

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-460-472

Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием¹

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

Лев Алексеевич Толоконников — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Дмитрий Юрьевич Ефимов — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции цилиндрических монохроматических звуковых волн на однородном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием. Полагается, что тело находится в безграничном пространстве, заполненном идеальной жидкостью. Получено аналитическое решение задачи.

Волновые поля в содержащей среде и однородном упругом цилиндре находятся в виде разложений по волновым цилиндрическим функциям, а для нахождения поля смещения в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Проведены численные расчеты угловых и частотных характеристик рассеянного поля для упругих цилиндров с однородными и неоднородными покрытиями. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел.

Ключевые слова: дифракция, цилиндрические звуковые волны, упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 460–472.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-460-472

Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with an radially inhomogeneous coating

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

Lev Alexeevich Tolokonnikov — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Dmitrii Yurevich Efimov — undergraduate, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Abstract

In article the problem of the diffraction of cylindrical monochromatic sound waves by an homogeneous elastic cylinder with a radially inhomogeneous elastic covering is considered. It is believed that the body is placed in an endless space filled with ideal fluid. The analytical solution of the problem is received.

Wave fields in a containing medium and homogeneous elastic cylinder are found in the form of expansions in wave cylindrical functions. The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement field in inhomogeneous coating.

Numerical calculations of angular and frequency characteristics of the scattered field for elastic cylinders with homogeneous and inhomogeneous coatings are performed. Influence of continuously inhomogeneous elastic coatings on sound-reflecting properties of elastic cylindrical bodies are revealed.

Keywords: diffraction, cylindrical sound waves, elastic cylinder, inhomogeneous elastic coating.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2021, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with an radially inhomogeneous coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460–472.

1. Введение

Дифракция монохроматических звуковых волн на цилиндрических телах с неоднородными упругими покрытиями, находящихся в безграничном пространстве, заполненном идеальной жидкостью, рассматривалась в работах [1 - 4]. В [1] исследована дифракция плоской звуковой волны на абсолютно жестком цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием. Задачи о рассеянии наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием решены в [2, 3]. В [2] неоднородное покрытие полагалось радиально-неоднородным, а в [3] — дискретно-слоистым. Дифракция цилиндрических звуковых волн на жестком цилиндре с неоднородным упругим покрытием изучена в [4]. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [5, 6]. Задача дифракции плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями решена в [7]. В [8] рассмотрена дифракция плоской

звуковой волны на однородном упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи идеальной плоской поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой), когда плоская волна падает перпендикулярно оси цилиндра. В [9] рассмотрена задача о рассеянии плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругий цилиндр с радиально-неоднородным упругим слоем, в присутствии подстилающей плоскости. Прямая и обратная задачи рассеяния звуковых волн жестким цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся в волноводе, решены в [10, 11]. В настоящей работе рассматривается задача дифракции звуковых волн, излучаемых линейным источником, на упругом изотропном цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный изотропный упругий цилиндр радиуса r_2 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1 . Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z так, чтобы координатная ось z являлась осью вращения цилиндра. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ — непрерывной функцией этой координаты.

Пусть из внешнего пространства на цилиндрическое тело падает монохроматическая цилиндрическая волна. Падающая волна излучается бесконечно длинным цилиндрическим источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод и ось которого параллельна оси цилиндра. В цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной с рассеивателем, ось источника имеет координаты (r_0, φ_0) . Выберем дополнительную цилиндрическую систему координат R, θ, z , связанную с источником так, чтобы полярные оси основной и дополнительной систем координат были одинаково ориентированы. Тогда потенциал скорости гармонической звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка m , может быть представлен в виде

$$\Psi_0 = AH_m(kR) \exp[i(m\theta - \omega t)],$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число; ω — круговая частота; t — время; $H_m(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; R — расстояние между источником и точкой наблюдения;

$$R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}.$$

Простейшая монохроматическая симметричная цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси z , описывается с помощью цилиндрической функции Ганкеля первого рода нулевого порядка. Потенциал скорости такой волны представляется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR) \exp(-i\omega t).$$

В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим отраженную от тела волну, а также найдем поля смещений в однородном упругом цилиндре и неоднородном слое.

3. Аналитическое решение задачи

В рассматриваемой постановке задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z .

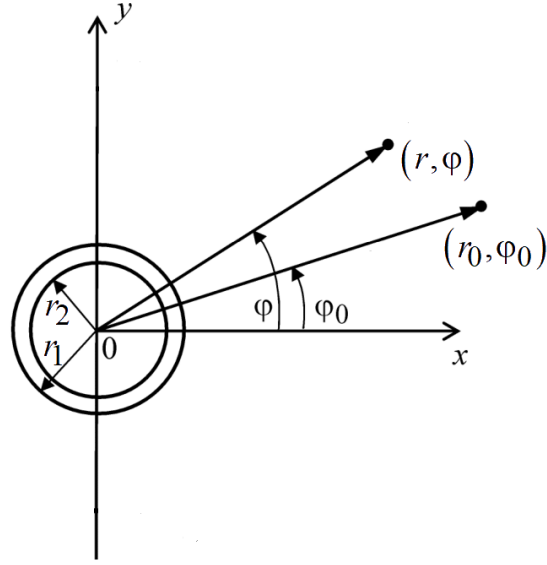


Рис. 1: К задаче дифракции цилиндрической волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [12]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0.$$

Потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_s,$$

где Ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны.

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad} \Psi, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi.$$

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций [13], представим потенциал скорости падающей волны в основной системе координат в виде

$$\begin{aligned} \Psi_0 = A(-1)^m \exp(im\varphi_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} H_{m-n}(kr_0) J_n(kr), & r < r_0 \\ J_{m-n}(kr_0) H_n(kr), & r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка m .

Учитывая, что [13]

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad H_{-n}(x) = (-1)^n H_n(x), \quad (2)$$

из (1) для симметричной цилиндрической волны получаем

$$\Psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(kr_0) J_n(kr), & r < r_0 \\ J_n(kr_0) H_n(kr), & r > r_0. \end{cases}$$

С учетом условий излучения на бесконечности [12] потенциал скорости рассеянной волны Ψ_s , являющийся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде

$$\Psi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре и неоднородном покрытии.

Представим вектор смещения $\mathbf{u}_0$ частиц упругого изотропного однородного цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad} L + \text{rot} \Phi,$$

где L и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца

$$\Delta L + k_l^2 L = 0,$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0,$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Так как упругое тело находится в условиях плоской деформации, то $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z = 0$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси z . Тогда векторный потенциал $\Phi = \Phi(r, \varphi) \mathbf{e}_z$. В этом случае векторное уравнение сводится к одному скалярному уравнению относительно скалярной функции $\Phi(r, \varphi)$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0.$$

Учитывая условия ограниченности, функции L и Φ будем искать в виде

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (4)$$

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_\tau r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (5)$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_0$, записанные через функции L и Φ , в цилиндрической системе координат имеют вид

$$u_{0r} = \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad u_{0\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{0ij} и вектора смещения $\mathbf{u}_0$ в однородном изотропном цилиндре имеют вид [14]

$$\begin{aligned} \sigma_{0rr} &= \lambda_0 \left[\frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) \right] + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, \\ \sigma_{0\varphi\varphi} &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{r} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) + \lambda_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, \quad \sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r} \right). \end{aligned}$$

Используя соотношения, приведенные выше, выразим компоненты тензора напряжений σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$ через функции L и Φ

$$\sigma_{0rr} = -\lambda_0 k_l^2 L + 2\mu_0 \left(\frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\sigma_{0r\varphi} = \frac{2\mu_0}{r} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right).$$

Уравнения движения упругого неоднородного слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды [14], которые в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \end{aligned}$$

где u_r, u_φ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в цилиндрической системе координат; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $\rho = \rho(r)$.

Используя соотношения между компонентами тензора напряжений и вектора смещения в неоднородном покрытии, которые аналогичны соответствующим соотношениям для однородной упругой среды (с учетом замены λ_0 и μ_0 на λ и μ соответственно), запишем уравнения движения неоднородного покрытия через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \omega^2 \rho \right) u_r = 0, \\ \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \left(\mu' + \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \left(-\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \omega^2 \rho \right) u_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\lambda = \lambda(r)$; $\mu = \mu(r)$; штрих означает дифференцирование по r .

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции u_r, u_φ будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r) e^{in(\varphi - \varphi_0)}. \quad (7)$$

Подставляя разложения (7) в уравнения (6), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ для каждого n :

$$\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (8)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n})^T$; $\hat{\mathbf{A}}_n^{(l)} = (a_{nij})_{2 \times 2}$, $\hat{\mathbf{B}}_n^{(l)} = (b_{nij})_{2 \times 2}$, $\hat{\mathbf{C}}_n^{(l)} = (c_{nij})_{2 \times 2}$ — матрицы второго порядка с элементами

$$\begin{aligned} a_{n11} &= (\lambda + 2\mu) r^2, \quad a_{n22} = \mu r^2, \quad a_{n12} = a_{n21} = 0, \\ b_{n11} &= (\lambda' + 2\mu') r^2 + (\lambda + 2\mu) r, \quad b_{n12} = in(\lambda + \mu) r, \quad b_{n21} = in(\lambda + \mu) r, \\ b_{n22} &= \mu' r^2 + \mu r, \quad c_{n11} = \lambda' r - \lambda - (n^2 + 2) \mu + \omega^2 \rho r^2, \\ c_{n12} &= in(\lambda' r - \lambda - 3\mu), \quad c_{n21} = in(\mu' r + \lambda + 3\mu), \\ c_{n22} &= -\mu' r - n^2 \lambda - (2n^2 + 1) \mu + \omega^2 \rho r^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n разложений (3 - 5) и функции $U_{1n}(r), U_{2n}(r)$ из разложений (7) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения:

$$\text{при } r = r_1 \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (9)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } r = r_2 \quad u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}. \quad (10)$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ находим коэффициенты A_n , выраженные через величины $U_{1n}(r_1)$

$$A_n = -\frac{A\Omega_{mn}kJ'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kH'_n(kr_1)}, \quad (11)$$

где

$$\Omega_{mn} = (-1)^{n+m} H_{m-n}(kr_0) \exp(im\varphi_0);$$

штрихи означают дифференцирование по аргументу.

В случае симметричной падающей волны ($m = 0$), учитывая (2), получаем

$$\Omega_{mn} = H_n(kr_0).$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_2$ находим коэффициенты B_n и C_n , выраженные через $U_{1n}(r_2), U_{2n}(r_2)$

$$B_n = \gamma_{1n}U_{1n}(r_2) + \gamma_{2n}U_{2n}(r_2), \quad C_n = \gamma_{3n}U_{1n}(r_2) + \gamma_{4n}U_{2n}(r_2),$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{1n} &= k_\tau r_2 J'_n(k_\tau r_2) / \Delta_n, \quad \gamma_{2n} = in J_n(k_\tau r_2) / \Delta_n, \\ \gamma_{3n} &= in J_n(k_l r_2) / \Delta_n, \quad \gamma_{4n} = -k_l r_2 J'_n(k_l r_2) / \Delta_n, \\ \Delta_n &= [k_l r_2^2 J'_n(k_l r_2) k_\tau J'_n(k_\tau r_2) - n^2 J_n(k_l r_2) J_n(k_\tau r_2)] / r_2. \end{aligned}$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получаем четыре краевых условия для системы дифференциальных уравнений (8)

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{D}}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_1} &= \mathbf{G}_n, \\ \left(\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_2} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mathbf{G}_n = (g_{n1}, 0)^T$; $\hat{\mathbf{D}}_n = (d_{nij})_{2 \times 2}$, $\hat{\mathbf{F}}_n = (f_{nij})_{2 \times 2}$ — матрицы второго порядка;

$$\begin{aligned} g_{n1} &= 2A\rho_1\omega r_1\Omega_{mn} / [\pi k H'_n(kr_1)], \\ d_{n11} &= r\lambda + \rho_1\omega^2 r^2 H_n(kr) / [k H'_n(kr)], \quad d_{n12} = inr\lambda, \quad d_{n21} = inr\mu, \quad d_{n22} = -r\mu, \\ f_{n11} &= r^2 (\gamma_{1n}e_{1n} + \gamma_{3n}e_{2n} + \lambda/r), \quad f_{n12} = r^2 (\gamma_{2n}e_{1n} + \gamma_{4n}e_{2n} + in\lambda/r), \\ f_{n21} &= \mu_0 r^2 [\gamma_{1n}e_{3n} + \gamma_{3n}e_{4n} + in\mu / (\mu_0 r)], \quad f_{n22} = \mu_0 r^2 [\gamma_{2n}e_{3n} + \gamma_{4n}e_{4n} - \mu / (\mu_0 r)], \\ e_{1n} &= [\lambda_0 n^2 J_n(k_l r) - k_l^2 r^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) J''_n(k_l r) - \lambda_0 k_l r J'_n(k_l r)] / r^2, \\ e_{2n} &= 2\mu_0 in [J_n(k_\tau r) - k_\tau r J'_n(k_\tau r)] / r^2, \quad e_{3n} = 2in [J_n(k_l r) - k_l r J'_n(k_l r)] / r^2, \\ e_{4n} &= [k_\tau^2 r^2 J''_n(k_\tau r) - k_\tau r J'_n(k_\tau r) + n^2 J_n(k_\tau r)] / r^2. \end{aligned}$$

4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Найдем решение краевой задачи (8), (12) методом сплайн-коллокации [15]. Введём на отрезке $[r_2, r_1]$ равномерную сетку $\Delta : r_2 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = r_1$ с шагом h . Будем искать приближенное решение краевой задачи в виде кубических сплайнов $S_{1n}(r)$, $S_{2n}(r)$ дефекта 1 с узлами на сетке Δ . Здесь $S_{1n}(r)$, $S_{2n}(r)$ — сплайн-функции, приближающие функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$ соответственно.

Представим кубические сплайны в виде разложения по базису из нормализованных кубических B -сплайнов [15]

$$S_{\gamma n}(r) = \sum_{l=-1}^{M+1} b_{\gamma n}^{(l)} B_l(r) \quad (\gamma = 1, 2), \quad (13)$$

где $b_{\gamma n}^{(l)}$ — коэффициенты разложения, которые подлежат определению; B_l — базисная сплайн-функция, отличная от нуля на интервале-носителе (x_{l-2}, x_{l+2}) со средним узлом x_l ;

$$\begin{aligned} B_l(r) = & \frac{1}{6} \left[2 + \frac{r - x_l}{h} \right]^3 B_l^0(r) + \left[\frac{2}{3} - \frac{(r - x_l)^2}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{(r - x_l)^3}{h^3} \right] B_{l+1}^0(r) + \\ & + \left[\frac{2}{3} - \frac{(r - x_l)^2}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{(r - x_l)^3}{h^3} \right] B_{l+2}^0(r) + \frac{1}{6} \left[2 - \frac{r - x_l}{h} \right]^3 B_{l+3}^0(r), \\ B_l^0(r) = & \begin{cases} 1, & r \in [x_{l-2}, x_{l-1}) \\ 0, & r \notin [x_{l-2}, x_{l-1}). \end{cases} \end{aligned}$$

Для того, чтобы все базисные функции в (13) были определены, сетка должна быть дополнена узлами $x_{\zeta-3} = x_0 + (\zeta - 3)h$, $x_{M+3-\zeta} = x_M + (3 - \zeta)h$, $\zeta = 0, 1, 2$.

Потребуем, чтобы сплайны $S_{\gamma n}(r)$ удовлетворяли системе (8) и краевым условиям (12) в узлах коллокации, совпадающих с узлами сетки Δ . Используя выражения для узловых значений B -сплайна и его производных [15], получим систему $2M + 6$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных коэффициентов $b_{\gamma n}^{(l)}$ ($\gamma = 1, 2$; $l = -1, 0, 1, \dots, M + 1$)

$$\mathbf{V}_n^{(0)} b_n^{(0)} = 0, \quad \mathbf{W}_n^{(l)} b_n^{(l)} = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, M), \quad \mathbf{T}_n^{(M)} b_n^{(M)} = 6hG_n, \quad (14)$$

где

$$b_n^{(l)} = \left(b_{1n}^{(l-1)}, b_{2n}^{(l-1)}, b_{1n}^{(l)}, b_{2n}^{(l)}, b_{1n}^{(l+1)}, b_{2n}^{(l+1)} \right)^T,$$

$\mathbf{V}_n^{(l)} = (v_{\alpha\beta})_{2 \times 6}$, $\mathbf{W}_n^{(l)} = (w_{\alpha\beta})_{2 \times 6}$, $\mathbf{T}_n^{(l)} = (t_{\alpha\beta})_{2 \times 6}$ — матрицы с элементами

$$v_{\alpha\tau} = -3a_{\alpha\tau} + hf_{\alpha\tau}, \quad v_{\alpha,\tau+2} = 4hf_{\alpha\tau}, \quad v_{\alpha,\tau+4} = 3a_{\alpha\tau} + hf_{\alpha\tau},$$

$$w_{\alpha\tau} = 6a_{\alpha\tau} - 3hb_{\alpha\tau} + h^2c_{\alpha\tau}, \quad w_{\alpha,\tau+2} = -12a_{\alpha\tau} + 4h^2c_{\alpha\tau}, \quad w_{\alpha,\tau+4} = 6a_{\alpha\tau} + 3hb_{\alpha\tau} + h^2c_{\alpha\tau},$$

$$t_{\alpha\tau} = -3a_{\alpha\tau} + hd_{\alpha\tau}, \quad t_{\alpha,\tau+2} = 4hd_{\alpha\tau}, \quad t_{\alpha,\tau+4} = 3a_{\alpha\tau} + hd_{\alpha\tau} \quad (\tau = 1, 2).$$

Нижний индекс n , которым должны быть снабжены элементы $v_{\alpha\beta}$, $w_{\alpha\beta}$, $t_{\alpha\beta}$ для простоты записи опущен. Верхний индекс l в записи матриц $\mathbf{V}_n^{(l)}$, $\mathbf{W}_n^{(l)}$, $\mathbf{T}_n^{(l)}$ означает, что элементы матриц, зависящие от r , вычисляются при $r = x_l$.

Решая систему (14), находим приближенное решение краевой задачи (8), (12) в виде (13). Затем вычисляем коэффициенты A_n , B_n , C_n разложений (3–5). В результате получаем аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела.

Определим модовые механические импедансы поверхности упругого цилиндра с неоднородным покрытием. Модовый импеданс Z_n определяется по формуле [12]

$$Z_n = -\frac{p_n}{v_n} \Big|_{r=r_1},$$

где p_n и v_n — максимальные значения звукового давления и радиальной колебательной скорости частиц полного акустического поля для моды с номером n соответственно.

Учитывая, что

$$p = i\rho_1\omega(\Psi_0 + \Psi_s), \quad v_n = \frac{\partial(\Psi_0 + \Psi_s)}{\partial r},$$

с помощью разложений (1) и (3) и формулы (11) получим выражения для p_n и v_n при $r = r_1$.

Используя выражение для вронскиана [16]

$$J_n(x) H'_n(x) - J'_n(x) H_n(x) = 2i/(\pi x),$$

находим

$$p_n(r_1) = -\omega\rho_1 [2A\Omega_{mn} - \pi\omega r_1 H_n(kr_1) U_{1n}(r_1)] / [\pi k r_1 H'_n(kr_1)],$$

$$v_n(r_1) = -i\omega U_{1n}(kr_1).$$

В результате получаем выражение для модового импеданса

$$Z_n = \frac{i\rho_1 [2A\Omega_{mn} - \pi\omega r_1 H_n(kr_1) U_{1n}(r_1)]}{\pi k r_1 H'_n(kr_1) U_{1n}(r_1)}.$$

5. Численные исследования

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля ($kr \gg 1$). Используя асимптотическое представление функции Ганкеля при больших значениях аргумента [16]

$$H_n(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

из (3) находим

$$\Psi_S = \sqrt{\frac{r_1}{2r}} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi}{4} \right) \right] F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi k r_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n e^{in(\varphi - \varphi_0)}. \quad (15)$$

На основе полученного решения были проведены расчеты угловых и частотных характеристик рассеянного акустического поля в дальней зоне. Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_2 = 0,8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м находится в свободном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 1000$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Рассматривались однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1070$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль) и неоднородное покрытие, механические характеристики которого менялись по толщине слоя по законам

$$\rho = \rho^0 f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0$$

где

$$f(r) = (r_1 - r)/(r_1 - r_2) + 0,5, \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

Полагалось, что линейный источник излучает симметричную звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_0 = 6r_1$ и $\varphi_0 = 0$.

Суммирование в (15) проводилось для n , изменяющихся от $-N$ до N , где $N = [2kr_1] + 1$ ($[]$ — целая часть числа). Для контроля точности приближенного решения краевой задачи (8), (12) вычисления проводились на сгущающихся вдвое сетках. Вычислительный процесс останавливался тогда, когда на последней паре сеток в некоторых произвольно выбранных точках $\xi \in [r_2, r_1]$ величины $|U_{jn}(\xi)|$ ($j = 1, 2$) различались не более, чем на 10^{-7} .

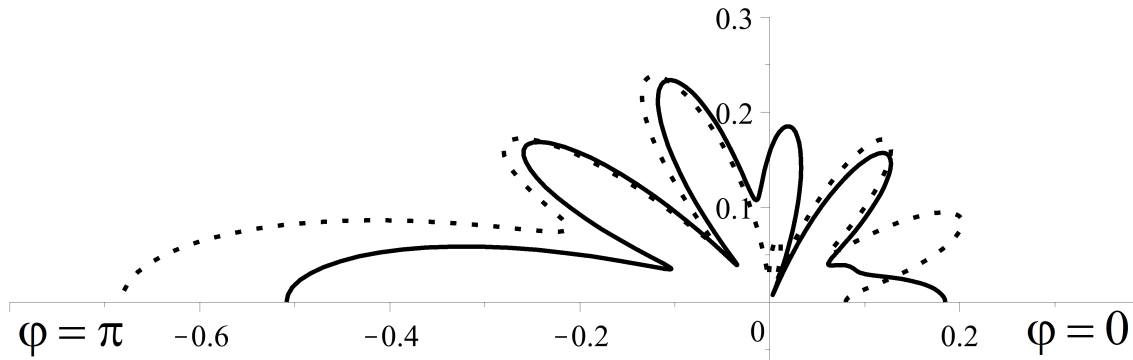


Рис. 2: Диаграммы направленности рассеянного поля

На рис. 2 и рис. 3 представлены полярные диаграммы направленности и частотные характеристики рассеянного акустического поля в дальней зоне. Сплошные линии на рисунках соответствуют случаю неоднородного покрытия, пунктирные — однородному упругому покрытию.

Диаграммы направленности $|F(\varphi)|$ рассчитаны при волновом размере тела $kr_1 = 5$. В силу симметрии изображена только половина диаграммы.

Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|F(\pi)|$ от волнового размера цилиндра kr_1 рассчитаны в интервале $2.6 < kr_1 \leq 10$. Отметим, что при $kr_1 < 2.6$ частотные зависимости при однородном и неоднородном покрытиях отличаются незначительно. С увеличением частоты такое отличие становится все более заметным.

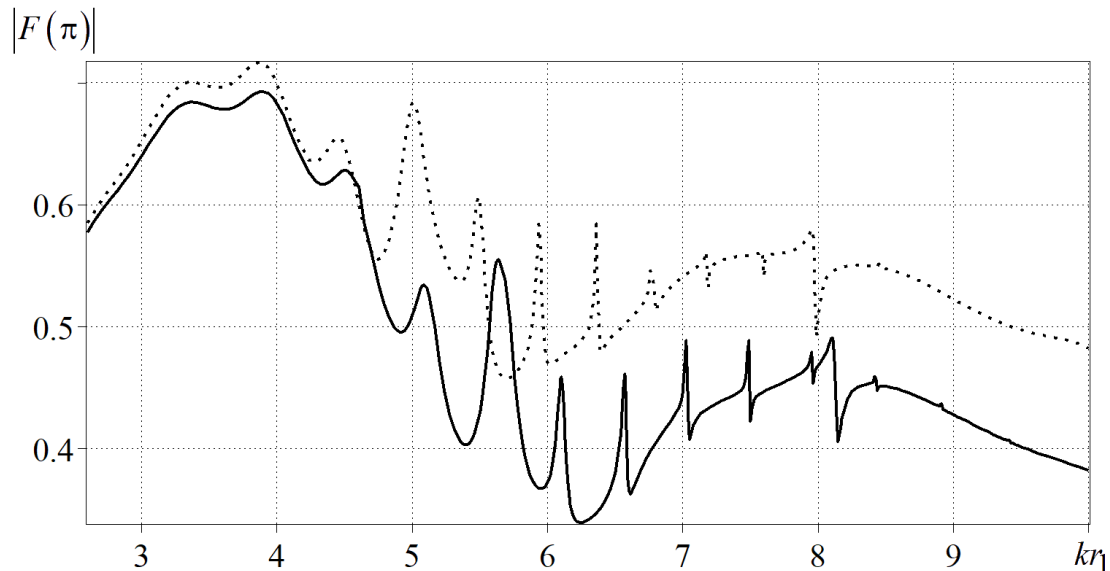


Рис. 3: Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием

Сравнение диаграмм направленности и частотных характеристик для тел с однородными и неоднородными покрытиями показывает, что неоднородность покрытия существенно влияет на дифракционную картину.

6. Заключение

На основе полученного аналитического решения задачи проведены численные расчеты, которые выявили возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью непрерывно-неоднородных покрытий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
2. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
3. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
4. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
5. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.
6. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 4. С. 189-199.
7. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19. № 1. С. 238-254.
8. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.
9. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 361-373.
10. Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270-281.
11. Толоконников Л. А., Белкин А. Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 346-360.

12. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
13. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
14. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
15. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
16. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
2. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].
3. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no 2, pp. 164-169.
4. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].
5. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54-62, [in Russian].
6. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 4, pp. 733-742.
7. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves on two elastic cylinders with non-uniform coatings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no 1, pp. 238-254, [in Russian].
8. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 9, pp. 276-289, [in Russian].
9. Tolokonnikov, L. A., Efimov D. Yu. 2020, "Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 361-373, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 2019, "Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no 1, pp. 270-281, [in Russian].
11. Tolokonnikov, L. A. Belkin, A. E. 2020, "Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 346-360, [in Russian].

12. Shenderov, E.L. 1972, "*Wave problems of underwater acoustics*", Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
13. Ivanov, E. A. 1968, "*Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
14. Nowacki, W. 1975, "*Teoria sprzystosci*", Mir, Moscow, 872 p., [in Russian].
15. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "*Spline function methods*", Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].
16. Lebedev, N. N. 1963, "*Special Functions and their Applications*", Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].

Получено 18.11.2020 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.