ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-104-120

Об аналоге задачи Гельфонда
для обобщенных разложений Цеккендорфа

А. А. Жукова, А. В. Шутов

Жукова Алла Адольфовна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Владимирский филиал (г. Владимир).

e-mail: georg967@mail.ru

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).

e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Гельфонд доказал что при условии взаимной простоты $b - 1$ и d суммы цифр разложений натуральных чисел в b -ичную систему счисления равномерно распределены по арифметическим прогрессиям с разностью d . Позднее аналогичный результат был получен для разложений натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям.

Мы рассматриваем вопрос об остаточном члене в соответствующей асимптотике и изучаем дихотомию между логарифмической и степенной оценкой остаточного члена. В случае $d = 2$ получены некоторые достаточные условия справедливости логарифмической оценки. С их помощью показано, что логарифмическая оценка имеет место для разложений по всем рекуррентным последовательностям порядка 2 и бесконечному семейству последовательностей порядка 3, а также строим пример линейной рекуррентной последовательности произвольного порядка с таким свойством. С другой стороны, мы приводим пример линейной рекуррентной последовательности третьего порядка, для которой логарифмическая оценка не имеет места. Также нами показано, что для $d = 3$ логарифмическая оценка не имеет места уже в простейшем случае разложений по числам Фибоначчи.

Кроме того, мы рассматриваем разложения натуральных чисел по знаменателям подходящих дробей к произвольному иррациональному числу. В этом случае нами доказана равномерность распределения сумм цифр по арифметическим прогрессиям с разностью 2 с логарифмическим остаточным членом.

Ключевые слова: числа Фибоначчи, обобщенные разложения Цеккендорфа, линейные рекуррентные последовательности, цепные дроби, суммы цифр, задача Гельфонда.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. А. Жукова, А. В. Шутов. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 104–120.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-104-120

On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations

A. A. Zhukova, A. V. Shutov

Zhukova Alla Adolfovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation, Vladimir branch (Vladimir).

e-mail: georg967@mail.ru

Shutov Anton Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs (Vladimir).

e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Gelfond proved that for coprime $b - 1$ and d sums of digits of b -ary expressions of natural numbers are uniformly distributed on arithmetic progressions with the common difference d . Later, similar result was proved for the representations of natural numbers based on linear recurrent sequences.

We consider the remainder term of the corresponding asymptotic formula and study the dichotomy between the logarithmic and power estimates of the remainder term. In the case $d = 2$, we obtain some sufficient condition for the validity of the logarithmic estimate. Using them, we show that the logarithmic estimate holds for expansions based on all second-order linear recurrent sequences and on infinite family of third-order sequences. Also we construct an example of the linear recurrent sequence of an arbitrary order with such property. On the other hand, we give an example of a third-order linear recurrent sequence for which the logarithmic estimate does not hold. We also show that for $d = 3$ the logarithmic estimate does not hold even in the simplest case of the expansions based on Fibonacci numbers.

In addition, we consider the representations of natural numbers based on the denominators of partial convergents of the continued fraction expansions of irrational numbers. In this case, we prove the uniformity of the distribution of sums of digits over arithmetic progressions with the common difference 2 with the logarithmic remainder term.

Keywords: Fibonacci numbers, generalized Zeckendorf representations, linear recurrent sequences, continued fractions, sums of digits, Gelfond problem.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

A. A. Zhukova, A. V. Shutov, 2021, “On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 104–120.

Введение

Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k b^k,$$

где $n_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ и $n_k = 0$ при $k > k_0(n)$ – разложение n в b -ичной системе счисления. Пусть $N_{d,a}^{(b)}(n)$ – количество натуральных чисел, меньших n , для которых $\sum_{k=0}^{\infty} n_k \equiv a \pmod{d}$.

А.О. Гельфонд показал [3], что при условии взаимной простоты d и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(n) = \frac{n}{d} + O(n^{\mu}).$$

С другой стороны, пусть $\{F_k\}$: $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ – последовательность чисел Фибоначчи. Хорошо известно, что каждое натуральное n имеет разложение [4]

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k F_k,$$

где $f_k \in \{0, 1\}$, $f_k f_{k+1} = 0$, и $f_k = 0$ при $k > k_0(n)$. Поэтому можно определить

$$N_{d,a}^{(F)}(n) = \#\{m < n : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(m) \equiv a \pmod{d}\}.$$

Данное представление известно как разложение Цеккендорфа или же как система счисления Фибоначчи.

В этом случае известно, что

$$N_{2,a}^{(F)}(n) = \frac{n}{2} + O(\log n). \quad (1)$$

Данный результат можно найти, например в [5], где получены также существенно более глубокие результаты об остаточном члене асимптотической формулы (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По всей видимости (1) было известно задолго до работы [5]. Авторы были бы благодарны за информацию о соответствующих работах.

Последовательность Фибоначчи является простейшим примером линейной рекуррентной последовательности. В общем случае удобно рассматривать класс линейных рекуррентных последовательностей $\{T_k\}$, удовлетворяющих следующим условиям [6], [8]:

1. Существуют целые числа $a_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq r-1$) и $a_r > 0$ такие, что при $k \geq 0$ справедливо равенство

$$T_{k+r} = a_1 T_{k+r-1} + \dots + a_k T_r.$$

2. $T_0 = 1$ и

$$T_k \geq a_1 T_{k-1} + \dots + a_k T_0 + 1 \quad \text{при всех } 1 \leq k < r.$$

3. Коэффициенты рекуррентного соотношения удовлетворяют условию Парри [12], т.е.

$$(a_k, a_{k+1}, \dots, a_r) \preceq (a_1, a_2, \dots, a_{r-k+1})$$

при $1 < k \leq r$, где $\preceq$ обозначает лексикографический порядок.

Любое натуральное число n можно представить в виде:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} t_k T_k, \quad (2)$$

где $t_k \in \mathbb{Z}$, $t_k \geq 0$, причем, коэффициенты t_k подбираются так, что для любого $k \geq 0$ справедливо неравенство

$$\left| n - \sum_{i=k}^{\infty} t_i T_i \right| < T_k.$$

Последнее условие означает, что разложение (2) получается по так называемому жадному алгоритму.

Разложение (2) позволяет ввести величину

$$N_{d,a}^{(T)}(n) = \#\{m < n : \sum_{k=1}^{\infty} t_k(m) \equiv a \pmod{d}\}$$

и задать вопрос о ее асимптотике.

В [6] показано, что

$$N_{2,a}^{(T)}(n) = \frac{n}{2} + O(n^{\mu}) \quad (3)$$

для некоторого $\mu < 1$.

Более того, в [8] показано, что при условии взаимной простоты d и $a_1 + a_2 + \dots + a_d - 1$ имеет место асимптотика

$$N_{d,a}^{(T)}(n) = \frac{n}{d} + O(n^{\mu}) \quad (4)$$

для некоторого $\mu < 1$. Значения μ в (3) и (4) зависят от выбора линейной рекуррентной последовательности, а также от d .

Заметим, что остаточный член в (1) является логарифмическим, а в (3) и (4) – степенным. Поэтому встает естественный вопрос о том, каков правильный порядок этого остаточного члена. В настоящей работе мы делаем первые шаги к ответу на данный вопрос, приводя новые примеры аналога асимптотики (1) с логарифмическим остатком, а также иллюстрируем примерами ситуации, когда логарифмическая оценка остатка не имеет места.

Последовательность чисел Фибоначчи имеет еще одну важную интерпретацию: ее можно рассматривать как последовательность знаменателей подходящих дробей к $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Выберем произвольное иррациональное $\alpha \in [0; 1)$. Пусть $\{q_k\}$ – последовательность неполных частных разложения α в цепную дробь, $\{Q_k\}$ – последовательность знаменателей соответствующих подходящих дробей. Тогда любое натуральное n однозначно представимо в виде [11]

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} z_k Q_k,$$

где $0 \leq z_0 \leq q_1 - 1$, а для $k \geq 1$ $0 \leq z_k \leq q_{k+1}$, причем из $z_k = q_{k+1}$ следует, что $z_{k-1} = 0$. Поэтому можно рассмотреть величину

$$N_{d,a}^{(Q)}(n) = \#\{m < n : \sum_{k=1}^{\infty} z_k(m) \equiv a \pmod{d}\}$$

и поставить вопрос о ее асимптотике. Данная задача по всей видимости является новой. В настоящей работе мы полностью решаем вопрос об асимптотике $N_{d,a}^{(Q)}(n)$ для $d = 2$.

Отметим, что оба рассматриваемых нами класса представлений натуральных чисел – разложения по линейным рекуррентным последовательностям и по знаменателям подходящих дробей естественным образом обобщают разложение Цеккендорфа по числам Фибоначчи. Поэтому их можно называть обобщенными разложениями Цеккендорфа.

Формулировки основных результатов

Пусть X – один из символов F , T или Q . Рассмотрим величину

$$r_{d,a}^{(X)}(n) = N_{d,a}^{(X)}(n) - \frac{n}{d}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{T_k\}$ – линейная рекуррентная последовательность второго порядка, удовлетворяющая условиям 1–3. Тогда

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{T_k\}$ – линейная рекуррентная последовательность третьего порядка, удовлетворяющая условиям 1–3. Пусть a_1 и a_2 имеют одинаковую четность, а $a_3 = 1$. Тогда

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{T_k\}$ – линейная рекуррентная последовательность, заданная соотношением $T_k = 4T_{k-1} + 3T_{k-2} + T_{k-3}$ и начальными условиями $T_0 = 1$, $T_1 = 5$, $T_2 = 24$, $T_3 = 112$. Тогда существуют бесконечная последовательность $\{n_k\}$ и числа c, μ , $c > 0$, $0 < \mu < 1$ такие, что

$$|r_{2,a}^{(T)}(n_k)| > cn_k^\mu.$$

При этом

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(n^\mu \log n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3 показывает, что в данном случае логарифмическая оценка остатка не может иметь места. Последовательность $\{T_k\}$, рассмотренная в теореме 3, разумеется удовлетворяет условиям 1–3. При этом начальные условия выбраны так, чтобы в условии 2 всегда имело место равенство.

Следующая теорема доказывает существование линейных рекуррентных последовательностей произвольного порядка с логарифмической оценкой остаточного члена.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$T_k = T_{k-1} + \dots + T_0 + 1 \quad \text{при всех } 1 \leq k \leq r$$

и

$$T_{m+r} = T_{m+r-1} + \dots + T_m.$$

Тогда

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

Следующая теорема показывает, что для $d > 2$ логарифмическая оценка остаточного члена может не иметь места даже для последовательности Фибоначчи.

ТЕОРЕМА 5. Существуют бесконечная последовательность $\{n_k\}$ и числа c, μ , $c > 0$, $0 < \mu < 1$ такие, что

$$|r_{3,0}^{(F)}(n_k)| > cn_k^\mu.$$

И, наконец, последняя теорема описывает ситуацию для $d = 2$ и разложений по знаменателям подходящих дробей.

ТЕОРЕМА 6. Для любого иррационального α

$$r_{2,a}^{(Q)}(n) = O(\log n).$$

Вспомогательные результаты

Пусть X – по прежнему один из символов F , T или Q , x – один из символов f , t или z . Положим $\varepsilon_{d,a}(n)$ равным 1, если сумма цифр соответствующего разложения n сравнима с a по модулю d и равным $-\frac{1}{d-1}$ в противном случае, то есть

$$\varepsilon_{d,a}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{k=0}^{\infty} x_k \equiv a \pmod{d}, \\ -\frac{1}{d-1}, & \text{если } \sum_{k=0}^{\infty} x_k \not\equiv a \pmod{d}. \end{cases}$$

ЛЕММА 1. *Имеет место явная формула*

$$N_{d,a}^{(X)}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varepsilon_{d,a}(k) + \frac{1}{d-1} \right) \cdot \frac{d-1}{d}.$$

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$r_{d,a}^{(X)}(n) = \frac{d-1}{d} S_{d,a}^{(X)}(n),$$

где

$$S_{d,a}^{(X)}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{d,a}(k).$$

Доказательство получается простым вычислением на основе леммы 1 и определения $r_{d,a}^{(X)}(n)$.

Таким образом, доказательство теорем сводится к задаче получения оценок для $S_{d,a}^{(X)}(n)$.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\sum_{a=0}^{d-1} S_{d,a}^{(X)}(n) = 0.$$

Доказательство вытекает из определения $S_{d,a}^{(X)}(n)$ и того, что $\sum_{a=0}^{d-1} \varepsilon_{d,a}(n) = 0$ (последнее получается непосредственным вычислением).

В случае $d = 2$ лемма 3 означает, что

$$r_{2,1}^{(X)}(n) = -r_{2,0}^{(X)}(n),$$

то есть теоремы 1–4, 6 достаточно доказать для $a = 0$.

Положим

$$S_1(n) = S_{2,0}^{(T)}(n), \quad S_1^*(n) = S_1(T_n), \quad \varepsilon(k) = \varepsilon_{2,0}(k),$$

$$\chi_2(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } a \text{ четном.} \end{cases}$$

ЛЕММА 4. *При всех натуральных $k \geq r$ справедливо линейное рекуррентное соотношение для $S_1^*(k+1)$:*

$$S_1^*(k+1) = \sum_{s=1}^r (-1)^{A_s} S_1^*(k-s+1) \chi_2(a_s - 1), \quad (5)$$

где $A_s = \sum_{t=1}^{s-2} a_t$.

Доказательство. Пусть

$$A_j^s = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{t=0}^{s-2} a_t T_{k-t} + j T_{k-s+1} \leq n < \sum_{t=0}^{s-2} a_t T_{k-t} + (j+1) T_{k-s+1}\},$$

где $0 \leq j < a_s$, $1 \leq s \leq d$. Тогда

$$S_1^*(k+1) = \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{a_s-1} \sum_{n \in A_j^s} \varepsilon(n).$$

Если натуральное число $n \in A_j^s$, то набор коэффициентов t_i в разложении (2) одинаков при всех $i \geq k-s+1$, значит

$$\varepsilon(n) = \varepsilon\left(n - \sum_{t=1}^{s-2} a_t T_{k-t} - j T_{k-s+1}\right) \cdot (-1)^{A_s+j} = \varepsilon(n') \cdot (-1)^{A_s+j},$$

где $0 \leq n' < T_{k-s+1}$, $A_s = \sum_{t=1}^{s-2} a_t$. В таком случае выражение для $S_1^*(k+1)$ приобретает вид

$$\begin{aligned} S_1^*(k+1) &= \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{a_s-1} \sum_{n'=0}^{T_{k-s+1}-1} \varepsilon(n') \cdot (-1)^{A_s+j} = \\ &= \sum_{s=1}^r (-1)^{A_s} \sum_{j=0}^{a_s-1} (-1)^j \sum_{n'=0}^{T_{k-s+1}-1} \varepsilon(n') = \\ &= \sum_{s=1}^r (-1)^{A_s} \sum_{j=0}^{a_s-1} (-1)^j S_1^*(k-s+1) = \sum_{s=1}^r (-1)^{A_s} S_1^*(k-s+1) \sum_{j=0}^{a_s-1} (-1)^j. \end{aligned}$$

Далее остается воспользоваться соотношением

$$\sum_{j=0}^{a-1} (-1)^j = \chi_2(a). \quad (6)$$

Из теории линейных рекуррентных соотношений немедленно вытекает следующий результат.

ЛЕММА 5. Пусть все корни характеристического уравнения рекуррентного соотношения (5) различны и по модулю равны единице. Тогда

$$S_1^*(n) = O(1).$$

ЛЕММА 6. Для любого натурального n с разложением вида $n = b_1 T_{k_1} + b_2 T_{k_2} + \dots + b_l T_{k_l}$, $b_i \neq 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, l$, справедливо равенство

$$S_1(n) = \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} S_1^*(k_s) \chi_2(b_s - 1),$$

где $B_s = \sum_{i=1}^s b_i$.

Доказательство. Представим n в виде суммы слагаемых вида $b_i T_{k_i}$:

$$n = b_1 T_{k_1} + b_2 T_{k_2} + \dots + b_l T_{k_l},$$

где $k_i > k_{i+1}$ и $1 \leq b_i \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_r)$ при всех i .

Введем множества:

$$B_j^s = \{k : k \in \mathbb{N}, \sum_{t=1}^{s-1} b_t T_{k_t} + j T_{k_s} \leq k < \sum_{t=1}^{s-1} b_t T_{k_t} + (j+1) T_{k_s}\},$$

где $0 \leq j < b_s$, $1 \leq s \leq l$.

В таком случае $S_1(n)$ будет равно

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon(k) = \sum_{s=1}^l \sum_{j=0}^{b_s-1} \sum_{k \in B_j^s} \varepsilon(k).$$

Если натуральное k принадлежит множеству B_j^s , то набор коэффициентов t_i в разложении (2) перед числами T_{k_i} при всех $k_i \geq k_s$ одинаков, следовательно,

$$\varepsilon(k) = \varepsilon\left(k - \sum_{i=1}^{s-1} b_i T_{k_i} - j T_{k_s}\right) \cdot (-1)^{B_{s-1}+j} = \varepsilon(k'') \cdot (-1)^{B_{s-1}+j},$$

где $B_s = \sum_{i=1}^s b_i$, $0 \leq k'' < T_{k_s}$.

В таком случае

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \sum_{s=1}^l \sum_{j=0}^{b_s-1} \sum_{k''=0}^{T_{k_s}-1} \varepsilon(k'') \cdot (-1)^{B_{s-1}+j} = \\ &= \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j \sum_{k''=0}^{T_{k_s}-1} \varepsilon(k'') = \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j S_1^*(k_s) = \\ &= \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} S_1^*(k_s) \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j, \end{aligned}$$

и остается только воспользоваться соотношением (6).

ЛЕММА 7. Пусть $S_1^*(n) = O(1)$. Тогда

$$S_1(n) = O(\log n),$$

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

Доказательство. Исходя из сказанного выше достаточно доказать только первую из оценок. В силу лемм 5, 6 и соотношения (6) получаем, что

$$\begin{aligned} |S_1(n)| &\leq \left| \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} S_1^*(k_s) \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j \right| \leq \sum_{s=1}^l |S_1^*(k_s)| \cdot \left| \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j \right| \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^l |S_1^*(k_s)| \leq Cl. \end{aligned}$$

Из условий 1–3 на последовательность $\{T_k\}$ вытекает, что существует $\lambda_1 > 1$ и $C_1 > 0$ такие, что $T_l \sim C_1 \lambda_1^l$. Зная, что $k_l \geq l$ и $n = b_1 T_{k_1} + b_2 T_{k_2} + \dots + b_l T_{k_l}$, получаем, что $T_l \leq T_{k_l} \leq n$ или $C_1 \lambda_1^l \leq n$, и, следовательно, $l = O(\log n)$. Данная оценка и дает утверждение леммы 7.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть все корни характеристического уравнения рекуррентного соотношения (5) различны и по модулю равны единице. Тогда

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

Доказательство немедленно вытекает из лемм 5 и 7.

Доказательство теорем 1, 2, 4

В силу леммы 7 и следствия 1 достаточно доказать ограниченность $S_1^*(n)$ или же то, что все корни характеристического уравнения для $S_1^*(n)$ различны.

Пусть $r = 2$. В таком случае утверждение леммы 4 принимает вид

$$S_1^*(n+1) = S_1^*(n) \sum_{j=0}^{a_1-1} (-1)^j + (-1)^{a_1} S_1^*(n-1) \sum_{j=0}^{a_2-1} (-1)^j. \quad (7)$$

Принимая во внимание соотношение (6) найдем вид уравнения (7) при различных значениях a_1 и a_2 .

1) Пусть a_1 и a_2 четные, тогда из уравнения (7) получаем $S_1^*(k+1) = 0$, и, следовательно, $S_1^*(n)$ ограничено.

2) Если a_1 четное, а a_2 нечетное, то уравнение (7) принимает вид: $S_1^*(n+1) = S_1^*(n-1)$. Из этого равенства следует, что $S_1^*(n)$ может принимать не более двух различных значений и, следовательно, ограничено.

3) В том случае, когда a_1 нечетное, а a_2 четное получим уравнение $S_1^*(k+1) = S_1^*(k)$, из которого вытекает, что $S_1^*(k)$ является величиной постоянной и, значит, ограниченной.

4) Если же a_1 и a_2 нечетные, то уравнение (7) становится следующим: $S_1^*(n+1) = S_1^*(n) - S_1^*(n-1)$. Характеристическое уравнение, соответствующее данному равенству имеет вид $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ таковы, что $|\lambda_{1,2}| = 1$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Для $r = 3$ и $a_3 = 1$ воспользовавшись леммой 4, получим рекуррентное соотношение для $S_1^*(k)$

$$S_1^*(k+1) = S_1^*(k) \sum_{j=0}^{a_1-1} (-1)^j + (-1)^{a_1} S_1^*(k-1) \sum_{j=0}^{a_2-1} (-1)^j + (-1)^{a_1+a_2} S_1^*(k-2).$$

Если a_1 и a_2 четные, то выражение для $S_1^*(k+1)$ принимает вид $S_1^*(k+1) - S_1^*(k-2) = 0$. Характеристическое уравнение для данного равенства $\lambda^3 - 1 = 0$ имеет три корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Все корни таковы, что $|\lambda_{1,2,3}| = 1$.

Если же a_1 и a_2 нечетные, то справедливо равенство $S_1^*(k+1) - S_1^*(k) + S_1^*(k-1) - S_1^*(k-2) = 0$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ являются: действительное число $\lambda_1 = 1$ и два комплексных корня $\lambda_{1,2} = \pm i$. Все корни по модулю вновь равны единице.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Пусть теперь

$$T_k = T_{k-1} + \dots + T_0 + 1 \quad \text{при всех } 1 \leq k \leq r$$

и

$$T_{m+r} = T_{m+r-1} + \dots + T_m.$$

Тогда

$$S_1^*(k+1) = S_1^*(k) - S_1^*(k-1) + S_1^*(k-2) + \dots + (-1)^{r-1} S_1^*(k-r+1).$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\lambda^r - \lambda^{r-1} + \lambda^{r-2} - \lambda^{r-3} + \dots + (-1)^r = 0.$$

Домножим обе части этого выражения на $\lambda + 1$ и получим

$$\lambda^{r+1} + (-1)^r = 0.$$

Все корни данного уравнения различны и по модулю равны 1. Поскольку домножение на множитель $\lambda + 1$ только добавило корень -1 , то все корни исходного уравнения также различны и по модулю равны 1. Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3

Вначале заметим, что характеристическое уравнение для последовательности $\{T_k\}$ из теоремы 3 имеет вид

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 \approx 4,69$, $\lambda_{2,3} \approx -0,34 \pm 0,31i$, причем $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_{2,3}| < 1$. Поэтому имеет место асимптотика

$$T_k = c_1 \lambda_1^k + o(1) \quad (8)$$

с некоторым $c_1 \neq 0$.

Далее, лемма 4 дает нам

$$S_1^*(k+1) = S_1^*(k-1) - S_1^*(k-2).$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda + 1 = 0$$

имеет корни $\lambda'_1 \approx -1,32$, $\lambda'_{2,3} \approx 0,66 \pm 0,56i$, причем $|\lambda'_1| > 1$, $|\lambda'_{2,3}| < 1$ и $|\lambda'_1| < |\lambda_1|$. Поэтому

$$S_1^*(k) = c'_1 \lambda_1'^k + c'_2 \lambda_2'^k + c'_3 \lambda_3'^k.$$

Непосредственное вычисление показывает, что начальные условия имеют вид $S_1^*(1) = 1$, $S_1^*(2) = 1$, $S_1^*(3) = 0$, $S_1^*(4) = -1$. Вычисление в системе компьютерной алгебры Maple приводят к явной формуле

$$S_1^*(k) = \sum_{\zeta: \zeta^3 - \zeta^2 + 1 = 0} -\frac{(-\zeta^2 + 2\zeta + 2)\zeta^{-k}}{(3\zeta^2 - 2\zeta)\zeta},$$

показывающей, что все c'_i отличны от нуля. Поэтому

$$S_1^*(k) = c'_1 \lambda_1'^k + o(1)$$

и

$$S_1(T_k) = c'_1 \lambda_1'^{T_k} + o(1).$$

С учетом (8) последнее равенство переписывается в виде

$$S_1(T_k) \sim c'_1 T_k^\mu, \quad (9)$$

где

$$\mu = \log_{\lambda_1} \lambda'_1.$$

Так как $|\lambda'_1| < |\lambda_1|$, $\mu < 1$. В частности,

$$S_1(T_k) > c T_k^\mu$$

с некоторым $c > 0$, что и доказывает первую часть теоремы 3 с $n_k = T_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доказать, что $c'_1 \neq 0$ можно было бы и без нахождения явной формулы для $S_1^*(k)$. Действительно, из $c'_1 = 0$ и $|\lambda'_{2,3}| < 1$ вытекает ограниченность последовательности $\{S_1^*(k)\}$. При этом $\{S_1^*(k)\}$ представляет собой линейную рекуррентную последовательность с целыми коэффициентами и целыми начальными условиями. Известно [16], что для таких последовательностей ограниченность влечет за собой периодичность. С другой стороны, периодичность линейной рекуррентной последовательности означает, что все корни ее характеристического уравнения являются корнями из единицы, что приводит к противоречию и показывает, что $c'_1 \neq 0$.

Для доказательства второй части теоремы 3 заметим, что из доказательства леммы 7 видно, что разложение $n = b_1 T_{k_1} + b_2 T_{k_2} + \dots + b_l T_{k_l}$, $b_i \neq 0$ вытекает оценка

$$|S_1(n)| \leq \sum_{s=1}^l |S_1^*(k_s)| = \sum_{s=1}^l |S_1(T_{k_s})|.$$

С учетом (9),

$$|S_1(n)| \leq c_2 \sum_{s=1}^l T_{k_s}^\mu$$

с некоторым $c_2 > 0$. Поскольку $T_{k_s} \leq n$, последняя оценка переписывается в виде

$$|S_1(n)| \leq c_2 n^\mu l.$$

При этом из (8) вытекает, что $l = O(\log n)$, что, в сочетании с предыдущей оценкой и дает доказательство второй части теоремы 3.

Доказательство теоремы 5

Обозначим $\bar{S}_{3,a}(n) = S_{3,a}^{(F)}(F_n)$. Для доказательства теоремы 5 достаточно показать, что существует бесконечная последовательность $\{n_k\}$ для которой

$$|\bar{S}_{3,0}(n)| > c F_{n_k}^\mu.$$

В начале получим рекуррентные соотношения для $\bar{S}_{3,a}(n)$.

ЛЕММА 8. При всех натуральных $n \geq 2$ справедливо соотношение для $\bar{S}_{d,a}(n+1)$:

$$\bar{S}_{d,a}(n+1) = \bar{S}_{d,a}(n) + \bar{S}_{d,a-1}(n-1) \quad \text{при } a \neq 0,$$

$$\bar{S}_{d,0}(n+1) = \bar{S}_{d,0}(n) + \bar{S}_{d,d-1}(n-1) \quad \text{при } a = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем $\bar{S}_{d,a}(n+1)$ по определению:

$$\bar{S}_{d,a}(n+1) = \sum_{k=0}^{F_{n+1}-1} \varepsilon_{d,a}(k) = \bar{S}_{d,a}(n) + \sum_{k=F_n}^{F_n+F_{n-1}-1} \varepsilon_{d,a}(k).$$

Пусть $k - F_n = k'$, тогда $k = k' + F_n$, где $0 \leq k' < F_{n-1}$, и справедливо равенство

$$\sum_{k=F_n}^{F_n+F_{n-1}-1} \varepsilon_{d,a}(k) = \sum_{k'=0}^{F_{n-1}-1} \varepsilon_{d,a}(k' + F_n).$$

Далее остается заметить, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_{d,a}(k' + F_n) &= \varepsilon_{d,a-1}(k') \quad \text{при } a \neq 0; \\ \varepsilon_{d,0}(k' + F_n) &= \varepsilon_{d,d-1}(k') \quad \text{при } a = 0.\end{aligned}$$

Леммы 3 и 8 дают набор из 4 линейных рекуррентных соотношений для последовательностей $\bar{S}_{3,a}(n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Эти соотношения не являются независимыми.

Исключение $\bar{S}_{3,1}(n)$ и $\bar{S}_{3,2}(n)$ приводит к линейному рекуррентному соотношению

$$\bar{S}_{3,0}(n) = 2\bar{S}_{3,0}(n-1) - 2\bar{S}_{3,0}(n-2) + \bar{S}_{3,0}(n-3) - \bar{S}_{3,0}(n-4).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Данное уравнение имеет две пары комплексных корней $\lambda_{1,2} \approx 1,07 \pm 0,76i$ и $\lambda_{3,4} \approx -0,07 \pm 0,76i$. Очевидно, что $|\lambda_{1,2}| > 1$, а $|\lambda_{3,4}| < 1$. Непосредственное вычисление дает начальные условия $\bar{S}_{3,0}(1) = 1$, $\bar{S}_{3,0}(2) = \frac{1}{2}$, $\bar{S}_{3,0}(3) = 0$, $\bar{S}_{3,0}(4) = -1$. Далее,

$$\bar{S}_{3,0}(n) = c'_1 \lambda_1^n + c'_2 \lambda_2^n + c'_3 \lambda_3^n + c'_4 \lambda_4^n.$$

Прямое вычисление в системе компьютерной алгебры Maple показывает, что все c'_i отличны от нуля. Кроме того, учитывая, что $|\lambda_{3,4}| < 1$ можно записать

$$\bar{S}_{3,0}(n) = c'_1 \lambda_1^n + c'_2 \lambda_2^n + o(1).$$

Поэтому достаточно доказать, что существует бесконечная последовательность $\{n_k\}$ для которой

$$c'_1 \lambda_1^{n_k} + c'_2 \lambda_2^{n_k} > c F_{n_k}^\mu.$$

Полагая $\rho = |\lambda_{1,2}|$ и $\varphi = \arg \lambda_1$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\rho^{n_k} (c'_1 \sin n_k \varphi + c'_2 \cos n_k \varphi) > c F_{n_k}^\mu.$$

Так как $F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$, выбирая $\mu = \log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \rho$, мы можем свести задачу к доказательству существования бесконечной последовательности $\{n_k\}$ для которой

$$c'_1 \sin n_k \varphi + c'_2 \cos n_k \varphi > c$$

с некоторой $c > 0$. Последнее неравенство можно свести к неравенству

$$\sin(n_k \varphi + \theta) > c' > 0$$

с некоторым эффективно вычислимым θ или же к

$$\sin 2\pi \left\{ \frac{n_k \varphi + \theta}{2\pi} \right\} > c',$$

где фигурные скобки означают дробную часть числа.

Если $\frac{\varphi}{2\pi}$ – иррационально, то последовательность $\left\{ \frac{n\varphi + \theta}{2\pi} \right\}$ равномерно распределена по модулю 1 и можно выбрать бесконечную последовательность $\{n_k\}$ для которой $\left\{ \frac{n_k \varphi + \theta}{2\pi} \right\} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ и которая дает нам требуемый результат с $c' = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Предположим теперь, что $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{a}{b}$ – рационально. Поскольку φ – аргумент кубической иррациональности, можно утверждать, что $b > 4$. При этом можно выбрать k_a , $1 \leq k_a \leq b-1$ таким образом, что $\left\{ \frac{k_a \varphi + \theta}{2\pi} \right\} = \left\{ \frac{k_a a}{b} + \theta \right\} \in (0; \frac{\pi}{2})$. Выбирая $n_k = kb + k_a$, получаем требуемый результат с $c' = \sin \left\{ \frac{k_a a}{b} + \theta \right\}$.

Доказательство теоремы 6

Положим

$$S_1(n) = S_{2,0}^{(Q)}(n), \quad S_1^*(n) = S_1(Q_n).$$

Рассуждение, полностью аналогичное доказательству леммы 4, показывает, что в случае четного q_{k+1} будет справедливо равенство

$$S_1^*(k+1) = S_1^*(k-1). \quad (10)$$

Если же q_{k+1} нечетное, то получим уравнение

$$S_1^*(k+1) = S_1^*(k) - S_1^*(k-1). \quad (11)$$

В общем случае заранее не известно в какой последовательности будут встречаться четные и нечетные q_k . Положим $S_1^*(k) = b$, а $S_1^*(k+1) = a$ и изобразим в виде схемы на рис. 1 получение всевозможных значений $(S_1^*(k+1); S_1^*(k))$ при переходе от одного значения k к следующему за ним в случае q_{k+1} четного (на схеме обозначено буквой Ч) и q_{k+1} нечетного (на схеме – Н). Эволюция на схеме обрывается в случае нового получения ранее полученной пары.

Рис. 1: Эволюция пар $(S_1^*(k+1); S_1^*(k))$

Как следует из приведенной схемы существует всего 12 пар значений $(S_1^*(k+1); S_1^*(k))$, а именно: $(a; b)$, $(b; a)$, $(-a; -b)$, $(-b; -a)$, $(a; a-b)$, $(-a; b-a)$, $(b; b-a)$, $(-b; a-b)$, $(a-b; a)$, $(a-b; -b)$, $(b-a; b)$, $(b-a; -a)$.

Это означает, что последовательность $\{S_1^*(k)\}$ ограничена. Далее, пусть $n = b_1 Q_{k_1} + b_2 Q_{k_2} + \dots + b_l Q_{k_l}$ с ненулевыми b_i . Тогда, действуя аналогично доказательству леммы 7 получаем

$$|S_1(n)| \leq Cl$$

и остается доказать оценку

$$l = O(\log n),$$

которая следует из неравенств $Q_l \leq Q_{k_l} \leq n$ и $Q_k \leq F_k \leq c \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Приведенное доказательство показывает также, что если последовательность знаменателей подходящих дробей к α растет быстрее, чем экспоненциально, то оценку из теоремы 6 можно улучшить. Впрочем, множество таких иррациональностей имеет меру 0 [7].

Заключение

В работе начато исследование аналога задачи Гельфонда о распределении сумм цифр числа по арифметическим прогрессиям в случае, когда обычная b -ичная система счисления заменяется на разложение натурального числа по линейной рекуррентной последовательности или же по последовательности знаменателей подходящих дробей к некоторому иррациональному числу.

Особое внимание уделяется остаточному члену, описывающему отклонение от равномерности распределения по прогрессиям. Показано, что во многих случаях имеет место логарифмическая оценка остатка и даны некоторые эффективные достаточные условия для такой оценки. С другой стороны приведены примеры ситуаций, в которых доказано, что логарифмическая оценка остатка не имеет места.

Настоящая работа может рассматриваться только как начало исследований в данной области и порождает множество открытых вопросов. Главный из них – найти точный порядок роста $r_{d,a}^{(X)}(n)$ в каждом случае. Эта проблема представляется нам чрезвычайно трудной. В связи с этим приведем ряд более конкретных проблем, решение которых может представлять интерес.

1. Верно ли утверждение, обратное к следствию 1?

ЗАМЕЧАНИЕ 6. *Можно показать, что верно утверждение, обратное к лемме 5, но этого недостаточно для ответа на заданный вопрос.*

2. Можно ли улучшить логарифмическую оценку для $r_{2,a}^{(T)}(n)$ и какой-либо линейной рекуррентной последовательности?

ЗАМЕЧАНИЕ 7. *В [5] без доказательства и без каких-либо ссылок на литературу сформулировано утверждение о неулучшаемости логарифмической оценки для $r_{2,a}^{(F)}(n)$.*

3. Можно ли ликвидировать зазор между верхней и нижней оценкой в теореме 3?

4. Возможна ли логарифмическая оценка для $r_{d,a}^{(X)}(n)$ и $d > 2$?

5. Получить нетривиальную оценку для $r_{d,a}^{(Q)}(n)$ и $d > 2$.

6. Получить нетривиальные нижние оценки для $r_{d,a}^{(X)}(n)$.

7. Можно ли убрать условие взаимной простоты d и $a_1 + a_2 + \dots + a_d - 1$ из асимптотики (4)?

ЗАМЕЧАНИЕ 8. *Настоящая работа, а также [6] показывают, что для $d = 2$ ответ положительный.*

Работа Гельфонда породила целый ряд работ, в которых изучались различные свойства натуральных чисел, у которых сумма цифр b -ичного разложения принадлежит заданной арифметической прогрессии ([10], [14], [15], [17]–[19] и т.д.). Представляется крайне интересным обобщение этих результатов на разложения, рассмотренные в настоящей работе. В частности, отметим две задачи:

1) Изучить совместное распределение сумм цифр разложений чисел n и $kn + l$ по линейным рекуррентным последовательностям (или по знаменателям подходящих дробей) по арифметическим прогрессиям. Первый результат в этом направлении имеется в [13].

2) Верно ли, что существует бесконечно много простых чисел, у которых суммы цифр разложений по линейным рекуррентным последовательностям (или по знаменателям подходящих дробей) принадлежат заданной арифметической прогрессии? Наилучший результат в данном направлении имеется в препринте [9].

Отметим также, что существует множество других интересных систем счисления, в которых можно изучать аналоги рассматриваемых задач. Наибольший интерес на наш взгляд

представляют факториальная система счисления ($n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k k!$, $1 \leq f_k \leq k$) и системы счисления Дюмонта-Томаса [1], [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dumont J.-M., Thomas A. Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions // Theoretical computer science. 1989. Vol. 65, №2. P. 153-169.
2. Dumont J.-M., Thomas A. Gaussian asymptotic properties of the sum-of-digits function // J. Number Theory. 1997. Vol. 62. P. 19–38.
3. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. Vol. 13. P. 259-265.
4. Zeckendorf E. Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas // Bull. Soc. R. Sci. Liege. 1972. Vol. 41. P. 179-182.
5. Drmota M., Skalba M. The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function // Manuscripta mathematica. 2000. Vol. 101. P. 361–383.
6. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 36, №1. P. 3-19.
7. Khinchin A. Ya. Zur metrischen Kettenbruchtheorie // Compositio Matzematica. 1936. Vol. 3, №2. P. 275–285.
8. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. Vol. 53, №1. P. 1-20.
9. Madritsch M. G., Thuswaldner J. M. The level of distribution of the sum-of-digits function of linear recurrence number systems // Cornell University. 2019. Arxiv.1909.08499.
10. Mauduit C., Rivat J. Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers // Annals of Mathematics. 2010. Vol. 171, №3. P. 1591-1646.
11. Ostrowski V. A. Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 1922. Vol. 1. P. 77-98.
12. Parry W. On the β -expansion of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1960. Vol. 11. P. 401-416.
13. Shutov A. V. On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers // Fibonacci quarterly. 2020 (accepted)
14. Карацуба А. А., Новак Б. Арифметические задачи с числами специального вида // Матем. заметки. 1999. Т. 66, №2. С. 314–317.
15. Науменко А. П. О числе решений некоторых диофантовых уравнений в натуральных числах с заданными свойствами двоичных разложений // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, №1. С. 140–157.
16. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Т. 1 М.: Мир, 1990.
17. Эминян К. М. Об одной бинарной задаче // Матем. заметки. 1996. Т. 60, №4. С. 634–637.

18. Эминян К. М. О представлении чисел с заданными свойствами двоичного разложения суммами двух квадратов // Тр. МИАН. 1994. Т. 207. М.: Наука. С. 377–382.
19. Эминян К. М. О средних значениях функции $\tau_k(n)$ в некоторых последовательностях натуральных чисел // Матем. заметки. 2011. Т. 90, №3. С. 439–447.

REFERENCES

1. Dumont, J.-M. & Thomas, A. 1989, “Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions“, *Theoretical computer science*, vol. 65, no. 2, pp. 153–169. doi: 10.1016/0304-3975(89)90041-8.
2. Dumont, J.-M. & Thomas, A. 1997, “Gaussian asymptotic properties of the sum-of-digits function“, *J. Number Theory*, vol. 62, pp. 19–38. doi: 10.1006/jnth.1997.2044.
3. Gelfond, A. O. 1968, “Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données“, *Acta Aithmetica*, vol. 13, pp. 259–265. doi: 10.4064/aa-13-3-259-265.
4. Zeckendorf, E. 1972, “Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas“, *Bull. Soc. R. Sci. Liege*, vol. 41, pp. 179–182.
5. Drmota, M. & Skalba, M. 2000, “The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function“, *Manuscripta mathematica*, vol. 101, pp. 361–383. doi: 10.1007/s002290050221.
6. Drmota, M. & Gajdosik J. 1998, “The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations“, *Fibonacci Quarterly*, vol. 36, no. 1, pp. 3–19.
7. Khinchin, A. Ya. 1936, “Zur metrischen Kettenbruchtheorie“, *Compositio Matematica*, vol. 3, no. 2, pp. 275–285.
8. Lamberger, M. & Thuswaldner, J. W. 2003, “Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences“, *Mathematica Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1–20.
9. Madritsch, M. G. & Thuswaldner, J. M. 2019, “The level of distribution of the sum-of-digits function of linear recurrence number systems“, *Cornell University*, arxiv. 1909.08499.
10. Mauduit, C. & Rivat, J. 2010, “Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers“, *Annals of Mathematics*, vol. 171, no. 3, pp. 1591–1646.
11. Ostrowski, V. A. 1922, “Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen“, *Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.*, vol. 1, pp. 77–98. doi: 10.1007/BF02940581.
12. Parry, W. 1960, “On the β -expansion of real numbers“, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol. 11, pp. 401–416. doi: 10.1007/BF02020954.
13. Shutov, A. V. 2020, “On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers“, *Fibonacci quarterly* (accepted).
14. Karatsubaa, A. A. & Novak, B. 1999, “Arithmetical problems with numbers of special type“, *Mathematical Notes*, vol. 66, no. 2, pp. 251–253. doi: 10.1007/FBF02674886.
15. Naumenko, A. P. 2011, “On the number of solutions of some Diophantine equations in positive integers with given properties of binary expansions“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, no. 1, pp. 140–157.

16. Stanley, R. 1986, “Enumerative combinatorics“, vol. 1, Monterey: Wadsworth.
17. Eminyan, K. M. 1996, “A binary problem“, *Mathematical Notes*, vol. 60, no. 4, pp. 478–481. doi: 10.1007/FBF02305438.
18. Eminyan, K. M. 1995, “On the representation of numbers with given properties of binary expansion by sums of two squares“, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 347–351.
19. Eminyan, K. M. 2011, “On the Mean Values of the Function $\tau_k(n)$ in Sequences of Natural Numbers“, *Mathematical Notes*, vol. 90, no. 3, pp. 439–447. doi: 10.1134/FS0001434611090124.