ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 517.1, 517.2, 517.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-27-47

Регрессионное дифференцирование и регрессионное интегрирование конечных рядов[1]

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, М. Н. Добровольский, О. В. Иванченко, Д. А. Камаев

Агаян Сергей Мартикович —доктор физико-математических наук, Геофизический центр Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: s.agayan@gcras.ru
Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр Российской академии наук, Институт физики Земли Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: shm@wdcb.ru
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: shm@wdcb.ru
Иванченко Ольга Васильевна — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Обнинский институт атомной энергетики (г. Москва).
e-mail: ovivanchenko@iate.obninsk.ru
Камаев Дмитрий Альфредович — доктор технических наук, Научно-производственное объединение «Тайфун» (г. Обнинск).
e-mail: kda@feerc.obninsk.org

Аннотация

Анализ данных понятие сложное и многозначное. Объясняется это как объективной сложностью самих данных, так и субъективной природой анализирующего их эксперта. Поэтому адекватная формализация этого требует совершенно нового аппарата, с одной стороны способного преодолеть объективную сложность данных (нерегулярность и неточность), а с другой - нечеткий характер суждений эксперта. Развитие Дискретного математического анализа (ДМА) является важным шагом в этом направлении. ДМА значительно ориентирован на эксперта и занимает промежуточное положение в анализе данных между жесткими математическими методами (статистический анализ, СВАН и др.) и мягкими комбинаторными (имитационное моделирование, нейронные сети и др.).

В настоящей работе предлагаются новые математические конструкции регрессионных производных и регрессионных интегралов для дискретных временных рядов, заданных в общем случае на нерегулярной сетке. В их изучение важную роль играет недавно созданный авторами проекционный метод решения систем линейных алгебраических уравнений, описанный в конце работы.

Полученные конструкции регрессионных производных и регрессионных интегралов имеют иерархический характер в духе вейвлет- и фрактального анализов.

Результаты работы определяют направление для дальнейших исследований, а именно, проникновение регрессионного дифференцирования и регрессионного интегрирования в конечную математику по сценариям классической.

Ключевые слова: дискретный математический анализ, регрессионная производная, регрессионный интеграл, ядро оператора, неинтегрируемый ряд.

Библиография: 16 названий.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

Для цитирования:
С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, М. Н. Добровольский, О. В. Иванченко, Д. А. Камаев. Регрессионное дифференцирование и регрессионное интегрирование конечных рядов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 27–47.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 517.1, 517.2, 517.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-27-47

Regression differentiation and regression integration of finite series

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, M. N. Dobrovolskiy, O. V. Ivanchenko, D. A. Kamaev

Agayan Sergei Martikovich — doctor of physical and mathematical sciences, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: s.agayan@gcras.ru
Bogoutdinov Shamil Rafekovich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: shm@wdcb.ru
Dobrovolskiy Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: shm@wdcb.ru
Ivanchenko Olga Vasilievna — National Research Nuclear University "MEPhI", Obninsk Institute of Atomic Energy (Moscow).
e-mail: ovivanchenko@iate.obninsk.ru
Kamaev Dmitry Alfredovich — doctor of technical sciences, Research and Production Association «Typhoon» (Obninsk).
e-mail: kda@feerc.obninsk.org

Abstract

Data analysis is a complex and multi-dimensional concept. It is explained by both the objective complexity of the data itself and the subjective nature of the expert analyzing them. Therefore, adequate formalization of this requires a completely new apparatus, on the one hand, capable of overcoming the objective complexity of data (irregularity and inaccuracy), and, on the other hand, the vague nature of expert judgment. The development of Discrete Mathematical Analysis (DMA) is an important step in this direction. DMA is highly expert oriented and occupies an intermediate position in data analysis between strict mathematical methods (statistical analysis, TFA, etc.) and soft combinatorial methods (simulation modeling, neural networks, etc.).

This paper proposes new mathematical constructions of regression derivatives and regression integrals for discrete time series defined in general on an irregular grid. An important role in their study is played by the recently created by the authors projection method for solving systems of linear algebraic equations described at the end of this paper.

The obtained constructions of regression derivatives and regression integrals have a hierarchical character in the spirit of wavelet and fractal analysis.

The results of this work define another direction in further studies, namely, the propagation of regression differentiation and regression integration in finite mathematics under scenarios of the classical one.

Keywords: discrete mathematical analysis, regression differentiation, regression integration, operator kernel, functional non-integrable series.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, M. N. Dobrovolskiy, O. V. Ivanchenko, D. A. Kamaev, 2021, "Regression differentiation and regression integration of finite series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 27–47.

Введение

Анализ данных понятие сложное и многозначное. Объясняется это как объективной сложностью самого данных, так и субъективной природой анализирующего его эксперта. Поэтому адекватная формализация этого требует совершенно нового аппарата, с одной стороны способного преодолеть объективную сложность данных (нерегулярность и неточность), а с другой – нечеткий характер суждений эксперта. Развитие Дискретного математического анализа (ДМА) (например, [6, 5, 7, 4, 1, 2, 3]) является важным шагом в этом направлении. ДМА значительно ориентирован на эксперта и занимает промежуточное положение в анализе данных между жесткими математическими методами (статистический анализ, СВАН и др.) и мягкими комбинаторными (имитационное моделирование, нейронные сети и др.). Концепция ДМА состоит из двух положений. Положение первое: преимущество эксперта при анализе данных перед формальными методами объясняется его гибким, адаптивным восприятием фундаментальных свойств предельности, близости, непрерывности, связности, тренда и других. Такое умение эксперта нужно алгоритмизировать и получить дискретные аналоги упомянутых выше свойств. Положение второе: алгоритмы анализа данных складываются, как в конструкторе, из дискретных аналогов предельности, близости, непрерывности, связности и т.д., поэтому эти аналоги надо соединить по сценарию классической непрерывной математики и извлечь из этого пользу для анализа данных.

В настоящей работе предлагаются новые математические конструкции регрессионных производных и регрессионных интегралов для дискретных временных рядов, заданных в общем случае на нерегулярной сетке. В их изучение важную роль играет недавно созданный авторами проекционный метод решения систем линейных алгебраических уравнений, описанный в конце работы.

Регрессионные производные и интегралы

Теоретические предпосылки

Пусть функция f определена вокруг нуля на отрезке $[a, b]$, $(ab < 0)$, и интегрируема на нем. Для $0 \leqslant \Delta \leqslant \min(|a|, |b|)$ через f_Δ обозначим ограничение f на отрезок $[-\Delta, \Delta]$ и вычислим проекцию $\operatorname{pr} f_\Delta$ функции f_Δ в пространстве $L^2[-\Delta, \Delta]$ на двумерное пространство линейных функций $\operatorname{Lin}^2[-\Delta, \Delta]$.

Обозначим через $e_1 = e_1(\Delta)$, $e_2 = e_2(\Delta)$ ортонормированный базис в $\operatorname{Lin}^2[-\Delta, \Delta]$, получающийся из естественного базиса $(1, x)$ путем ортогонализации Грама–Шмидта [8], тогда:

$$\operatorname{pr} f_\Delta = (f_\Delta, e_1)_\Delta e_1 + (f_\Delta, e_2)_\Delta e_2.$$

Положим $e_1 = c$, $e_2 = ax + b$. На a, b, c возникают три условия:

$$\|e_1\|_\Delta = 1 \Leftrightarrow \int_{-\Delta}^{\Delta} c^2 dx = 1 \Leftrightarrow c^2 = \tfrac{1}{2\Delta},$$
$$(e_1, e_2)_\Delta = 0 \Leftrightarrow \int_{-\Delta}^{\Delta} c(ax + b) dx = 0 \Leftrightarrow b = 0,$$
$$\|e_2\|_\Delta = 1 \Leftrightarrow \int_{-\Delta}^{\Delta} a^2 x^2 dx = 1 \Leftrightarrow a^2 = \tfrac{3}{2\Delta^3}.$$

Таким образом,

$$(\mathrm{pr}\, f_\Delta)(x) = \frac{1}{2\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta} f(x)dx + \frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} xf(x)dx\right).$$

Дополнительно потребуется дифференцируе- мость функции f в нуле:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \alpha(x)x,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Тогда стремление:

$$\frac{1}{2\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta} f(x)dx \to f(0)$$

в свободном члене проекции $\mathrm{pr}\, f_\Delta$ объясняется теоремой о среднем [9].

Разберем коэффициент разложения $\mathrm{pr}\, f_\Delta$ при x:

$$\frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} xf(x)dx\right) =$$
$$\frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} x(f(0) + f'(0)x + \alpha(x)x)dx\right) =$$
$$\frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} xf(0)dx\right) + \frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} x^2 f'(0)dx\right) + \frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \alpha(x)x^2dx\right) =$$
$$0 + f'(0) + \frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \alpha(x)x^2dx\right)$$

Последний интеграл стремится к нулю при $x \to 0$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta(\varepsilon):\ \forall\Delta < \Delta(\varepsilon)|\alpha|\big|_{[-\Delta,\Delta]} < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\frac{3}{2\Delta^3}\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \alpha(x)x^2dx\right)\right| \leqslant \frac{3}{2\Delta^3}\left|\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \varepsilon x^2dx\right)\right| \equiv \varepsilon$$

Таким образом, доказано следующее:

Утверждение. *Если функция f дифференцируема в нуле, то линейная проекция* $\mathrm{pr}\, f_\Delta$ *стремится к ее касательной в нуле.*

Замена касательной к f на проекцию $\mathrm{pr}\, f_\Delta$ при малых Δ дает возможность определить касательную для дискретных функций, поскольку проекция $\mathrm{pr}\, f_\Delta$ есть не что иное, как линейная регрессия для f на $[-\Delta, \Delta]$ и допускает обобщение на дискретный случай.

1. Основные понятия

1.1. Пусть $BP[a,b]$ –N-мерное пространство конечных временных рядов на дискретном отрезке $[a,b]$ с узлами сетки t_i, $i = 1,\dots,N$; $t_1 = a$, $t_N = b$.

Дискретный математический анализ поведения ряда предполагает рассмотрение его значения не только в каждой отдельной точке, но и одновременно учет значений в некоторой её окрестности. С этой целью вводится понятие локализации для области определения ряда, т.е. для точек дискретного отрезка $[a,b]$. Локализация осуществляется с помощью ***нечеткой структуры*** $\delta_{t_i}(t_j)$, которая выполняет роль окрестности узла t_i и выражает свойство близости остальных узлов к t_i:

$$\delta_{t_i}(t_j) \text{ – степень близости узла } t_j \text{ к узлу } t_i.$$

По определению:

$$\delta_{t_i}(t_j) \in [0,1]\,,\ \delta_{t_i}(t_j) = 1,$$

В общем случае, $\delta_{t_i}(t_j) \neq \delta_{t_j}(t_i)$.

Таким образом, для любой точки t_i вводится структура нечеткого множества.

1.2. С мерой близости $\delta_{t_i}(t_j)$ связывается матрица весов

$$A = (a_{ij})\,, \quad a_{ij} = \frac{\delta_{t_i}(t_j)}{\sum_{k=1}^{N} \delta_{t_i}(t_k)}\ ,$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad j = 1 \ldots, N, \ \sum_j a_{ij} = 1$$

Заметим, что матрицу A можно представить в форме: $A = KA_0$, где $A_0 = (\delta_{t_i}(t_j))$, $K \equiv \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \delta_{t_i}(t_k)}\right)$.

Будем говорить, что нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ однородна, если $\delta_{t_i}(t_j) = \delta\,(t_i - t_j)$ где функция $\delta\,(\xi)$ является неотрицательной, $\delta\,(0) = 1$. Если функция $\delta\,(\xi)$ является неотрицательной и четной, то порождаемую ею нечеткую структуру будем называть симметричной и однородной.

Например, в случае равномерной сетки: $t_i = a+(i-1)h$, $i = 1, \ldots, N$, $t_N = b = a+(N-1)h$, $h = (b-a)/(N-1)$ нечеткая структура будет симметричной, если $\delta_{t_i}(t_j) = \delta\,(|t_i - t_j|) = v\,(h(i-j))$, где функция $\delta\,(\xi)$ является четной, неотрицательной, $\delta\,(0) = 1$.

Если $\delta_{t_i}(t_j) = 0$ при $|t_i - t_j| > r$, то нечеткая структура будет называться локальной, r — радиус нечеткой структуры.

Примером может служить симметричная однородная локальная нечеткая структура вида:

$$\delta\,(|t_i - t_j|) \equiv \delta\,(i-j) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|i-j|}{r}\right)^p, & |i-j| \leqslant r < N \\ 0, & |i-j| > r \end{cases} \tag{1}$$

2. Регрессионные производные: определения

2.1. Мера близости $\delta_{t_i}(t_j)$ в дискретном случае заменяет предельный переход $t_j \to t_i$ в классическом случае. Для ряда x в точке t_i возникает нечеткий образ $\mathrm{Im}_{t_i}x$:

$$\mathrm{Im}_{t_i}x = \{(x(t_j),\ \delta_{t_i}\,(t_j))\,, t_j \in [a,b]\ \}\,,$$

для которого в свою очередь строится линейная регрессия

$$y_i(t_j) = \alpha_i\,(t_j - t_i) + \beta_i, \quad j = 1, \ldots, N$$

где α_i, β_i – коэффициенты регрессии, которые находятся из условия минимума функционала

$$J_i\,(\alpha, \beta) = \sum_j a_{ij}[x_j - \alpha\,(t_j - t_i) - \beta]^2. \tag{2}$$

2.2. Значение величины α_i будем называть ***регрессионной производной ряда x в точке t_i*** и обозначать $(\mathcal{D}(x))_i$, в свою очередь, значение величины β_i будем называть ***регрессионным значением ряда x в точке t_i*** и обозначать $(\mathcal{R}(x))_i$.

2.3. Условия минимума функционала $J_i(\alpha,\beta)$ приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}\left(t_j-t_i\right)\left[x_j-\alpha\left(t_j-t_i\right)-\beta\right]=0 \\ \sum_j a_{ij}[x_j-\alpha\left(t_j-t_i\right)-\beta] \quad =0 \end{cases} \tag{3}$$

Введем оператор $M_i\left(y\right)=\sum_j a_{ij}y_j$, действующий на ряды вида $y=(y_1,\ldots,y_N)$, который совпадает с математическим ожиданием дискретной случайной величины $y=(y_1\ldots,y_N)$, принимающей значение y_j с вероятностью a_{ij}.

С помощью оператора $M_i\left(y\right)$ система (3) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} M_i\left(tx\right)-t_iM_i\left(x\right)-\alpha M_i(t-t_i)^2-\beta\left(M_i\left(t\right)-t_i\right)=0 \\ M_i\left(x\right)-\alpha\left(M_i\left(t\right)-t_i\right)-\beta=0 \end{cases} \tag{4}$$

Решение системы имеет вид:

$$\alpha_i=\ \frac{M_i\left(tx\right)-M_i\left(t\right)M_i\left(x\right)}{M_i\left(t^2\right)-M_i\left(t\right)^2}$$

$$\beta_i=M_i\left(x\right)-\ \frac{M_i\left(tx\right)-M_i\left(t\right)M_i\left(x\right)}{M_i\left(t^2\right)-M_i\left(t\right)^2}\left(M_i\left(t\right)-t_i\right)$$

Заметим, что выражение $M_i\left(t^2\right)-M_i\left(t\right)^2$ есть дисперсия $D_i\left(t\right)$ случайной величины $t=(t_1,\ldots,t_N)$, принимающей значение t_j с вероятностью a_{ij}. Поэтому она может быть равна 0 только в случае $t_1=t_2=\cdots=t_N$. Таким образом, $M_i\left(t^2\right)-M_i\left(t\right)^2\neq 0$. Выражения для коэффициентов регрессии можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \alpha_i=&\ \left(D_i\left(t\right)\right)^{-1}[M_i\left(tx\right)-M_i\left(t\right)M_i\left(x\right)] \\ \beta_i=M_i\left(x\right)-&\ \left(D_i\left(t\right)\right)^{-1}[M_i\left(tx\right)-M_i\left(t\right)M_i\left(x\right)]\left(M_i\left(t\right)-t_i\right) \end{aligned} \tag{5}$$

2.4. Если рассмотреть в совокупности $\left(\mathcal{D}(x)\right)_i$и $\left(\mathcal{R}(x)\right)_i$ для всех значений t_i, то можно ввести операторы регрессионного дифференцирования и регрессионного значения:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}:&\ BP[a,b]\to BP[a,b], \\ \mathcal{R}:&\ BP[a,b]\to BP[a,b] \end{aligned}$$

Вычислим матричное представление операторов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{R}$. Справедливы преобразования:

$$\begin{aligned} \alpha_i=&\left(D_i(t)\right)^{-1}[M_i(tx)-M_i(t)M_i(x)]= \\ =&\left(D_i(t)\right)^{-1}\sum_j a_{ij}t_jx_j-\left(D_i(t)\right)^{-1}M_i(t)\sum_j a_{ij}x_j= \\ =&\sum_j a_{ij}\left(\left(D_i(t)\right)^{-1}t_j-\left(D_i(t)\right)^{-1}M_i(t)\right)x_j \\ \beta_i=&M_i(x)-\left(D_i(t)\right)^{-1}\left(D_i(t)\right)^{-1}\left(D_i(t)\right)^{-1}[M_i(tx)-M_i(t)M_i(x)]\left(M_i(t)-t_i\right)= \\ =&\sum_j a_{ij}x_j-\left(M_i(t)-t_i\right)\sum_j a_{ij}\left(\left(D_i(t)\right)^{-1}t_j-\left(D_i(t)\right)^{-1}M_i(t)\right)x_j= \\ =&\sum_j a_{ij}x_j\left[1-\left(M_i(t)-t_i\right)\left(\left(D_i(t)\right)^{-1}t_j-\left(D_i(t)\right)^{-1}M_i(t)\right)\right] \end{aligned}$$

Введем обозначения диагональных матриц:

$$D\equiv\operatorname{diag}D_i\left(t\right),M\equiv\operatorname{diag}M_i\left(t\right),T\equiv\operatorname{diag}t_i.$$

Из приведенных формул следует матричная форма представления оператора $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x) =&[A - D^{-1}(M-T)AT + D^{-1}(M-T)MA]x = \\ =&[A - D^{-1}(M-T)(AT - MA)]x = \\ =&[KA_0 \ - D^{-1}(M-T)(KA_0\,T - MKA_0\ )]x,\end{aligned}$$

и оператора $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x) =&[D^{-1}AT - D^{-1}MA]x = \\ =&D^{-1}(AT - MA)x = D^{-1}(KA_0\,T - MKA_0\ )x, \\ \mathcal{D}_{ij} =&(D_i\,(t))^{-1}K_i\delta_{ij}(t_j - M_i\,(t))\end{aligned}$$

3. Регрессионные производные: примеры

3.1. Случай классической непрерывной функции (рис. 1)

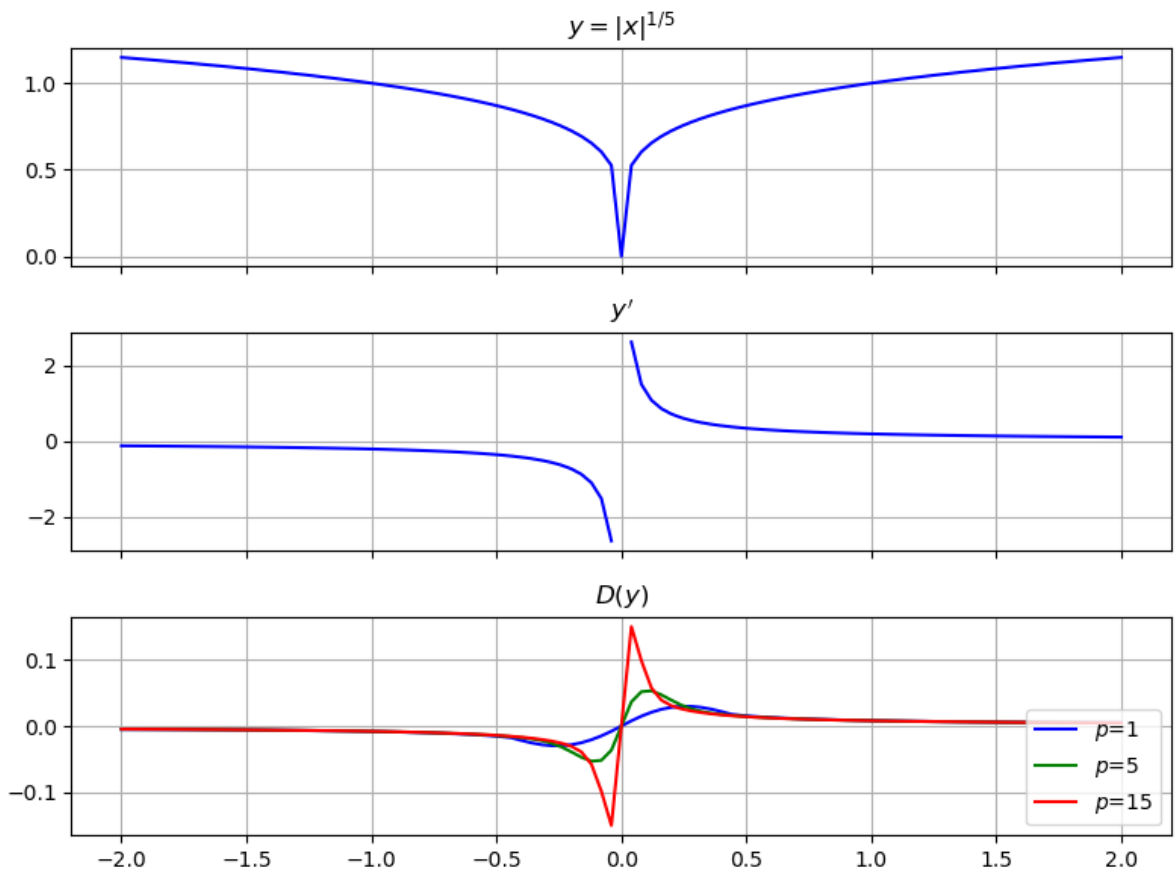

Рис. 1: На верхнем рисунке – график функции $y = |x|^{1/5}$, на среднем рисунке – ее классическая производная, на нижнем рисунке – регрессионная производная этой функции при разных значениях p

3.2. Случай реальной записи (рис. 2)

3.3. Математическое ожидание и регрессионное значение. Оператор регрессионного значения $\mathcal{R} = [A - D^{-1}(M-T)(AT - MA)]$ действует как сглаживание и являетя столь же естественным

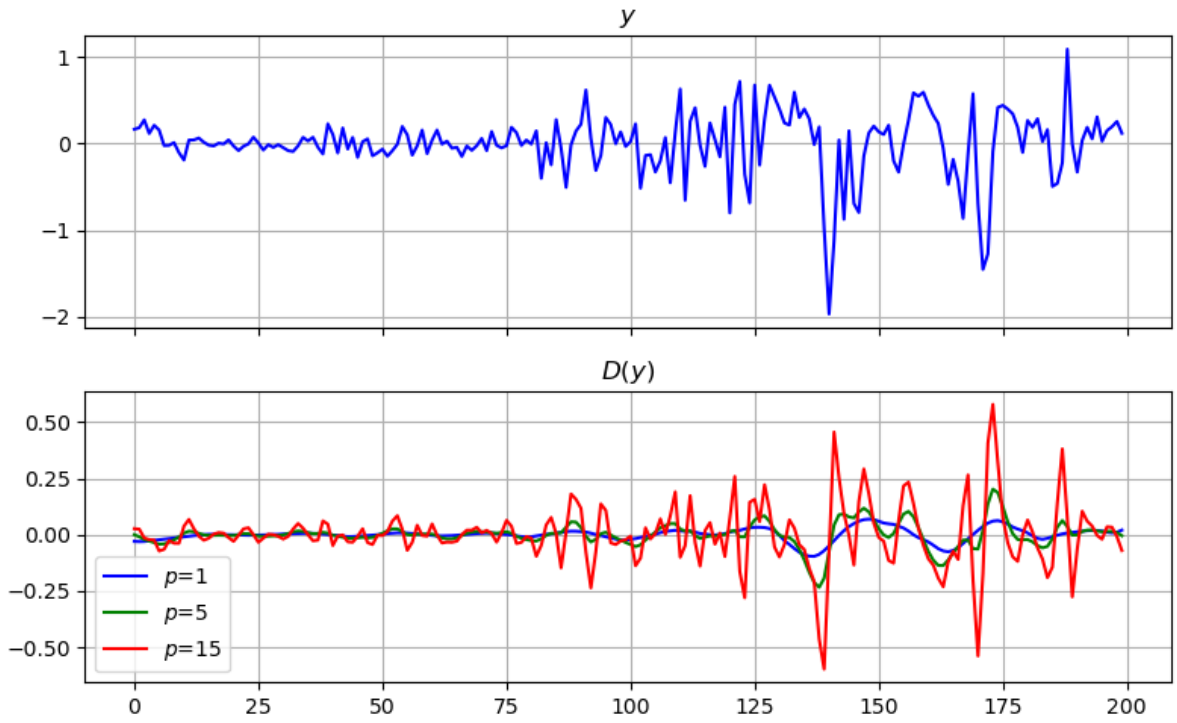

Рис. 2: На верхнем рисунке – фрагмент записи со спутника SWARM, на нижнем рисунке – ее регрессионная производная при разных значениях p

по отношению к мере близости δ, что и обычное усреднение (математическое ожидание A). Исследования показывают, что $\mathcal{R}$ работает лучше, чем A (рис. 3)

3.4. Пример нетривиального ядра оператора регрессионного интегрирования $\mathcal{D}$ (рис. 4)

4. Регрессионные производные: свойства

4.1.

Утверждение. (*Линейный случай*)

$$\mathcal{R}(at_i + b) = at_i + b,$$

$$\mathcal{D}(at_i + b) = a.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае ряд представим в виде:

$$x_i = at_i + b$$

В принятых обозначениях, $x = at + b$, поэтому

$$M_i\left(t(at+b)\right) - M_i\left(t\right) M_i\left(at+b\right) = aD_i\left(t\right)$$

Следовательно, $\alpha_i = a$. Аналогично,

$$\beta_i = M_i\left(at+b\right) - \frac{M_i\left(t\left(at+b\right)\right) - M_i\left(t\right) M_i\left(at+b\right)}{M_i\left(t^2\right) - M_i\left(t\right)^2}\left(M_i\left(t\right) - t_i\right) =$$

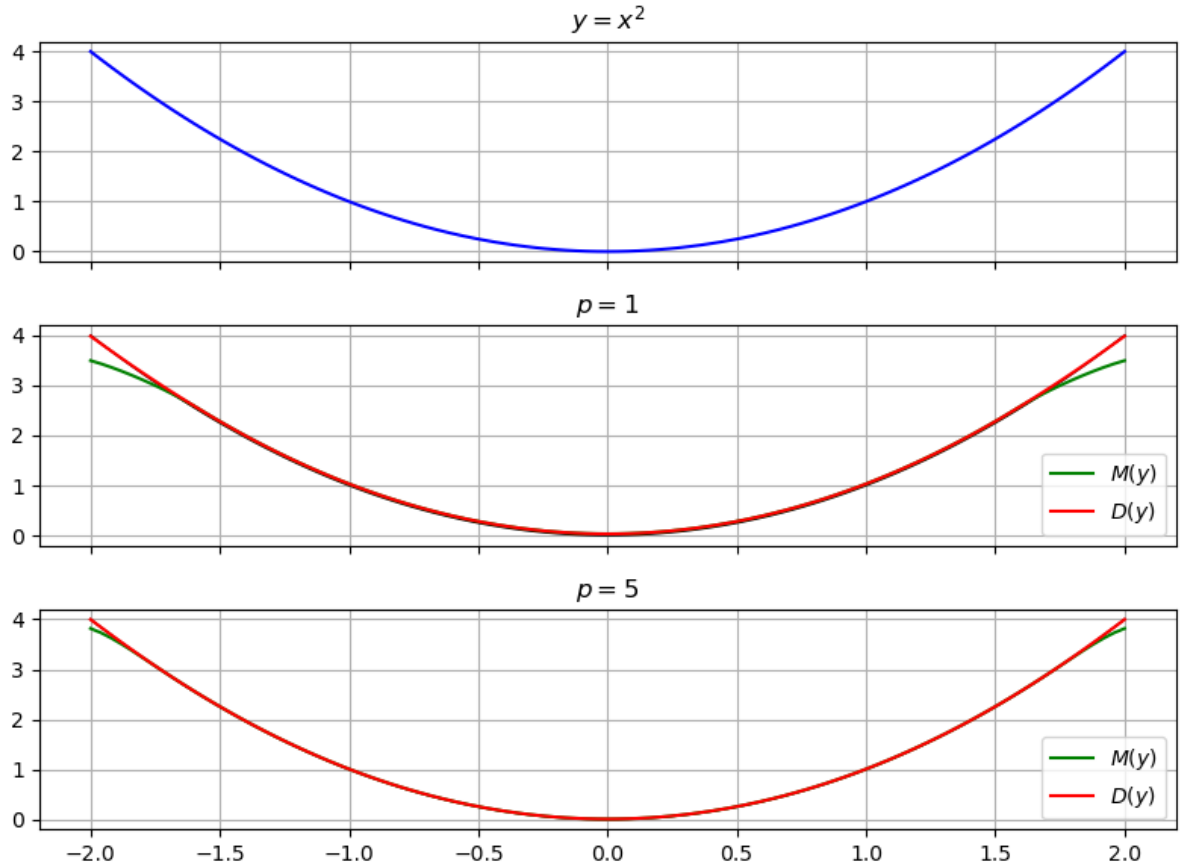

Рис. 3: На верхнем рисунке – график функции $y = x^2$, на среднем рисунке – сравнение регрессионного и обычного сглаживания при $p = 1$, на нижнем рисунке – сравнение регрессионного и обычного сглаживания при $p = 5$

$$= aM_i(t) + b - a(M_i(t) - t_i) = \ at_i + b$$

4.2. Ядро дифференцирования в случае трехточечной нечеткой структуры меры близости

Рассмотрим случай $r = 2$, т.е. нечеткая локальная структура $\delta_{t_i}(t_j)$ отлична от нуля только в точках t_{i-1}, t_i, t_{i+1}. Пусть $\delta_{t_i}(t_{i-1}) = \alpha_i$, $\delta_{t_i}(t_{i+1}) = \beta_i$, $\delta_{t_i}(t_i) = 1$.

В результате прямых расчетов получаем:

1. $k_i = \frac{1}{1+\alpha_i+\beta_i}$, $i \neq 1$, $i \neq N$,
$$k_1 = \frac{1}{1+\beta_1}, \ k_N = \frac{1}{1+\alpha_N}$$

2. $M_i(t) = \frac{t_i + t_{i-1}\alpha_i + t_{i+1}\beta_i}{1+\alpha_i+\beta_i}$, $i \neq 1$, $i \neq N$,
$$M_1(t) = \frac{t_1 + t_2\beta_1}{1+\beta_i}, M_N(t) = \frac{t_N + t_{N-1}\alpha_N}{1+\alpha_N}$$

3. $M_i(t^2) = \frac{{t_i}^2 + {t_{i-1}}^2\alpha_i + {t_{i+1}}^2\beta_i}{1+\alpha_i+\beta_i}$, $i \neq 1$, $i \neq N$,
$$M_1(t^2) = \frac{{t_1}^2 + {t_2}^2\beta_1}{1+\beta_i}, M_N(t^2) = \frac{{t_N}^2 + {t_{N-1}}^2\alpha_N}{1+\alpha_N}$$

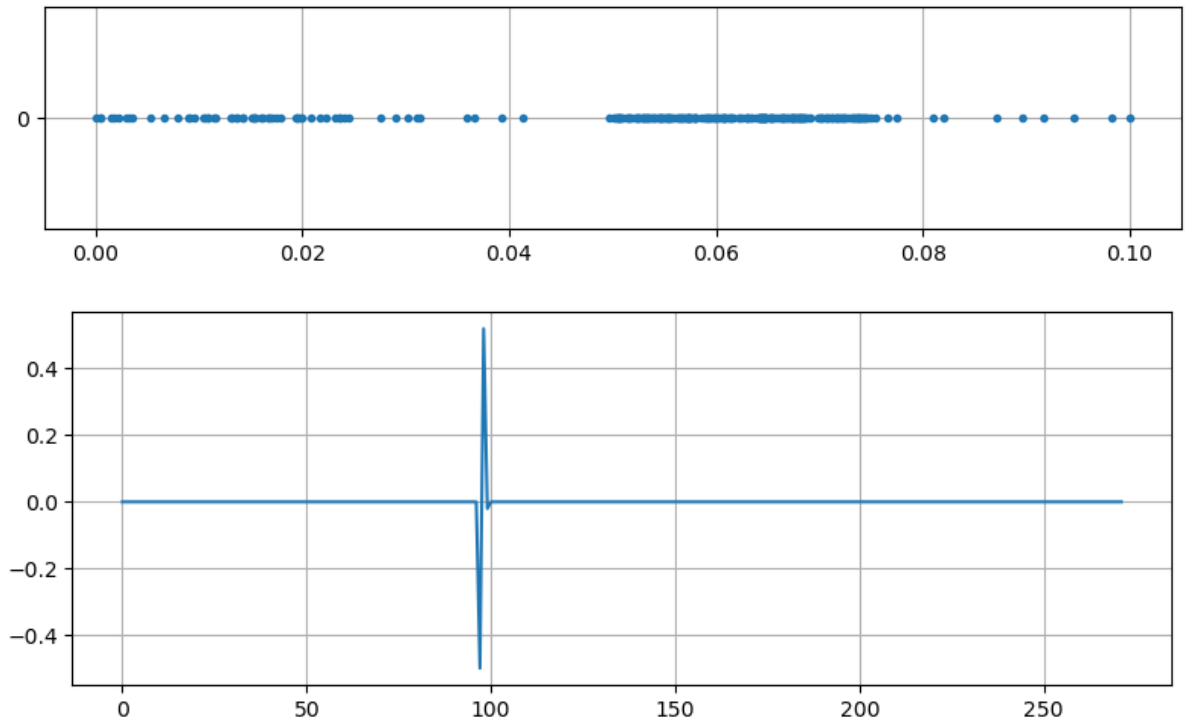

Рис. 4: На верхнем рисунке – неравномерное множество, на котором строился оператор регрессионного дифференцирования, на нижнем рисунке – нетривиальное ядро оператора $\mathcal{D}$

4. $M_i(t^2) - (M_i(t))^2 = \frac{\alpha_i(t_{i-1}-t_i)^2+\beta_i(t_{i+1}-t_i)^2+\alpha_i\beta_i(t_{i-1}-t_{i+1})^2}{(1+\alpha_i+\beta_i)^2},\ i \neq 1,\ i \neq N,$

$$M_1(t^2) - (M_1(t))^2 = \frac{\beta_1}{(1+\beta_1)^2}(t_1 - t_2)^2$$

$$M_N(t^2) - (M_N(t))^2 = \frac{\alpha_N}{(1+\alpha_N)^2}(t_N - t_{N-1})^2$$

5. $t_j - M_i(t) = \frac{(t_j-t_i)+\alpha_i(t_j-t_{i-1})+\beta_i(t_j-t_{i+1})}{1+\alpha_i+\beta_i},\ i \neq 1,\ i \neq N,$

$$t_j - M_1(t) = \frac{(t_j - t_1) + \beta_1(t_j - t_2)}{1+\beta_1}$$

$$t_j - M_N(t) = \frac{(t_j - t_N) + \alpha_N(t_j - t_{N-1})}{1+\alpha_N}$$

Проанализируем в случае $r = 2$ ядро и образ оператора регрессионного дифференцирования.

Воспользуемся формулой $\mathcal{D}(x) = D^{-1}(KA_0\ T - MKA_0\ )x$. Так как $MK = KM$, то $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}$ эквивалентно условию

$$(A_0\ T - MA_0\ )\,x = 0.$$

Т.е. ряд $x = (x_1, \ldots, x_N)$ есть решение системы линейных уравнений:

$$(t_1 - M_1)x_1 + \beta_1(t_2 - M_1)x_2 = 0$$

$$\alpha_2(t_1 - M_2)x_1 + (t_2 - M_2)x_2 + \beta_2(t_3 - M_2)x_3 = 0$$

$$\dots$$

$$\alpha_i(t_{i-1} - M_i)x_{i-1} + (t_i - M_i)x_i + \beta_i(t_{i+1} - M_i)x_{i+1} = 0$$

$$\dots$$

$$\alpha_{N-1}(t_{N-2} - M_{N-1})x_{N-2} + (t_{N-1} - M_{N-1})x_{N-1} + \beta_{N-1}(t_N - M_{N-1})x_N = 0$$

$$\alpha_N(t_{N-1} - M_N)x_{N-1} + (t_N - M_N)x_N = 0$$

Множество решений этой системы не является пустым, т.к. содержит постоянные ряды. Если $(x_1, \dots, x_N)$ есть решение системы, то в силу $t_2 - M_1 = \frac{t_2 - t_1}{1+\beta_1} \neq 0$, $t_{i+1} - M_i = \frac{t_{i+1} - t_i + \alpha_i(t_{i+1} - t_{i-1})}{1+\alpha_i+\beta_i} \neq 0$, из первого уравнения x_2 выражается через x_1, из второго уравнения x_3 выражается через x_1 и x_2, следовательно, через x_1 и т.д. Следовательно, решение системы единственно с точностью до умножения на x_1. Таким образом, доказано следующее утверждение:

Утверждение. *Пусть нечеткая локальная структура $\delta_{t_i}(t_j)$ отлична от нуля только в точках t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, тогда* $\operatorname{Ker}\mathcal{D}$ *есть подпространство постоянных рядов.*

5. Регрессионные интегралы

5.1. Неопределенный интеграл: определения и свойства

Согласно концепции классического математического анализа, операция неопределенного интегрирования должна рассматриваться как обратная по отношению к операции дифференцирования. Поэтому определим результат неопределенного регрессионного интегрирования ряда $y \in B\,[a, b]$ как решение системы линейных уравнений

$$(\mathcal{D}\,(x))_i = y_i, \quad i = 1, \dots, N \tag{6}$$

Выше было показано, что матрица регрессионной производной $\mathcal{D}$ имеет ненулевое ядро ($\operatorname{Ker}\mathcal{D} \neq 0$), которое в общем случае содержит не только постоянные ряды. Поэтому неопределенный регрессионный интеграл ряда y, для которого будем использовать обозначение $\mathcal{J}(y)$, может быть определен с точностью до любого ряда из $\operatorname{Ker}\mathcal{D}$.

Неопределенный регрессионный интеграл ряда y есть множество рядов $\mathcal{J}(y)$, представимое в виде:

$$\mathcal{J}(y) = \left\{x^0 + z \,|z \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}\right\},$$

где x^0 – частное решение системы $\mathcal{D}\,(x) = y$.

Параметризация множества $\mathcal{J}(y)$ сводится к параметризации $\operatorname{Ker}\mathcal{D}$ – пространства решений однородной системы линейных уравнений $\mathcal{D}\,(x) = 0$. Для её построения используется проекционный метод, изложенный в приложении. В результате параметрическое представление неопределенного интеграла имеет вид

$$\mathcal{J}(y) = \left\{x^0 + H(\mathcal{D})s \,|s \in B[a, b]\right\}$$

где $H(\mathcal{D})$ – оператор ортогонального проектирования на $\operatorname{Ker}\mathcal{D}$.

С помощью полученной параметризации на многообразии $\mathcal{J}(y)$ можно получить элемент минимальной нормы, который обозначается $\mathcal{J}_m(y)$.

Утверждение. *Операция неопределенного регрессионного интегрирования линейна: для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{D} \subset B\,[a, b]$*

$$\mathcal{J}\,(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\mathcal{J}\,(y_1) + \beta\mathcal{J}\,(y_2)$$

Доказательство. Ряд $\alpha\mathcal{J}_m(y_1)+\beta\mathcal{J}_m(y_2)$ лежит в $\mathcal{J}(\alpha y_1+\beta y_2)$, поскольку дифференцирование $\mathcal{D}(\alpha\mathcal{J}_m(y_1)+\beta\mathcal{J}_m(y_2))=\alpha y_1+\beta y_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\alpha y_1+\beta y_2) &= \\ &= \{(\alpha\mathcal{J}_m(y_1)+\beta\mathcal{J}_m(y_2))+\operatorname{Ker}\mathcal{D}\} = \\ &= \{\alpha\mathcal{J}_m(y_1)+\operatorname{Ker}\mathcal{D}\}+\{\beta\mathcal{J}_m(y_2)+\operatorname{Ker}\mathcal{D}\} = \\ &= \alpha\mathcal{J}(y_1)+\beta\mathcal{J}(y_2)\end{aligned}$$

5.2. Определенный интеграл: определение и свойства

Определенный регрессионный интеграл для $y\in\operatorname{Im}\mathcal{D}$ построим как «функцию верхнего предела», т.е. как временной ряд $\mathcal{I}(y)$:

$$\mathcal{I}(y)(t_i)=\mathcal{J}_m(y)(t_i)-\mathcal{J}_m(y)(t_1) \tag{7}$$

Утверждение. *1.* $\mathcal{I}(y)\in\mathcal{J}(y)$

2. Если $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{D}=1$*, то* $\mathcal{I}(C)(t)=C(t-t_1)$

Доказательство.

1. Следует из определения $\mathcal{I}(y)$: $\mathcal{I}(y)=\mathcal{J}_m(y)-\mathcal{J}_m(y)(t_1)\cdot\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – постоянная единичная функция на отрезке $[a,b]$
2. Из утверждения 4.1 $\mathcal{D}(Ct)=C$, следовательно, $\mathcal{J}(C)=Ct+c_0\cdot\mathbf{1}$ ($\dim\operatorname{Ker}\mathcal{D}=1$). $\min|Ct+c_0\cdot\mathbf{1}$ достигается при $c_0=-N^{-1}\sum_j t_j$. Таким образом, $\mathcal{J}_m(C)=Ct-\left(N^{-1}\sum_j t_j\right)\cdot\mathbf{1}$ и потому $\mathcal{I}(C)(t)=C(t-t_1)$

5.3. Неинтегрируемые функции: определение и свойства

Если ряд y таков, что решения системы $\mathcal{D}(x)=y$ не существует, то y будем называть ***неинтегрируемым рядом*** и $\mathcal{J}(y)=\emptyset$. Так как $\operatorname{Ker}\mathcal{D}\neq 0$, то неинтегрируемые ряды существуют всегда.

Утверждение. *Ряд y не интегрируем тогда и только тогда, когда его ортогональная проекция на подпространство* $\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*$ *не равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим ортогональное разложение

$$B[a,b]=(\operatorname{Im}\mathcal{D})^{\perp}\bigoplus\operatorname{Im}\mathcal{D}$$

Заметим, что $y\in(\operatorname{Im}\mathcal{D})^{\perp}$ означает, что для любого $x\in B[a,b]$ место равенство нулю скалярного произведения: $(y,\mathcal{D}x)=(\mathcal{D}^*y,x)=0$, но в таком случае $y\in\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*$. Поэтому $\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*=(\operatorname{Im}\mathcal{D})^{\perp}$. Из теории систем линейных уравнений следует, что система $\mathcal{D}(x)=y$ разрешима только в случае равенства нулю ортогональной проекции y на подпространство $(\operatorname{Im}\mathcal{D})^{\perp}$.

Таким образом поиск неинтегрируемых функций сводится к решению однородной системы $\mathcal{D}^*x=0$, которое может быть выполнено с помощью проекционного метода.

5.4. Неинтегрируемость в случае трехточечной нечеткой структуры меры близости

Если ряд $z=(z_1,\ldots,z_N)\in\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*$, то он удовлетворяет условию

$$(A_0\,T-MA_0\,)^*D^{-1}Kz=0$$

В таком случае ряд $w = D^{-1}Kz$, удовлетворяет следующей системе уравнений

$$(t_1 - M_1)w_1 + \alpha_2(t_1 - M_2)w_2 = 0$$

$$\beta_1(t_2 - M_1)w_1 + (t_2 - M_2)w_2 + \alpha_3(t_2 - M_3)w_3 = 0$$

$$\dots$$

$$\beta_{i-1}(t_i - M_{i-1})w_{i-1} + (t_i - M_i)w_i + \alpha_{i+1}(t_i - M_{i+1})w_{i+1} = 0$$

$$\dots$$

$$\beta_{N-2}(t_{N-1} - M_{N-2})w_{N-2} + (t_{N-1} - M_{N-1})w_{N-1} + \alpha_N(t_{N-1} - M_N)w_N = 0$$

$$\beta_{N-1}(t_N - M_{N-1})w_{N-1} + (t_N - M_N)w_N = 0$$

Как и в случае исследования ядра матрицы регрессионной производной, нетрудно обнаружить, что ряд $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ представим в виде $w = w_1(1, v_2, \dots, v_N)$, где компоненты $v_2, \dots, v_N$ однозначно выражаются через элементы матрицы $A_0\,T - MA_0$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*$ есть одномерное подпространство, порожденное рядом $u = K^{-1}D(1, v_2, \dots, v_N)$. Следовательно, образ $\operatorname{Im}\mathcal{D} = \{x\,|(x, u) = 0\}$.

Рассмотрим вид вектора v в случае трехточечной симметричной однородной структуры: $\alpha_i = \beta_i \equiv \rho > 0$ и равномерной сетки $t_i = a + (i-1)\,h$, $i = 1, \dots, N$, $t_N = b = a + (N-1)h$, $h = (b-a)/(N-1)$. Воспользовавшись полученными ранее соотношениями, получаем:

1. $k_i = \frac{1}{1+2\rho}$, $i \neq 1$, $i \neq N$,

$$k_1 = \frac{1}{1+\rho},\ k_N = \frac{1}{1+\rho}$$

2. $M_i(t) = t_i = a + (i-1)h$, $i \neq 1$, $i \neq N$,

$$M_1(t) = a + h\frac{\rho}{1+\rho}, M_N(t) = b - h\frac{\rho}{1+\rho}$$

3. $M_i(t^2) - (M_i(t))^2 = \frac{2\rho h^2}{1+2\rho}$, $i \neq 1$, $i \neq N$,

$$M_1(t^2) - (M_1(t))^2 = \frac{\rho h^2}{(1+\rho)^2}$$

$$M_N(t^2) - (M_N(t))^2 = \frac{\rho h^2}{(1+\rho)^2}$$

4. $t_j - M_i(t) = h(j-i)$, $i \neq 1$, $i \neq N$,

$$t_j - M_1(t) = \frac{(j-1)h + \rho jh}{1+\rho}$$

$$t_j - M_N(t) = \frac{(a-b+(j-1)h) + \rho\,(a-b+jh)}{1+\rho} = a - b + jh - \frac{h}{1+\rho}$$

Вектор v удовлетворяет системе соотношений:

$$-\frac{\rho h}{1+\rho}+(-h)\rho v_2=0$$

$$\frac{h\rho}{1+\rho}+0v_2+(-h)\rho v_3=0$$

$$\dots$$

$$\rho h v_{i-1}+0v_i+\rho(-h)v_{i+1}=0$$

$$\dots$$

$$\rho h v_{N-2}+0v_{N-1}+\rho(-\frac{h}{1+\rho})v_N=0$$

$$\rho h v_{N-1}+(-\frac{\rho h}{1+\rho})v_N=0$$

которая эквивалентна системе:

$$v_2=-\frac{1}{1+\rho},\qquad v_3=\frac{1}{1+\rho}$$

$$\dots$$

$$v_{i+1}=v_{i-1},\ i=3,\dots,N-2$$

$$\dots$$

$$v_N=(1+\rho)v_{N-2},\quad v_N=-(1+\rho)v_{N-1}$$

В итоге получается

$$\begin{aligned}v_1&=1,\\ v_i&=\frac{(-1)^{i+1}}{1+\rho},\quad i=2,\dots,N-1\\ v_N&=(-1)^{N+1}\end{aligned}$$

Соответственно,

$$\begin{aligned}u=&K^{-1}D(1,v_2,\dots,v_N)=\\ =&\left(\frac{\rho h^2}{1+\rho},\dots,\frac{(-1)^{i+1}2\rho h}{1+\rho},\dots,(-1)^{N+1}\frac{\rho h^2}{1+\rho}\right)=\\ =&\frac{\rho h}{1+\rho}\left(h,\dots,2(-1)^{i+1},\dots,(-1)^{N+1}h\right).\end{aligned}$$

Утверждение. *Пусть нечеткая локальная структура $\delta_{t_i}(t_j)$ задана на равномерной сетке $t_i=a+(i-1)h$, $i=1,\dots,N$, $t_N=b=a+(N-1)h$, $h=(b-a)/(N-1)$, является однородной и отлична от нуля только в точках t_{i-1},t_i,t_{i+1}, $\delta_{t_i}(t_{i-1})=\rho$, $\delta_{t_i}(t_{i+1})=\rho$, $\delta_{t_i}(t_i)=1$. Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*$ есть одномерное подпространство, порожденное рядом $u=\left(h,\dots,2(-1)^{i+1},\dots,(-1)^{N+1}h\right)$.*

Из утверждения из пункта 5.4 следует, что ряд является неинтегрируемым, если его ортогональная проекция на подпространство, порожденное сильно осциллирующим рядом $\Big(h, \dots, 2(-1)^{i+1}, \dots, (-1)^{N+1}h\Big)$, не равна нулю.

Осциллирующая структура ряда u имеет место для неоднородной симметричной меры близости на равномерной сетке. Заметим, что в общем случае матрица системы уравнений для определения ряда $w = D^{-1}Kz$ является матрицей Якоби [10]:

$$(A_0\ T - MA_0\ )^* = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & a_3 & & -b_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{N-1} & & a_N \end{pmatrix}$$

Очевидно,

$$a_j = \frac{\alpha_j(t_j - t_{j-1}) + \beta_j(t_j - t_{j+1})}{1 + \alpha_j + \beta_j}, \quad j = 2, \dots, N-1$$

$$a_1 = \frac{\beta_1(t_1 - t_2)}{1 + \beta_1}, \quad a_N = \frac{\alpha_N(t_N - t_{N-1})}{1 + \alpha_N}$$

$$b_j = -\alpha_{j+1}\frac{(t_j - t_{j+1}) + \beta_{j+1}(t_j - t_{j+2})}{1 + \alpha_{j+1} + \beta_{j+1}} > 0, \qquad j = 1, \dots, N-2$$

$$b_{N-1} = -\alpha_N \frac{(t_{N-1} - t_N)}{1 + \alpha_N}$$

$$c_j = -\beta_j \frac{(t_{j+1} - t_j) + \alpha_j(t_{j+1} - t_{j-1})}{1 + \alpha_j + \beta_j} < 0, \qquad j = 2, \dots, N-1$$

$$c_1 = -\beta_1 \frac{(t_2 - t_1)}{1 + \beta_1}$$

Решение системы представимо в виде

$$v_j = {b_1}^{-1}{b_2}^{-1} \dots {b_{j-1}}^{-1} G_{j-1}, \quad j = 1, \dots, N, \ w_1 = CG_0, \ w_2 = CG_1 \tag{8}$$

где C – произвольная постоянная, а G_j - главные миноры матрицы Якоби, которые удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$G_0 = 1, \quad G_1 = a_1, \quad G_k = a_k G_{k-1} - b_{k-1}c_{k-1}G_{k-2}, \ k = 2, \dots$$

Если на равномерной сетке задана симметричная, но неоднородная структура, $\alpha_j = \beta_j$, то

$$a_j = 0, \quad j = 2, \dots, N-1$$

$$a_1 = -\frac{\alpha_1 h}{1 + \alpha_1}, \quad a_N = \frac{\alpha_N h}{1 + \alpha_N}$$

$$b_j = h\alpha_{j+1} > 0, \qquad j = 1, \dots, N-2$$

$$b_{N-1} = \alpha_N \frac{h}{1 + \alpha_N}$$

$$c_j = -h\alpha_j < 0, \qquad j = 2, \dots, N-1$$

$$c_1 = -\beta_1 \frac{h}{1+\beta_1}$$

Следовательно, рекуррентное соотношение для главных миноров приобретает вид:

$$G_0 = 1, \quad G_1 = -\frac{\alpha_1 h}{1+\alpha_1}, \quad G_2 = h^2 \alpha_2 \alpha_1$$

$$G_k = h^2 \alpha_k \alpha_{k-1} G_{k-2}, \quad k = 3, \ldots, \ N-1$$

Таким образом, если k – четное, то $G_k > 0$, если k – нечетное, то $G_k < 0$. В силу положительности коэффициентов b_j и формул (8) получаем, что соседние компоненты вектора $u = K^{-1}D(1, v_2, \ldots, v_N)$ имеют противоположные знаки.

6. Регрессионный интеграл примеры

6.1. Случай классической непрерывной функции, имеющей превообразную (рис. 5)

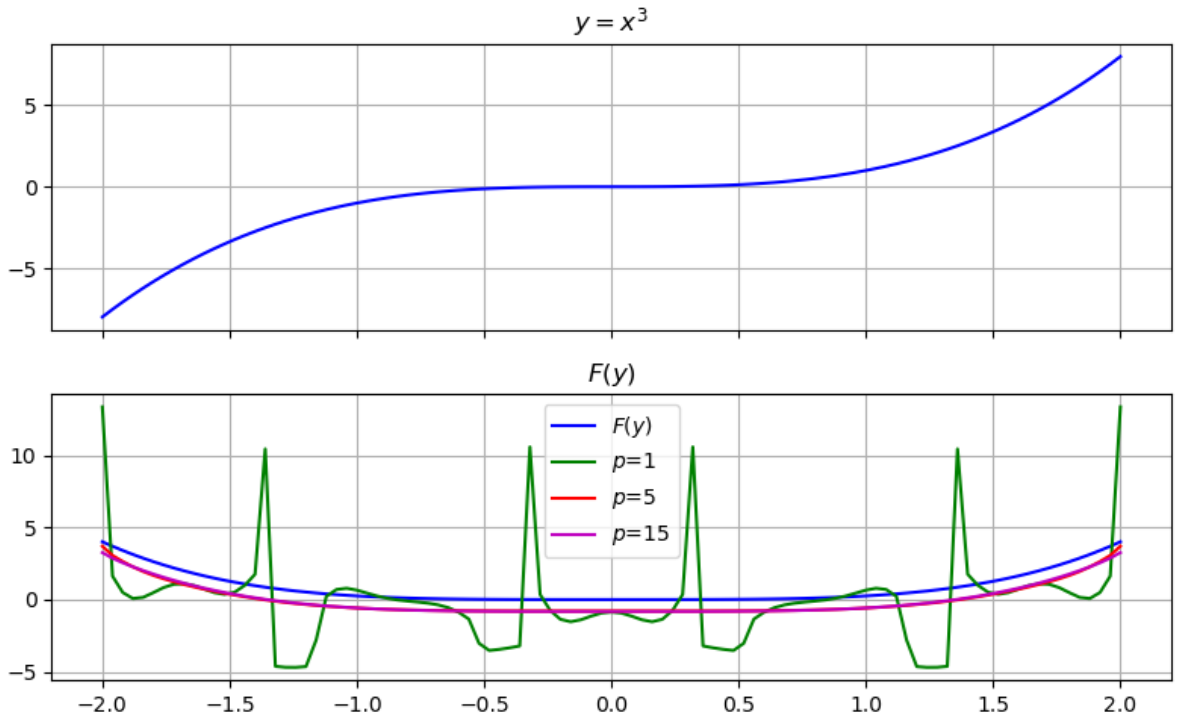

Рис. 5: На верхнем рисунке график функции $y = x^3$, на нижнем рисунке синим цветом показан интеграл функции y: $f(y) = \frac{x^4}{4}$, другими цветами – регрессионный интеграл функции y при разных значениях p

6.2. Случай классической непрерывной функции, не имеющей превообразную (рис. 6)

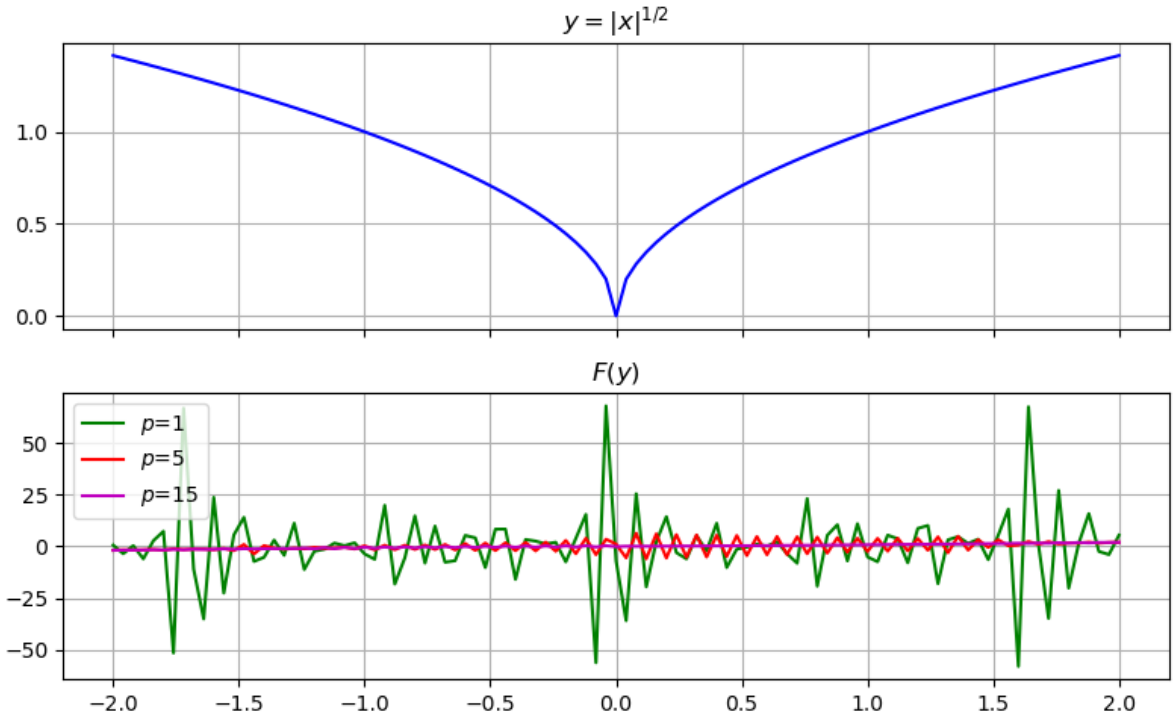

Рис. 6: На верхнем рисунке график функции $y = |x|^{1/2}$, на нижнем рисунке показан регрессионный интеграл функции y при разных значениях p

6.3. Пример неинтегрируемой функции (рис. 7)

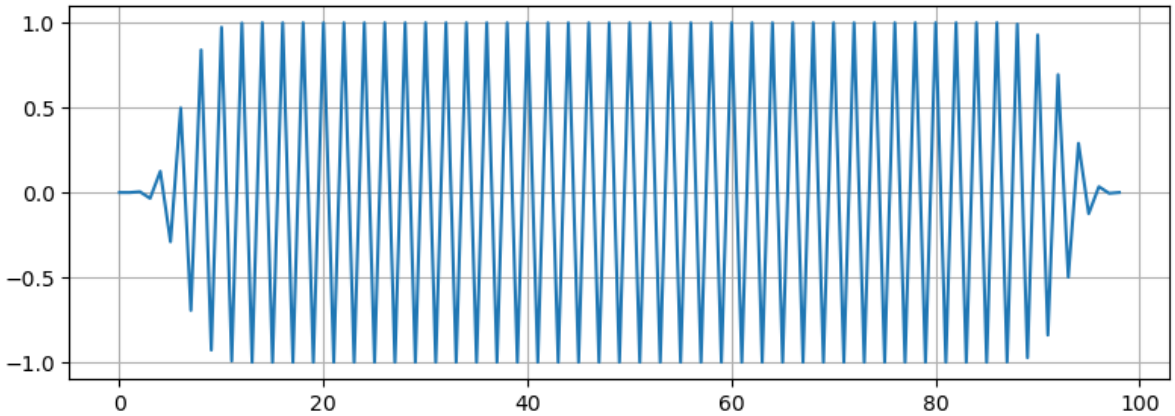

Рис. 7: Неинтегрируемая функция

Проекционный метод

Результаты приложения являются развитием подхода Абаффи, Спедикато [11] к решению систем линейных и нелинейных уравнений проекционным методом.

Исходное пространство E – евклидово относительно скалярного произведения $(,)$.

П.1.

Определение. *Для $a \in E$ положим*

$$\begin{aligned} &H(a) = 1, \text{ если } a = 0 \\ &H(a) = 1 - \tfrac{aa^T}{a^Ta}, \text{ если } a \neq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

П.2.

Утверждение. *$H(a)$ ортопроектор на $(L(a)|_E)^\perp$ – ортодополнение в E к прямой, натянутой на вектор a.*

Доказательство. Для нуля это очевидно. Теперь $a \neq 0$. Если $x \in E$, то

$$H(a)x = x - \frac{a}{\|a\|^2}(x,a) = x - \frac{a}{\|a\|}\left(x, \frac{a}{\|a\|}\right) \tag{10}$$

Таким образом, $x \in \operatorname{Ker} H(a) \Leftrightarrow x = \frac{a}{\|a\|^2}(x,a) \Leftrightarrow x \in L(a)$

Далее,

$$H(a)^\perp = \left(1 - \frac{aa^T}{a^Ta}\right)^\perp = 1 - \frac{(aa^T)^T}{a^Ta} = 1 - \frac{aa^T}{a^Ta} = H(a)$$

и

$$H(a)^2 = \left(1 - \frac{aa^T}{a^Ta}\right)^2 = 1 - 2\frac{aa^T}{a^Ta} + \frac{aa^Taa^T}{(a^Ta)^2} = 1 - 2\frac{aa^T}{a^Ta} + \frac{aa^T}{a^Ta} = 1 - \frac{aa^T}{a^Ta} = H(a)$$

Проектор ортогонален $\Leftrightarrow$ проектор самосопряжен $\Leftrightarrow$ является ортопроекцией на ортогональное дополнение к своему ядру.

Из формулы (10) непосредственно видно, что $H(a)x$ есть $x - \operatorname{pr}_a x$ – перпендикуляр из x на a.

П.3.

Утверждение. (*Согласованность конструкции H с ортопроектором P*)
Если P – ортопроектор, то для любого $a \in E$

$$H(Pa)P = PH(Pa)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} H(Pa)P &= \left(1 - \frac{Pa(Pa)^T}{\|Pa\|^2}\right)P = \left(1 - \frac{Paa^TP}{\|Pa\|^2}\right)P = P - \frac{Paa^TP^2}{\|Pa\|^2} = \\ &= P - \frac{Paa^TP}{\|Pa\|^2} = P - \frac{P^2aa^TP}{\|Pa\|^2} = P\left(1 - \frac{Paa^TP}{\|Pa\|^2}\right) = PH(Pa). \end{aligned}$$

П.4.

Утверждение. *$H(Pa)P$ ортопроектор на ортогональное дополнение* $(\operatorname{Ker} + L(a))^\perp$.

Доказательство. Сначала ортопроектность

$$(H(Pa)P)^2 = H(Pa)PH(Pa)P = H(Pa)H(Pa)PP = \\ = H(Pa)P(H(Pa)P)^T = PH(Pa) = H(Pa)P$$

Итак, $H(Pa)P$ – ортопроектор, причем $\operatorname{Ker} H(Pa)P \supseteq \operatorname{Ker} P + L(a)$, так как $H(Pa)P(a) = = H(Pa)Pa = 0$.

Покажем, что включение на самом деле является равенством. Пусть $x \in (\operatorname{Ker} P + L(a))^\perp$, то $x \in \operatorname{Ker}^\perp$ и потому $Px = x$. Так что

$$H(Pa)Px = H(Pa)x = x - \frac{Pa}{\|Pa\|^2}(x, Pa) = x - \frac{Pa}{\|Pa\|^2}(Px, a) = \\ = x - \frac{Pa}{\|Pa\|^2}(x, a) = [(x, a) = 0] = x.$$

Следовательно, $(\operatorname{Ker} H(Pa)P)^\perp \supseteq (\operatorname{Ker} P + L(a))^\perp \Leftrightarrow \operatorname{Ker} H(Pa)P \subseteq (\operatorname{Ker} P + L(a)$ а с учетом верности обратного неравенства на самом деле имеет место равенство $\operatorname{Ker} H(Pa)P = = \operatorname{Ker} P + L(a)$.

Пусть в E дана система векторов $A = (a_1, \ldots, a_m)$. Построим по ним итеративную систему проекторов $H_1, \ldots, H_m$, положив

$$\theta_1 = a_1, \qquad H_1 = H(\theta_1)$$

$$\theta_2 = H_1 a_2, \qquad H_2 = H(\theta_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_k = H_{k-1} \ldots H_1 a_k, \qquad H_k = H(\theta_k)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_m = H_{m-1} \ldots H_1 a_m, \qquad H_m = H(\theta_m)$$

Далее положим $P_k = H_1 \cdots H_k$. Тогда $\theta_k = P_{k-1}^\perp a_k$ и $H_k = H(P_{k-1}^\perp a_k)$ [12]

Заключение

Построены регрессионные варианты дифференцирования и интегрирования для конечных функция. Таким образом первое положение ДМА, сформулированное во введении реализовано, но не полностью, поскольку соответствующие операторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$ зависят от меры близости δ: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\delta)$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\delta)$ и эту зависимость нужно изучать.

На сегодняшний день можно с уверенностью сказать (и это подтверждают результаты статьи), что, чем локальнее δ, тем ближе $\mathcal{D}(\delta)$ и $\mathcal{J}(\delta)$ к своим классическим аналогам.

Второе положение ДМА определяет еще одно направление в дальнейших исследованиях, а именно, проникновение регрессионного дифференцирования и регрессионного интегрирования в конечную математику по сценариям классической.

Кое-что на этом пути уже сделано (реализована связь производные-тренды [7, 13]). На очереди, например, интегро-дифференциальные уравнения, многомерные обобщения и т.д.

Все, что получится, будет иметь иерархический характер, зависящий от масштаба рассмотрения (меры близости) в духе вейвлет- и фрактального анализов [14, 15, 16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikhailov V., Galdeano A., Diament M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., and Sailhac P. Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // Geophysics. 2003. Vol. 68, № 1, P. 168-180.

2. Zlotnicki J., LeMouel J.-L., Gvishiani A., Agayan S., Mikhailov V., Bogoutdinov Sh. Automatic fuzzy-logic recognition of anomalous activity on long geophysical records. Application to electric signals associated with the volcanic activity of la Fournaise volcano (R?union Island) // Earth and Planetary Science Letters. 2005. Vol.234. P. 261-278.

3. Soloviev A., Chulliat A., Bogoutdinov S., Gvishiani A., Agayan S., Peltier A., Heumez B. Automated recognition of spikes in 1 Hz data recorded at the Easter Island magnetic observatory // Earth Planets Space. 2012. Vol.64. № 9. P. 743-752, DOI:10.5047/eps.2012.03.004.

4. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Graeva E.M., Zlotnicki J., Bonnin J. Recognition of anomalies from time series by fuzzy logic methods // Russian Journal of Earth Sciences. 2008. Vol. 10. ES1001, DOI:10.2205/2007ES000278.

5. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Soloviev A., Sidorov R. The Study of Time Series Using the DMA Methods and Geophysical Applications // Data Science Journal. 2016. P. 1–21, DOI: 10.5334/dsj-2016-014

6. S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, R.I. Krasnoperov. Short introduction into DMA // Russian Journal of Earth Sciences. 2018. Vol. 18. № 2. DOI: 10.2205/2018ES000618

7. С.М. Агаян, Ш.Р. Богоутдинов, Д.А. Камаев, М.Н. Добровольский. Стохастические тренды на основе нечеткой математики // Чебышевский сборник, т.XX, вып. 3, 2019, с.92-106, DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-3-92-106

8. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. // М.: Наука, 1980, 543с.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.II. // М.: Наука, 1970. 800с.

10. Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. // Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1950, 360с.

11. Абаффи Й., Спедикато Э. Математические методы для линейных и нелинейных уравнений: проекционные ABS- алгоритмы. // М.: Мир. 1996. 270с.

12. С.М. Агаян, Ш.Р. Богоутдинов, А.А. Булычев, А.А. Соловьев, И.А. Фирсов. Проекционный метод решения систем линейных уравнений и его применение в гравиметрии // Доклады академии наук. Науки о Земле. 2020, т.493, № 1, с.58-62, DOI: 10.31857/S2686739720070051

13. Агаян С. М., Соловьев А. А., Богоутдинов Ш. Р., Николова Ю. И. Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков. // Геомагнетизм и аэрономия. 2019. Т.59, № 3, С. 383-392, DOI: 10.1134/S0016794019030027

14. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. // Academic Press. 2009. 832p. DOI: 10.1016/B978-0-12-374370-1.X0001-8

15. B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. // W.H. Freeman and company. 1982. 480p.

16. Федер Е. Фракталы. // М.: Мир, 1991. 254с.

REFERENCES

1. Mikhailov V., Galdeano A., Diament M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., Sailhac P. 2003, “Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering“, *Geophysics*, vol. 68, no. 1, pp. 168-180.

2. Zlotnicki J., LeMouel J.-L., Gvishiani A., Agayan S., Mikhailov V., Bogoutdinov Sh. Automatic fuzzy-logic recognition of anomalous activity on long geophysical records. 2005, “Application to electric signals associated with the volcanic activity of la Fournaise volcano (R?union Island)“, *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 234, pp. 261-278.

3. Soloviev A., Chulliat A., Bogoutdinov S., Gvishiani A., Agayan S., Peltier A., Heumez B. 2012, “Automated recognition of spikes in 1 Hz data recorded at the Easter Island magnetic observatory“, *Earth Planets Space*, vol. 64, no. 9, pp. 743-752, DOI:10.5047/eps.2012.03.004.

4. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Graeva E.M., Zlotnicki J., Bonnin J. 2008, “Recognition of anomalies from time series by fuzzy logic methods“, *Russian Journal of Earth Sciences*, vol. 10, ES1001, DOI:10.2205/2007ES000278.

5. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Soloviev A., Sidorov R. 2016, “The Study of Time Series Using the DMA Methods and Geophysical Applications“, *Data Science Journal*, pp. 1–21, DOI: 10.5334/dsj-2016-014

6. S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, R.I. Krasnoperov. 2018, “Short introduction into DMA“, *Russian Journal of Earth Sciences*, vol. 18, no 2, DOI: 10.2205/2018ES000618

7. S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, D.A. Kamaev, M.N. Dobrovolsky. 2019, “Stochastic trends based on fuzzy mathematics“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. XX, no. 3, pp. 92-106, DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-3-92-106

8. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. 1989, “Elements of function theory and functional analysis“, *M.: Nauka*, 543p.

9. Fichtenholz G.M. 1970, “Differential and Integral Calculus Course“, *M.: Nauka*, vol. II, 800p.

10. F.R. Gantmacher, M.G. Krein. 2002, “Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems: Revised Edition“, *AMS Chelsea Publishing*, vol. 345, 310pp.

11. J. Abaffy, E. Spedicato. 1989, “ABS projection algorithms : mathematical techniques for linear and nonlinear equations“, *Prentice Hall*, 220p.

12. S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, A.A. Bulychev, A.A. Soloviev, I.A. Firsov. 2020, “A projection method for solving systems of linear equations: gravimetry applications“, *Doklady Earth Sciences*, vol. 493, part 1, pp. 530–534, DOI: 10.1134/S1028334X20070053

13. Agayan, S. M., Soloviev, A. A., Bogoutdinov, Sh. R., Nikolova, Y. I. 2019, “Regression derivatives and their application in the study of geomagnetic jerks“, *Geomagnetism and aeronomy*, vol. 59, no. 3, pp. 383-392, DOI: 10.1134/S0016794019030027

14. Mallat S. 2009, “A wavelet tour of signal processing“, *Academic Press*, 832p, DOI: 10.1016/B978-0-12-374370-1.X0001-8

15. B. Mandelbrot. 1982, “The fractal geometry of nature“, *W.H. Freeman and company*, 480p.

16. Feder J. 1988, “Fractals“, *Springer US*, 284p.