ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-48-75

Квазиметрики на графах

Е. И. Деза, Б. Мханна

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Мханна Батуль — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрены свойства квазиметрики среднего времени первого прохода (обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова), построенной на основе нескольких графовых моделей, в том числе на базе простого цикла, простого пути и их ориентированных аналогов.

Во введении представлена история вопроса, дан обзор основных идей и результатов работы.

Во втором разделе собраны основные понятия теории *цепей Маркова* – последовательностей случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующихся тем, что распределение вероятностей параметров процесса в следующий момент времени зависит только от параметров процесса в предыдущий момент. Даны базовые определения, необходимые для рассмотрения роли графовых моделей в представлении и исследовании эргодических однородных цепей Маркова. Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги – переходам между ними. С другой стороны, любой связный граф (ориентированный граф) может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова: если вершина i имеет степень (полустепень исхода) k, то все выходящие из нее ребра (дуги) превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$. Дано определение среднего времени первого прохода для однородной эргодической цепи Маркова. Проанализирован алгоритм нахождения среднего времени первого прохода с помощью использования сходящихся деревьев ориентированного графа, связанного с матрицей перехода эргодической однородной цепи Маркова. Матрица среднего времени первого прохода рассмотрена как *квазиметрика m среднего времени первого прохода* на множестве вершин $V = \{1, 2, ..., n\}$ ориентированного графа, соответствующего матрице перехода эргодической однородной цепи Маркова: $m(i, j)$ – ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на орграфе Г, начинающегося с i, для достижения j в первый раз. Эта квазиметрика обладает рядом важных теоретических и прикладных свойств.

В третьем разделе рассмотрены вопросы построения и исследования квазиметрики среднего времени первого прохода для неориентированного цикла C_n, $n \geq 3$. Рассмотрены примеры построения квазиметрики среднего времени первого прохода для неориентированного цикла для малых значений n. Приведены иллюстрации "графовой" процедуры построения матрицы M. Проанализированы свойства получающиеся при этом обобщенных метрических структур.

В четвертом разделе аналогичные рассуждения проведены для квазиметрики среднего времени первого прохода для неориентированного пути P_n, $n \geq 2$.

В пятом разделе рассмотрены вопросы построения и исследования квазиметрики среднего времени первого прохода для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$. Рассмотрены примеры построения квазиметрики среднего времени первого прохода для ориентированного

цикла для малых значений n. Приведены иллюстрации "графовой" процедуры построения матрицы M. Проанализированы свойства получающихся при этом обобщенных метрических структур.

В шестом разделе аналогичные рассуждения проведены для квазиметрики среднего времени первого прохода для ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$.

В заключении подведены итоги работы и намечены возможные пути дальнейших исследований.

Ключевые слова: цепь Маркова, среднее время первого прохода, остовной сходящийся корневой лес ориентированного графа, квазиметрика, квазиметрика среднего времени первого прохода, цикл, путь.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Е. И. Деза, Б. Мханна. Квазиметрики на графах // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 48–75.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-48-75

Quasi-metrics on graphs

E. I. Deza, B. Mhanna

Deza Elena Ivanovna – doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Mhanna Batool – graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Abstract

In this paper we consider some questions of the theory and practice of mean first passage time quasi-metric, a generalized metric structure closely related to ergodic homogeneous Markov chains. In particular, we consider the structure and properties of mean first passage time quasi-metrics based on several graph models, including simple cycles, simple paths and their oriented analogues.

The introduction contains the history of the problem and provides an overview of the main ideas and results presented in the article.

The second section gives basic concepts of the theory of Markov chains. In fact, a *Markov chain* is a mathematical model of some random process describing a sequence of possible events in which the probability of each event depends only on the state attained in the previous event. This section collects basic definitions needed to consider the role of graph models in the presentation and study of ergodic homogeneous Markov chains. The Markov chain can be depicted as an oriented weighted graph of transitions whose vertices correspond to the states of the chain and the arcs correspond to the transitions between them. The process will be ergodic if this weighted oriented graph is weakly connected, and the largest common divisor of the lengths of all its cycles is equal to 1. On the other hand, any connected graph can be used as a basis for building a model of the simplest Markov chain: if a vertex i has degree k, all incident edges are converted into arcs with the weights $\frac{1}{k}$. Moreover, in the second section the definition of the mean first passage time for an ergodic homogeneous Markov chain is given. The algorithm of finding the mean first passage time is analyzed in detail by using converging trees of the

oriented graph, related to the transition matrix of the ergodic homogeneous Markov chain. At last, a mean first passage time is analyzed as the *quasi-metric* m of *mean first passage time* on the vertices $V = \{1, 2, ..., n\}$ of the oriented graph corresponding to the transition matrix of a given ergodic homogeneous Markov chain: $m(i, j)$ is the expected number of steps (arcs) for random wandering on the oriented graph Γ, starting at i, to reach j for the first time. This quasi-metric has a number of important theoretical and applied properties.

The third section deals with the construction and research of mean first passage time quasi-metrics for the undirected cycles C_n, $n \geq 3$. Examples of constructions of mean first passage time quasi-metrics of undirected cycles for small values of n are considered. Illustrations of the "graphical" procedure of building the matrix M are given. Properties of the resulting generalized metric structures are analyzed.

In the fourth section, similar considerations for mean first passage time quasi-metrics of the undirected paths P_n, $n \geq 2$, are represented.

The fifth section deals with the construction and research of mean first passage time quasi-metrics for the directed (oriented) cycles $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$. Examples of constructions of mean first passage time quasi-metrics of undirected (oriented) cycles for small values of n are considered. Illustrations of the "graphical" procedure of building the matrix M are given. Properties of the resulting generalized metric structures are analyzed.

In the sixth section, similar considerations for mean first passage time quasi-metrics of the directed (oriented) paths $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$, are represented.

In the conclusion, the results of the work are summed up and possible directions of further research are outlined.

Keywords: Markov chain, mean first passage time, spanning rooted forest of an oriented graph, quasi-metric, mean first passage time quasi-metric, path, cycle.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

E. I. Deza, B. Mhanna, 2021, "Quasi-metrics on graphs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 48–75.

Введение

Цепь Маркова представляет собой последовательность случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующуюся тем, что "при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого". [3]

Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги - переходам между ними. С другой стороны, любой связный граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный ориентированный граф по следующему закону: если вершина i имеет степень k, то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$.

Важной характеристикой эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, ..., n$ является *среднее время первого прохода* m_{ij} из состояния i в состояние j. Функция $m(i, j) = m_{ij}$ является квазиметрикой на множестве $1, 2, ..., n$. Ее поведение существенно зависит от свойств орграфа, связанного с соответствующей цепью Маркова.

В этой статье мы рассматриваем свойства квазиметрики первого прохода для цепей Маркова, связанных с простыми случайными блужданиями на простом цикле C_n, $n \geq 3$, простом пути P_n, $n \geq 2$, и их ориентированных аналогах.

Квазиметрика среднего времени первого прохода

Основные понятия теории цепей Маркова

Пусть $\langle \Omega, F, \Pr \rangle$ - вероятностное пространство. При изложение теории марковских цепей принято рассмотривать дискретные случайные величины, областью значений (пространством состояний) которых является некоторое конечное множество $E = \{s_1, \ldots, s_k\}$.

Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ образует *однородную цепь Маркова*, если для любых номеров n, а также произвольных $i, j, i_1, \ldots, i_{n-2}$ справедливо равенство

$$\Pr(\xi_n = s_i \mid \xi_1 = s_{i_1}, \xi_2 = s_{i_2}, \ldots, \xi_{n-2} = s_{n-2}, \xi_{n-1} = s_j) = \Pr(\xi_n = s_i \mid \xi_{n-1} = s_j) = p_{ij}.$$

Матрица $T = ((p_{ij}))$ называется *матрицей переходных вероятностей* (или просто *матрицей перехода*). Из определения и формулы полной вероятности следует, что $p_{ij} \geq 0$, и $\sum\limits_{i=1}^{k} p_{ij} = 1$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Матрицы, обладающие такими свойствами, называются *стохастическими*.

Пусть $p_{ij}^{(n)} = \Pr(\xi_{n+m} = s_i \mid \xi_m = s_j)$ – вероятность перехода за n шагов из состояния s_j в состояние s_i. Марковская цепь называется *эргодической*, если для каждого $i = 1, \ldots, k$ существует предел $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_i > 0$, не зависящий от j. Величины π_i называются *стационарными* или *финальными вероятностями* состояний цепи Маркова, а вектор π - вектором стационарных вероятностей или, чаще в англоязычной специальной литературе, (нормализированным) вектором Перрона.

Нетрудно убедиться в том, что для вектора $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ стационарных вероятностей цепи Маркова имеют место соотношения $\pi = T \cdot \pi$, и $\sum\limits_{i=1}^{k} \pi_i = 1$. [3], [5]

Представление цепей Маркова графовыми моделями

Для обсуждения возможности представления цепей Маркова с помощью графовых моделей, вспомним некоторые базовые понятия теории (ориентированных) графов. [10], [2]

Ориентированный граф (*орграф*) – граф, ребрам которого присвоено направление. Направленные ребра называются *дугами*. Граф, ни одному ребру которого не присвоено направление, называется *неориентированным*. Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связен.

Орграф называется (реберно) *взвешенным*, если каждой дуге присвоено некоторое числовое значение – *вес*. *Вес взвешенного орграфа* определяется произведением весов его дуг; вес любого орграфа, который не имеет дуг, равен 1. Вес множества орграфов – это сумма весов его членов.

Сходящееся дерево – слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для входящей степени, а оставшиеся вершины имеют для входящей степени значение 1. *Сходящийся лес* орграфа Γ – остовной подграф орграфа Γ, все компоненты которого являются сходящимися деревьями.

Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги – переходам между ними. Вес w_{ij} дуги $ij = \langle i, j \rangle$, направленной от вершины i к вершине j, будет равен вероятности p_{ij} перехода из состояния s_i в состояние s_j. Очевидно, что для $i \neq j$ имеет место равенство $p_{ij} = -\ell_{ij}$, где $L = ((\ell_{ij}))$ – *матрица Лапласа* взвешенного орграфа Γ, т.е., по определению, $l_{ij} = -w_{ij}$ для $i \neq j$, и $l_{ii} = -\sum_{j \neq i} l_{ij}$. Другими словами, $L = I - T$, где T - матрица перехода рассматриваемой цепи Маркова, а I - единичная матрица.

Легко убедиться в том, что цепь Маркова будет эргодической, если соответствующий взвешенный орграф является слабо связным, и наибольший общий делитель длин всех его циклов равен единице. С другой стороны, любой связный (ориентированный) граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный орграф по следующему закону: если вершина i имеет степень (полустепень исхода) k, то все выходящие из нее ребра (дуги) превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$. [7], [10], [2]

Среднее время первого прохода для цепей Маркова

Пусть $T = ((p_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица перехода эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, ..., n$. Определим *среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j как

$$m_{ij} = E(F_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(F_{ij} = k),$$

где $E(\cdot)$ - математическое ожидание, а $F_{ij} = \min\{p \geqslant 1 : \xi_p = j \,|\, \xi_0 = i\}$. [6], [10], [2]

Рассмотрим взвешенный орграф Γ, который соответствует цепи Маркова с матрицей перехода T. Поскольку рассматриваемая цепь Маркова эргодична, то соответствующий орграф Γ слабосвязен и, следовательно, имеет остовные сходящиеся деревья. Нетрудно показать ([18], [19], [9], [10], [2]), что в этом случае имеет место следующее "графовое" представление для среднего времени первого прохода:

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если} \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \\ q, & \text{если} \quad 1 \leq i = j \leq n, \end{cases}$$

где f_{ij} – суммарный вес сходящихся лесов орграфа Γ, состоящих из двух деревьев и имеющих одно дерево, содержащее i, а другое дерево, сходящееся к j, q_j – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ, и $q = \sum_{k=1}^{n} q_k$.

Среднее время первого прохода как квазиметрика орграфа

Если в определении среднего времени первого прохода использовать требование $p \geqslant 0$, то среднее время m_{ij} первого прохода из состояния i в состояние j в однородной эргодической цепи Маркова может быть представлено как $m_{ij} = f_{ij}/q_j$, $i, j = 1, 2, ..., n$, где f_{ij} - суммарный вес входящих лесов орграфа Γ, состоящих из двух деревьев и имеющих одно дерево, содержащее i, а другое дерево, сходящееся к j, а q_j - суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ.

В этом случае $m_{ii} = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, и $m(i, j) > 0$ для всех $i, j = 1, 2, ..., n$, $i \neq j$. Поскольку для всех $i, j, k = 1, 2, ..., n$ выполнены неравенства треугольника $m(i, j) \leq m(i, k) + m(k, j)$ ([16], теорема 6.2.1), то мы можем говорить о *квазиметрике* ([20], [1], [14]) *среднего времени первого прохода* m на $V = \{1, 2, ..., n\}$: $m(i, j) = m_{ij}$ – ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на Γ, начинающегося с i, для достижения j в первый раз.

Эта квазиметрика удовлетворяет более сильной версии неравенства треугольника; именно, она обладает ([16], теорема 6.2.1) *геодезическим свойством* ([8], [17]): $m(i, j) = m(i, k) + m(k, j)$ тогда и только тогда, когда все пути в Γ от i до j проходят через k.

Простейший пример квазиметрики среднего времени первого прохода может быть получен для *простого случайного блуждания* по связному невзвешенному графу G, в котором из любой вершины графа существует равная вероятность перемещения в любую соседнюю вершину.

В этом случае квазиметрика m является *взвешиваемой квазиметрикой* (см. [12], [13], [15] и [14], глава 16), т.е. существует *весовая функция* $w : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такая, что для всех $i, j \in V$

имеет место сотношение $m(i,j) + w_i = m(j,i) + w_j$. В качестве взвешиваемой квазиметрики, m обладает *ослабленным свойством симметрии*: для любых $i, j, k \in V$

$$m(i,j) + m(j,k) + m(k,i) = m(i,k) + m(k,j) + m(j,i).$$

Не менее интересны свойства квазиметрики среднего времени первого прохода, связанной с тем или иным специальным видом графов, в частности, с простым циклом и простым путем. Представляет интерес и перенос полученных результатов на ориентированный случай. Именно этим вопросам посвящена данная статья.

Квазиметрика среднего времени первого прохода неориентированного цикла

Неориентированный цикл на трех вершинах

Рассмотрим простой цикл на трех вершинах (рис. 3.1.1), то есть неориентированный граф $C_3 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{12, 23, 31\}$ (в неориентированном случае $ij = (i, j)$ – ребро между вершинами i и j).

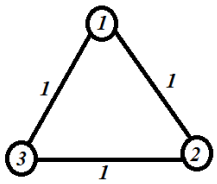


Рис. 3.1.1. Граф C_3.

Граф C_3 может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный орграф, следуя описанной выше процедуре: поскольку $d(1) = d(2) = d(3) = 2$, то мы получим орграф $\Gamma = TC_3$ на трех вершинах с весами дуг $w_{ik} = 1/2$, $i, k = 1, 2, 3$, $i \neq k$ (рис. 3.1.2). Матрица перехода соответствующей (эргодической однородной) цепи Маркова с состояниями $1, 2, 3$ имеет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

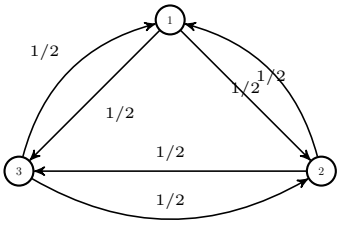


Рис. 3.1.2. Орграф TC_3.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 9 сходящихся деревьев орграфа TC_3 (рис. 3.1.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3) = (3/4, 3/4, 3/4)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{3} q_i = 9/4$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{3} q_i} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Этот вектор совпадает с π, нормированным левым вектором Перрона для T.

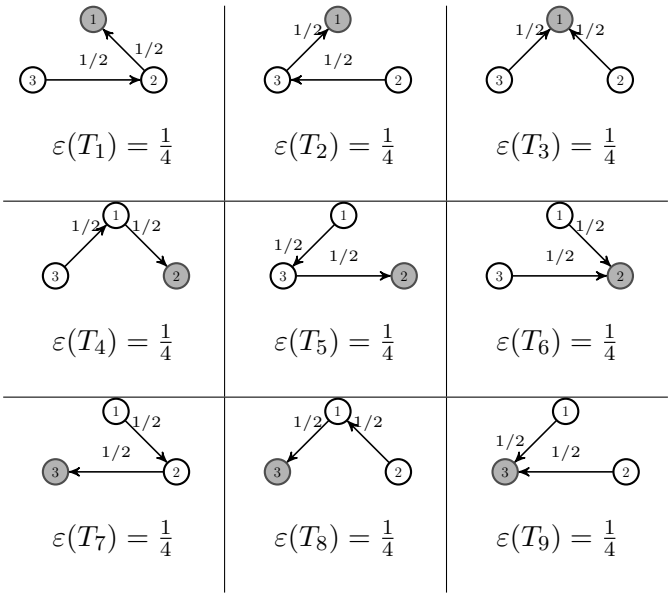


Рис. 3.1.3. Сходящиеся деревья орграфа TC_3.

На рис. 3.1.4 представлены все 6 "2-деревьевых" лесов орграфа TC_3. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j, получаем:

$$((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & \sum \varepsilon(F_i), i = 1,4,6 & \sum \varepsilon(F_i), i = 2,3,5 \\ \sum \varepsilon(F_i), i = 1,3,4 & 0 & \sum \varepsilon(F_i), i = 2,5,6 \\ \sum \varepsilon(F_i), i = 1,2,3 & \sum \varepsilon(F_i), i = 4,5,6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

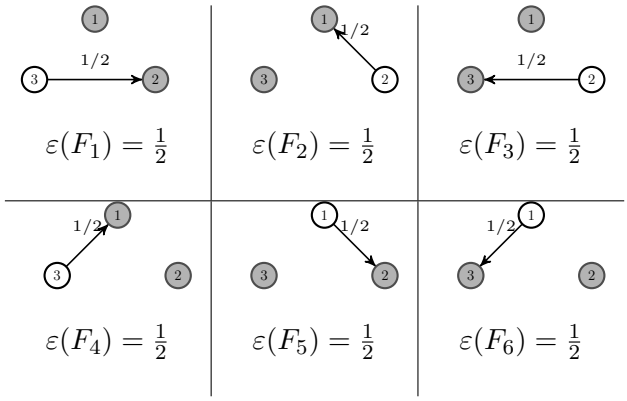


Рис. 3.1.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TC_3, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3}{q_i}$, получим матрицу среднего времени первого прохода $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Избавляясь от диагональных членов, получим квазиметрику среднего времени первого прохода $\overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. В нашем простейшем симметричном случае данная квазиметрика является метрикой. Более того, она совпадает с удвоенной дискретной метрикой.

Неориентированный цикл на четырех вершинах

Рассмотрим простой цикл на четырех вершинах (рис. 3.2.1), то есть неориентированный граф $C_4 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{12, 23, 34, 41\}$.

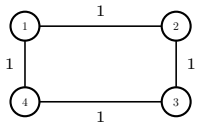


Рис. 3.2.1. Граф C_4.

Используя граф C_4 для модели простого случайного блуждания, мы получаем орграф TC_4 на четырех вершинах с весами дуг $w_{ik} = 1/2$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, $i \neq k$ (рис. 3.2.2). Матрица перехода имеет в данном случае вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

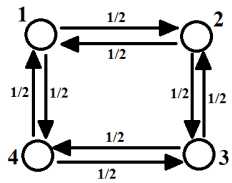


Рис. 3.2.2. Орграф TC_4.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 16 сходящихся деревьев орграфа TC_4 (рис. 3.2.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{4} q_i = 2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{4} q_i} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

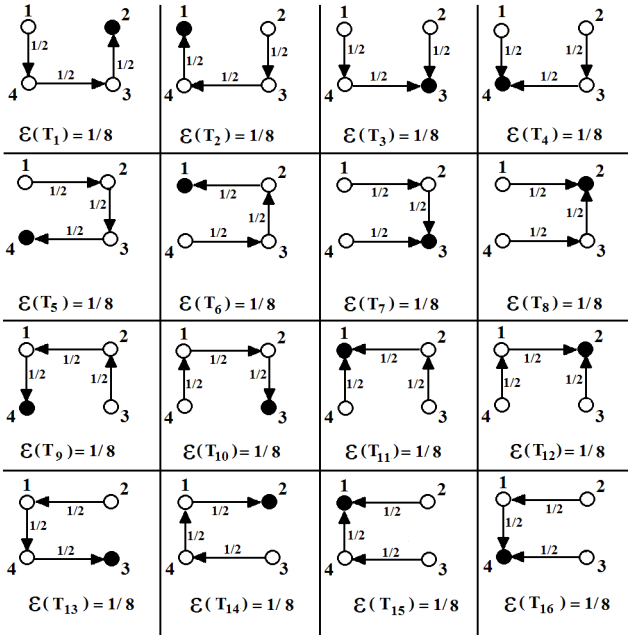


Рис. 3.2.3. сходящиеся деревья орграфа TC_4.

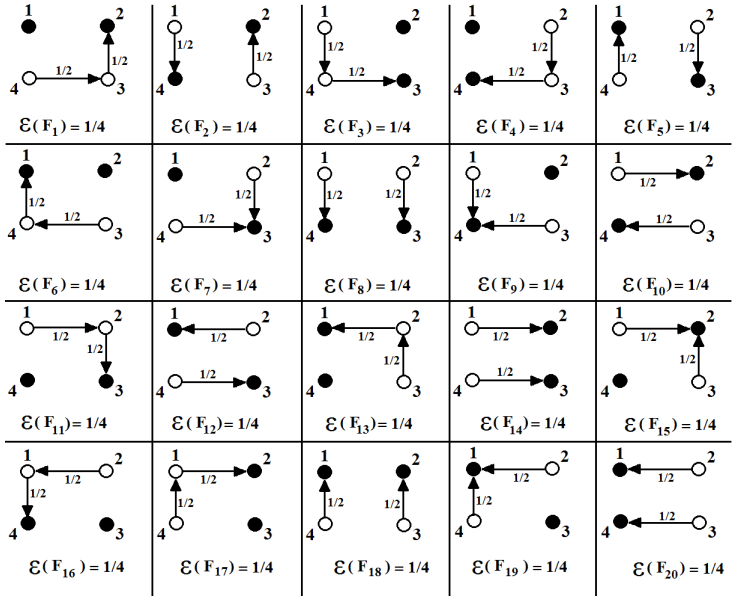


Рис. 3.2.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TC_4, состоящие из двух деревьев.

На рис. 3.2.4 представлены все 20 "2-деревьевых" лесов орграфа TC_4. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j, получаем:

$\mathcal{F}_{12} = \{F_1, F_2, F_3, F_6, F_9, F_{18}\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_5, F_7, F_8, F_{12}, F_{14}, F_{16}, F_{17}, F_{19}\}$,
$\mathcal{F}_{14} = \{F_4, F_{10}, F_{11}, F_{13}, F_{15}, F_{20}\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1, F_4, F_5, F_6, F_7, F_{18}\}$,
$\mathcal{F}_{23} = \{F_3, F_{12}, F_{14}, F_{16}, F_{17}, F_{19}\}$, $\mathcal{F}_{24} = \{F_2, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{13}, F_{15}, F_{20}\}$,
$\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_4, F_5, F_7, F_{12}, F_{18}, F_{19}, F_{20}\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_3, F_6, F_9, F_{10}, F_{14}, F_{17}\}$,
$\mathcal{F}_{34} = \{F_2, F_8, F_{11}, F_{13}, F_{15}, F_{16}\}$, $\mathcal{F}_{41} = \{F_1, F_4, F_7, F_{12}, F_{13}, F_{20}\}$,
$\mathcal{F}_{42} = \{F_2, F_3, F_6, F_9, F_{10}, F_{14}, F_{15}, F_{18}\}$, $\mathcal{F}_{43} = \{F_5, F_8, F_{11}, F_{17}, F_{16}, F_{19}\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $((f_{ij})) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{q_i}$, получим матрицу среднего времени первого прохода M и, избавляясь от диагональных членов в матрице M, квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода для цепи Маркова, соответсвующей случайному блужданию по циклу на четырех вершинах:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что она является метрикой.

Неориентированный цикл на пяти вершинах

Для неориентированного цикла C_5 (рис. 3.3.1) можно провести аналогичные рассуждения.

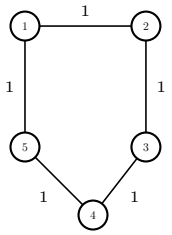


Рис. 3.3.1. Граф C_5.

Превратим C_5 во взвешенный орграф TC_5 (рис. 3.3.2), заменив все ребра, выходящие из вершин $1, 2, 3, 4, 5$, на дуги с весами $\frac{1}{2}$. Матрица перехода соответствующей цепи Маркова принимает вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

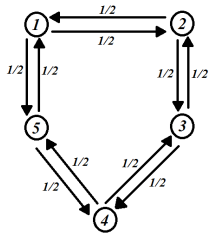


Рис. 3.3.2. Орграф TC_5.

Пользуясь определением q_i и рассматривая 25 сходящихся деревьев орграфа TC_5 (рис. 3.3.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (5/16, ..., 5/16)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{5} q_i = 25/16$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_5) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{5} q_i} = (1/5, ..., 1/5)$.

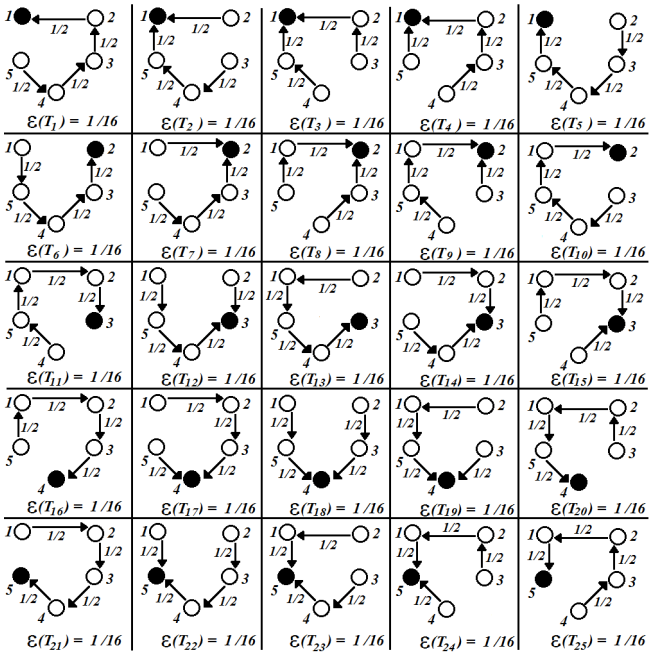


Рис. 3.3.3. Сходящиеся деревья орграфа C_5.

На рис. 3.3.4 представлены все 50 ”2-деревьевых“ лесов орграфа C_5. Пользуясь определением f_{ij}, получаем:

$\mathcal{F}_{12} = \{F_1, F_5, F_9, F_{12}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{43}, F_{48}, F_{50}\}$,
$\mathcal{F}_{13} = \{F_2, F_8, F_{13}, F_{16}, F_{20}, F_{23}, F_{25}, F_{31}, F_{32}, F_{33}, F_{34}, F_{35}, F_{38}, F_{47}, F_{49}\}$,
$\mathcal{F}_{14} = \{F_3, F_7, F_{11}, F_{15}, F_{21}, F_{24}, F_{28}, F_{30}, F_{36}, F_{40}, F_{41}, F_{42}, F_{44}, F_{45}, F_{46}\}$,
$\mathcal{F}_{15} = \{F_4, F_6, F_{10}, F_{14}, F_{22}, F_{26}, F_{27}, F_{29}, F_{37}, F_{39}\}$,
$\mathcal{F}_{21} = \{F_1, F_5, F_9, F_{12}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{31}, F_{38}, F_{40}\}$,
$\mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_8, F_{13}, F_{19}, F_{20}, F_{23}, F_{25}, F_{34}, F_{35}, F_{49}\}$,
$\mathcal{F}_{24} = \{F_3, F_7, F_{11}, F_{18}, F_{21}, F_{24}, F_{28}, F_{30}, F_{32}, F_{36}, F_{41}, F_{43}, F_{44}, F_{45}, F_{46}\}$,
$\mathcal{F}_{25} = \{F_4, F_6, F_{10}, F_{17}, F_{22}, F_{26}, F_{27}, F_{29}, F_{33}, F_{37}, F_{39}, F_{42}, F_{47}, F_{48}, F_{50}\}$,
$\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_2, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{31}, F_{38}, F_{40}, F_{44}\}$,
$\mathcal{F}_{32} = \{F_5, F_{19}, F_{20}, F_{23}, F_{25}, F_{27}, F_{28}, F_{41}, F_{43}, F_{48}\}$,
$\mathcal{F}_{34} = \{F_3, F_{11}, F_{18}, F_{21}, F_{24}, F_{30}, F_{32}, F_{35}, F_{36}, F_{46}\}$,
$\mathcal{F}_{35} = \{F_4, F_{10}, F_{17}, F_{22}, F_{26}, F_{29}, F_{33}, F_{34}, F_{37}, F_{39}, F_{42}, F_{45}, F_{47}, F_{49}, F_{50}\}$,
$\mathcal{F}_{41} = \{F_1, F_2, F_3, F_6, F_7, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{31}, F_{38}, F_{40}, F_{44}\}$,
$\mathcal{F}_{42} = \{F_5, F_9, F_{18}, F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{23}, F_{24}, F_{26}, F_{27}, F_{28}, F_{41}, F_{43}, F_{48}, F_{50}\}$,
$\mathcal{F}_{43} = \{F_8, F_{16}, F_{25}, F_{29}, F_{30}, F_{32}, F_{35}, F_{36}, F_{47}, F_{49}\}$,
$\mathcal{F}_{45} = \{F_4, F_{17}, F_{22}, F_{33}, F_{34}, F_{37}, F_{39}, F_{42}, F_{45}, F_{46}\}$,
$\mathcal{F}_{51} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_6, F_{10}, F_{14}, F_{31}, F_{40}, F_{44}\}$,
$\mathcal{F}_{52} = \{F_5, F_9, F_{12}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{22}, F_{26}, F_{27}, F_{41}, F_{43}, F_{48}, F_{50}\}$,
$\mathcal{F}_{53} = \{F_8, F_{13}, F_{16}, F_{23}, F_{25}, F_{29}, F_{32}, F_{33}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, F_{38}, F_{47}, F_{49}\}$,
$\mathcal{F}_{54} = \{F_7, F_{11}, F_{15}, F_{24}, F_{28}, F_{30}, F_{39}, F_{42}, F_{45}, F_{46}\}$.

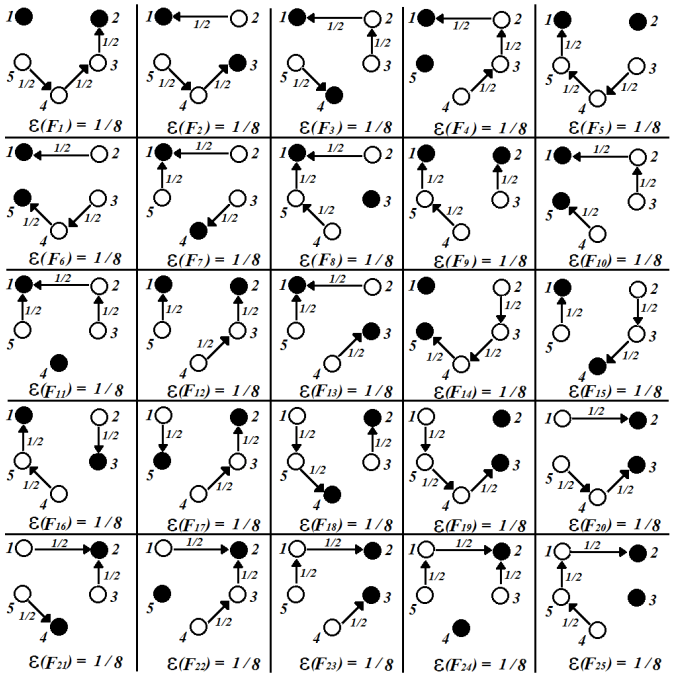


Рис. 3.3.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TC_5, состоящие из двух деревьев (часть 1).

Непосредственный подсчет показывает, что $((f_{ij})) = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 10 & 15 & 15 \\ 15 & 10 & 0 & 10 & 15 \\ 15 & 15 & 10 & 0 & 10 \\ 10 & 15 & 15 & 10 & 0 \end{bmatrix}$.

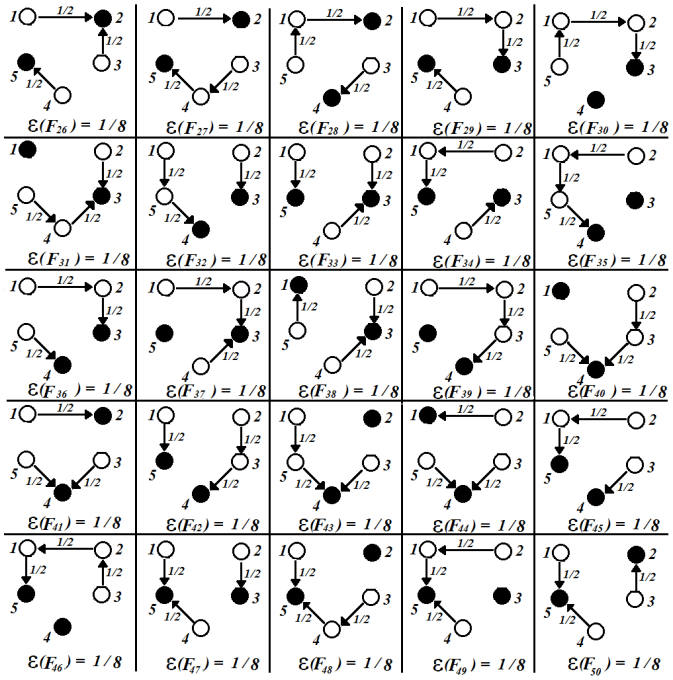


Рис. 3.3.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TC_5, состоящие из двух деревьев (часть 2).

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4+q_5}{q_i}$, получим матрицу среднего времени первого прохода M и, избавляясь от диагональных членов в матрице M, квазиметрику среднего времени первого прохода $\overline{M}$:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущих случаях, квазиметрика, соответсвующая циклу C_5, обладает совйством симметричности, то есть является метрикой.

Неориентированный цикл на n вершинах, $n \geq 3$

Нетрудно заметить некоторые закономерности, имеющие место для матрицы (квазиметрики) среднего времени первого прохода, соответствующей простому случайному блужданию по циклу C_n для любого натурального $n \geq 3$.

Прежде всего, *диагональные элементы указанной матрицы равны* n. Другими словами, *вектор* $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, ..., \tilde{q}_n) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$, *совпадающий с* π, *нормированным левым вектором Перрона для матрицы перехода* T, *имеет вид* $(1/n, 1/n, ..., 1/n)$. Это следует из того, что для любой вершины i существует ровно n деревьев, сходящихся к i, каждое с весом 2^{2-n}: для получения дерева "отбросим" одно из ребер графа C_n. (Следовательно, в графе TC_n имеется ровно n^2 остовных сходящихся деревьев.)

Кроме того, полная симметричность ориентированной структуры, получаемой в ходе построения матрицы (квазиметрики) среднего времени первого прохода, позволяет утверждать, что *для любого цикла* C_n, $n \geq 3$, *квазиметрика среднего времени первого прохода, соответсвующая случайному блужданию по* C_n, *является метрикой.* Указанная симметричность обеспечивается изоморфизмом графа TC_n и графа, получаемого их TC_n "переореинтацией" всех дуг.

Изоморфизм графа TC_n и графа, получаемого из TC_n сдвигом каждой вершины на 1 влево (вправо), обеспечивает соотношения $m_{ij} = m_{i+1,j+1}$, где вычисления индексов проводятся по модулю n.

При этом для элементов первого столбца имеют место соотношения $m_{i1} = (i-1)(n-(i-1))$, $i = 2, ..., n$. Действительно, имеется ровно $n-1$ "2-деревьевых" лесов, в которых (единственное) дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной 1; имеется ровно $n-2$ "2-деревьевых" лесов, в которых (единственное) дерево, сходящееся к 1, содержит вершины $n, 1$; имеется ровно $n-3$ "2-деревьевых" лесов, в которых (единственное) дерево, сходящееся к 1, содержит вершины $n-1, n, 1$; наконец, имеется ровно $i-1$ "2-деревьевых" лесов, в которых (единственное) дерево, сходящееся к 1, содержит вершины $i+1, ..., n, 1$. Добавляя к дереву, сходящемуся к 1, вершину 2 и проводя аналогичные рассуждения, мы получим последовательность $n-2$, ..., $i-2$. Продолжая построение и, наконец, добавляя к дереву, сходящемуся к 1, вершины $2, 3, ...i-1$, мы получим последовательность $n-i+1$, ..., 1. Непосредственное суммирование дает результат $(i-1)(n-(i-1))$. Замечая, что все построенные деревья имеют вес 2^{2-n}, и используя полученное выше соотношение $q_1 = 2^{2-n}$, можно утверждать, что $f_{i1} = 2^{2-n}(i-1)(n-(i-1))$, в то время как $m_{ij} = f_{ij}/q_1 = (i-1)(n-(i-1))$.

Таким образом, структура матрицы $M = ((m_{ij}))$ для произвольного $n \geq 3$ полностью исследована: $m_{ii} = n$, $i = 1, 2, ..., n$; $m_{21} = ... = m_{n,n-1} = m_{1,n} = n-1$; $m_{31} = m_{42} = ... = m_{n,n-2} =$
$= m_{1,n-1} = m_{2,n} = 2(n-2)$; $m_{41} = m_{52} = ... = m_{n,n-3} = m_{1,n-2} = ... = m_{3,n} = 3(n-3)$,..., $m_{n-1,1} = m_{n,2} = m_{1,3} = ... = m_{n-2,n} = (n-2) \cdot 2$, $m_{n1} = m_{12} = ... = m_{n-1,n} = n-1$.

Другими словами, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть C_n, $n \geq 3$ – неориентированный цикл на n вершинах: $C_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{21, 32, ..., n(n-1), 1n\}$ (здесь пара ij соответствует ребру (i, j)). Пусть $M = ((m_{ij}))$, $i, j = 1, 2, ..., n$ – матрица среднего времени первого прохода цепи Маркова, соответствующей простому случайному блужданию по C_n. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$m_{ii} = n,\ 1 \leq i \leq n;\ \ ,\ m_{ij} = |i-j| \cdot (n - |i-j|), 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Заметим, что с циклом C_n связан родственный красивый результат, полученный П.Ю. Чеботаревым. [7]

Определим матрицу относительной лесной доступности графа G на n вершинах по закону $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$, где F_{ij} - количество остовных (неориентированных) корневых лесов графа G, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем i, а F – общее количество остовных корневых лесов графа G. [11], [4]

П.Ю. Чеботарев доказал ([7]), что матрица относительной лесной доступности для неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...$ чисел Фибоначчи. (Напомним, что $\Phi_0 = 0, \Phi_1 = 1$, в то время как $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$ для $n \geq 2$.)

Именно, в [7] было доказано, что для матрицы $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$ относительной лесной доступности графа $C_n, n \geq 3$, имеют место следующие соотношения: $F_{ij} = \Phi_{2|j-i|} + \Phi_{2(n-|j-i|)}$, $i, j = 1, ..., n$, в то время как $F = \Phi_{2n-1} + \Phi_{2n+1} - 2$.

Квазиметрика среднего времени первого прохода неориентированного пути

Неориентированный путь на двух вершинах

Рассмотрим неориентированный путь на двух вершинах (рис. 4.1.1), то есть неориентированный граф $P_2 = (V, E)$, где $V = \{1, 2\}$, $E = \{12\}$.

Построение модели простого случайного блуждания на графе P_2 приведет нас к орграфу TP_2 на двух вершинах с весами дуг $w_{12} = w_{21} = 1$ (рис. 4.1.2). Матрица перехода соответствующей вырожденной цепи Маркова принимает вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

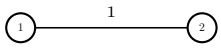


Рис. 4.1.1. Граф P_2.

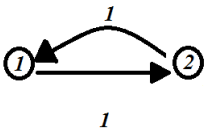


Рис. 4.1.2. Орграф TP_2.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 2 сходящихся дерева орграфа TP_2 (рис. 4.1.3), найдем вектор $(q_1, q_2) = (1, 1)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{2} q_i = 2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{2} q_i} = (1/2, 1/2)$. Этот вектор совпадает с π, нормированным левым вектором Перрона для T.

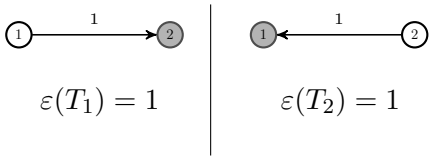


Рис. 4.1.3. Сходящиеся деревья орграфа TP_2.

На рис. 4.1.4 представлен единственный "2-деревьевый" лес орграфа TP_2. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j, получаем, что $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon(F_1) \\ \varepsilon(F_1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

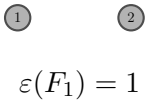


Рис. 4.1.4. Остовной сходящийся лес орграфа TP_2, состоящий из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2}{q_i}$, получим матрицу среднего времени первого прохода $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Избавляясь от диагональных членов в матрице M, получим квазиметрику среднего времени первого прохода $\overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. В нашем вырожденном случае она является матрикой; более того, тривиальной метрикой, принимающей значение 1 для всех пар различных элементов.

Неориентированный путь на трех вершинах

Для неориентированного пути на трех вершинах (рис. 4.2.1), то есть неориентированного графа $P_3 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{12, 23\}$, ситуация становится более интересной.

Для построения модели случайного блуждания на P_3 превратим его во взвешенный орграф TP_3 (рис. 4.2.2) по следующему закону: ребра, выходящие из вершин 1 и 3, превращаются в дуги с весами 1; ребра, выходящие из вершины 2, превращаются в дуги с весами $\frac{1}{2}$ (любое ребро (i, j), выходящее из вершины i, превращается в дугу, соответствующую переходу из i в j с вероятностью $p_{ij} = \frac{1}{k}$, где k – степень $d(i)$ вершины i). В этом случае матрица перехода соответствующей цепи Маркова примет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

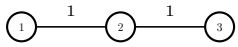


Рис. 4.2.1. Граф P_3.

Рис. 4.2.2. Орграф TP_3.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 3 сходящихся дерева орграфа P_3 (рис. 4.2.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3) = (1/2, 1, 1/2)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{3} q_i = 2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{3} q_i} = (1/4, 1/2, 1/4)$.

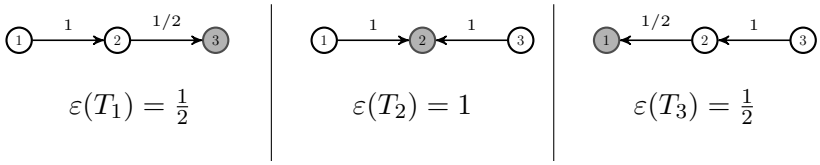


Рис. 4.2.3. Сходящиеся деревья орграфа TP_3.

На рис. 4.2.4 представлены все 4 "2-деревьевых" леса орграфа TP_3. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j, получаем: $\mathcal{F}_{12} = \{F_2\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_1, F_3, F_4\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1, F_2\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_3, F_4\}$, $\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_2, F_4\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_3\}$. Непосредственный подсчет показывает, что, $f_{12} = 1$, $f_{13} = 2$, $f_{21} = 3/2$, $f_{23} = 3/2$, $f_{31} = 2$, $f_{32} = 1$. Следовательно, $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

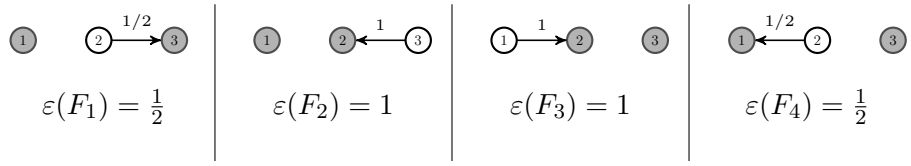


Рис. 4.2.4. Остовные сходящиеся орграфа TP_3, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M, квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Она не обладает свойством симметричности, однако ряд закономерностей в ней прослеживается. Именно, совпадают элементы матрицы, полученные заменой индекса 1 (3) на индекс 3 (1): $m_{12} = m_{32} = 1$, $m_{13} = m_{31} = 4$, $m_{21} = m_{23} = 3$. Этот факт немедленно следует из изоморфности орграфа TP_3 и орграфа, полученного заменой вершины 1 на вершину 3, и вершины 3 – на вершину 1.

Неориентированный путь на четырех вершинах

Рассмотрим неориентированный путь P_4 (рис. 4.3.1).

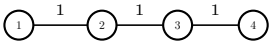


Рис. 4.3.1. Граф P_4.

Для построения модели простого случайного блуждания на базе P_4 построим взвешенный орграф TP_4 (рис. 4.3.2) по стандартному алгоритму: ребра, выходящие из вершин 1 и 4, превратим в дуги с весами 1; ребра, выходящие из вершин 2 и 3, превратим в дуги с весами $\frac{1}{2}$.

Матрица перехода соответствующей цепи Маркова примет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

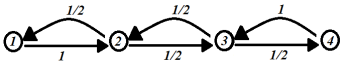


Рис. 4.3.2. Орграф TP_4.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 4 сходящихся дерева орграфа TP_4 (рис. 4.3.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (1/4, 1/2, 1/2, 1/4)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{4} q_i = 3/2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{4} q_i} = (1/6, 1/3, 1/3, 1/6)$.

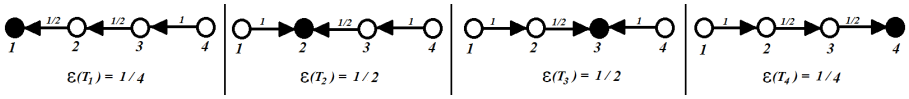


Рис. 4.3.3. Сходящиеся деревья орграфа TP_4.

На рис. 4.3.4 представлены все 10 "2-деревьевых" лесов орграфа TP_4. Пользуясь определением f_{ij}, получаем:

$\mathcal{F}_{12} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_2, F_4, F_6\}$, $\mathcal{F}_{14} = \{F_3, F_5, F_7, F_8, F_9, F_{10}\}$,
$\mathcal{F}_{21} = \{F_1, F_6, F_7\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_4\}$, $\mathcal{F}_{24} = \{F_3, F_5, F_8, F_9, F_{10}\}$,
$\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_2, F_6, F_7, F_{10}\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_4, F_8\}$, $\mathcal{F}_{34} = \{F_3, F_5 F_9\}$,
$\mathcal{F}_{41} = \{F_1, F_2, F_3, F_6, F_7, F_{10}\}$, $\mathcal{F}_{42} = \{F_4, F_5, F_8\}$, $\mathcal{F}_{43} = \{F_9\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $((f_{ij})) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 9 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

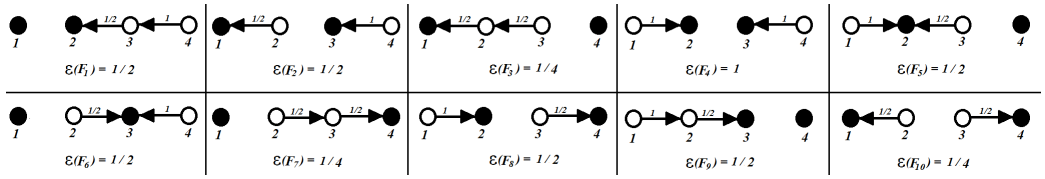


Рис. 4.3.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TP_4, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M, квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & 0 & 3 & 8 \\ 8 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Она не является симметричной, однако некоторые закономерности можно отметить. Так, $m_{12} = m_{43} = 1$, $m_{13} = m_{42} = 4$, $m_{14} = m_{41} = 8$, $m_{23} = m_{32} = 3$, и т.д. Эти соотношения не случайны. Они следуют из изоморфности орграфа TP_4 и орграфа, полученного из TP_4 заменой вершины i на вершину $4 - i + 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Неориентированный путь на n вершинах, $n \geq 2$

Нетрудно заметить некоторые закономерности, имеющие место для матрицы (квазиметрики) среднего времени первого прохода, соответствующей простому случайному блужданию по пути P_n для любого натурального $n \geq 2$.

Прежде всего, *диагональные элементы m_{ii} указанной матрицы удовлетворяют следующим условиям: "крайние" диагональные элементы $m_{11} = m_{nn} = 2(n-1)$, в то время как "внутренние" диагональные элементы $m_{ii} = n - 1$ для $2 \leq i \leq n-1$, если они существуют.* Другими словами, *вектор $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, ..., \tilde{q}_n) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$, нормированный левый вектор Перрона для матрицы перехода T, имеет вид $(1/2(n-1), 1/(n-1), ..., 1/(n-1), 1/2(n-1))$ для $n \geq 3$, и равен $(1/2, 1/2)$ для $n = 2$.* Это следует из того, что для любой вершины i существует ровно одно дерево, сходящихся к i, причем для вершин 1 и n его вес равен 2^{2-n}, в то время как для остальных вершин соответствующий вес равен 2^{3-n}. (Следовательно, в графе TP_n имеется ровно n остовных сходящихся деревьев.)

Кроме того, "относительная" симметричность ориентированной структуры, получаемой в ходе построения матрицы (квазиметрики) среднего времени первого прохода, позволяет утверждать, что *для любого пути P_n, $n \geq 3$, квазиметрика среднего времени первого прохода, соответсвующая случайному блужданию по P_n, не является метрикой, однако обладает "слабой симметричностью": $m_{ij} = m_{n-i+1,n-j+1}$.*

При этом для элементов первого столбца имеют место соотношения $m_{i1} = (n-1)^2 - (n-i)^2$, $i = 2, ..., n$. Действительно, для $i = 2$ имеется ровно $n-1$ "2-деревьевых" лесов, в котором одно дерево сходится к 1, а второе содержит 2. В каждом из этих случаев дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной 1, а другое дерево сходится к одной из вершин $2, 3, ..., n$. Вес всех таких лесов, кроме последнего, равен 2^{3-n}; в последнем случае (когда второе дерево сходится к n) мы получаем лес с весом 2^{2-n}. Таким образом, $f_{21} = 2^{3-n}(n-2) + 2^{2-n} = 2^{2-n}(2(n-2)+1) = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-2)^2)$. Используя полученное выше соотношение $q_1 = 2^{2-n}$, получаем, что $m_{21} = (n-1)^2 - (n-2)^2$. Для $i = 3$ имеется ровно $n-1$ "2-деревьевых" лесов, в которых дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной, а второе содержит 3. Все они описаны выше: их вклад в суммарный вес равен f_{21}. Кроме того, имеется $n-2$

"2-деревьевых" лесов, в которых дерево, сходящееся к 1, содержит вершины $2, 1$, а второе дерево содержит 3. Вес всех таких лесов, кроме последнего, равен 2^{3-n}; в последнем случае (когда второе дерево сходится к n) мы получаем лес с весом 2^{2-n}. Таким образом, $f_{31} = f_{21} + 2^{3-n}(n-3) + 2^{2-n} = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-2)^2) + 2^{2-n}(2(n-3)+1) = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-3)^2)$. Используя полученное выше соотношение $q_1 = 2^{2-n}$, получаем, что $m_{31} = (n-1)^2 - (n-3)^2$. Продолжая рассуждения, получим, что $f_{i1} = f_{i-1,1} + 2^{3-n}(n-i) + 2^{2-n} = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-i+1)^2) + 2^{2-n}(2(n-i)+1) = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-i)^2)$. Используя полученное выше соотношение $q_1 = 2^{2-n}$, получаем, что $m_{i1} = f_{i1}/q_1 = (n-1)^2 - (n-i)^2$.

Для нахождения элементов m_{i2}, $3 \le i \le n$, второго столбца заметим, для $i = 3$ имеется ровно $n-1$ "2-деревьевых" лесов, в котором одно дерево сходится к 2, а второе содержит 3. В каждом из этих случаев дерево, сходящееся к 2, содержит вершины $1, 2$, а другое дерево сходится к одной из вершин $3, ..., n$. Поскольку вес дерева, сходящегося к 2, равен 1, мы оказываемся в ситуации подсчета величины $f_{21} = f_{21}^{n-1}$, соответствующей пути на $n-1$ вершине. Эта величина равна $2^{3-n}((n-2)^2 - (n-3)^2)$ (впрочем, тот же результат легко получить непосредственным подсчетом). Используя полученное выше соотношение $q_2 = 2^{2-n}$, получаем, что $m_{32} = (n-2)^2 - (n-3)^2$. Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться в том, что элементы $m_{i2} = m_{i2}^n$, $3 \le i \le n$, второго столбца матрицы $M = ((m_{ij}^n))$, $i, j = 1, 2, ..., n$, соответствующей графу TP_n, совпадают с элементами $m_{i-1,1} = m_{i-1,1}^{n-1}$, $3 \le i \le n-1$, первого столбца матрицы $M = ((m_{ij}^{n-1}))$, $i, j = 1, 2, ..., n-1$, соответствующей графу TP_{n-1}; другими словами, $m_{i2} = (n-2)^2 - (n-i)^2$, $3 \le i \le n$.

Те же соображения позволяют нам заполнить третий ($m_{i3} = (n-3)^2 - (n-i)^2$, $4 \le i \le n$), четвертый ($m_{i4} = (n-4)^2 - (n-i)^2$, $5 \le i \le n$), ..., наконец, $(n-1)$-ый ($m_{n,n-1} = 1^2 - 0^2 = 1$) столбцы "под главной диагональю".

Таким образом, структура матрицы $M = ((m_{ij}))$ для произвольного $n \ge 2$ полностью исследована: $m_{11} = m_{nn} = 2(n-1)$, $m_{ii} = n-1$, $i = 2, ..., n-1$; $m_{21} = m_{n-1,n} = (n-1)^2 - (n-2)^2$; $m_{31} = m_{n-2,n} = (n-1)^2 - (n-3)^2$; ...; $m_{n1} = m_{52} = m_{1,n} = (n-1)^2 - 0^2 = (n-1)^2$; $m_{32} = m_{n-2,n-1} = (n-2)^2 - (n-3)^2$; $m_{42} = m_{n-3,n-1} = (n-2)^2 - (n-4)^2$; ...; $m_{n,2} = m_{1,n-1} = (n-2)^2 - 0^2 = (n-2)^2$; ...; $m_{n,n-1} = m_{1,2} = 1^2 - 0^2 = 1$.

Другими словами, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть P_n, $n \ge 2$ – неориентированный путь на n вершинах: $P_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{21, 32, ..., n(n-1)\}$ (здесь пара ij соответствует ребру (i, j)). Пусть $M = ((m_{ij}))$, $i, j = 1, 2, ..., n$ – матрица среднего времени первого прохода цепи Маркова, соответствующей простому случайному блужданию по P_n. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$m_{11} = m_{nn} = 2(n-1) = n,\ m_{ii} = n-1,\ 2 \le i \le n-1;$$

$$m_{ij} = m_{n-i+1,n-j+1} = (n-j)^2 - (n-i)^2, 1 \le j < i \le n.$$

Заметим, что с путем P_n связан родственный красивый результат, полученный П.Ю. Чеботаревым. [7]

Напомним, что матрица относительной лесной доступности графа G на n вершинах определяется по закону $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$, где F_{ij} - количество остовных (неориентированных) корневых лесов графа G, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем i, а F – общее количество остовных корневых лесов графа G. [11], [4]

П.Ю. Чеботарев доказал ([7]), что матрица относительной лесной доступности для неориентированного пути $P_n, n \ge 2$, как и для неориентированного цикла $C_n, n \ge 3$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...$ чисел Фибоначчи.

Именно, в [7] было доказано, что для матрицы относительной лесной доступности $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$ неориентированного пути $P_n, n \ge 2$, имеют место следующие соотношения: $F = \Phi_{2n}$, в то

время как $F_{ij} = \Phi_{2\min(i,j)-1} \cdot \Phi_{2(n+1-\max(i,j))-1}$, $i, j = 1, ..., n$.

Квазиметрика среднего времени первого прохода ориентированного цикла

Ориентированный цикл на трех вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на трех вершинах (рис. 5.1.1), то есть орграф $\overrightarrow{C_3} = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{32, 21, 13\}$ (в ориентированном случае $ij = \langle i, j\rangle$ – дуга из вершины i в вершину j).

Модель случайного блуждания по орграфу $\overrightarrow{C_3}$ тривиальна. В этом случае $T\overrightarrow{C_3} = \overrightarrow{C_3}$, и матрица перехода для соответсвующей цепи Маркова имеет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

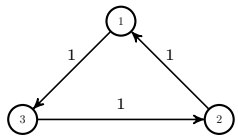


Рис. 5.1.1. Орграф $\overrightarrow{C_3}$.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 3 сходящихся дерева орграфа $\overrightarrow{C_3}$ (рис. 5.1.2), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{3} q_i = 3$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{3} q_i} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Этот вектор совпадает с π, нормированным левым вектором Перрона для T.

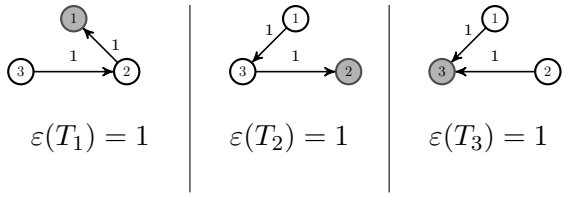


Рис. 5.1.2. Сходящиеся деревья орграфа $\overrightarrow{C_3}$.

На рис. 5.1.3 представлены все 3 "2-деревьевых" леса орграфа $\overrightarrow{C_3}$. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j, получаем: $\mathcal{F}_{12} = \{F_1, F_3\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_2\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_3\}$, $\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_2\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_3\}$. Непосредственный подсчет показывает, что $f_{12} = 2$, $f_{13} = 1$, $f_{21} = 1$, $f_{23} = 2$, $f_{31} = 2$, $f_{32} = 1$. Таким образом, $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

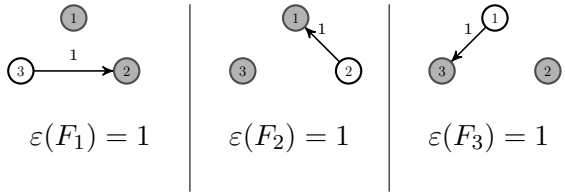


Рис. 5.1.3. Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{C_3}$, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M, квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Естественно, она не обладает свойством симметричности. Однако нетрудно убедиться, что $m_{ij} = m_{i+1,j+1}$, где нумерация индексов рассматривается по модулю 3. Так, $m_{12} = m_{23} = m_{31} = 2$, в то время как $m_{13} = m_{21} = m_{32} = 1$. Данный результат следует из изоморфности орграфа $\overrightarrow{C_3}$ и орграфа, полученного из $\overrightarrow{C_3}$ циклическим сдвигом всех вершин на единицу (в общем случае, на любую константу).

Ориентированный цикл на четырех вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на четырех вершинах (рис. 5.2.1), то есть орграф $\overrightarrow{C_4} = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{43, 32, 21, 14\}$.

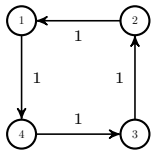


Рис. 5.2.1. Орграф $\overrightarrow{C_4}$.

Модель случайного блуждания по $\overrightarrow{C_4}$ строится обычным образом. В этом случае $T\overrightarrow{C_4} = \overrightarrow{C_4}$, и матрица перехода имеет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 4 сходящихся дерева орграфа $\overrightarrow{C_4}$ (рис. 5.2.2), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (1, 1, 1, 1)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{4} q_i = 4$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{4} q_i} = (1/4, 1/4, 1/4)$.

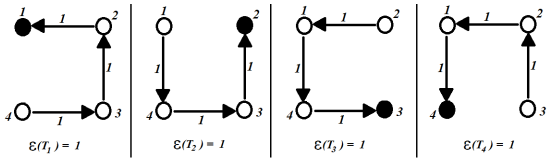


Рис. 5.2.2. Сходящиеся деревья орграфа $\overrightarrow{C_4}$.

На рис. 5.2.3 представлены все 6 "2-деревьевых" лесов орграфа $\overrightarrow{C_4}$. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j, получаем: $\mathcal{F}_{12} = \{F_1, F_4, F_5\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_2, F_6\}$, $\mathcal{F}_{14} = \{F_3\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_4, F_6\}$, $\mathcal{F}_{24} = \{F_3, F_5\}$, $\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_2\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_4\}$, $\mathcal{F}_{34} = \{F_3, F_5, F_6\}$, $\mathcal{F}_{41} = \{F_1, F_2, F_3\}$, $\mathcal{F}_{42} = \{F_4, F_5\}$, $\mathcal{F}_{43} = \{F_6\}$. Таким образом, $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

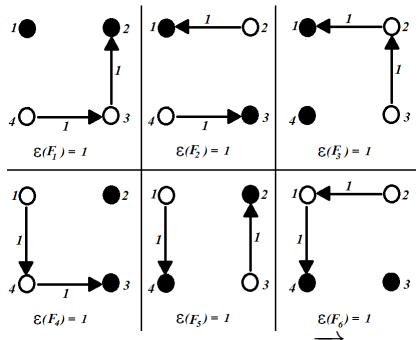


Рис. 5.2.3. Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{C_4}$, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M, квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Не являясь симметричной, она обладает рядом интересных свойств, которые мы обсудим ниже.

Ориентированный цикл на пяти вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на пяти вершинах (рис. 5.3.1),то есть орграф $\overrightarrow{C_5} = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{54, 43, 32, 21, 15\}$.

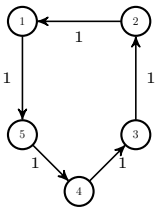
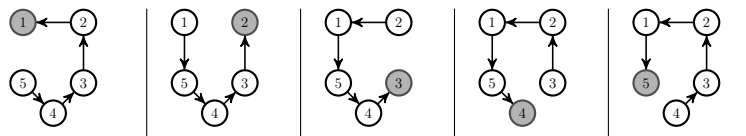


Рис. 5.3.1. Орграф $\overrightarrow{C_5}$.

Модель случайного блуждания по $\overrightarrow{C_5}$ строится обычным образом. В этом случае $T\overrightarrow{C_5} = \overrightarrow{C_5}$, и матрица перехода имеет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 5 сходящихся деревьев орграфа $\overrightarrow{C_5}$ (рис. 5.3.2), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{5} q_i = 5$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4, \tilde{q}_5) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{5} q_i} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$.

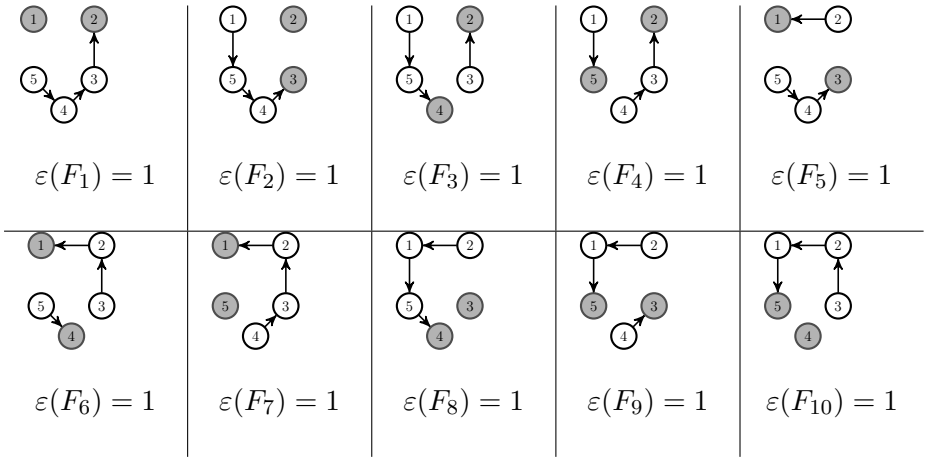


$\varepsilon(T_1) = 1$ | $\varepsilon(T_2) = 1$ | $\varepsilon(T_3) = 1$ | $\varepsilon(T_4) = 1$ | $\varepsilon(T_5) = 1$

Рис. 5.3.2. Сходящиеся деревья орграфа $\overrightarrow{C_5}$.

На рис. 5.3.3 представлены все 10 "2-деревьевых" лесов орграфа $\overrightarrow{C_5}$. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j, получаем: $\mathcal{F}_{12} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_5, F_8, F_9\}$, $\mathcal{F}_{14} = \{F_6, F_{10}\}$, $\mathcal{F}_{15} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_5, F_8, F_9\}$, $\mathcal{F}_{24} = \{F_3, F_6, F_{10}\}$, $\mathcal{F}_{25} = \{F_4, F_7\}$, $\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_5\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_2\}$, $\mathcal{F}_{34} = \{F_3, F_6, F_8, F_9\}$, $\mathcal{F}_{35} = \{F_4, F_7, F_9\}$, $\mathcal{F}_{41} = \{F_1, F_5, F_6\}$, $\mathcal{F}_{42} = \{F_2, F_3\}$, $\mathcal{F}_{43} = \{F_8\}$, $\mathcal{F}_{45} = \{F_4, F_7, F_9, F_{10}\}$, $\mathcal{F}_{51} = \{F_1, F_5, F_6, F_7\}$, $\mathcal{F}_{52} = \{F_2, F_3, F_4\}$, $\mathcal{F}_{53} = \{F_8, F_9\}$, $\mathcal{F}_{54} = \{F_{10}\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.



$\varepsilon(F_1) = 1$ | $\varepsilon(F_2) = 1$ | $\varepsilon(F_3) = 1$ | $\varepsilon(F_4) = 1$ | $\varepsilon(F_5) = 1$

$\varepsilon(F_6) = 1$ | $\varepsilon(F_7) = 1$ | $\varepsilon(F_8) = 1$ | $\varepsilon(F_9) = 1$ | $\varepsilon(F_{10}) = 1$

Рис. 5.3.3. Остовные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{C_5}$, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4+q_5}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M, квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Закономерности построения матрицы среднего времени первого прохода для случайного блуждания по ориентированному циклу достаточно прозрачны. Мы обсудим их в следующем пункте.

Ориентированный цикл на n вершинах, $n \geq 3$

Анализируя результаты, полученные выше для ориентированных циклов $\overrightarrow{C_n}, n = 3, 4, 5$, мы можем утверждать, что для указанных n матрица M среднего времени первого прохода имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & n-2 & \dots & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & n-1 & \dots & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & n & \dots & 6 & 5 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 2 & 1 & n \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что аналогичные результаты имеют место для любого ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$ (рис. 5.4.1).

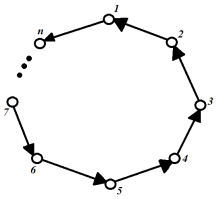


Рис. 5.4.1. Ориентированный цикл $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$.

Поскольку ориентированный цикл $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$, служит базой для построения цепи Маркова простого случайного блуждания, в котором дуга ij соответствует переходу из состояния i в состояние j с вероятностью $p_{ij} = 1$, то *диагональные элементы m_{ii} матрицы M удовлетворяют условиям $m_{ii} = n$ для $1 \leq i \leq n$*. Другими словами, *вектор $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, ..., \tilde{q}_n) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$, нормированный левый вектор Перрона для матрицы перехода T, имеет вид* $(1/n, 1/n, ..., 1/n)$. Это следует из того, что для любой вершины i существует ровно одно дерево, сходящееся к i, и его вес равен 1. (Следовательно, в графе $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$, имеется ровно n остовных сходящихся деревьев.)

"Слабую" симметричность ориентированной структуры, получаемой в ходе построения матрицы среднего времени первого прохода, обеспечивает изоморфизм графа $\overrightarrow{C_n}$ и графа, получаемого из $\overrightarrow{C_n}$ сдвигом каждой вершины на 1 влево (вправо); в этом случае имеют место соотношения $m_{ij} = m_{i+1,j+1}$, где вычисления индексов проводятся по модулю n.

При этом для элементов первого столбца имеют место соотношения $m_{i1} = i - 1$, $i = 2, ..., n$. Действительно, для $i = 2$ имеется ровно один "2-деревьевый" лес, в котором одно дерево сходится к 1, а второе содержит 2. Дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной 1; дерево, содержащее 2, сходится к 2. Вес этого леса (как и любого другого), равен 1. Таким образом, $f_{21} = 1$. Используя полученное выше соотношение $q_1 = 1$, получаем, что $m_{21} = f_{21}/q_1 = 1$. Для $i = 3$ имеется ровно один "2-деревьевый" лес, в котором дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной, а второе содержит 3. Он описан выше: его вклад в суммарный вес равен $f_{21} = 1$. Кроме того, имеется один "2-деревьевый" лес, в котором дерево, сходящееся к 1, содержит вершины $2, 1$, а второе сходится к 3. Вес этого леса равен 1. Таким образом, $f_{31} = f_{21} + 1 = 1 = 2$. Используя соотношение $q_1 = 1$, получаем, что $m_{31} = 2$. Продолжая рассуждения, получим, что $f_{i1} = f_{i-1,1} + 1 = (i-2) + 1 = i - 1$. Поскольку $q_1 = 1$, получаем, что $m_{i1} = f_{i1}/q_1 = i - 1$.

Изоморфность орграфа $\overrightarrow{C_n}$ и орграфа, полученного из $\overrightarrow{C_n}$ циклическим сдвигом всех вершин на единицу (в общем случае, на любую константу), обеспечивает равенство $m_{ij} = m_{i+1,j+1}$, где нумерация индексов осуществляется по модулю n. Поскольку $m_{21} = 1$, то $m_{32} =$

$= m_{43} = m_{n,n-1} = m_{1,n} = 1$; поскольку $m_{31} = 2$, то $m_{42} = m_{53} = m_{n,n-2} = m_{1,n-1} = m_{2,n} = 2$; ...; поскольку $m_{n1} = n-1$, то $m_{12} = m_{23} = m_{n-1,n} = n-1$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$ – ориентированный цикл на n вершинах: $\overrightarrow{C_n} = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{21, 32, ..., n(n-1), 1n\}$ (здесь пара ij соответствует дуге $\langle i, j\rangle$). Пусть $M = ((m_{ij}))$, $i, j = 1, 2, ..., n$ – матрица среднего времени первого прохода цепи Маркова, соответствующей простому случайному блужданию по $\overrightarrow{C_n}$. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$m_{ii} = n,\ 1 \leq i \leq n;\quad m_{ij} = \begin{cases} i-j, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n, \\ n+i-j, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Заметим, что соотношения для m_{ij}, $i \neq j$, можно получить и непосредственно. С учетом особенности построенной модели, m_{ij}, $i \neq j$, равно числу "2-деревьевых" лесов, один из которых сходится к j, а другой содержит i. Получение "2-деревьевого" леса сводится в нашем случае к удалению двух дуг графа $\overrightarrow{C_n}$. Сходимость одного из деревьев к j требует удаления дуги $\langle j, j-1\rangle$ (индексы вычисляем по модулю n). Принадлежность i и j к разным деревьям требует удаления, в случае $i > j$, одной из $i-j$ дуг $\langle i-k, i-1-k\rangle$, $k = 0, 1, ..., i-j-1$; в случае $i < j$ необходимо удалить одну из $n+i-j$ дуг $\langle i-k, i-1-k\rangle$, $k = 0, 1, ..., n+i-j-1$ (индексы вычисляем по модулю n).

Заметим, что с ориентированным циклом $\overrightarrow{C_n}$ связан красивый результат, обобщающий результаты, полученные П.Ю. Чеботаревым в неориентированном случае. [7]

Определим матрицу относительной лесной доступности орграфа Γ на n вершинах по закону $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$, где F_{ij} - количество остовных сходящихся корневых лесов графа Γ, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, а F – общее количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Γ. [11], [4]

Можно доказать, что матрица относительной лесной доступности для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}, n \geq 3$, связана с последовательностью $1, 2, 4, 8, ...$ степеней числа 2 и, как следствие, с последовательностью $1, 3, 7, 15, ...$ чисел Мерсенна $M_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$.

Именно, для матрицы относительной лесной доступности $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$ орграфа $\overrightarrow{C_n}, n \geq 3$, имеют место следующие соотношения: $F = 2^n - 1$, в то время как

$$F_{ii} = 2^{n-1},\ 1 \leq i \leq n,\quad F_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n+i-j}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

Другими словами, элементы F_{ij}, формирующие матрицу, представляют собой элементы множества $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}\}$, заполняющие собой диагонали матрицы, параллельные главной диагонали, последовательно уменьшаясь от 2^{n-1} (на главной диагонали) до 1 при движении "вниз", и последовательно увеличиваясь от 1 до 2^{n-1} при движении "вверх". Величина F равна $2^n - 1$, то есть числу Мерсенна M_n.

Так, для $n = 4$ матрица $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$ принимает вид $\dfrac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Квазиметрика среднего времени первого прохода ориентированного пути

Рассмотрим возможность построения квазиметрики среднего времени первого прохода на базе ориентированного пути на n вершинах (рис. 6.1), то есть орграфа $\overrightarrow{P_n} = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, и $E = \{21, 32, ..., n(n-1)\}$.

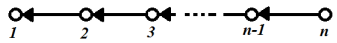


Рис. 6.1. Ориентированный путь $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 3$.

Поскольку в случае орграфа $\overrightarrow{P_n}$ мы не всегда можем построить ориентированный путь, соединяющий вершины i и j (так, вершина n недоступна из любой вершины i, $i \neq n$), то вопрос о случайном блуждании по ориентированному пути $\overrightarrow{P_n}$ становится тривиальным: реализовать его в обычных условиях невозможно.

Впрочем, в невозможности использования стандартной схемы можно убедиться и непосредственно. Так, диагональные элементы m_{ii} матрицы $M = ((m_{ij}))$ среднего времени первого прохода орграфа Г на n вершинах могут быть получены по формулам $m_{ii} = \dfrac{q}{q_i}$, где q_i – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к i в орграфе Г, а $q = \sum_{k=1}^{n} q_k$. В случае ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geq 2$, существует ровно одно остовное дерево, сам путь $\overrightarrow{P_n}$; это дерево сходится к вершине 1 и имеет вес 1. Для остальных вершин i, $2 \leq i \leq n$, сходящихся к ним остовных деревьев не существует. Следовательно, $q_1 = 1$, и $q_i = 0$ для любого i, $2 \leq i \leq n$. Таким образом, вычисление m_{ii} для $i \neq 1$ повлечет за собой деление на ноль. Аналогичная проблема возникнет и при вычислении недиагональных элементов $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$.

Заметим, что с ориентированным путем $\overrightarrow{P_n}$ связан красивый результат, обобщающий результаты, полученные П.Ю. Чеботаревым в неориентированном случае. [7]

Напомним, что матрица относительной лесной доступности орграфа Г на n вершинах определяется по закону $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$, где F_{ij} – количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Г, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, а F – общее количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Г. [11], [4]

Можно доказать, что матрица относительной лесной доступности для ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}, n \geq 3$, связана с последовательностью $1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...$ степеней числа 2.

Именно, для матрицы относительной лесной доступности $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$ орграфа $\overrightarrow{P_n}, n \geq 3$, имеют место следующие соотношения: $F = 2^{n-1}$, в то время как

$$F_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1; \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n; \end{cases} \quad F_{ij} = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1; \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n; \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Другими словами, элементы F_{ij}, формирующие матрицу, представляют собой элементы множества $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}\}$, заполняющие столбцы матрицы: первый столбец состоит из последовательно убывающих чисел $2^{n-1}, ..., 2, 1$; второй столбец, начинаясь с 0, содержит на втором месте (пересечение с главной диагональю) число 2^{n-2}, в то время как следующие элементы представляют собой последовательно убывающие числа $2^{n-3}, ..., 2, 1$; третий столбец, содержащий нули на двух позициях, расположенных над главной диагональю, содержит на третьем месте (пересечение с главной диагональю) число 2^{n-2}, в то время как следующие

элементы представляют собой последовательно убывающие числа $2^{n-3}, ..., 2$, и т.д. Величина F равна 2^{n-1}.

Так, для $n = 4$ матрица $\dfrac{((F_{ij}))}{F}$ имеет вид $\dfrac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Заключение

В статье представлены материалы, связанные с поведением специальной квазиметрики, тесно связанной со стохастическими дискретными процессами. Помимо короткого обзора теоретических оснований проблематики, подробно рассмотрен и проиллюстрирован на примерах "графовый" алгоритм построения квазиметрики среднего времени первого прохода; получены общие результаты, связанные с квазиметрикой среднего времени первого прохода, соответствующей простому случайному блужданию на неориентированных простых циклах и путях и их ориентированных аналогах. Рассмотрены связанные с проблематикой результаты, описывающие поведение матрицы относительной лесной доступности для указанных графовых моделей.

В этой связи интерес представляет задача построения и исследования свойств квазиметрики среднего времени первого прохода, соответствующей простому случайному блужданию на более сложных графовых моделях (регулярных графах, деревьях того или иного вида, двудольных графах и т.д.); перспективной представляется и задача построения конусов и многогранников рассматриваемых обобщенных (квази)метрик, заданных на малом числе точек (см., например, [1], [12], [13], [15]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М.М., Деза Е.И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, выпуск 2. С. 79 – 92.

2. Деза Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметрик // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.

3. Потапов В.Н. Теория информации. Кодирование дискретных вероятностных источников. - Новосибирск: НГУ, 1999.

4. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов. - М.: LAP LAMBERT Academic publishing, 2011.

5. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. - М.: ИЛ, 1963.

6. Catral M., Neumann M., Xu H. Proximity in group inverses of M-matrices and inverses of diagonally dominant M-matrices // Linear Algebra and its Applications. 2005. Vol. 409. P. 32 – 50.

7. Chebotarev P. Spanning forest and the Golden ratio // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156. P. 813 – 821.

8. Chebotarev P. Studying new classes of graph metrics / in F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013) // Lecture Notes in Computer Science. 2013. LNCS 8085. P. 207 – 214.

9. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications. 2002. Vol. 356. P. 253 – 274.

10. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2020. Vol. 14. P. 291 – 307.

11. Chebotarev P.Y., Shamis E.V. On proximity measures for graph vertices // Automation and Remote Control. 1998. Vol. 59. P. 1443 – 1459.

12. Deza E., Deza M., Dutour Sikirić M. Generalizations of Finite Metrics and Cuts. - World Scientific, 2016.

13. Deza M., Deza E. Cones of partial metrics // Contributions to Discrete Mathematics. 2011. Vol. 6. P. 26 – 47.

14. Deza M. M., Deza E. Encyclopedia of Distances. - Springer: Berlin-Heidelberg, 2016.

15. Deza M., Deza E., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics / in Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010 // Advances in Algebraic Structures. 2012. P. 177 – 197.

16. Kirkland S.J., Neumann M. Group inverses of M-matrices and their applications. - CRC Press, 2012.

17. Klein D., Zhu H. Distances and volumina for graphs // Journal of Mathematical Chemistry. 1998. Vol. 23. P. 179 – 195.

18. Leighton T., Rivest R.L. The Markov chain tree theorem // Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass. 1983.

19. Leighton T., Rivest R.L. Estimating a probability using finite memory // IEEE Transactions on Information Theory. 1986. Vol. 32. P. 733 – 742.

20. Wilson W. On quasi-metric spaces // American Journal of Mathematics. 1931. Vol. 53. P. 675–684.

REFERENCES

1. Deza, M.M., Deza, E.I., Dutour Sikirić, M. 2015, "Polyhedral structures associated with quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2), P. 79 – 92.

2. Deza, E., Mhanna, B. "On special properties of some special quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 21 (1), P. 145 – 164.

3. Potapov, V.N. 1999, "Information Theory. Coding of discrete probabilistic sources", *Novosibirsk: NSU center.*

4. Chebotarev, P., Agaev, R. 2011, "Matrix forest theorem and Laplacian matrices of orgraphs", *M.: LAP LAMBERT Academic publishing.*

5. Shannon, K. 1963, "Works on Information theory and Cybernetics", *M.: IL.*

6. Catral, M., Neumann, M., Xu, J. 2005, "Proximity in group inverses of M-matrices and inverses of diagonally dominant M-matrices", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 409, P. 32 – 50.

7. Chebotarev, P. 2008, "Spanning forest and the Golden ratio", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 156, P. 813 – 821.

8. Chebotarev, P. 2013, "Studying new classes of graph metrics", in *F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013)*, *Lecture Notes in Computer Science*, LNCS 8085, P. 207 – 214.

9. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 356, P. 253 – 274.

10. Chebotarev, P., Deza, E. 2020, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, Vol. 14, P. 291 – 307.

11. Chebotarev,P.Y., Shamis E.V. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, Vol. 59, P. 1443 – 1459.

12. Deza, E., Deza, M., Dutour Sikirić, M. 2016, "Generalizations of Finite Metrics and Cuts", *World Scientific.*

13. Deza, M., Deza, E. 2011, "Cones of partial metrics", *Contributions to Discrete Mathematics*, Vol. 6, P. 26 – 47.

14. Deza, M. M., Deza, E. 2016, "Encyclopedia of Distances," *Springer, Berlin - Heidelberg.*

15. Deza, M., Deza, E., Vidali, J. 2012, "Cones of weighted and partial metrics", in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010: Advances in Algebraic Structures*, P. 177 – 197.

16. Kirkland, S. J., Neumann, M. 2012, "Group inverses of M-matrices and their applications," *CRC Press.*

17. Klein, D., Zhu, H. 1998, "Distances and volumina for graphs", *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 23, P. 179 – 195.

18. Leighton, T., Rivest, R.L. 1983, "The Markov chain tree theorem", *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass.*

19. Leighton, T., Rivest, R.L. 1986, "Estimating a probability using finite memory", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 32, P. 733 – 742.

20. Wilson, W. 1931, "On quasi-metric spaces", *American Journal of Mathematics*, Vol. 53, P. 675–684.