

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-520-536

Информатика, компьютер, сложность вычислений¹

В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Владимир Николаевич Чубариков — профессор, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Николай Николаевич Добровольский — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tsput.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Ирина Юрьевна Реброва — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Николай Михайлович Добровольский — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В основу данной статьи лёг доклад, сделанный В. Н. Чубариковым на Международной научно-практической конференции «Информатизация образования — 2020» в городе Орле, 26–30 октября, 2020 года. Конференция была посвящена 115-летию со дня рождения патриарха российского образования, великого педагога и математика, академика РАН С. М. Никольского (1905–2012 гг.). Мероприятие проведено Академией Информатизации образования и Орловским государственным университетом им. И. С. Тургенева при финансовой поддержке РФФИ.

В статье рассмотрены разные аспекты информатизации общества прежде всего с точки зрения математиков и ученых, связанных с различными направлениями использования достижений компьютерной техники и компьютерных технологий.

В краткой форме обсуждены следующие вопросы: 1. Программирование — основа информатики; 2. Модели вычислительных систем, компьютеры, языки программирования; 3. Системы искусственного интеллекта; 4. Что такое TeX и LaTeX? 5. Сложность вычислений; 6. Поиск литературы по информатике; 7. Научная школа Альберта Рубеновича Есяяна и информатика в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

Статья посвящена памяти выдающегося математика и педагога, профессора Альберта Рубеновича Есяяна. 50 лет его работы в Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого были посвящены внедрению в педагогический процесс подготовки учителей математики и информатики передовых подходов в области преподавания математики. Он внёс существенный вклад в разработку практических подходов в преподавании информатики в педагогических вузах.

Ключевые слова: Информатика, компьютер, сложность вычислений.

Библиография: 40 названий.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 19-41-710004_p_a

Для цитирования:

В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Информатика, компьютер, сложность вычислений// Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 520–536.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-520-536

Computer science, computer, computational complexity

V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovolskii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovolskii

Vladimir Nikolaevich Chubarikov — professor, doctor of physical and mathematical sciences, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Nikolai Nikolaevich Dobrovolskii — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Irina Yurievna Rebrova — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Nikolai Mihailovich Dobrovolskii — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

This article is based on a report made by V. N. Chubarikov at the International Scientific and Practical Conference "Informatization of Education — 2020" in the city of Orel, October 26–30, 2020. The conference was dedicated to the 115th anniversary of the birth of Patriarch of Russian education, the great teacher, and mathematician, academician S. M. Nikol'skii (1905–2012 gg.). The event was organized by the Academy of education Informatization and Orel state University. I. S. Turgenev, with the financial support of RFBR.

The article deals with various aspects of the informatization of society, primarily from the point of view of mathematicians and scientists associated with various areas of use of computer technology and computer technology.

The following questions are briefly discussed: 1. Programming — the basis of computer science; 2. Models of computing systems, computers, programming languages; 3. Artificial Intelligence systems; 4. What is TeX and LaTeX? 5. Computational complexity; 6. Search for computer science literature; 7. Albert Rubenovich Yesayan Scientific School and Computer Science at the Tolstoy State Pedagogical University.

The article is dedicated to the memory of the outstanding mathematician and teacher, Professor Albert Rubenovich Yesayan. 50 years of his work at the Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy were devoted to the introduction of advanced approaches in the field of teaching mathematics into the pedagogical process of training teachers of mathematics and computer science. He made a significant contribution to the development of practical approaches to the teaching of computer science in pedagogical universities.

Keywords: Computer science, computer, computational complexity.

Bibliography: 40 titles.

For citation:

V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Computer science, computer, computational complexity", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 520–536.

Посвящается памяти Альберта Рубеновича Есяна (10.11.1937–04.12.2018)

Введение

Совсем недавно исполнилось 35 лет со дня введения во всех школах Советского Союза нового предмета "Основы информатики и вычислительной техники" (кратко ОИВТ). Эта дата оказалась в окружении целого созвездия значимых событий в истории информатики и вычислительной техники. 380 лет тому назад в 1641 году (по другим источникам в 1642 году) великий французский ученый Блез Паскаль создал первую счётную машину. 230 лет назад, в 1791 году родился Чарлз Бэббидж, который прожил почти 80 лет и разработал проект Аналитической машины. Первая действующая модель Аналитической машины была создана в 1906 году, 115 лет тому назад его сыном Генри Бэббиджом и фирмой Монро. В этом году исполняется 200 лет со дня рождения великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева, который изобрёл первый отечественный арифмометр. А около 80 лет назад в США был создан первый компьютер — MARK 1, архитектура которого опиралась на проект Аналитической машины Бэббиджа.

Символично, что в 1945 году под руководством Сергея Алексеевича Лебедева была создана первая в стране электронная аналоговая вычислительная машина для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые часто встречаются в задачах, связанных с энергетикой. А уже в 1950 году была закончена разработка первой отечественной электронной вычислительной машины МЭСМ.

В нашей стране становление информатики и вычислительной техники прошло достаточный длинный путь, который насчитывает не менее 75 лет. В наших заметках мы остановимся на некоторых, на наш взгляд, ключевых аспектах становления этого направления:

1. Программирование — основа информатики.
2. Модели вычислительных систем, компьютеры, языки программирования.
3. Системы искусственного интеллекта.
4. Что такое \TeX и \LaTeX ?
5. Сложность вычислений.
6. Поиск литературы по информатике.
7. Информатика в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

Авторы не претендуют на всё охватывающее рассмотрение проблемы, но считают, что учет указанных аспектов может быть полезен. Особенно, на наш взгляд, эти соображения важны в связи с нарастающими тенденциями компьютерного фетишизма, когда происходит "преувеличение, абсолютизация возможностей современной информационно-вычислительной техники в решении социально-экономических, политических, идеологических и др. проблем общества"².

1. Программирование — основа информатики

Первый вопрос, который нам следует обсудить — "Что такое информатика?"

Сказать, что "информатика" — это "компьютер-сайенс", означает только отражение ее предмета, который является техническим устройством: вычислительной машиной, компьютером.

²Источник: <https://potencial-school.ru/kompyuternyj-fetishizm.html> © potencial-school.ru

Р. В. Хэмминг писал: “Мы называем наш предмет “информатикой”, но мне кажется, что точнее было бы назвать его “компьютерной инженерией” (computer engineering), если бы не существовало вероятности неправильного толкования такого названия. Большей частью мы не подвергаем сомнению возможность существования **монитора, алгоритма, планировщика или компилятора**, скорее мы занимаемся поиском **практически работоспособного технического решения с разумными затратами времени и усилий**” [39].

Технический аспект здесь выступает на первое место в связи с тем, что большинство трудностей относится не к теоретическому обоснованию сделать что-то, а к практическому — каким образом это можно сделать проще и лучше.

Поэтому преподавание предмета “Информатика” будет более эффективным, если в учебных планах дисциплина “Программирование” будет предполагать, в первую очередь, практикум по программированию и не только, но и компьютерный практикум по разделам специализации, например, для учителей средней школы — компьютерный практикум по геометрии и по алгебре и началам анализа, и отводить для этого следует целый день занятий.

Больше практических занятий! И в этом отличие в преподавании математики от преподавания информатики.

Чему учить? Первым выделим здесь языки и системы программирования, которые не являются прикладной составляющей обучения, и, следовательно, этому должен учить специалист по информатике. Заметим, что часто обучение ограничивается учебником грамматики и словарем (гlossарием) языка программирования. Но как полезно видеть и изучать, перенимать опыт подготовки добротных работающих программ.

Следующий шаг — работа с базами данных, требует уже участия специалистов, для которых интересна обработка этих данных. Здесь уже важна роль алгоритма и специальных законов конкретных наук, как социальных, гуманитарных, так и естественных. Заметим, что компьютер в настоящее время не обладает другими интеллектуальными возможностями, кроме тех, которые присущи “цифровому вычислению”. Тем не менее, в настоящий момент мы используем не все возможности компьютера как мощного инструмента управления и преобразования информации.

Наиболее содержательной частью информатики, являющейся предметом изучения и математики, являются численные методы. Поэтому этот материал в основном и представляется как теоретический, не подготовленный к практическому применению, в связи с недостаточной проработкой фундаментальных идей для решения задач. Зачастую, используя численные методы, компьютер позволяет нам разобрать достаточное множество частных примеров, чтобы выделить “модельные ситуации” того или иного явления, и даже если не удастся сформулировать фундаментальных законов, но дает продвижение в познании явления. При этом нам приходится при составлении программ и планировании научной работы соотносить соотношения между временем работы и памятью компьютера, между последовательными и параллельными вычислениями, между цифровыми и аналоговыми схемами и др.

Первоначальным понятием в информатике является понятие **алгоритма**. Оно определяется описательным образом словами разговорного языка. Алгоритм — точное предписание, которое задает вычислительный процесс (называемый алгоритмическим), начинающийся с некоторого исходного данного (совокупности возможных исходных данных) и направленный на получение результата, определяемого этим исходным данным.

Под сложностью вычислений алгоритма понимают числовую функцию, оценивающую трудность применения алгоритма к исходным данным (время работы, число тактов работы при преобразовании исходных данных в заключительные и др.)

Отметим, что в этих областях вклад отечественных ученых был мирового уровня: это результаты Петра Сергеевича Новикова об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов, Юрия Владимировича Матиясеви́ча об отрицательном решении 10-ой пробле-

мы Гильберта, Олега Борисовича Лупанова о сложности реализации степеней булевой (n, n) -функции и многие другие.

Заметим, что результаты об алгоритмической неразрешимости многих математических проблем в сочетании с фундаментальными результатами Курта Гёделя о неполноте арифметики говорят о том, что есть определённые объективные ограничения для возможностей искусственного интеллекта в том виде, который сейчас можно обсуждать.

2. Модели вычислительных систем, компьютеры, языки программирования

Начнем изложение с определения машины Тьюринга (the Turing machine, 1936) — абстрактного вычислительного устройства, формально уточняющего интуитивное понятие **алгоритма**. Она состоит из ленты, головки и управляющего устройства. Лента разделена на клетки и бесконечна влево и вправо. В каждой клетке ленты может быть записан только один символ из ленточного алфавита $A_0 = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$, где a_0 — пустой символ. Головка машины может двигаться по ленте, перемещаясь из клетки в соседнюю клетку, читать символ, записанный в клетке, и записывать в обозреваемую клетку любой символ из A_0 . Управляющее устройство перемещает головку по ленте и записывает символы в клетки. Оно может находиться в одном из состояний q_0, q_1, \dots, q_m . Изменение положения головки и символов происходит по некоторой программе, состоящей из простейших команд.

Работа машины Тьюринга происходит в дискретном времени, начинается с исходных данных и завершается при достижении заключительного состояния (при некоторых исходных данных работа машины Тьюринга может и не заканчиваться). Кроме того, что машина Тьюринга дает точное определение вычислительного процесса, — алгоритма, она обладает наглядной реализацией алгоритмического процесса. Отметим, что машина Тьюринга является теоретической основой построения ЭВМ. Таким образом, любая машина Тьюринга с ленточным алфавитом производит алгоритмическое преобразование слов в этом алфавите.

Тезис Тьюринга. *Всякое реализуемое алгоритмическое преобразование можно выполнить подходящей машиной Тьюринга.*

Математические теории связанные с описанием вычислительных систем гораздо богаче чем теория машин Тьюринга. Мы отметим только несколько моментов.

Во-первых, алгоритм в классическом понимании описывает только локальное поведение компьютера или вычислительной системы такой, как например, Интернет. Современный компьютер уже не укладывается в архитектуру фон Неймана. Механизм прерываний и режим мультизадачности приводит к тому, что в современной вычислительной системе, как правило, выполняется большое количество относительно независимых программ-алгоритмов. Уже пример компьютерных вирусов показывает, что ситуация гораздо сложнее.

Во-вторых, поведение современных вычислительных систем на базе мейнфреймов нельзя описать и проанализировать без теории массового обслуживания, основы которой были сформулированы в трудах замечательного отечественного математика Александра Яковлевича Хинчина.

В-третьих, такие принципы как прозрачность и виртуальность, которые возникли ещё в далеких 60-х годах, позволяют говорить как о новой реальности о таких сущностях, как виртуальные машины. Например, сейчас можно не только обсуждать машину Тьюринга и её реализацию на современных компьютерах, но и говорить о виртуальной машине Дональда Кнута, предложенной им в его известном научном бестселлере по информатике "Искусство программирования".

Аналогично, Интегрированная Система разработки ДРАКОН, созданная в СССР в период с 1986 по 1999 годы, дает пример некоторой виртуальной машины, которая, в частности,

позволила обеспечить разработку автоматической посадки многоразового отечественного космического корабля Буран.

3. Системы искусственного интеллекта

Специалист по информатике воспринимает свою главную функцию как обеспечение программ и ЭВМ для использования в старых и новых методиках обучения, но на нем лежит и более сложная задача — выработка и распространение самого процесса обучения. Отправная точка зрения (М. Минский, С. Пайперт, 1969) этого мнения следующая.

1. *Обучение языку программирования (хотя бы одному), работа со словарем этого языка.*
2. *Помочь людям строить в своем сознании различные виды вычислительных моделей.*
3. *Учитель должен иметь разумную модель того, что представляет собой сознание учащегося.*
4. *При отладке своих собственных моделей и процедур учащийся должен иметь модель того, что он делает и что он знает хорошие приемы отладки и простые, но решающие тестовые примеры.*
5. *Стремление учащегося при отладке программ узнать что-нибудь новое о вычислительных моделях и программировании в отличие от беспомощности представления о невозможности познать это.*

Другими словами, учитель должен разрабатывать эффективные методы компьютерного моделирования процессов мышления, т.е. в определенном смысле работая с искусственным интеллектом.

Остановимся на универсальном решателе задач Ньюэлла и его коллег (General Problem Solver (GPS), 1957), исходной идеей которого являлось представление задач из некоторого класса как задач преобразования одного выражения в другое при помощи множества допустимых правил или, более общо, преобразованием одного состояния в другое. Добавим к этому использование общего механизма целенаправленного поиска для всех типов задач при изменении только конкретных знаний фактов и правил (базисные примеры логических формул).

Систематизацию и разработку решателя задач по элементарной алгебре и математическому анализу провел А. С. Подколзин [37]. Он выделил три подхода компьютерного моделирования процессов решения задач.

Первый — древовидная классификация типов поддающихся алгоритмизации задач в соответствующей области и создание библиотеки процедур их решения (компьютерная алгебра, 1966).

Второй — основан на применении баз знаний, образованных аксиомами и теоремами некоторой предметной области (формальные языки, математическая логика, 1961).

Третий — использование базы алгоритмов локального планирования действий, накапливаемой при интерактивном обучении компьютерной системы, моделирующей процессы решения задач (решатель задач А. С. Подколзина, технология обучения, языки программирования, т.е. приемы решения задач).

Не вдаваясь в подробности, отметим что для развития науки весьма плодотворным является гибридный подход, опирающийся на работу профессиональных математиков в *сотрудничестве* с системами компьютерной математики [5]–[18], [21]. При этом важно, чтобы результат этой деятельности был бы доступен для восприятия человеком. Поучительным примером для этого является компьютерное доказательство проблемы четырех красок, которое превосходит человеческие возможности для восприятия.

В настоящее время в обыденном сознании происходит трансформация понятий. У обывателя создается мнение, что *искусственный интеллект* это новая сущность, которая уже имеется в реальности, но это совсем не так.

Во-первых, исследования по искусственному интеллекту — это направления в информатике и кибернетике, в которых на основе глубоких математических работ создаются специальные алгоритмы для решения сложных задач, таких как распознавание образов, игра в шахматы и многое другое, что не укладывалось в традиционную математику.

Во-вторых, это программная реализация результатов этих исследований.

В настоящее время созданы настолько мощные вычислительные системы, что они не могут управляться или разрабатываться одним человеком. Реальность такова, что ЧЕЛОВЕЧЕСТВО разрабатывает новые технические средства для решения своих проблем, при этом никакой конкретный человек не может отождествлять свои возможности с возможностями всего ЧЕЛОВЕЧЕСТВА.

В последнее время всё большую популярность приобретают такие понятия как *большие данные*, *машинное обучение*, которые по праву относятся к искусственному интеллекту, но для нас важно, что всё это основывается на серьёзной математике.

В заключении этого раздела хотелось отметить, что даже такая абстрактная ветвь математики как *теория категорий* в последнее время находит всё большее применение в теории программирования и построения информационных моделей, без которых немислимо новое, быстро набирающее силу движение *цифровизация*.

4. Что такое TEX и LATEX?

Система компьютерной верстки, построенная на базе языка полиграфического оформления документов “TEX”, была создана Д. Кнутом (1979) [35]. Сила “TEX”а в упрощении работы пользователя и фактическом освобождении его от необходимости программирования при верстке документов.

Первый лауреат премии Дейкстры Л. Лампорт (1984) представил систему “LATEX” [40].

Существенным развитием ее стал “LATEX2 ϵ ” (1994) с наборами пакетов расширений таких, как *beamer* — оформление презентаций, *AmS-TeX* — ввод математических формул, *XyMTeX* — ввод химических формул, *xypic* — построение диаграмм и т.п.

Система “LATEX2 ϵ ” нетребовательна к технике, не зависит ни от архитектуры компьютера, ни от установленной на нем операционной системы [36], [19], [20].

Для понимания сущности TEX и LATEX необходимо обратиться к понятию нормального алгоритма Маркова, которое было разработано Андреем Андреевичем Марковым (младшим) в конце 40-х годов XX столетия, а позднее было использовано при создании отечественного языка функционального программирования Рефал (разработчик Валентин Фёдорович Турчин — выпускник физфака МГУ им. М. В. Ломоносова).

Не вдаваясь в подробности, отметим важное достоинство TEX и LATEX, связанное с тем, что во многих системах компьютерной математики, например, Maple, Mathematica, Maxima, Reduce возможен экспорт документов в формат *.tex. Также используется TEX-нотация для представления формул в Википедии.

Указанная особенность может использоваться для *проверки* математических, физических и других научных работ, в которых используются математические формулы, расчеты. Очень часто многие расчеты опускаются, а иногда возникает вопрос, а были ли они выполнены в полном объёме? Вот здесь и открывается широкое поле деятельности для профессионалов, вооруженных системами искусственного интеллекта, ориентированными на проверку математических результатов.

К сожалению, это перспективы отдаленного будущего, так как в нынешних условиях найти финансирование на проведение таких широкомасштабных работ весьма проблематично.

Необходимо констатировать, что в настоящее время отсутствуют доступные отечественные системы компьютерной математики, хотя ещё в 1968 году в Институте кибернетики АН УССР

под руководством академика АН СССР Виктора Михайловича Глушкова был разработан язык программирования Аналитик.

В основе TEX и LATEX и всех перечисленных систем лежат математические теории формальных языков и грамматик.

5. Сложность вычислений

Элементарной операцией назовем сумму или произведение двух цифр в двоичной системе счисления. Количество элементарных операций для сложения двух n -разрядных чисел есть $O(n)$, а для умножения в столбик — $O(n^2)$. А. Н. Колмогоров поставил задачу, что в этом смысле операция умножения сложнее сложения. Эта задача не решена до сих пор. Интуиция подсказывала А. Н. Колмогорову, что n^2 является оценкой снизу для количества элементарных операций. А. А. Карацуба опроверг это предположение [34].

Рассмотрим алгоритм А. А. Карацубы умножения многоразрядных (n -разрядных) чисел в двоичной системе счисления. Как известно, обычный способ умножения чисел в столбик требует порядка n^2 элементарных “цифровых” операций. В алгоритме Карацубы достаточно использовать $\ll n^{\ln_2 3} \asymp n^{1,5}$ элементарных операций.

Пусть перемножаются A и B — два $2n$ -разрядных числа. Представим их в виде

$$A = 2^n A_1 + A_2, \quad B = 2^n B_1 + B_2,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — n -разрядные числа. Имеем

$$AB = (2^{2n} - 2^n)A_1B_1 + 2^n(A_1 + A_2)(B_1 + B_2) - (2^n - 1)A_2B_2.$$

Следовательно, умножение $2n$ -разрядных чисел сводится к умножению трех n -разрядных или $n + 1$ -разрядных чисел и нескольким операциям сложения и вычитания и сдвига чисел на не более $2n$ разрядов.

Если обозначить $M(n)$ количество элементарных операций для умножения двух n -разрядных чисел, то отсюда находим соотношение

$$M(2n) \leq 3M(n) + Bn,$$

где $B > 0$ — некоторая постоянная.

Следствием этого неравенства является оценка $M(n) \leq cn^{\ln_2 3}$, $c > 0$. В настоящее время Шенхаге и Штрассен построили алгоритм перемножения двух n -разрядных чисел с оценкой $M(n) \leq c_0 n \ln n \ln \ln n$, где $c_0 > c > 0$ — некоторые постоянные.

Алгоритм умножения двух квадратных матриц порядка n (умножение строки на столбец) требует примерно $n^2(2n - 1)$ арифметических операций над элементами матриц. В. Штрассен (1970) предложил алгоритм умножения матриц за $O(n^{\ln_2 7})$, $\ln_2 7 \asymp 2,807$. Пусть $AB = C$ — произведение двух матриц порядка $2k$. Тогда представим матрицы A, B, C в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$, — матрицы порядка k .

Имеем

$$\begin{aligned} C_{11} &= D_1 + D_4 - D_5 + D_7, \\ C_{12} &= D_3 + D_5, \\ C_{21} &= D_2 + D_4, \\ C_{22} &= D_1 + D_3 - D_2 + D_6, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}), \\ D_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}, \\ D_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}), \\ D_4 &= A_{22}(-B_{11} + B_{21}), \\ D_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}, \\ D_6 &= (-A_{11} + A_{21})(B_{11} + B_{12}), \\ D_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}), \end{aligned}$$

Пусть $L(n)$ — число арифметических операций над элементами матриц в алгоритме Штрассена. Тогда из предыдущих соотношений находим

$$L(2n) \leq 7L(n) + O(n^2).$$

Откуда следует, что $L(n) = O(n^{\ln_2 7})$, $\ln_2 7 = 2,807\dots$

Д. Копперсмит и С. Виноград (1990) уточнили этот результат до $O(n^{2,376})$.

Более подробно этот материал изложен в [1] в форме, доступной для студентов и даже школьников.

Мы рассмотрели только один наиболее простой подход, используемый в определении трудоемкости тех или иных алгоритмов. Но на практике потребителей информационных услуг интересуют часто совсем другие характеристики. Если рассмотреть банковскую сферу, то там никого не интересует количество элементарных операций выполняемых компьютеров. Для них жизненно важно определить максимальную пропускную способность банковской системы электронных платежей — количество транзакций обрабатываемых в единицу времени. И здесь нужны совсем другие подходы для анализа узких мест. Именно методы теории систем массового обслуживания, основанной А. Я. Хинчиным, позволяют описать, проанализировать и оптимизировать такие системы.

6. Поиск литературы по информатике

В отечественном математическом Мире есть такое уникальное явление, как Общероссийский портал Math-Net.Ru. Он существенно облегчает поиск публикаций и доступ к ним в Интернете. Аналогичных информационных ресурсов по информатике нам неизвестно, хотя специализированных достаточно много. Нельзя сказать, что Общероссийский портал Math-Net.Ru решает все проблемы информационного сервиса профессиональных математиков, но, как говорят, нет пределов для совершенствования.

К сожалению, многообещающий проект "Карта российской науки" оказался несостоятельным и в настоящее время не очень просто найти необходимую литературу по информатике.

Приведем классификационную схему журнала АСМ "Computing Reviews".

С. Принципы построения компьютерных систем (архитектура процессоров, реализация компьютерных систем).

Д. Программное обеспечение (методы программирования, разработка программного обеспечения, языки программирования, операционные системы).

Е. Теория вычислений (вычисления посредством абстрактных устройств, анализ алгоритмов и сложность задач, логика и значение программ, математическая логика и формальные языки).

Г. Математические вопросы теории вычислений (численный анализ, дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика).

Н. Информационные системы (управление базами данных, хранение и поиск информации).

И. Методы вычислений (алгебраические манипуляции, искусственный интеллект).

Л. Применения компьютеров (физические науки и инженерное дело).

К. Компьютеры и общество (история автоматизированных вычислений, компьютеры и образование, управление вычислительными и информационными системами, профессия программиста).

Естественное желание профессионального и образовательного сообщества иметь современные технологические средства, позволяющие получать достоверную научную и образовательную информацию в любой профессиональной области, в частности, в области информатики и информационных технологий.

На наш взгляд, эта проблема является актуальной и её решение будет способствовать прогрессу развития любой научной и профессиональной области деятельности, для которой будут созданы такие ПОИВС (Проблемно-Ориентированные Информационно-Вычислительные Системы).

7. Научная школа Альберта Рубеновича Есяна и информатика в ТГПУ им. Л. Н. Толстого

В Тульском государственном педагогическом институте им. Л. Н. Толстого преподавание вычислительной математики велось ещё в начале 60-х годов XX столетия. Летом 1963 года М. Н. Добровольский был направлен в город Куйбышев для прохождения курсов повышения квалификации по программированию. Там шло обучение на отечественных ЭВМ Урал. Тогда он с этих курсов привёз черные пластиковые перфоленты, которые использовались для ввода информации в ЭВМ Урал. В самом пединституте долгое время никакой вычислительной технике не было кроме арифмометров, пока не появились сначала машина Проминь-2, а потом Наири. Достаточно долго весь комплекс дисциплин, связанных с вычислительной техникой в пединституте вёл М. Н. Добровольский.

В 1968 году в Тулу из Душанбе приезжает молодой, талантливый доцент, кандидат физико-математических наук Альберт Рубенович Есян. Достаточно быстро образовалась разновозрастная группа из М. Н. Добровольского (1922 г.), А. Р. Есяна (1937 г.) и Б. А. Викола (1947 г.). Результатом их совместной деятельности стало учебное пособие [3], которое вышло уже после смерти М. Н. Добровольского (18.01.1975). К этому времени А. Р. Есян уже втянулся в компьютерную тематику, став руководителем хоздоговорной темы с КИВЦ Главприоккстроя. Кустовой информационно-вычислительный центр в это время возглавлял Э. А. Пашенко. Кроме этого, А. Р. Есян возглавил преподавание вычислительной математики и программирования на ЭВМ Наири. В этот период им была сделана небольшая заметка в журнале Квант [22], в которой он показал, что с помощью, казалось бы, примитивной ЭВМ "Проминь-2" можно получить опровержение известному правилу Варнсдорфа решения задачи Л. Эйлера об обходе шахматной доски конем.

К 1985 году, когда был введён курс ОИВТ во все советские школы, А. Р. Есян стал зрелым педагогом в области ОИВТ со своим нетривиальным подходом к преподаванию этого предмета в педагогических вузах. Поэтому не случайно, что бывший выпускник ТГПИ им. Л. Н. Толстого Владимир Иванович Ефимов, который в это время работал в Минпроссе СССР под руководством видного организатора образования Валерия Константиновича Розова, привлёк А. Р. Есяна в группу преподавателей вузов, которые летом в Москве проходили переподготовку для организации внедрения этого курса на местах.

В феврале 1986 года на матфаке ТГПИ им. Л. Н. Толстого была организована кафедра ОИВТ, первым заведующим которой стал А. Р. Есян. Естественный вопрос о материальной базе новой кафедры был решён оперативно с помощью Тульского ВЦ КП, который был создан на базе Тульской Госстатистики. В аудитории 307 был установлен класс, укомплектованный ЕС-7920 и удаленно подключенных к ЕС-1033, находящейся за несколько километров. Для

студентов в тот период этот факт удаленной работы с ЭВМ и программирования на Паскале выглядел как чудо.

А затем поступили компьютерные классы Ямаха. Учебных пособий не было. И Альберт Рубенович с энтузиазмом взялся восполнить этот пробел. Результатом этой деятельности стало учебное пособие [4], изданное в центральном издательстве "Просвещение". Ему предшествовал целый ряд пособий, выпущенных издательством ТГПИ им. Л. Н. Толстого.

Активно в это время продолжалась работа по выполнению хоздоговорной тематики. Сменились технические средства. Пришла отечественная Искра-1256. Приходилось решать различные практические задачи. И всегда поражала неподдельная заинтересованность Альберта Рубеновича, его влюбленность во всё новое.

Как отмечалось в [2] "В 1994 г. при кафедре информатики и вычислительной техники была открыта аспирантура по специальности 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (информатика). Среди учеников А. Р. Есяяна — доценты Шлапаков И. М., Мартынюк Ю. М., Ваныкина Г. В., Сундукова Т. О., кандидаты педагогических наук Соловьева Т. А., Даниленко С. В. и представитель Республики Йемен Галейб Нашван. Долгое время А. Р. Есяян руководил семинаром по информационным технологиям для учителей г. Тулы и области."

Именно в это время стала складываться научная школа профессора А. Р. Есяяна (звание профессора он получил ещё летом в 1991 году, а докторскую диссертацию защитил через 10 лет весной 2001 года). В 1993 году из кафедры ОИВТ выделилась кафедра информационных технологий, которой стал руководить доцент, кандидат физико-математических наук Н. М. Добровольский. А. Р. Есяян и Н. М. Добровольский вместе руководили аспирантами по специальности 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (информатика). Их связывала долгая дружба на протяжении 43 лет с 1975 года по 2018 год и совместная работа, начиная с 1980 года до конца дней Альберта Рубеновича.

Переходя к описанию научно-педагогической деятельности, прежде всего надо отметить исключительные человеческие качества Альберта Рубеновича Есяяна.

Во-первых, именно благодаря Альберту Рубеновичу Есяяну были возрождены Тульская школа теории чисел, организованы регулярные международные конференции по теории чисел в ТГПУ им. Л. Н. Толстого и основан новый научный журнал по математике "Чебышевский сборник". Об этом подробнее можно прочитать в работе [38].

Во-вторых, на кафедре была создана доброжелательная атмосфера, которая способствовала научным исследованиям. Так например Альберт Рубенович способствовал, чтобы уже в 1997 году первым на кафедре защитил докторскую диссертацию по педагогике доцент Вячеслав Венедиктович Персианов. Затем он всё сделал, чтобы организовать своевременную подачу в диссертационный совет МГУ диссертации Н. М. Добровольского по теории чисел в 2000 году. И только после этого он приступил к подготовке своей защиты, которая успешно состоялась в 2001 году. А после этого он поддержал защиту в 2001 году диссертации доктора педагогических наук доцентом, кандидатом физико-математических наук Александром Сергеевичем Симоновым, а в 2005 году Александром Яковлевичем Фридландом.

Остановимся более подробно на главном стержне научной школы Альберта Рубеновича Есяяна. Будучи по образованию математиком, учеником профессора Марка Александровича Красносельского, Альберт Рубенович во всей своей педагогической и научной деятельности прежде всего оставался математиком. Это хорошо видно из анализа его богатого научно-педагогического наследия [3]–[33].

Темой его докторской диссертации было "Теория и методика обучения алгоритмизации на основе рекурсии в курсе информатики педагогического вуза". На выбор такой тематики оказало влияние обсуждение в совместных беседах Альберта Рубеновича и Н. М. Добровольского содержания кандидатской диссертации 1975 года Добровольского М. Н. на тему "Некоторые комбинаторные задачи о перестановках с ограничением позиций". Эта диссертация была по

комбинаторному анализу. Главным инструментом исследования были производящие функции, с помощью которых М. Н. Добровольскому удалось решить задачу двухсотлетней давности о количестве четырехстрочных латинских прямоугольников, поставленную ещё Л. Эйлером.

Здесь свою роль сыграла потрясающая особенность Альберта Рубеновича видеть красоту математических объектов. В данном случае он был очарован этим трио: производящая функция, рекуррентная последовательность, рекурсия.

Мы не будем пересказывать содержание работ Альберта Рубеновича, отметим только одно, что он с присущим ему мастерством проводил линию по обучению студентов алгоритмизации на основе рекурсии, что позволяло многие учебные вопросы сделать особенно наглядными, лаконичным, доступными и просто красивыми.

В значительной степени благодаря Альберту Рубеновичу Есяяну на факультете математики, физики и информатики Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого сложился научно-педагогический коллектив, который сейчас приступил к многомасштабной задаче создания на базе факультета Института передовых IT-технологий. Данная задача продиктована необходимостью подготовки современных специалистов, востребованных в рамках реализации НОЦ мирового уровня "Тулатех", который был поддержан решением правительства в ноябре 2020 года.

8. Заключение

В рамках этой небольшой статьи мы хотели, прежде всего, подчеркнуть роль математики при изучении информатики и информационных технологий. К сожалению, эта роль не очевидна для молодых людей. Им часто кажется, что можно обойтись без математики, что для их дальнейшей карьеры эти знания излишни, что не стоит тратить силы и время на преодоление злополучного барьера "МАТЕМАТИКА". Очень непросто объяснить молодым людям, что только хорошее фундаментальное образование позволит им оставаться востребованными на рынке труда всю жизнь. Что парадигма образования "Образование в течении всей жизни" реализуется только на основе фундаментального образования. Да, работодателю выгодно сейчас получить максимально практически подготовленного на данный момент специалиста и его не интересует, что будет с этим специалистом через пять, десять лет. Только сам человек, вооруженный важнейшим человеческим качеством *ответственность за свою судьбу*, должен понимать роль фундаментального образования для своей судьбы и своей карьеры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений / М.: Высшая школа. 2000. 322 с.
2. Н. М. Добровольский, И. В. Денисов. Жизнь и научная деятельность Альберта Рубеновича Есяяна // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 432–436.
3. Есяян А. Р., Викал Б. А., Добровольский М. Н. Программирование для ЭВМ "Проминь-2". (учебное пособие). / Тула, Изд. ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1975. 111 с.
4. Есяян А. Р., Ефимов В. И., Пашенко Э. А., Добровольский Н. М., Лапицкая Л. П. Информатика. Учебное пособие для педагогических институтов / Москва, "Просвещение 1991.
5. Есяян А. Р., Панин В. А., Добровольский Н. М., Сергеев Н. Н. MATLAB. Командная строка. Функции (учеб. пособие) / Тула: Изд. ТГПУ, часть 1, 2004. (гриф УМО) — 270 с.

6. Есаян А. Р., Панин В. А., Добровольский Н. М., Сергеев Н. Н. MATLAB. Графика. Программирование (учеб. пособие) / Тула: Изд. ТГПУ, часть 2, 2004. (гриф УМО) — 270 с.
7. Есаян А. Р., Панин В. А., Добровольский Н. М., Сергеев Н. Н. MATLAB. Графический интерфейс. Пакеты приложений (учеб. пособие) / Тула: Изд. ТГПУ, часть 3, 2004. (гриф УМО) — 277 с.
8. Есаян А.Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М. Творческая лаборатория Mathematica (учеб. пособие) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, часть 1 (гриф УМО) 2006 — 272 с
9. Есаян А.Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М. Творческая лаборатория Mathematica (учеб. пособие) / Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Тол-стого, часть 2 (гриф УМО) 2006 — 270 с. 363 с.
10. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Сергеев А. Н. Документы и графика в Maple (учебное пособие) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 2007. — 284 с.
11. Есаян А.Р., Чубариков В.Н., Мартынюк Ю. М. Управляющие структуры и структуры данных в Maple (учебное пособие) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та, 2007 — 316 с.
12. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Шулюпов В. А. Алгебра и математический анализ в Maple. Учебное пособие / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та, 2007 — 293 с.
13. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Шулюпов В. А. Программирование в Maple. (учебное пособие) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та, 2007 — 334 с.
14. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Сергеев А. Н. Mathcad в обучении информатике и математике. Учебно-методическое пособие. / Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2009. (гриф УМО по классическому университетскому образованию по специальностям: 010100, 010200, 351500) — 363 с.
15. А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, В. А. Шулюпов. Программирование в MATHCAD на примерах: Учеб. Пособие для студентов и аспирантов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 2010. — 330 с.
16. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский, Т. А. Соловьева, А. В. Якушин. Программирование в DERIVE / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2010. — 261 с.
17. А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. МАХІМА. ДАННЫЕ и ГРАФИКА / Тула. Изд-во Тульского гос. пед. уни-та им. Л.Н.Толстого. 2011. — 357 с.
18. А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. Программирование в Махіма / Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2012 г. Учебное пособие для студентов и аспирантов, гриф УМО МГУ — 351 с.
19. А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. Подготовка документов в LATEX2ε. Уч.пос. — Тула: Изд-во Тул.гос.пед.ун-та им. Л. Н. Толстого, 2013, 390 с.
20. А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. Построение графиков средствами LATEX-пакета pgfplots. Уч.пос. — Тула: Изд-во Тул.гос.пед.ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015, 372 с.

21. Есаян А. Р., Добровольский Н. М., Седова Е. А., Якушин А. В. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra (часть 1). Уч.пос. — Тула: Изд-во Тул.гос.пед.ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017,
22. А. Р. Есаян. ЭВМ опровергает // Квант. № 8. М., 1976.
23. А. Р. Есаян. Электронные книги в Mathcad //Чебышевский сборник. 2009. Т. 10, вып. 1, С. 31–40.
24. А. Р. Есаян. Автозагрузка в документы Махима определений функций и значений переменных //Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4, С. 93–96.
25. А. Р. Есаян, А. В. Якушин. LuX и системы символьной математики // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1, С. 86–91.
26. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский. Вывод диаграмм и пакет ху // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 4, С. 101–118.
27. С. Г. Григорьев, А. Р. Есаян. Простой и обобщенный поиск элементов в гнездовых массивах и их замещение // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3, С. 460–478.
28. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский. Гнездовые массивы и рекурсия // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3, С. 479–495.
29. А. Р. Есаян, А. В. Якушин. Векторизация и гнездовые массивы // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3, С. 496–509.
30. А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский. Компьютерное доказательство гипотезы о центроидах // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, вып. 1, С. 3–91.
31. А. Р. Есаян, А. В. Якушин. Экспериментальное обоснование гипотез в GeoGebra // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, вып. 1, С. 92–108.
32. А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский. Преобразования объектов в GeoGebra // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, вып. 2, С. 129–143.
33. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский. Пользовательские рекурсивные функции в Махима // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 432–446.
34. А. А. Карацуба, Ю. П. Офман. Умножение многозначных чисел на автоматах // ДАН СССР, 1961, **145**, 2, С. 293–294.
35. Д. Е. Кнут. Всё про TeX — Протвино: РДTeX, 1993.
36. С. М. Львовский. Набор и вёрстка в системе L^AT_EX. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2003, 448 с.
37. А. С. Подколзин О формализации приемов решения математических задач // Интеллектуальные системы, 1998, 3, вып.3-4, С. 51–74.
38. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков. Н. М. Коробов, В. И. Нечаев, С. Б. Стечкин, Н. М. Добровольский и возрождение Тульской школы теории чисел // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 4, С. 196–217.
39. Р. В. Хэмминг Одна из точек зрения на информатику // Лекции лауреатов премии Тьюринга: пер. англ. — М.: Мир, 1993, С. 240–254.
40. Lamport, Leslie. L^AT_EX: a document preparation system. — New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994. — 273 с. — ISBN 0-201-52983-1.

REFERENCES

1. Gashkov S. B., Chubarikov V. N. 2000, "Arithmetic. Algorithms. Complexity of calculations", M.: Higher School, p. 322.
2. Dobrovolskii N. M., Denisov I. V., 2019, "The life and scientific work of Albert Rubenovich Yesayan", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 432–436.
3. Yesayan A. R., Vikol B. A., Dobrovolsky M. N. 1975, "Computer programming "Promin-2". (training manual), Tula, Publishing House of the Tolstoy State Pedagogical Institute, 111 p.
4. Yesayan A. R., Efimov V. I., Pashchenko E. A., Dobrovolsky N. M., Lapitskaya L. P. 1991, "Informatics. Textbook for pedagogical institutes", Moscow, "Prosveshchenie".
5. Yesayan A. R., Panin V. A., Dobrovolsky N. M., Sergeev N. N. 2004, "Environment Matlab. The command line. Functions (study. manual)", Tula: TSPU Publishing House, part 1, (grif UMO) - - - 270 p.
6. Yesayan A. R., Panin V. A., Dobrovolsky N. M., Sergeev N. N. 2004, "Sredi Matlab. Graphics. Programming (study. manual)", Tula: TSPU Publishing House, part 2, (grif UMO) - - - 270 p.
7. Yesayan A. R., Panin V. A., Dobrovolsky N. M., Sergeev N. N. 2004, "Sredi Matlab. Graphical interface. Application packages (study. manual)", Tula: TSPU Publishing House, part 3, (grif UMO) - - - 277 p.
8. Yesayan A. R., In Chubarikov N. N., Dobrovolsky N. M. 2006, "Creative Laboratory Mathematica and I and (textbook. manual)", Tula: Publishing house of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy Univ., part 1 (UMO vulture), 272 p.
9. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M. 2006, "Creative Laboratory Mathematica and I and (textbook. manual)", Tula: Publishing House of the Center of TSPU named after L. N. Tolstogo, part 2 (vulture of the UMO) 2006 — 270 p. 363 p.
10. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Sergeev A. N. 2007, "Documents and graphics in Maple - (textbook)", Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University, 284 p.
11. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Martynyuk Yu. M. 2007, "Control structures and data structures in Maple - (textbook)", Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. un-ta, 316 p.
12. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Shulyupov V. A. 2007, "Algebra and mathematical analysis in klen. Textbook", Tula: Publishing house of Tula State Pedagogical University. un-ta, 293 p.
13. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Shulyupov V. A. 2007, "In Programming in maple. (textbook)", Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. un-ta, 2007 — 334 c.
14. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Sergeev A. N. 2009, "Programs of the Mathcad program system in teaching computer science and mathematics. Educational and methodical manual", Tula: Publishing House of the Tolstoy TSPU, (UMO classification for classical university education in the following specialties: 010100, 010200, 351500), 363 c.

15. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Shulyupov V. A. 2010, "Programming in the package environment Mathcad environment on examples: Studies. Manual for students and postgraduates", Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University, 330 p.
16. A. R. Yesayan, N. M. Dobrovolsky, T. A. Solovyova, A. V. Yakushin. 2010, "In Programming derivatives", Tula: Publishing house of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University, 261 p.
17. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Yakushin A. V. 2011, "Maxim. DATA and GRAPHICS", Tula. Publishing House of the Tula State Pedagogical Institute. L. N. Tolstoy University, 357 p.
18. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Yakushin A. V. 2012, "In Programming Maxim", Tula: Publishing House of the Tolstoy TSPU. Textbook for students and postgraduates, grif UMO MSU, 351 p.
19. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Yakushin A. V. 2013, "Preparation of documents in for the environment for the environment for the environment latex2", Popov's law of zero or one. Uch. pos.", Tula: Publishing house of the Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstogo, 390 p.
20. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Yakushin A. V. 2015, "Plotting graphs using the pgfplots latex package. Uch. pos.", Tula: Publishing house of the Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy, 372 p.
21. Yesayan A. R., Dobrovolsky N. M., Sedova E. A., and Yakushin A. V. 2017, "Dynamic mathematical educational environment GeoGebra (part 1). Uch. pos.", Tula: Publishing house of the Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy.
22. Yesayan A. R. 1976, "The computer refutes", Kvant. No. 8. Moscow.
23. Yesayan A. R. 2009, "E-books in the environment of the Matkad package", Chebyshevsky collection, Vol. 10, issue 1, pp. 31–40.
24. Yesayan A. R. 2011, "Autoloading in the documents of Maxim definitions of functions and values of variables", Chebyshevsky sbornik, Vol. 12, issue 4, pp. 93–96.
25. Yesayan A. R, Yakushin A. V. 2012, "In in in LyX and systems of symbolic mathematics", sbornik Chebyshevsky, Vol. 13, issue 1, pp. 86–91.
26. Yesayan A. R, Dobrovolsky N. M.. 2013, "Diagram output and the xu package", Chebyshevsky collection, Vol. 14, issue 4, pp. 101–118.
27. Grigoriev S. G., Yesayan A. R. 2015, "Simple and generalized search for elements in nested arrays and their substitution", Chebyshevsky collection, Vol. 16, issue 3, pp. 460–478.
28. Yesayan A. R, Dobrovolsky N. M. 2015, "Nest arrays and recursion", Chebyshevsky collection, Vol. 16, issue 3, pp. 479–495.
29. Yesayan A. R, Yakushin A. V. 2015, "Vectorization and nest arrays", Chebyshevsky collection, Vol. 16, issue 3, pp. 496–509.
30. Yesayan A. R, Dobrovolsky N. N. 2017, "Computer proof of the centroid hypothesis", Chebyshevsky Collection, Vol. 18, issue 1, pp. 3–91.

31. Yesayan A. R., Yakushin A. V. 2017, "In Experimental substantiation of hypotheses in GeoGebra", Chebyshevsky collection, Vol. 18, issue 1, pp. 92–108.
32. Yesayan A. R., Dobrovolsky N. N. 2017, "Construction of the geometric Transformation of objects in GeoGebra", Chebyshevsky collection, Vol. 18, issue 2, pp. 129–143.
33. Yesayan A. R., Dobrovolsky N. M. 2018, "Recursive User functions in Maxim", Chebyshevsky collection, Vol. 19, issue 2, pp. 432–446.
34. Karatsuba A. A., Ofman Yu. P. 1961, "Multiplication of multi-valued numbers on automata", DAN SSSR, **145**, 2, pp. 293–294.
35. Knuth. D. E. 1993, All about Tex, Protvino: Rdtech.
36. Lvovsky S. M. 2003, "Typing and layout in the latex system.", 3rd ed., ispr. and add., Moscow: ICNMO, 448 pp.
37. Podkolzin A. S. 1998, "On the formalization of methods for solving mathematical problems", Intelligent Systems, vol, 3, no. 3-4, pp. 51–74.
38. Rebrova I. Yu., Chubarikov V. N. 2020, "N. M. Korobov, V. I. Nechaev, S. B. Stechkin, N. M. Dobrovolsky and the revival of the Tula School of number theory", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 196–217.
39. Hamming R. V. 1993, "One of the points of view on computer science", Lectures of the Turing Prize laureates: trans., Moscow: Mir, pp. 240–254.
40. Lamport, Leslie., 1994, "Latex: document preparation system." - New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 273 pp. - ISBN 0-201-52983-1.

Получено 4.12.2020 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.