpha_{n,r}\left(1-\cos nt\right)^{m/2}E_n(f_0)_{2,\gamma}.$$

Используя два последних соотношения, будем иметь

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h)\geq\frac{2^{m/2}E_n(f_0)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p\left(z^rf_0^{(r)},t\right)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}$$

$$=\frac{1}{\left(\alpha_{n,r}^p\int\limits_0^h\left(1-\cos nt\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left\{b_{n,m,r,p}(\varphi;h)\right\}^{-1}. \tag{8}$$

Сравнивая оценку сверху (7) и оценку снизу (8), получаем утверждение теоремы 1.

Отметим, что неравенства типа (4) при $p=2$ для классов аналитических функций в пространстве Харди H_p и классов аналитических функций в пространстве Бергмана B_p были получены Г.А. Юсуповым [11] и М.Р. Лангаршоевым [12] соответственно.

Лемма. *Пусть весовая функция* $\varphi(t)\geq 0$ *непрерывно дифференцируемо на отрезке* $[0,h]$ *и пусть для всех* $0\leq t\leq h,\quad 1\leq p\leq 2$ *выполнено неравенство*

$$\left(\sum_{s=0}^{r-1}\frac{p}{k-s}-\frac{1}{k}\right)\varphi(t)-\frac{1}{k}t\varphi^{'}(t)\geq 0. \tag{9}$$

Если

$$\inf_{n\leq k<\infty}b_{k,m,r,p}(\varphi;h)=b_{n,m,r,p}(\varphi;h),$$

то

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h)=\left\{b_{n,m,r,p}(\varphi;h)\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Используя вид величины (5) достаточно показать, что при выполнении неравенства (9) функция

$$y(k)=\alpha_{k,r}^p\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt \tag{11}$$

при $k\geq n$ является возрастающей. Из соотношения (11) имеем

$$y^{'}(k)=\alpha_{k,r}^p\sum_{s=0}^{r-1}\frac{p}{k-s}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt$$

$$+\alpha_{k,r}^p\int\limits_0^h\frac{d}{dk}(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt. \tag{12}$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$\frac{d}{dk}(1-\cos kt)^{mp/2}=\frac{t}{k}\cdot\frac{d}{dt}(1-\cos kt)^{mp/2}$$

и методом интегрирования по частям, из равенства (12) в силу (9) получаем

$$y^{'}(k)=\alpha_{k,r}^{p}\sum_{s=0}^{r-1}\frac{p}{k-s}\int\limits_{0}^{h}(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt$$

$$+\alpha_{k,r}^{p}\frac{1}{k}\int\limits_{0}^{h}[t\varphi(t)]d\left[(1-\cos kt)^{mp/2}\right]=\alpha_{k,r}^{p}\left\{\frac{1}{k}h\varphi(h)(1-\cos kh)^{mp/2}\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{h}(1-\cos kt)^{mp/2}\left[\left(\sum_{s=0}^{r-1}\frac{p}{k-s}-\frac{1}{k}\right)\varphi(t)-\frac{1}{k}t\varphi^{'}(t)\right]dt\right\}\geq 0.$$

Отсюда вытекает, что $\inf\{y(k):\,k\geq n\}=y(n)$. Таким образом

$$\inf_{n\leq k<\infty}b_{k,m,r,p}(\varphi;h)=b_{n,m,r,p}(\varphi;h),$$

из которого в силу двойного неравенства (4) получаем (10). Лемма доказано. Из доказанной леммы вытекает следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\varphi(t)\equiv t,\quad m,n\in\mathbb{N},\quad r\in\mathbb{Z}_{+},\quad \dfrac{2}{k}\left(\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1}\frac{1}{k-s}\right)^{-1}\leq p\leq 2,\quad 0<h\leq \pi/n$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(t,h)=\{b_{n,m,r,p}(t;h)\}^{-1}=\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_{0}^{h}t(1-\cos nt)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть* $m,n,r\in\mathbb{N}$, $2/r<p\leq 2$ *и функция* Φ *при любых значениях* $h\in\mathbb{R}_{+}$ *удовлетворяет условию*

$$(nh)^{2}\Phi^{p}(h)\int\limits_{0}^{\pi/n}t\,(1-\cos nt)^{mp/2}\,dt\geq\pi^{2}\Phi^{p}(\pi/n)\int\limits_{0}^{h}t\,(1-\cos nt)_{*}^{mp/2}\,dt. \tag{14}$$

Тогда справедливо равенство

$$\sigma_{n}\left(W_{m,p}^{(r)}\,(h,\Phi)\,,B_{2,\gamma}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)}n^{2/p}\alpha_{n,r}}\left(\frac{1}{\pi^{2}}\int\limits_{0}^{\pi/n}t\,(1-\cos nt)^{mp/2}\,dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\pi/n\right), \tag{15}$$

где $\sigma_{n}(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Доказательство. Для произвольной функции $f\in B_{2,\gamma}^{(r)}$ из соотношение (13) имеем

$$E_{n}(f)_{B_{2,\gamma}}\leq 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_{0}^{h}t(1-\cos nt)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\left(\int\limits_{0}^{h}\omega_{m}^{p}(z^{r}f^{(r)},t)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Полагая в этом неравенстве $h=\dfrac{\pi}{n}$, с учётом определения класса $W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$ запишем оценки сверху для проекционного n-поперечника

$$\Pi_n\left(W_{m,p}^{(r)}\left(h,\Phi\right),B_{2,\gamma}\right)\le\mathcal{E}_n\left(W_{m,p}^{(r)}\left(h,\Phi\right),B_{2,\gamma}\right)$$

$$\le\frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)}n^{2/p}\alpha_{n,r}}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/n}t\left(1-\cos nt\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\pi/n\right). \tag{16}$$

Для получения соответствующей оценки снизу для бернштейновского n-поперечника $b_n\left(W_{m,p}^{(r)}\left(h,\Phi\right),B_{2,\gamma}\right)$ введём в рассмотрение шар

$$S_{n+1}$$

$$=\left\{p_n:\|p_n(z)\|\le\frac{1}{2^{(pm+2)/2p}n^{2/p}\alpha_{n,r}}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/n}t\left(1-\cos nt\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\pi/n\right)\right\}.$$

Покажем, что $S_{n+1}\in W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$. Для произвольного $p_n(z)\in B_{2,\gamma}$ из соотношение (6) имеем

$$\omega_m^2(z^rp_n^{(r)},t)_{2,\gamma}\le2^m\alpha_{n,r}^2\left(1-\cos nt\right)_*^m\|p_n\|^2. \tag{17}$$

В силу условия (14) и неравенства (17), с учётом определения класса $W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$ получаем

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\omega_m^p(z^rp_n^{(r)},t)_{2,\gamma}dt$$

$$\le\frac{2}{h^2}\cdot2^{mp/2}\alpha_{n,r}^p\int\limits_0^h t(1-\cos nt)_*^{mp/2}dt$$

$$\times\left[\frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)}n^{2/p}\alpha_{n,r}}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/n}t\left(1-\cos nt\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\pi/n\right)\right]^p$$

$$=\left(\frac{\pi}{nh}\right)^2\cdot\frac{\int\limits_0^h t(1-\cos nt)_*^{mp/2}dt}{\int\limits_0^{\pi/n}t\left(1-\cos nt\right)^{mp/2}dt}\Phi^p(\pi/n)\le\Phi^p(h).$$

Отсюда следует, что шар S_{n+1} содержится в классе $W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, запишем соответствующую оценку снизу

$$b_n\left(W_{m,p}^{(r)}\left(h,\Phi\right),B_{2,\gamma}\right)$$

$$\ge\frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)}n^{2/p}\alpha_{n,r}}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/n}t\left(1-\cos nt\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\pi/n\right). \tag{18}$$

Из сопоставления неравенств (16) и (18) с учётом неравенства (3) получим утверждение теоремы 2.

Заключение

В настоящей работе аппроксимативные неравенства типа А.А. Лигуна для 2π-периодических функций распространены на случай аналитических в единичном круге функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана. Для некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ вычислены точные значения n-поперечников по Бернштейну, Гельфанду и Колмогорову, а также линейных и проекционных n-поперечников.

Автор искренне признателен В.И.Иванову за ценные замечания при подготовке статьи к печати.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем.заметки. 1967. т. 2, №5. с. 513–522.

2. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем.заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.

3. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем.заметки. 1978. Т. 24, № 6. С.785–792.

4. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула.: ТулГУ, 1995. 192 с.

5. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем.заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.

6. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем.заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.

7. Лангаршоев М.Р. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, №5. С. 90–105.

8. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана. // Доклады РАН. 2007. Т. 412, № 4. С. 466–469.

9. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М.: Изд-во МГУ, 1976. 324 с.

10. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // М.: Наука, 1969.

11. Юсупов Г.А. Наилучшее приближение аналитических в круге функций в пространстве Харди // Дисс.... канд. физ.-мат. наук. Душанбе, 2004. 86 с.

12. Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение аналитических функций в пространстве Бергмана // Дисс.... канд. физ.-мат. наук. Душанбе, 2008. 88 с.

REFERENCES

1. Chernykh N.I., 1967, "Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2" , *Math. Notes*, vol. 2., no 5, pp. 803–808.
2. Taikov L.V., 1976, "Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2" , *Math. Notes*, vol. 20, no 3, pp. 797–800.
3. Ligun A.A. 1978, "Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in an L_2 space" , *Math. Notes*, vol. 24, no 6, pp. 917–921.
4. Ivanov V.I., Smirnov O.I., 1995, "Jackson constants and Yung constants in L_p-spaces" , *Tula: TSU*, 192 p. [in Russian]
5. Shabozov M.Sh, Yusupov G.A., 2011, "Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths" , *Math. Notes*, vol. 90, no 5, pp. 748–757.
6. Vakarchuk S.B, Zabutnaya V.I., 2012, "Jackson–Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2" , *Math. Notes*, vol. 92, no 4, pp. 458–472.
7. Langarshoev M.R., 2013, "The exact inequalities of Jackson-Stechkin type and the width values for some classes of functions in L_2 space" , *Model. and analysis of inform. system*, vol. 20, no 5, pp. 90-105. [in Russian]
8. Shabozov M.Sh., Shabozov O.Sh., 2007, "On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces" , *Dokl. of RAS*, vol. 412, no 4, pp. 466-469.
9. Tikhomirov V.M., 1976, "Some problems of theory of approximation" , *Moscow: MSU*, 324 p. [in Russian]
10. Nikolskii S.M., 1977, "Approximation of functions of several vaiables and embedding theorems" , *Moscow: Nauka*, 455 p. [in Russian]
11. Yusupov G.A., 2004, "The best approximation of analytic functions in the circle in Hardy space" , *Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences*, Dushanbe, 86 p. [in Russian]
12. Langarshoev M.R., 2008, "The best approximation of analytic functions in the Bergman space" , *Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences*, Dushanbe, 88 p. [in Russian]