ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-2-7-26

О некоторых проблемах аналитической теории чисел в творчестве Г. И. Архипова и С. М. Воронина

В. Н. Чубариков, А. Гияси

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru
Гияси Азар Ходабахш — кандидат физико-математических наук, Университет Алламе Табатабаи (г. Тегеран, Иран).
e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Аннотация

В статье даны постановки задач и представлен вклад в их решение выдающихся математиков Г. И. Архипова и С. М. Воронина.

В основу статьи положены две работы, написанные в связи с юбилейными датами ученых.

Ключевые слова: Ключевые слова: дзета-функция Римана; функции Дирихле; тригонометрические суммы.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков, А. Гияси. О некоторых проблемах аналитической теории чисел в творчестве Г. И. Архипова и С. М. Воронина // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 7–26.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-2-7-26

On several problems of the analytic number theory in the creative work of G. I. Arkhipov and S. M. Voronin

V. N. Chubarikov, A. Ghyasi

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Ghyasi Azar Khodabakhsh — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Tehran, Iran).
e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Abstract

In the paper the formulation of problems are given and the contribution in their solution of the outstanding mathematicians of G. I. Arkhipov and S. M. Voronin are presented.

At the base of the paper two papers, which are written in the coonection with jubileum data of scientists, are put.

Keywords: Key words: Riemann's zeta-function, Dirichlet's functions, trigonometric sums.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, A. Ghyasi. 2021, "On several problems of the analytic number theory in the creative work of G. I. Arkhipov and S. M. Voronin" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 7–26.

Введение

Посвящая настоящую статью светлой памяти выдающихся математиков, одноклассников по колмогоровскому интернату, однокурсников по механико-математическому факультету Московского университета и сотрудников Математического института имени В. А. Стеклова, прекрасных профессоров Геннадия Ивановича Архипова и Сергея Михайловича Воронина, нам хотелось еще раз окунуться в ту незабываемую атмосферу научного поиска и творчества, которая царила в сообществе этих замечательных ученых.

После кончины С. М. Воронина его памяти были посвящены многие встречи, воспоминания, одним из организаторов которых был Г. И. Архипов. Часть из них отражена в нашей совместной статье. Поэтому настоящую статью мы начинаем с воспоминаний о Сергее Михайловиче Воронине.

Отметим, что здесь мы использовали материалы работ [6], [13].

1. Биографические данные С. М. Воронина

Двадцать три года назад 18 октября 1997 года профессор С. М. Воронин завершил свой земной путь.

Он родился 11 марта 1946 г. в семье служащего в г. Горно-Алтайске. Его отец, Михаил Федорович, был инженером-нефтяником; мать, Пелагея Ильинична Воронина (урожденная Маслова), — учителем литературы в школе. В 1950-х годах семья Ворониных переехала в г. Бугуруслан Оренбургской области.

С детства у Сергея обнаружились незаурядные способности в самых разных областях человеческой деятельности. Он был активной творческой личностью, вокруг него всегда группировалась компания сверстников. Еще дошкольником Сергей "обложил себя книгами" и стал уговаривать родителей отдать его сразу во второй класс, но родители не стали этого делать.

Когда он узнал, что по программе средней школы в пятом классе будет преподаваться алгебра, то он приобрел знаменитый двухтомник Ван дер Вардена "Современная алгебра", и с его помощью стал поправлять учительницу алгебры на уроках. Ее реакция была такой, что она попросила мать Сережи отобрать у него этот учебник, чтобы он не сошел с ума. Вновь учебник Ван дер Вардена попался на глаза Сергею в восьмом классе и он в течение года его полностью и самостоятельно освоил. Много позднее С. М. Воронин говорил о том, что этот учебник и стал основой его математических знаний. В пятом же классе Сережа выучился виртуозно играть на балалайке, а затем с отличием закончил музыкальную школу по классу фортепиано. До конца жизни он фанатично увлекался классической музыкой. В 7 классе Сережу покорила химия. Делая химические опыты, он получил полведра серной кислоты.

В дальнейшем, Сергей помогал отцу в его изобретательской деятельности, проводя математические расчеты, и вместе с ним еще школьником получил авторское свидетельство на изобретение.

В 1963 г. после победы на областной олимпиаде по математике по Оренбургской области С. М. Воронин выступал на Всероссийской олимпиаде по математике и стал ее призером. Одиннадцатый класс он заканчивал в школе-интернате №18 при МГУ. Своими блестящими математическими способностями С. М. Воронин обратил на себя внимание академика А. Н. Колмогорова.

В 1964 г. С.М. поступил на механико-математический факультет МГУ. Он отлично учился по математике, самостоятельно изучал специальную математическую литературу. Надо сказать, что и художественную литературу он читал запоем, обладая редкой способностью скорочтения.

2. Кандидатская диссертация С. М. Воронина

Несмотря на широкий круг интересов, в центре его внимания всегда оставалась теория чисел, а точнее, теория дзета-функции Римана. Это и определило выбор его математической специализации на механико-математическом факультете МГУ. Его научным руководителем стал профессор А. А. Карацуба (31.01.1937–28.09.2008). С 1969 г. по 1972 г. С. М. Воронин обучался в аспирантуре Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Там он со всей страстью молодого таланта отдался доказательству знаменитой гипотезы Римана. За каждую неделю интенсивной работы С.М. прорабатывал десятки статей по теории чисел и другим разделам математики. Хотя продвинуться в доказательстве гипотезы Римана С. М. Воронину по существу не удалось, он получил в теории дзета-функции Римана другие первоклассные результаты.

В его кандидатскую диссертацию на тему “Исследование поведения дзета-функции Римана” (научный руководитель — профессор А. А. Карацуба), защищенную в 1972 г. в МИАН СССР, вошли следующие выдающиеся научные достижения:

- опровержение гипотезы Турана о нулях отрезков рядов Дирихле;
- доказательство того, что не существует непрерывной функции от нескольких переменных такой, что при подстановке вместо аргументов дзета-функции Римана и ее производных, она обращалась тождественно в нуль; эта теорема намного сильнее одного утверждения из знаменитого доклада Гильберта, в котором сформулированы его проблемы;
- доказательство того, что значения дзета-функции Римана от “сдвинутых” аргументов всюду плотны в многомерном комплексном пространстве; этот результат является глубоким многомерным обобщением известной теоремы Г. Бора.

Отметим еще один результат С. М. Воронина, полученный в это же время и не вошедший в кандидатскую диссертацию, касающийся обнаруженного им эффекта “сгущения” нулей дзета-функции Римана в окрестности единичной прямой в случае наличия хотя бы одного такого нуля.

3. Докторская диссертация С. М. Воронина

Следующим этапом исследований С. М. Воронина по теории дзета-функции Римана явилась его докторская диссертация “Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов”, защищенная в 1977 г. в МИАН СССР.

Основным результатом этой диссертации явилось доказательство знаменитой теоремы С. М. Воронина об “универсальности” дзета-функции Римана, согласно которой значения дзета-функции Римана внутри малого круга в критической полосе при вертикальном сдвиге аргумента (фрагмент функции) сколь угодно точно приближают любую аналитическую функцию, не обращающуюся в нуль в круге того же радиуса.

4. Другие проблемы, решенные С. М. Ворониным

Уже в своей кандидатской диссертации С. М. Воронин обратил внимание на то, что “утверждения теории распределения значений ζ-функции Римана и методы их доказательства близки Ω-теоремам теории ζ-функции Римана”. Основателем теории распределения значений ζ-функции и автором первых Ω-теорем для этой функции С.М. считал Г. Бора. Поэтому получив новые результаты в теории распределения ненулевых значений дзета-функции Римана, С. М. Воронин дал более простой метод доказательства существовавших к тому времени Ω-теорем.

Как известно, в теории дзета-функции Римана многие факты основаны на эйлеровском произведении по простым числам и на функциональном уравнении. В 1936 г. Г. Давенпорт и Х. Хейльбронн доказали, что линейная комбинация двух специальных рядов Дирихле, обладающих функциональным уравнением римановского типа, но не имеющая эйлеровского произведения, имеет комплексные нули, не лежащие в критической полосе. В 1980 г. С. М. Воронин обнаружил новый эффект функции Давенпорта–Хейльбронна, состоящий в том, что критическая прямая является “особым множеством” для нулей этой функции, поскольку на этой прямой лежит “аномально много нулей”. С.М. показал, что этим свойством обладают и некоторые дзета-функции квадратичных полей.

В теории рядов Дирихле со времен Римана весьма существенную роль играет их аналитическое продолжение. Основываясь на свойстве периодичности цепной дроби для квадратичной иррациональности α и на свойствах модулярных функций С. М. Воронин получает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость функции $\Phi(s)$, задаваемой при $\operatorname{Re} s > 12$ рядом

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} e^{2\pi i n\alpha},$$

где $\tau(n)$ — функция Рамануджана.

В работе “О методе И. М. Виноградова” [10] С. М. Воронин дает интересное обобщение понятия “малого решета” на кольца целых чисел алгебраических расширений поля рациональных чисел. В частности, это позволяет ему решить аддитивную тернарную проблему в простых числах, представимых нормами дивизоров поля.

Несколько особняком стоят работы С. М. Воронина по построению квадратурных и интерполяционных формул с помощью дивизоров в полях алгебраических чисел.

Научно-исследовательская работа С. М. Воронина объединила вокруг него большую группу специалистов в области теории дзета-функции Римана и теории квадратурных формул, которые составили ядро его научной школы.

С. М. Воронин был интересным собеседником, а его научные доклады по разным направлениям математики и ее истории всегда располагали к их творческому восприятию и обсуждению.

Список научных работ С. М. Воронина приведен в его “Избранных трудах”, изданных в 2006 г. [11]. Он является соавтором монографии “Дзета-функция Римана” (1994) [12], переведенной на английский язык. В 1978 г. в серии общества “Знание” вышла его научно-популярная книга “Простые числа” [8].

5. Биографические данные Г. И. Архипова

Геннадий Иванович Архипов родился 12 декабря 1945 г. в г. Ельце Липецкой области. В семье было еще двое детей старше него: сестра Светлана и брат Александр. Родители, Иван Филиппович и Елена Михайловна были служащими, во время войны находились в эвакуации в Ельце, после войны вернулись в родной г. Орел.

На формирование характера маленького Гены большое влияние оказали бабушка Марфа Давыдовна, сестра Светлана и первый учитель математики и физики Геннадий Николаевич Плотников, к которым Геннадий Иванович сохранил горячую любовь. С раннего детства Геннадия окружала послевоенная обстановка почти полностью разрушенного Орла, которая оказала сильное влияние на формирование его характера. Это и направило его душу на служение обществу, людям. Отсюда — его открытость к людским заботам и глубокое сопереживание человеческому горю и невзгодам, резкое неприятие несправедливости, готовность без промедления прийти на помощь и добиваться истины. Геннадий Иванович с участием относится не только к несчастьям, но еще в большей степени — к радостям окружающих его людей.

С 1953 г. по 1963 г. Г. И. Архипов блестяще учился в 24-й средней школе г. Орла, побеждал в областных школьных олимпиадах по математике и физике и представлял Орловскую область на Всероссийских математических олимпиадах. В 1964 г. он окончил специализированную школу-интернат № 18 физико-математического профиля при МГУ в составе ее первого выпуска. В том же году он стал победителем Международной математической олимпиады школьников и был зачислен студентом Механико-математического факультета МГУ. В 1969 г. Г. И. Архипов окончил его и поступил в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (научный руководитель — профессор А. А. Карацуба), которую закончил в 1972 г.

6. Кандидатская диссертация Г. И. Архипова

В 1975 г. Г. И. Архипов защитил кандидатскую диссертацию на тему “Кратные тригонометрические суммы и приложения” (научный руководитель — профессор А. А. Карацуба). В ней разработана теория кратных тригонометрических сумм, являющаяся мощным развитием метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова. Основу исследования Г.И. составляет оценка сверху числа решений $J = J(P; K; n)$ в натуральных числах $x_s, y_s, 1 \le s \le 2K$, не превосходящих $P > 1$, системы диофантовых уравнений

$$x_1^t y_1^{s-t} + \cdots + x_K^t y_K^{s-t} = x_{K+1}^t y_{K+1}^{s-t} + \cdots + x_{2K}^t y_{2K}^{s-t}$$

$$(0 \le t \le s \le n, s \ge 1).$$

Число N уравнений этой системы равно

$$N = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=0}^{s} 1 = \sum_{s=1}^{n} (s+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2},$$

а сумма M степеней уравнений системы равна

$$M = \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{s} s = \sum_{s=1}^{n} s(s+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Очевидно, имеем $J \ge P^{2K}$.

В 1971 г. Г. И. Архипов дал точную верхнюю границу J при правильном порядке величины $K \gg M \ln M : J \ll P^{4K-M}$.

Следовательно, при достаточно большом P находим $P^{2K} \ll P^{4K-M}$. Таким образом, получим $2K \geq M$, т.е. результат Г. И. Архипова лишь логарифмическим множителем $\ln M$ отличается от найденной оценки.

В основе доказательства этой теоремы лежит оригинальное вспомогательное утверждение.

Рассмотрим систему сравнений в кольце классов вычетов по модулю p^n, p — простое,

$$\sum_{k=1}^{2n^2}(-1)^k z_k^{m-t} v_k^t \equiv \lambda_l \pmod{p^m},$$

где λ_l при $l = 0, 1, \ldots, N$ — фиксированные целые, z_k, v_k при $k = 1, 2, \ldots, 2n^2$ — неизвестные. Обозначим эту систему сравнений буквой W, а число ее решений символом $T(W)$.

Лемма 1. *Пусть строки матрицы B, соответствующей набору $(z_1, v_1, \ldots z_{2n^2}, v_{2n^2})$, (т.е. $B = (b_{l,k})$, $b_{l,k} = z_k^{m-t} v_k^t$ при $l = 0, 1, \ldots, N$ и $k = 1, 2, \ldots, 2n^2$) линейно независимы над Z_p — полем вычетов по модулю p. Тогда имеет место следующая оценка*

$$T(W) \leq n^{2n^2 p^{4n^3 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}}.$$

7. Докторская диссертация Г. И. Архипова

С 1983 г. Г. И. Архипов по приглашению И. М. Виноградова работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. В 1984 г. он защищает докторскую диссертацию на тему “Исследования по проблеме Гильберта — Камке”.

Им решена классическая проблема Гильберта — Камке об одновременном представлении системы чисел суммами степеней и установлен точный порядок для количества слагаемых.

Более точно, проблема Гильберта – Камке состоит в том, чтобы доказать разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = N_1, \\ \cdots \qquad \cdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n = N_n, \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$ в случае, когда число неизвестных k ограничено и возрастающие параметры $N_1, \ldots, N_n$ удовлетворяют некоторым естественным условиям.

Другими словами, следует получить наилучшую возможную оценку $r(n)$ для количества переменных k, при котором эта система уравнений разрешима.

Пусть P — натуральное число, переменные $x_1, \ldots, x_k$ системы уравнений Гильберта – Камке лежат в пределах от 1 до P и $I = I(P; n, k; N_1, \ldots, N_n)$ обозначает число ее решений.

Теорема 1. *При $k \geqslant n^2(4\log n + 2\log\log n + 9)$, $k \leqslant P^{0,1}$ и при $P \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$I = \sigma\gamma P^{k-0,5n(n+1)} + \theta n^{30n^3} P^{k-0,5n(n+1)-(30(2+\log n))^{-1}},$$

кроме того, имеет место оценка $I \leqslant n^{30n^3} P^{k-0,5n(n+1)}$. Здесь θ — вещественное число, $|\theta| \leqslant 1$, и σ, γ — неотрицательные числа. Значение величины σ равно сумме “особого ряда в проблеме Гильберта – Камке”, значение величины γ равно значению величины “особого интеграла в проблеме Гильберта – Камке,” а именно

$$\sigma = \sum_{q_1}^{\infty} \cdots \sum_{q_n}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leqslant a_1 < q_1 \\ (a_1, q_1) = 1}} \cdots \sum_{\substack{0 \leqslant a_n < q_n \\ (a_n, q_n) = 1}} q^{-k} V^k \exp(-2\pi i A),$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} W^k \exp -2\pi i B \, d\beta_1 \dots d\beta_n,$$

где $q = q_1 \dots q_n$,

$$V = \sum_{x=1}^{q} \exp\{2\pi i(\frac{a_1 x}{q_1} + \dots + \frac{a_n x}{q_n})\}, \qquad A = \frac{a_1 N_1}{q_1} + \dots + \frac{a_n N_n}{q_n}$$

$$W = \int_0^1 \exp\{2\pi i(\beta_1 x + \dots + \beta_n x^n)\} \, dx, \qquad B = \frac{\beta_1 N_1}{P} + \dots + \frac{\beta_n N_n}{P^n}.$$

Показатель сходимости $k = k_0$ *особого ряда* $\sigma = \sigma(k)$ *равен* $0,25n(n+1)+1$, *а особого интеграла* $\gamma = \gamma(k)$ *— равен* $0,25n(n+1)+0,5$.

Заметим, что полученная асимптотическая формула нетривиальна тогда и только тогда, когда особый ряд σ и особый интеграл γ положительны. Более того, если $\sigma = 0$, то система уравнений Гильберта – Камке не имеет решений вообще, а если $\gamma = 0$, то число ее решений остается ограниченным при растущих числах $N_1, \dots, N_n$.

Необходимое условие арифметического характера для разрешимости системы уравнений Гильберта – Камке состоит в том, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} t_1 \cdot 1 + \dots + t_n \cdot n = N_1, \\ \dots \qquad \dots \\ t_1 \cdot 1^n + \dots + t_n \cdot n^n = N_n, \end{cases}$$

разрешимо в целых числах $t_1, \dots, t_n$. Обозначим его через (H).

В несколько иной форме это условие впервые было сформулировано К. К. Марджанишвили.

Теорема 2. *Пусть* $k \geqslant T = \min\{n^2 2^{2n-1}, 3n^3 2^n - n\}$. *Тогда при условии* (H) *для особого ряда* σ *справедливо неравенство*

$$\sigma \geqslant n^{-20n^4 2^n}.$$

Если же для наборов $(N_1, \dots, N_n)$ *выполняется условие* (H) *и* $\sigma = 0$, *то* $k < 2^n - 1$.

Для исследования особого интеграла γ Г. И. Архипов вводит понятие характеристики числового множества на отрезке $[0,1]$. Пусть $l \geqslant n$ и множество $\{0 \leqslant y_1, \dots, y_l \leqslant 1\}$. Произвольным способом κ выбираем из них n чисел с различными индексами. Пусть это будут $z_1, \dots, z_n$ и полагаем $z_0 = 0, z_{n+1} = 1$. Тогда величина

$$\Delta(y_1, \dots, y_l) = \max_{\kappa} \min_{0 \leqslant i < j \leqslant n+1} |z_i - z_j|$$

называется характеристикой множества $\{y_1, \dots, y_l\}$. Характеристика множества $\{x_1, \dots, x_k\}$, которое является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = \beta_1, \\ \dots \qquad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = \beta_n, \end{cases}$$

где $\beta_s = N_s P^{-s}$, $s = 1, \dots, n$ и неизвестные $x_1, \dots, x_k$ могут принимать значения из отрезка $[0,1]$, называется характеристикой этого решения. Обозначим через ε максимальное значение характеристики решений указанной системы уравнений.

Теорема 3. *Справедливы следующие неравенства*

$$2^{2n(n-k)}k^{n-k}n^{-k-n}\varepsilon^{n(k-n)} \leqslant \gamma \leqslant 2^{2n^2}k^{2n}n^{k-2n}\varepsilon^{k-3n-n^2}.$$

Заметим, что если особый интеграл γ равен 0, то $\varepsilon = 0$. Это означает, что среди чисел решения $x_1, \ldots, x_k$ найдется не более $n-1$ различных. То же самое можно сказать и о решениях системы уравнений Гильберта – Камке с правыми частями $N_1, \ldots, N_n$.

В 1992 г. исследования Г. И. Архипова по проблеме Гильберта — Камке были отмечены премией им А. А. Маркова Российской Академии наук.

8. Другие проблемы, решенные Г. И. Архиповым

8.1. Интеграл Виноградова

Получены точные оценки моментов тригонометрических сумм Г. Вейля при малых значениях степени осреднения.

Пусть буква S обозначает тригонометрическую сумму Г. Вейля вида

$$S = S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{x=1}^{P} \exp\{2\pi i f(x)\},$$

где $f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Интеграл J вида

$$J = J(P; k, n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{2k} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

называется интегралом И. М. Виноградова.

Теорема 4. *Пусть $\tau, r_1, \ldots, r_\tau, k$ — натуральные числа, где $\tau \geqslant 1$ и $1 = r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant$ $\leqslant r_\tau \leqslant n$. Далее, положим*

$$\Delta(\tau) = \left(n - \frac{r_\tau - 1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right)\left(n - \frac{r_{\tau-1} - 1}{2}\right) + \ldots$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right)\left(1 - \frac{1}{r_{\tau-1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{r_2}\right)\left(n - \frac{r_1 - 1}{2}\right),$$

$$\kappa_\tau = \sum_{j=1}^{\tau} (r_j^2 + \Delta(j)).$$

Тогда при $k \geqslant n\tau$ и $P \geqslant 1$ справедлива следующая оценка

$$J = J(P; n, k) \leqslant n^{2\Delta(\tau)r_\tau} 2^{\kappa_\tau} (8k)^{2n\tau} P^{2k-\Delta(\tau)}.$$

В частности, отсюда следует, что для любого ε с условием $0 < \varepsilon < 1/2$, $k \leqslant \varepsilon n^2$ и $k = mn$, m — натуральное число, справедлива следующая оценка

$$J = J(P; n, k) \ll P^{k(1+\varepsilon)}.$$

8.2. Тригонометрические интегралы. Проблема Хуа Ло-кена

Решена проблема Хуа Ло-кена о показателе сходимости особого интеграла $\theta = \theta(k)$ проблемы Терри, который имеет вид

$$\theta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \int\limits_{0}^{1} \exp\{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)\} \right|^{2k} d\alpha_n \ldots d\alpha_1.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Интеграл $\theta = \theta(k)$ сходится при $2k > 0,5(n^2+n)+1$ и расходится при $2k \leqslant 0,5(n^2+n)+1$.*

Далее сформулируем теорему о показателе сходимости особого интеграла, отвечающего неполной системе уравнений в проблеме Гильберта – Камке.

Теорема 6. *Пусть натуральные числа $r, m, \ldots, n$ удовлетворяют условиям $r < m < \ldots \cdots < n$ и $r + \cdots + m + n < n(n+1)/2$,*

$$\theta' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \int\limits_{0}^{1} \exp\{2\pi i(\alpha_n x^n + \alpha_m x^m + \cdots + \alpha_r x^r)\} \right|^{2k} d\alpha_n \ldots d\alpha_r.$$

Тогда интеграл θ' сходится при $2k > n + m + \cdots + r$ и расходится при $2k \leqslant n + m + \cdots + r$.

8.3. Общая теория кратных тригонометрических сумм

Тригонометрические суммы с многочленом в экспоненте, следуя И. М. Виноградову, будем называть суммами Г. Вейля. Они имеют вид

$$S = S(A) = \sum_{x_1=1}^{P_1} \cdots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp\{2\pi i F_A(x_1, \ldots, x_r)\},$$

где $F_A(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен с вещественными коэффициентами $\alpha(t_1, \ldots, t_r)$, которые являются координатами точки A в m-мерном единичном кубе Ω, $m = (n_1+1)\ldots(n_r+1)$.

И. М. Виноградов поставил задачу оценки сумм Г. Вейля при всевозможных значениях коэффициентов многочлена от нескольких переменных, стоящего в экспоненте. Здесь, как и в методе И. М. Виноградова, оценка индивидуальной тригонометрической суммы сводится к оценке ее среднего значения.

Пусть $J = J(\bar{P}; \bar{n}, k, r)$ обозначает среднее значение степени $2k$ модуля тригонометрической суммы $S(A)$ по кубу Ω, т.е.

$$J = \int \cdots \int\limits_{\Omega} |S(A)|^{2k}\, dA.$$

Имеет место следующая теорема о среднем значении.

Теорема 7. *Пусть $\tau \geqslant 0$ — целое число и $n_1, \ldots, n_r$ — натуральные числа. Тогда при $k_1 \geqslant k = m\tau$ для величины интеграла $J = J(\bar{P}; \bar{n}, k, r)$ справедлива оценка*

$$J \leqslant k^{2m\tau} \kappa^{4\kappa^2 \Delta(\tau)} 2^{8m\kappa\tau} (P_1 \ldots P_r)^{2k_1} P^{-\kappa\Delta(\tau)},$$

где $\kappa = n_1\nu_1 + \cdots + n_r\nu_r$, $\gamma\kappa = 1$, и

$$\Delta(\tau) = 0,5m(1-(1-\gamma)^\tau), \quad P = (P_1^{n_1} \ldots P_r^{n_r})^\gamma, P_1 = \min\{P_1, \ldots, P_r\},$$

причем $\nu_1, \dots, \nu_r$ *— натуральные числа такие, что*

$$-1 < \frac{\log P_s}{\log P_1} - \nu_s \leqslant 0, \ s = 1, \dots, r.$$

Отметим, что вывод оценки суммы существенно зависит от леммы комбинаторного характера, имеющей и самостоятельный научный интерес. Для ее формулировки необходимы следующие обозначения.

Пусть $F(x_1, \dots, x_r)$ — многочлен с вещественными коэффициентами,

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}.$$

Определим функции $B = B(u_1, \dots, u_r) = B(\bar{u})$ из равенства

$$F(x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r) - F(x_1 + z_1, \dots, x_r + z_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} B(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

где

$$B(t_1, \dots, t_r) = \sum_{u_1=t_1}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) \binom{u_1}{t_1} \dots \binom{u_r}{t_r} \times$$
$$\times (y_1^{u_1-t_1} \dots y_r^{u_r-t_r} - z_1^{u_1-t_1} \dots z_r^{u_r-t_r}).$$

Положим $n = n_1 + \dots + n_r, t = t_1 + \dots + t_r, u = u_1 + \dots + u_r$. Пусть функция $A = A(\bar{t}; s)$ обозначает форму степени s многочлена $B(\bar{t})$, т.е.

$$A(t_1, \dots, t_r; s) = \sum_{\substack{u_1=t_1 \\ u=t+s}}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) \binom{u_1}{t_1} \dots \binom{u_r}{t_r} \times$$
$$\times (y_1^{u_1-t_1} \dots y_r^{u_r-t_r} - z_1^{u_1-t_1} \dots z_r^{u_r-t_r}).$$

Тогда получим $B(\bar{t}) = \sum\limits_{s=0}^{n-u} A(\bar{t}; s)$. Заметим, что линейная форма имеет вид

$$A(\bar{t}; 1) = \sum_{j=1}^{r} (u_j + 1) \alpha(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + 1, u_{j+1}, \dots, u_r)(y_j - z_j).$$

Лемма 2. *Существуют многочлены* $H(\bar{t}, \bar{u}; s)$ *с целыми неотрицательными коэффициентами от переменных* $\bar{y}, \bar{z}$ *такие, что*

$$A(\bar{t}; s) = \frac{1}{t_1! \dots t_r! s!} \sum_{\substack{u_1=t_1 \\ u=t+s-1}}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} v_1! \dots v_r! H(\bar{t}, \bar{u}; s) A(\bar{u}; 1),$$

причем сумма коэффициентов каждого из многочленов $H(\bar{t}, \bar{u}; s)$ *не превосходит* sr^{s-1}, *и сумма степеней переменных* $y_j, z_j (j = 1, \dots, r)$, *содержащаяся в любом мономе многочлена* H, *не превосходит* $u_j - t_j (j = 1, \dots, r)$.

Далее, пусть A точка m-мерного единичного куба Ω, координаты которой удовлетворяют условиям $0 \leqslant \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1$ $(0 \leqslant t_1 \leqslant n_1, \dots 0 \leqslant t_r \leqslant n_r)$, $\alpha(0, \dots, 0) = 0$. Разобьем все точки

A куба Ω на два класса Ω_1 и ω_2. Сначала определим области $\Omega(\bar{a},\bar{q})$, состоящие из всех точек A, координаты которых имеют вид

$$\alpha(t_1,\dots,t_r)=\frac{a(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)}+\beta(t_1,\dots,t_r),$$

где

$$0\leqslant a(t_1,\dots,t_r)<q(t_1,\dots,t_r),\quad (a(t_1,\dots,t_r),q(t_1,\dots,t_r))=1,$$

и

$$|\beta(t_1,\dots,t_r)|\leqslant P_1^{-t_1}\dots P_r^{-t_r}P^{0,1},\ 0\leqslant t_1\leqslant n_1,\dots 0\leqslant t_r\leqslant n_r.$$

Пусть Q обозначает наименьшее общее кратное чисел $q(t_1,\dots,t_r),\ 0\leqslant t_1\leqslant n_1,\dots 0\leqslant t_r\leqslant$ $\leqslant n_r,\ t_1+\dots+t_r\geqslant 1$. Каждой области $\Omega(\bar{a},\bar{q})$, отвечает свое значение Q. Первый класс Ω_1 состоит из всех областей $\Omega(\bar{a},\bar{q})$, для которых $Q<P^{0,1}$. Второй класс Ω_2 содержит оставшиеся точки куба Ω.

В следующей теореме дана оценка тригонометрической суммы Г. Вейля $S(A)$ для каждой точки A единичного куба Ω.

Теорема 8. *Пусть точка A принадлежит первому классу Ω_1. Тогда справедлива следующая оценка*

$$|S(A)|\leqslant 2(5n^{2n})^{r\nu(Q)}(\tau(Q))^{r-1}P_1\dots P_rQ^{-\nu},\ \nu\max\{n_1,\dots,n_r\}=1.$$

Более того, если

$$\delta(t_1,\dots,t_r)=P_1^{t_1}\dots P_r^{t_r}\beta(t_1,\dots,t_r),\ \delta=\max_{t_1,\dots,t_r}|\delta(t_1,\dots,t_r)|,$$

то при $\delta>1$ справедлива оценка

$$|S(A)|\leqslant 2(5n^{2n})^{r\nu(Q)}(\tau(Q))^{r-1}P_1\dots P_r(\delta Q)^{-\nu}(\log(\delta+2))^{r-1}.$$

Пусть, далее, точка A принадлежит второму классу Ω_2. Положим $\tau(t_1,\dots,t_r)=P_1^{t_1}\dots$ $\dots P_r^{t_r}P^{-1/3}$ и координаты $\alpha(t_1,\dots,t_r)$ точки A представим в виде

$$\alpha(t_1,\dots,t_r)=\frac{a(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)}+\frac{\theta(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)\tau(t_1,\dots,t_r)},$$
$$(a(t_1,\dots,t_r),q(t_1,\dots,t_r))=1,\ 1\leqslant q(t_1,\dots,t_r)\leqslant\tau(t_1,\dots,t_r)$$
$$|\theta(t_1,\dots,t_r)|\leqslant 1,\ 0\leqslant t_1\leqslant n_1,\dots 0\leqslant t_r\leqslant n_r.$$

Пусть Q_0 обозначает наименьшее общее кратное чисел $q(t_1,\dots,t_r)$ при условии, что t_1+ $\dots+t_r\geqslant 2$. Тогда справедлива следующая оценка

$$|S(A)|\leqslant 2^{32\kappa}P_1\dots P_rP^{-\rho},$$

где $\rho=(32m\kappa\log(8m\kappa))^{-1}$.

Если же $Q_0\leqslant P^{1/6}$, то для суммы $S(A)$ имеем оценку

$$|S(A)|\leqslant(5n^{2n})^{r\nu(Q_0)}(\tau(Q_0))^{r-1}P_1\dots P_rP^{-0,1\nu}+$$

$$+2^{8r}(r\nu^{-1})^{r-1}P_1\dots P_rP^{-\nu/16}.$$

8.4. Гипотеза Артина

Дано принципиальное опровержение гипотезы Артина о представлении нуля формой и системой форм в поле p-адических чисел. Это исследование продолжает работу по проблеме Гильберта – Камке.

Пусть p — простое число, $F(x_1,\dots,x_k)$ — форма степени n от k переменных $x_1,\dots,x_k$ с целыми коэффициентами над полем p-адических чисел Q_p. Если существуют целые p-адические числа $x_1,\dots,x_k$, хотя бы одно из которых не равно нулю, и $F(x_1,\dots,x_k)=0$, то говорят, что существует нетривиальное представление нуля формой F в поле Q_p.

Гипотеза Артина предполагала, что для любого простого числа p, $n\geqslant 1$, и $k>n^2$ форма $F(x_1,\dots,x_k)$ степени n нетривиально представляет нуль в поле Q_p. Эта гипотеза была опровергнута Г. Тержаньяном и Д. Бровкиным. После чего возникло предположение о том, что величину n^2 в формулировке гипотезы Артина следует заменить на n^3. Подобное утверждение для системы форм было опровергнуто в докторской диссертации Г. И. Архипова. Оказалось, что количество переменных в этом случае имеет порядок не менее 2^n.

Той же силы результаты были получены Г. И. Архиповым и А. А. Карацубой для одной формы.

Говорят, что форма F не представляет нуль по модулю p, если для некоторого натурального числа r из сравнения

$$F(x_1,\dots,x_r)\equiv 0 \pmod{p^r}$$

следует, что

$$x_1\equiv\dots\equiv x_k\equiv 0 \pmod{p}.$$

Теорема 9. *Для любого натурального числа r существует натуральное число $n_0=n_0(r)$ такое, что для любого $n\geqslant n_0$ найдется форма $F(x_1,\dots,x_k)$ с целыми коэффициентами, которая не представляет нуль по модулю 2; число ее переменных k,*

$$k>2^u,\quad u=\frac{n}{\log_2 n\cdot\log_2\log_2 n\dots\underbrace{\log_2\dots\log_2 n}\cdot\underbrace{\log_2\dots\log_2^2 n}}$$

Теорема 10. *Для любого натурального числа r существует натуральное число $n_1==n_1(r)$ такое, что для любого $n\geqslant n_1$ найдется форма $F(x_1,\dots,x_k)$ с целыми коэффициентами, которая не представляет нуль по модулю p; число ее переменных k,*

$$k>p^u,\quad u=\frac{n}{\log_p n\cdot\log_p\log_p n\dots\underbrace{\log_p\dots\log_p n}\cdot\underbrace{\log_p\dots\log_p^2 n}}$$

8.5. Аддитивные и мультипликативные проблемы с нецелым показателем

Найден новый метод оценок тригонометрических сумм, основанный на оценке величин производных функции, стоящей в экспоненте, что позволило получить новую оценку показателя нецелой степени в асимптотической формуле для количества простых чисел в задаче Пятецкого–Шапиро.

Пусть $x\geqslant 1$ — вещественное число, $c>0$ — произвольная постоянная и $\pi_c(x)$ — количество простых чисел вида $[n^c]$ при $n\leqslant x$, где символ $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Теорема 11. *При $1<c<\frac{149}{129}=1\frac{1}{6{,}45}=1{,}1550\dots$ и при $x\to\infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$\pi_c(x)=\frac{x}{c\log x}+O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Теорема 12. *При* $1 < c < \frac{149}{129}$ *и при* $x \to \infty$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\sum_{n \leqslant T} \tau_k(n) = TQ_{k-1}(\log T) + O\left(\frac{T}{\log T}\right),$$

где $\tau_k(n)$ *— количество решений в натуральных числах* $x_1, \ldots, x_k$ *уравнения* $x_1 \ldots x_k = n$, $Q_{k-1}(x)$ *— некоторый многочлен степени* $k-1$.

Одним из обобщений проблемы Варинга является задача о представлении натурального числа N ограниченным количеством слагаемых вида $[n^c]$, где n принимает значения натуральных чисел и $c > 1$ — фиксированное нецелое число.

Пусть $W_{k,c}(N)$ обозначает количество решений в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$ уравнения

$$[x_1^c] + \cdots + [x_k^c] = N.$$

В 1972 г. Ж. М. Дезуйе вывел асимптотику при $N \to \infty$ величины $W_{k,c}(N)$ для k порядка $c^3 \log c$. Заметим, что в классической проблеме Варинга при натуральном c данная асимптотика найдена И. М. Виноградовым при k порядка $c^2 \log c$. Результат той же силы, что и при натуральном c, получен Г. И. Архиповым и А. Н. Житковым.

Теорема 13. *Пусть* $k > 22c^2 \log(c+4)$, $\gamma c = 1$. *Тогда для величины* $W_{k,c}(N)$ *при* $N \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$W_{k,c}(N) \asymp \frac{\Gamma^k(1+\gamma)}{\Gamma(k\gamma)} N^{k\gamma - 1}.$$

8.6. Ряды Виноградова

Доказана сходимость тригонометрических рядов Виноградова. В частности, доказано, что для любого вещественного числа α сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\alpha n^3)}{n}.$$

Пусть r — натуральное число, $P(x)$ — алгебраический многочлен степени r с вещественными коэффициентами, и $\mathcal{P}_r$ обозначает множество всех многочленов степени r с вещественными коэффициентами. Рассмотрим симметрическую частичную сумму

$$h_N(P) = \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} \frac{e^{2\pi i P(n)}}{n}, \quad N \geqslant 1,$$

ряда $h(P) = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i P(n)}}{n}$.

Теорема 14. *Пусть* $r \geqslant 2$. *Тогда*

$$\sup_{N \geqslant 1} \sup_{P \in \mathcal{P}_r} |h_N(P)| = g_r < \infty.$$

Далее, для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_r$ *последовательность* $h_N(P)$ *сходится при* $N \to \infty$ *и сумма ряда* $h(P)$, *рассматриваемая в смысле главного значения, ограничена на* $\mathcal{P}_r$.

8.7. Исключительные множества в бинарных проблемах гольдбахова типа

Получены принципиально новые оценки мощности исключительного множества в аддитивных задачах типа проблемы Гольдбаха.

Теорема 15. *Пусть λ_1, λ_2 — положительные вещественные числа такие, что λ_2/λ_1 — иррациональное алгебраическое число. Пусть, далее, $T_2(x)$ обозначает количество натуральных чисел $n \leqslant x$, для которых не существует решений уравнения*

$$[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2] = n,$$

где p_1 и p_2 простые неизвестные. Тогда для любого ε справедлива оценка

$$T_2(x) \ll_\varepsilon x^{2/3+\varepsilon}.$$

Константа в знаке $\ll_\varepsilon$ неэффективная.

В основу доказательства этого утверждения положены явные формулы в теории дзета-функции Римана и следующая лемма о совместном приближении двух чисел.

Теорема 16. *Пусть $1 \leqslant Q \leqslant X^{1/2}, a$ — целое число, q — натуральное число, $(a,q) = 1$, $q \in [1, Q]$ и интервал $I_{a,q}$ вида*

$$I_{a,q} = \left(\frac{a}{q} - \frac{Q}{X}, \frac{a}{q} + \frac{Q}{X}\right).$$

Далее, пусть β — иррациональное алгебраическое вещественное число, α, t — вещественные числа, $|t| \gg X^{-1/3}, \alpha, \beta \in (1,2), k$ — целое число, $|k| \leqslant \log X$.

Обозначим через μ меру множества T точек $\{t\}$ таких, что оба числа $\nu_1 = t\alpha\beta$ и $\nu_2 = (t+k)\alpha$ лежат в некоторых промежутках из указанной выше совокупности $\{I_{a,q}\}$, т.е. $\nu_1 \in I_{a,q}$ при некотором значении $a = a_1, q = q_1$ и с параметром $Q = Q_1$ (т.е. $q_1 \leqslant Q_1$); $\nu_2 \in I_{a,q}$ при значениях $a = a_2, q = q_2$ с параметром $Q = Q_2$ (т.е. $q_2 \leqslant Q_2$).

Тогда для величины μ имеет место оценка сверху вида

$$\mu \ll_\varepsilon X^{-2+\varepsilon} Q_1^2 Q_2^2,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно мало.

8.8. Целые точки в областях на плоскости Лобачевского и собственные значения оператора Лапласа — Бельтрами

Впервые получены эффективные оценки первого собственного значения оператора Лапласа — Бельтрами для дискретной подгруппы движений в трехмерном пространстве Лобачевского.

Получено уточнение формулы Левитана для количества целых точек в круге на плоскости Лобачевского, а также степенное улучшение оценок Эстермана и Хиз-Брауна для среднего значения функции делителей от квадратичного многочлена.

Для любых двух точек $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$ из верхней полуплоскости $(y, y' > 0)$ определим расстояние между ними $d = d(z, z')$. Положим

$$u = u(z, z') = \frac{|z - z'|^2}{yy'}.$$

Тогда расстояние d задается равенством

$$d = \ln\left(\frac{u + 2 + \sqrt{u^2 + 4u}}{2}\right).$$

Круг $K(z_0, T)$ с центром в точке z_0 и радиусом T состоит из точек z, удовлетворяющих неравенству $d(z_0, z) \leqslant T$.

Обозначим символом $N(z_0, T)$ количество элементов γ модулярной группы

$$PSL_2(Z) = SL_2(Z)/\pm I$$

таких, что точка γz_0 попадает в круг $K(z_0, T)$. Положим $N(T) = N(i, T)$.

Теорема 17. *При $T \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$N(T) = 8 \operatorname{ch} T + O(e^{3T/4} T^4).$$

К этой задаче близка по формулировке классическая проблема Ингама о среднем значении количества делителей от разложимого квадратичного многочлена. Сам А. Ингам в 1927 г. выделил главный член его асимптотики. В 1931 г. Т. Эстерман получил оценку остатка $x^{11/12} \log^{17/3} x$. Последняя оценка была улучшена до значения $O(x^{5/6+\varepsilon})$ только в 1978 г. Д. Исмоиловым, в 1979 г. Хиз-Брауном и в 1984 г. А. И. Виноградовым и Л. А. Тахтаджяном. В 2006 г. Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков дали новое степенное понижение остаточного члена вида $O(x^{3/4+\varepsilon})$.

Пусть символом $\tau(n)$ обозначается функция количества делителей числа n, а символом $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, и $\gamma = 0,577\ldots$ — постоянная Эйлера. Положим

$$\xi_0 = 6/\pi^2, \xi_j = (-1)^j \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) d^{-2} \ln^j d, j \geqslant 1.$$

Теорема 18. *При $x \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$I(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau(n)\tau(n+1) = \sum_{n \leqslant x} \tau(n^2 + n) = M(x) + R(x),$$

где главный член $M(x)$ асимптотической формулы имеет вид

$$M(x) = x(A_0 \ln^2 x + A_1 \ln x + A_2),$$

$$A_0 = \xi_0, A_1 = (4\gamma - 2)\xi_0 + 4\xi_1, A_2 = ((2\gamma - 1)^2 + 1)\xi_0 + 4(2\gamma - 1)\xi_1 + 4\xi_2,$$

а остаточный член оценивается следующим образом

$$R(x) \ll x^{3/4} \ln^4 x.$$

8.9. Многомерные обобщения проблем Гольдбаха — Варинга и Гильберта — Камке

Получены оценки количества слагаемых в аддитивных задачах, являющихся многомерным обобщением проблем Гольдбаха — Варинга и Гильберта — Камке. Обнаружен ряд неожиданных эффектов. Оказалось, что если переменные пробегают значения:

а) натуральных чисел, то количество слагаемых возрастает экспоненциальным образом относительно степени и слабо зависит от размерности,

б) простых чисел — зависимость для количества слагаемых факториальная от степени и экспоненциальная по размерности,

в) целых алгебраических чисел — скорость роста количества слагаемых существенно меньше показательной функции от степени системы уравнений.

Приведем результаты относительно асимптотически точной формулы для числа слагаемых в проблеме Гильберта – Камке в простых числах, состоящей в том, что при некоторых естественных условиях набор $\{N_1, \dots, N_n\}$ из n растущих натуральных чисел представляется в виде ограниченного числа наборов $\{p, \dots, p^n\}$, где p — простое число. Другими словами, найдется число $V(n)$ такое, что для любого набора $\{N_1, \dots, N_n\}$, удовлетворяющего некоторым естественным условиям, существуют простые числа $p_1, \dots, p_k$, где $k \leqslant V(n)$, такие, что имеем

$$\begin{cases} p_1 + \dots + p_k = N_1 \\ \dots \qquad \dots \\ p_1^n + \dots + p_k^n = N_n. \end{cases}$$

Эту систему уравнений называют системой Марджанишвили – Хуа (МН-система).

Имеется два типа условий на набор $N_1, \dots, N_n$ для его представимости в приведенном выше виде: вещественной и арифметической разрешимости. Набор $(N_1, \dots, N_n)$, удовлетворяющий этим условиям, называется допустимым.

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon > 0$ — постоянные, и пусть переменные $\theta_m = \theta_m(N_1, \dots, N_m, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям $|\theta_m| \leqslant 1, m = 1, \dots, n$. Далее, предположим, что при $N_1 \geqslant N_0(\varepsilon)$ справедливы следующие соотношения

$$N_m = N_1^m(\gamma_m + O(N_1^{-\varepsilon})), m = 1, \dots, n.$$

Говорят, что набор $(N_1, \dots, N_n)$ условию вещественной разрешимости, если система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = \gamma_1 \\ \dots \qquad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = \gamma_n. \end{cases}$$

разрешима в вещественных числах $0 \leqslant x_1, \dots, x_k \leqslant 1$, где матрица Якоби

$$\|m x_s^{m-1}\| (m = 1, \dots, n; s = 1, \dots, k)$$

решения $x_1, \dots, x_k$ имеет максимальный ранг. При $k \geqslant m$ он равен m.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 19. *Пусть набор $(N_1, \dots, N_n)$ удовлетворяет условию вещественной разрешимости. Тогда особый интеграл асимптотической формулы для количества решений МН-системы положителен. В противном случае особый интеграл равен нулю и МН-система имеет только конечное число решений.*

Далее представим натуральное число $n + 1$ в виде

$$n + 1 = l_p(p - 1) + r_p, 0 \leqslant r_p \leqslant p - 1, l_p = [(n + 1)/(p - 1)].$$

Теорема 20. *Для того чтобы МН-система была разрешима необходимо, чтобы выполнялись арифметические условия следующего вида: для любого простого числа $p \leqslant n + 1$ разрешимы системы сравнений*

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,p)=1}}^{n+l_p+1} t_{\nu,p} \nu^m \equiv N_m \pmod{p^{\delta_p}}, m = 1, \dots, n,$$

где $\delta_p = n + l_p$ и неизвестные $t_{\nu,p}$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^{δ_p}.

Пусть символ k_p обозначает сумму

$$k_p = \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,p)=1}}^{n+l_p+1} t_{\nu,p},\ p \leqslant n+1$$

и $k_0 = k_0(N_1, \ldots, N_n)$ — наименьшее неотрицательное целое число, удовлетворяющее системе сравнений

$$k_0 \equiv k_p \pmod{p^{\delta_p}},\ p \leqslant n+1.$$

Теорема 21. *Для любого допустимого набора $(N_1, \ldots, N_n)$ число k слагаемых в МН-системе имеет вид $k = k_0 + tb(n)$, где t — неотрицательное целое число и $b(n) = \prod\limits_{p \leqslant n+1} p^{\delta_p}$.*

Отсюда следует, что $V(n) \sim b(n)$ при $n \to \infty$.

8.10. Проблема моментов в теории дзета-функции Римана

Найдены новые оценки абсциссы и показателя Карлсона в теории моментов дзета-функции Римана.

Абсциссой Ф. Карлсона называют величину σ_k, определяемую соотношениями вида

$$\sigma_k = \inf M,$$

где M — множество всех вещественных чисел σ, для которых справедлива оценка

$$I_k = I_k(\sigma, T) = T^{-1} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k}\, dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon,$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $k > 0$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные вещественные числа.

Теорема 22. *Пусть при некотором a, где $1 \leqslant a \leqslant 20, t \geqslant 1$ и всех $\sigma \in (1/2, 1)$ выполняется оценка*

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}.$$

Пусть, далее, $k_0 = 44 - [22/a]$. Тогда для функции σ_k при всех $k \geqslant 45$ имеет место оценка

$$\sigma_k \leqslant 1 - \frac{1}{(3a(k-k_0) + (3a(k-k_0))^{1/2})^{2/3}}$$

Экспонентой Ф. Карлсона называют величину $m(\sigma)$, определяемую равенством $m(\sigma) = 2f(\sigma)$, где $f(\sigma)$ — функция, обратная к σ_k. Функцию $m(\sigma)$ можно определить как $\sup\{m\}$, где m таково, что при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\int\limits_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2m}\, dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon.$$

Теорема 23. *При всех $\beta \geqslant \beta_1 = \frac{2701}{2880}$ и $k_0 = 44 - [22/a]$ справедлива оценка*

$$\frac{m(\beta)}{2} \geqslant k_0 - 1 + \frac{1}{3a(1-\beta)^{3/2}} - \frac{1}{(3a)^{1/2}(1-\beta)^{3/4}}.$$

8.11. Оценка дзета-функции Римана на единичной прямой комплексной плоскости

Дано улучшение современной оценки модуля дзета-функции Римана в критической полосе в окрестности единичной прямой.

Теорема 24. *Пусть для некоторого* $\gamma \geqslant 3600^{-1}$ *и для всех* $1 \geqslant y \leqslant t^{0,5}$ *справедлива оценка вида*

$$\left|\sum_{n\leqslant y} n^{it}\right| \leqslant cy \exp -\gamma \ln^3 y \cdot \ln^{-2} t,$$

где $c > 0$ *— некоторая постоянная. Тогда при* $1 \geqslant \sigma > 1 - 2\cdot 10^{-4},\ t \geqslant 1, s = \sigma + it$ *имеет место оценка*

$$|\zeta(s)| \ll t^{a(1-\sigma)^{1,5}} (\ln t)^{2/3} \left((1-\sigma)^{1/4} (\ln t)^{1/6} + 1\right)^{-1},$$

где $a = 2\cdot 3^{-1,5}\gamma^{-0,5}$.

Доказательство основано на следующем утверждении, имеющем и самостоятельный интерес.

Теорема 25. *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *— вещественные числа,* $n \geqslant 1,\ f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x$, $\beta_r(x) = f^{(r)}(x)/r!,\ r = 1, \ldots, n$. *Далее, пусть* $\beta_0 = (b-a)^{-1},\ W(x) = |\beta_0| + \sum\limits_{r=1}^{n} |\beta_r(x)|^{1/r}$. *Тогда справедлива следующая оценка*

$$I = \int\limits_a^b e^{f(x)}\, dx \leqslant e^{M+1} n(n+1) H^{-1},$$

где $H = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} W(x),\ M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

9. Заключение

Научные работы Г. И. Архипова неоднократно признавались лучшими по РАН и по Математическому институту им. В. А. Стеклова РАН. Исследования по тригонометрическим суммам были отмечены как лучшие по Академии наук СССР за 1976–1980 гг.

С 1985 г. Г. И. Архипов работал по совместительству сначала доцентом, а затем профессором кафедры математического анализа Механико-математического факультета МГУ, являясь одним из ведущих лекторов по основному курсу математического анализа.

В 1999 г. Г. И. Архипов в соавторстве подготовил, отвечающий современному уровню преподавания учебник “Лекции по математическому анализу”, выдержавший уже шесть изданий [5]. Его первое издание удостоено в 2000 г. диплома Ассоциации книгоиздателей России за создание нового учебника. Недавно учебник переведен на китайский язык.

Геннадий Иванович является соавтором оригинальных монографий “Кратные тригонометрические суммы” (1980) [3], “Теория кратных тригонометрических сумм”(1987) [4], “Тригонометрические суммы в теории чисел и анализе”(2004) [14].

Геннадий Иванович принимал активное участие в организации и проведении научных школ, семинаров и конференций. Много сил и энергии он отдавал руководству студентами, аспирантами и стажерами. Он оказал огромное влияние на становление ряда известных математиков, работающих в разных странах мира. Среди его учеников доктора и кандидаты наук. Г. И. Архипов обладал поистине энциклопедическими знаниями во многих областях науки и культуры.

Список научных работ Г. И. Архипова дан в его “Избранных трудах”, изданных в 2013 г. [1]. Скончался Г. И. Архипов 14 марта 2013 г.

Вспоминая сегодня о незаурядных людях и выдающихся ученых Геннадие Ивановиче Архипове и Сергее Михайловиче Воронине, надеемся, что их светлый образ, сохраненный в наших сердцах, будет тепло воспринят будущими поколениями математиков.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. И. Архипов. Избранные труды. Орёл: Изд-во Орловск. ун-та, 2013. 437 с.
2. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба. Новая оценка интеграла И. М. Виноградова // Изв.АН СССР. Сер. матем. 1978, т. 42, С. 751-762.
3. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков. Кратные тригонометрические суммы // Тр. МИАН СССР, 151, 1980, С. 3–128.
4. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987, 370 с.
5. Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу.: Учебник для университетов и пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего — М.: Высш. шк. 1999. — 695 с.
6. Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков. Сергей Михайлович Воронин (к 65-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник. 2011, т. 12, вып. 1, с. 4–9.
7. С. М. Воронин. Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975, 39:3, С. 475–486.
8. С. М. Воронин. Простые числа. — М.: Знание, 1978. 64 с.
9. С. М. Воронин. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1980. 44:1. С. 63–91.
10. С. М. Воронин. О методе И. М. Виноградова // Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения, Сб. ст. Посвящается 100-летию со дня рождения Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, 200, Наука, М., 1991, с. 114–123.
11. С. М. Воронин. Избранные труды: Математика / Воронин С. М. , Под ред. А. А. Карацубы — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 480 с. — ISBN 5-7038-2800-7.
12. С. М. Воронин, А. А. Карацуба. Дзета-функция Римана — М.: Физматлит, 1994. — 376 с. — ISBN 5–02–014120–8.
13. В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Геннадий Иванович Архипов (к 60-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник. 2007, т.7, вып. 1(17), с. 5–31.
14. G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, A. A. Karatsuba, Trigonometric sums in number theory and analysis, de Gruyter Exp. Math., 39, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, x+554 pp.
15. S. M. Voronin. Functional independence of Dirichlet L-functions // Acta Arith. 27(1975), P. 493-503.
16. A. A. Karatsuba, S. M. Voronin. The Riemann Zeta-Function. De Gruyter Exp.Math.,5,Walter de Gruyter CmbH&Co. KG, Berlin, 1992, x+396pp.

REFERENCES

1. G. I. Arkhipov, 2013, "Selected works" , *Orel: Publishing house of Oryol. un-ta*, 437 p.

2. G. I. Arkhipov., A. A. Karatsuba, 1979, "A new estimate of an integral of I. M. Vinogradov" , *Math.USSR-Izv.* 13, P. 52-62.

3. G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, V. N. Chubarikov, 1980, "Multiples of trigonometric sums" , *Tr. MIAN OF THE USSR*, 151, P. 3–128.

4. G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, V. N. Chubarikov, 1987, "The theory of multiple trigonometric sums" , *M.: Nauka* 370 p.

5. G. I. Arkhipov, V. A. Sadovnichii, V. N. Chubarikov, 1999, "Lectures on mathematical analysis.: Textbook for universities and pedagogical universities" , / Ed. V. A. Sadovnichii — *Moscow: Higher School* — 695 p.

6. G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, 2011, "Sergey Mikhailovich Voronin (to the 65th anniversary of his birth)" , *Chebyshevskii sbornik.* vol. 12, issue 1, pp. 4–9.

7. S. M. Voronin, 1975, "Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function" , *Math. USSR-Izv.*, 9, P. 443-453.

8. S. M. Voronin, 1978, "Prime numbers" , *M.: Knowledge*, 64 p.

9. S. M. Voronin, 1980, "On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line" , *Izv.Akad.Nauk SSSR. Ser.Mat.* 44, P.63-91.

10. S. M. Voronin, 1991, "About the method of I. M. Vinogradov" , *Number theory, algebra, mathematical analysis and their applications, Collection of articles Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Ivan Matveevich Vinogradov, Tr. MIAN, 200, Nauka, M.*, P. 114–123.

11. S. M. Voronin, 2006, "Selected works: Mathematics" , / Ed. A. A. Karatsuba — *Moscow: Publishing House of the Bauman Moscow State Technical University*, 480 p. — ISBN 5-7038-2800-7.

12. S. M. Voronin, A. A. Karatsuba, 1994, "The Riemann Zeta function" , *M.: Fizmatlit*, 376 p. — ISBN 5–02–014120–8.

13. V. A. Sadovnichii, V. N. Chubarikov, 2007, "Gennady Ivanovich Arkhipov (on the 60th anniversary of his birth)" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 7, issue 1(17), P. 5–31.

14. G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, A. A. Karatsuba, 2004, "Trigonometric sums in number theory and analysis" , *de Gruyter Exp. Math., 39, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin*, x+554 pp.

15. S. M. Voronin, 1975, "Functional independence of Dirichlet L-functions" , *Acta Arith.*, 27, P. 493-503.

16. A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, 1992, "The Riemann Zeta-Function" , *De Gruyter Exp. Math., 5, Walter de Gruyter CmbH&Co. KG, Berlin*, x+396pp.