ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-482-487

О последовательности первых двоичных цифр дробных частей значений многочлена[1]

А. Я. Белов, Г. В. Кондаков, И. В. Митрофанов, М. М. Голафшан

Посвящается 70-летию академика А. Л. Семёнова

Алексей Яковлевич Канель-Белов — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Университет Бар-Илана (г. Москва, Израиль).
e-mail: kanelster@gmail.com
Григорий Вячеславович Кондаков — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: kondakov@yandex.ru
Иван Викторович Митрофанов — Высшая нормальная школа, Исследовательский университет PSL (Франция).
e-mail: phortim@yandex.ru
Мехди Голафшан — Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: m.golafshan@phystech.edu
Иван Андреевич Решетников — Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: m.golafshan@phystech.edu

Аннотация

Пусть $P(n)$ – многочлен, коэффициент при старшей степени которого иррациональное число. Пусть слово w ($w = (w_n), n \in \mathbb{N}$) состоит из последовательности первых двоичных цифр $\{P(n)\}$ т.е. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Обозначим через $T(k)$ число различных подслов длины k слова w. Основной результат данной работы заключается в следующем:

Теорема. *Существует многочлен $Q(k)$, зависящий только от степени многочлена P, такой, что при достаточно больших k выполнено равенство $T(k) = Q(k)$.*

Ключевые слова: Комбинаторика слов, символическая динамика, унипотентное преобразование тора, лемма Вейля.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
А. Я. Канель-Белов, Г. В. Кондаков, И. В. Митрофанов, М. М. Голафшан, И. А. Решетников. О последовательности первых двоичных цифр дробных частей значений многочлена // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 482–487.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №17-11-01377.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-482-487

On the sequence of the first binary digits of the fractional parts of the values of a polynomial

A. Ya. Belov, G. V. Kondakov, I. V. Mitrofanov, M. M. Golafshan

To the 70th anniversary of academician A. L. Semyonov

Alexey Yakovlevich Kanel-Belov — M. V. Lomonosov Moscow State University, Bar-Ilan University (Moscow, Israel).
e-mail: kanelster@gmail.com
Gregory Vyacheslavovich Kondakov — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: kondakov@yandex.ru
Ivan Viktorovich Mitrofanov — Ecole Normale Superieur, PSL Research University (France).
e-mail: phortim@yandex.ru
Mehdi Golafshan — Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: m.golafshan@phystech.edu
Ivan Andreevich Reshetnikov — Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: m.golafshan@phystech.edu

Abstract

Let $P(n)$ be a polynomial, having an irrational coefficient of the highest degree. A word w ($w = (w_n), n \in \mathbb{N}$) consists of a sequence of first binary numbers of $\{P(n)\}$ i.e. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Denote by $T(k)$ the number of different subwords of w of length k . We'll formulate the main result of this paper.

Theorem. *There exists a polynomial $Q(k)$, depending only on the power of the polynomial P, such that $T(k) = Q(k)$ for sufficiently great k.*

Keywords: Combinatorics on words, symbolical dynamics, unipotent torus transformation, Weiyl lemma.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
A. Ya. Kanel-Belov, G. V. Kondakov, I. V. Mitrofanov, M. M. Golafshan, 2021, "On the sequence of the first binary digits of the fractional parts of the values of a polynomial" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 482–487.

1. Введение

Многие классические задачи аналитической теории чисел связаны с изучением последовательностей дробных частей значений многочленов в целых точках. Эти последовательности играют важную роль в ряде других областей, в частности, в эргодической теории, теории сложности, теории передачи информации и [1-5].

Мы используем методы символической динамики для изучения дробных частей значений многочлена, а именно, изучаем унипотентные преобразование тора.

2. Постановка задачи

Пусть $P(n)$ – многочлен, коэффициент при старшей степени которого иррациональное число. Пусть слово w ($w = (w_n), n \in \mathbb{N}$) состоит из последовательности первых двоичных цифр $\{P(n)\}$ т.е. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Обозначим через $T(k)$ число различных подслов длины k слова w. Основной результат данной работы заключается в следующем:

Теорема 1. *Существует многочлен $Q(k)$, зависящий только от степени многочлена P, такой, что при достаточно больших k выполнено равенство $T(k) = Q(k)$.*

Нам понадобится изучить унипотентные преобразования тора. Сформулируем необходимые определения. Пусть $f : M \to M$ — непрерывное отображение пространства M, и пусть $U \subset M$. Начальная точка x задает последовательность точек x, $f(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$, которой соответствует описывающее эволюцию точки x слово w, составленное из нулей и единиц по следующему правилу: $w_n = 1$, если $f^{(n)}(x) \in U$ и $w_n = 0$, если $f^{(n)}(x) \notin U$.

Будем считать, что U - открытое множество, $mes(\partial U) = 0$ и M – компактное метрическое пространство с лебеговой мерой, которую отображение f сохраняет. *Началом* w^b слова w назовем последовательность x, $f(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *Конечное слово v^f называется* существенной *конечной эволюцией точки x^*, если в любой окрестности точки x^* существует открытое множество V, для любой точки $x \in V$ которого выполнено равенство $v^b(x) = v^f$. Бесконечное слово w называется* существенной эволюцией *точки x^*, если любое его начальное подслово – существенная конечная эволюция точки x^*.*

Под *эволюцией* точки, когда это не вызывет недоразумений, будем понимать, *существенную эволюцию.* Отметим, что точка может иметь несколько существенных эволюций. Пусть v – конечное слово. Тогда множество точек с конечной существенной эволюцией v замкнуто.

Аналогичное утверждение верно для бесконечного слова w.

Понятие *морфизма, эпиморфизма, мономорфизма и изоморфизма динамик* вводится обычным образом. *Фактор-динамика* естественным образом определяется на *фактор-топологии* тогда и только тогда, когда f переставляет классы эквивалентности. Отметим, что прообразы точек при морфизмах замкнуты. Множество V называется *несводимым*, если его замыкание является прообразом замкнутого множества только при мономорфизме.

Лемма 1. *Пусть U – несводимое множество, тогда разные точки имеют разную эволюцию и для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, что любые слова длины $N(\varepsilon)$, соответствующее начальным точкам на расстоянии большем ε, различны.*

Определение 2. *Замкнутое множество N называется* квазиинвариантным, *если для любых двух точек A и B и сходящейся последовательности $f^{(n_i)}(A) \to C$ ($C \in N$, $n_i \to \infty$) любая предельная точка последовательности $\{f^{(n_i)}(B)\}$ лежит в N.*

Легко проверить, что каждое замкнутое инвариантное множество является квазиинвариантным; каждой фактор-динамике соответствует разбиения на квазиинвариантные множества и обратно; образ квазинвариантного множества квазиинвариантен; множество точек с данной существенной эволюцией образует квазиинвариантное множество.

Определение 3. $(A - B)$-облаком *с центром в точке A, порожденным точкой B, назовем множество условных предельных точек $f^{(n_i)}(B)$, при условии $f^{(n_i)}(A) \to A$.*

Отметим, что $(A - B)$-облако замкнуто. Образ $(A - B)$-облака при k-ой итерации есть $(f^{(k)}(A) - f^{(k)}(B))$-облако. Обозначим $(A - B)$-облако через L_0; через L_{i+1} обозначим замыкание объединения всевозможных $(A_i - B_i)$ – облаков, для которых A_i, $B_i \in L_i$. Положим

$L_{AB} = \bigcup L_i$. Факторизация, порожденная множеством L_{AB} – это самая слабая факторизация из тех, которые склеивают точки A и B.

Пусть $P(n)$ – многочлен степени $m+1$, старший коэффициент a_{m+1} которого - иррациональное число. Определим последовательность многочленов $\{P_k(n)\}$ $k = 0, \ldots, m$: $P_m(n) = P(n)$, $P_{m-1}(n) = P_m(n+1) - P_m(n)$, ..., $P_{i-1}(n) = P_i(n+1) - P_i(n)$, ... Из этих формул следует, что $P_0(n) = n!a_{m+1}$ — ирациональное число. Положим $\varepsilon = P_0(n)$, $x_i(n) = \{P_i(n)\}$ и $x_i'(n) = x_i(n+1)$, и перепишем приведенные выше уравнения в следующую систему

$$\begin{cases} x_m' = x_m + x_{m-1} \mod 1 \\ x_{m-1}' = x_{m-1} + x_{m-2} \mod 1 \\ \cdots \\ x_1' = x_1 + \varepsilon \mod 1, \end{cases} \tag{1}$$

При этом условие $[2\{P(n)\}] = 0$ переходит в условие $0 \leqslant x_m(n) < 1/2$. Вектор $(x_1', \ldots, x_m')$ связан с вектором $(x_1, \cdots, x_m)$ унипотентным преобразованием (преобразованием, соответствующем линейному преобразованию с единичными собственными числами). Пусть $F : \vec{x} \to \vec{x'}$. Образы гиперплоскостей $x_m = 0$ и $x_m = 1/2$ при отображениях $Id, F, F^{(2)}, \ldots, F^{(k-1)}$ разбивают пространство на многогранники. Точкам одного и того же многогранника соответствуют одинаковые слова длины k.

Теорема 2. *Пусть w и v - две различные эволюции точки $x_0 \in T$. Тогда $\rho(w,v) = 0$, где*

$$\rho(w,v) = \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{i} (w_j + v_j) \bmod 2}{i}.$$

Если x и x^* различны и имеют разную эволюцию, то плотность рассогласования $\rho(w_x, w_{x^*})$ определена и положительна.

Теорема 3. *Пусть T - m-мерный тор. Тогда существует плоская область U с аналитической границей и начальная точка x^*, имеющая бесконечно много попарно различных эволюций, которые попарно различаются в бесконечном числе позиций.*

Пусть точки A $(x_1, \cdots, x_m)$ и B $(x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_m + \Delta x_m)$ имеют одинаковую эволюцию. Тогда выполнены следующие утверждения:

Утверждение 1. *Пусть 1, ε, Δx_i линейно независимы над Q. Тогда $(A-B)$-облако содержит все точки, у которых первые $i-1$ координаты совпадают с координатами точки B.*

Утверждение 2. *Пусть Δx_i – иррациональное число. Тогда для любого $\delta(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$ существует точка B_δ, эволюция которой совпадает с эволюцией точек A и B, i-ая координата которой отличается от i-ой координаты точки A ровно на δ.*

Случай, когда все Δx_j - рациональные приводит к фактор-динамике, при которой i-ая "сторона тора отвечающая оси OX_i, делится на $M_i = \prod_{j=1}^{i} m_j$ частей, где m_j - произвольные натуральные числа и точки тора $x = x^*$ отождествляются при выполнении для всех $1 \leqslant j \leqslant m$ равенств: $M_j x_j = M_j x_j^*$.

Следствие 1. *Класс замкнутых сводимых множеств состоит из множеств, которые переходят сами в себя при сдвигах на $1/M_i$ вдоль i-ой координаты или при любых сдвигах вдоль координат с номером большем какого-то фиксированного. Множество $0 \leqslant x_m < 1/2$ - несводимо.*

Утверждение 3. *Рассмотрим динамику тора, задаваемую системой (1) и пусть множество U, задаваемое условием $0 \leqslant x_m \leqslant 1/2$, несводимо. Тогда существует такое k, что точки с одинаковой конечной эволюцией длины k разбивают тор на замкнутые выпуклые многогранники, причем разным многогранникам соответствуют различные эволюции.*

3. Результаты

Доказательство теоремы 1. Множество U несводимо, поэтому в силу леммы 1 существует такое $N(\delta')$, что $N(\delta')$-эволюция точек, находящихся на расстоянии большем δ', различна. Очевидно, что N-эволюция всех внутренних точек многогранника, полученного после N-ой итерации совпадает. Назовем ее *эволюцией многогранника.* При дальнейшем разбиении многограника, диаметр которого меньше δ', не могут образовываться многогранники с одинаковой эволюцией (в противном случае один из многогранников разбиения пересекается двумя "соседними" плоскостями s-ой системы ($s > N(\delta')$) и соображения обращения времени позволяют найти две точки, принадлежащие одному многограннику, на расстоянии d ($d > 1/2 > \delta'$). Многогранники разбиения, имеющие общую границу, имеют различную эволюцию, а для многогранников разбиения, не имеющих общих точек, существует δ^*, меньшее всевозможных попарных расстояний между ними. Положив $K = \max(N(\delta'),\ N(\delta^*))$, получим число итераций, начиная с которого выполнено равенство между числом областей и числом подслов длины k. Из иррациональности ε следует, что через точки пересечения плоскостей проходит ровно m плоскостей. Многогранники разбиения и точки пересечения областей находятся во взаимнооднозначном соответствии. Число точек пересечения гиперплоскостей $Q(k)$, а, следовательно, и число подслов $T(k)$ ($k \geqslant K$) длины k, вычисляется по формуле:

$$Q(k) = \sum_{0\leqslant k_1<\ldots<k_m\leqslant k} \begin{vmatrix} 1 & \binom{k_m}{1} & \ldots & \binom{k_m}{m} \\ & & \ldots & \\ 1 & \binom{k_1}{1} & \ldots & \binom{k_1}{m} \end{vmatrix}, \deg Q(k) = \frac{m(m+1)}{2}.$$

В зависимости от P равенство $T(k) = Q(k)$ может начинать выполняться со сколь угодно большого номера k.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.М. Виноградов. *К вопросу о распределении дробных частей многочлена. Изв. АН.*, сер. матем. 1961, т.25 с.749-754

2. Л. Кейперс, Г. Ниддеррейтер *Равномерное распределение последовательностей.* М.:Наука, 1985.

3. Л.Д. Пустыльников *Распределение дробных частей значений многочлена. УМН*, 1993 т.48, выпуск 4 (292), с 131 – 166.

4. R.N. Izmailov and A.A. Vladimirov. *Dimension of aliasing structures. An International Journal of Systems. Applications in Computer Graphics.*, 1993, Vol 17, No 5.

5. M. Morse and G.A. Hedlund. Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:1–42, 1940.

6. H. Weyl. Über der gleichverteilung von zahlen mod. 1. *Math. Ann.*, 77:313–352, 1916.

REFERENCES

1. И.М. Виноградов. *К вопросу о распределении дробных частей многочлена. Изв. АН.*, сер. матем. 1961, т.25 с.749-754

2. Л. Кейперс, Г. Ниддеррейтер *Равномерное распределение последовательностей.* М.:Наука, 1985.

3. Л.Д. Пустыльников *Распределение дробных частей значений многочлена. УМН*, 1993 т.48, выпуск 4 (292), с 131 – 166.

4. R.N. Izmailov and A.A. Vladimirov. *Dimension of aliasing structures. An International Journal of Systems. Applications in Computer Graphics.*, 1993, Vol 17, No 5.

5. M. Morse and G.A. Hedlund. Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:1–42, 1940.

6. H. Weyl. Über der gleichverteilung von zahlen mod. 1. *Math. Ann.*, 77:313–352, 1916.

Получено 21.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.