ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.548 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-353-369

Эндоморфизмы полуциклических n-групп

Н. А. Щучкин

Николай Алексеевич Щучкин — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).
e-mail: nikolaj_ shchuchkin@mail.ru

Аннотация

Одной из основных проблем для полуабелевых n-групп является нахождение $(n,2)$-почтиколец, которые изоморфны $(n,2)$-почтикольцам эндоморфизмов некоторых полуабелевых n-групп. Такие $(n,2)$-почтикольца найдены для полуциклических n-групп.

На аддитивной группе целых чисел Z строим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle$ с n-арной операцией $f_1(z_1,\ldots,z_n) = z_1+\ldots+z_n+l$, где l — любое целое число. Для не тождественного автоморфизма $\varphi(z) = -z$ на Z можно задать полуабелеву n-группу $\langle Z, f_2\rangle$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с n-арной операцией $f_2(z_1,\ldots,z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$. Любая бесконечная полуциклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, либо n-группе $\langle Z, f_2\rangle$ для нечетных n. В первом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$, а во втором случае — имеет тип $(\infty, -1, 0)$.

В Z выделим множество $P = \{m | ml \equiv l \pmod{n-1}\}$ и на нем определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1,\ldots,m_n) = m_1+\ldots+m_n$. Тогда алгебра $\langle P, h, \cdot\rangle$, где $\cdot$ — умножение целых чисел, будет $(n,2)$-кольцом. Доказано, что $\langle P, h, \cdot\rangle$ изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$.

В n-группе $\langle Z\times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу $(m_1,u_1)\diamond(m_2,u_2) = (m_1m_2, m_1u_2+u_1)$. Тогда $\langle Z\times Z, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-почтикольцом. Доказано, что $\langle Z\times Z, h, \diamond\rangle$ изоморфно $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty, -1, 0)$.

Доказано, что $(n,2)$-кольцо $\langle Z, f, *\rangle$, где $f(z_1,\ldots,z_n) = z_1+\ldots+z_n+1$ и $z_1 * z_2 = z_1z_2(n-1)+z_1+z_2$, изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы.

На аддитивной группе кольца классов вычетов Z_k определим n-группу $\langle Z_k, f_3\rangle$, где n-арная операция f_3 действует по правилу $f_3(z_1,\ldots,z_n) = z_1+mz_2+\ldots+m^{n-2}z_{n-1}+z_n+l$, $1 \le m < k$ и m взаимно прост с k. Кроме того, m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod k$ и показатель числа m по модулю k делит $n-1$. Любая конечная полуциклическая n-группа порядка k изоморфна n-группе $\langle Z_k, f_3\rangle$, где $l \mid$ НОД $(n-1,k)$ при $m = 1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$ при $m \ne 1$. Будем говорить, что такая n-группа имеет тип (k, m, l).

В n-группе $\langle P, h\rangle = \langle Z_k, f_3\rangle \times \langle Z_l, f_4\rangle$, где $f_4(z_1,\ldots,z_n) = z_1+rz_2+\ldots+r^{n-2}z_{n-1}+z_n$, r — остаток от деления m на l, определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу

$$(u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2) = (u_2s_1+u_1, v_2s_1+v_1)$$

где $s_1 \in Z_k$ и $s_1 - 1 = s_0 + v_1\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ при $m = 1$ и $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ при $m \ne 1$. Доказано, что алгебра $\langle P, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом при $m = 1$ и $(n,2)$-почтикольцом при $m \ne 1$, которое изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы типа $(k, 1, l)$ при $m = 1$ и $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа (k, m, l) при $m \ne 1$.

Доказано, что $(n,2)$-кольцо $\langle Z_k, f, *\rangle$, где $f(z_1,\ldots,z_n) = z_1+\ldots+z_n+1$ и $u_1 * u_2 = u_1\cdot u_2\cdot(n-1)+u_1+u_2$, изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов конечной циклической n-группы порядка k.

Ключевые слова: n-группа, $(n,2)$-кольцо, $(n,2)$-почтикольцо, эндоморфизм.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Н. А. Щучкин. Эндоморфизмы полуциклических n-групп // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 353–369.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.548 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-353-369

Endomorphisms of semicyclic n-groups

N. A. Shchuchkin

Nikolay Alekseevich Shchuchkin — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Socio-Pedagogical University (Volgograd).
e-mail: nikolaj_ shchuchkin@mail.ru

Abstract

One of the main problems for semiabelian n-groups is the finding of $(n,2)$-nearrings, which are isomorphic to $(n,2)$-nearrings of endomorphisms of certain semiabelian n-groups. Such almost $(n,2)$-nearrings are found for semicyclic n-groups.

On the additive group of integers Z we construct an abelian n-group $\langle Z, f_1\rangle$ with n-ary operation $f_1(z_1,\ldots,z_n) = z_1 + \ldots + z_n + l$, where l is any integer. For a nonidentical automorphism $\varphi(z) = -z$ on Z, we can specify semiabelian n-group $\langle Z, f_2\rangle$ for $n = 2k+1$, $k \in N$, with the n-ary operation $f_2(z_1,\ldots,z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$. Any infinite semicyclic n-group is isomorphic to either the n-group $\langle Z, f_1\rangle$, where $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, or the n-group $\langle Z, f_2\rangle$ for odd n. In the first case we will say that such n-group has type $(\infty, 1, l)$, and in the second case, it has type $(\infty, -1, 0)$.

In Z we select the set $P = \{m | ml \equiv l \pmod{n-1}\}$ and define an n-ary operation h by the rule $h(m_1,\ldots,m_n) = m_1 + \ldots + m_n$ on this set. Then the algebra $\langle P, h, \cdot\rangle$, where $\cdot$ is the multiplication of integers, is a $(n,2)$-ring. It is proved that $\langle P, h, \cdot\rangle$ is isomorphic to $(n,2)$-ring of endomorphisms of semicyclic n-group of type $(\infty, 1, l)$.

In the n-group $\langle Z \times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ we define the binary operation $\diamond$ by the rule $(m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2) = (m_1 m_2, m_1 u_2 + u_1)$. Then $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ is an $(n,2)$-nearringsg. It is proved that $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ is isomorphic to $(n,2)$-nearrings of endomorphisms of a semicyclic n-group of type $(\infty, -1, 0)$.

It is proved that $(n,2)$-ring $\langle Z, f, *\rangle$, where $f(z_1,\ldots,z_n) = z_1 + \ldots + z_n + 1$ and $z_1 * z_2 = z_1 z_2 (n-1) + z_1 + z_2$, is isomorphic to $(n,2)$-rings of endomorphisms of infinite cyclic n-group.

On additive group of the ring of residue classes of Z_k we define n-group $\langle Z_k, f_3\rangle$, where the n-ary operation f_3 operates according to the rule $f_3(z_1,\ldots,z_n) = z_1 + m z_2 + \ldots + m^{n-2} z_{n-1} + z_n + l$, $1 \le m < k$ and m is relatively prime to k. In addition, m satisfies the congruence $lm \equiv l \pmod{k}$ and multiplicative order of m modulo k divides $n-1$. Any finite semicyclic n-group of order k is isomorphic to n-group $\langle Z_k, f_3\rangle$, where $l \mid \gcd(n-1, k)$ for $m = 1$ and $l \mid \gcd(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$ for $m \ne 1$. We will say that such n-group has type (k, m, l).

In the n-group $\langle P, h\rangle = \langle Z_k, f_3\rangle \times \langle Z_l, f_4\rangle$, $f_4(z_1,\ldots,z_n) = z_1 + r z_2 + \ldots + r^{n-2} z_{n-1} + z_n$, where r is the remainder of dividing m by l, we define the binary operation $\diamond$ by the rule

$$(u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (u_2 s_1 + u_1, v_2 s_1 + v_1)$$

where $s_1 \in Z_k$, $s_1 - 1 = s_0 + v_1 \frac{k}{l}$, and s_0 is solution of congruence $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ for $m = 1$ and $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ for $m \neq 1$. It is proved that the algebra $\langle P, h, \diamond \rangle$ is $(n,2)$-ring for $m = 1$ and $(n,2)$-nearring for $m \neq 1$, which is isomorphic to $(n,2)$-ring of endomorphisms of abelian semicyclic n-group of type $(k,1,l)$ with $m = 1$ and $(n,2)$-nearring of endomorphisms of semicyclic n-groups of type (k,m,l) for $m \neq 1$.

It is proved that $(n,2)$-ring $\langle Z_k, f, * \rangle$, where $f(z_1,\ ldots, z_n) = z_1 +\ ldots + z_n + 1$ and $u_1 * u_2 = u_1\ cdotu_2\ cdot(n-1) + u_1 + u_2$, is isomorphic to $(n,2)$-ring of endomorphisms of finite cyclic n-group of order k.

Keywords: n-group, $(n,2)$-ring, $(n,2)$-nearring, endomorphism.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
N. A. Shchuchkin, 2021, "Endomorphisms of semicyclic n-groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 353–369.

1. Введение

В 60-тые и 70-тые годы прошлого века в теории универсальных алгебр активно изучались абелевы алгебры (смотри, например, [1], [2], [3]). Подробную информацию об абелевых алгебрах можно найти в [4], стр. 87. Для многих многообразий классических алгебр описаны все абелевы алгебры. Так, например, в многообразии групп абелевыми алгебрами будут в точности абелевы группы. Непосредственным обобщением понятия группы является определение n-группы для $n \geq 2$.

На непустом множестве G рассмотрим n-арную операцию f, где $n \geq 2$. Алгебру $\langle G, f \rangle$ называют n-группоидом. При действии n-арной операции f для сокращения записи используют стандартные обозначения

$$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+s}, x_{k+s+1}, \ldots, x_n) = f(x_1^k, \overset{(s)}{x}, x_{k+s+1}^n),$$

где $x_{k+1} = \ldots = x_{k+s} = x$ (x_i^j - пустой символ при $i > j$, также $\overset{(0)}{x}$ - пустой символ).

Если в n-группоиде $\langle G, f \rangle$ выполняется закон ассоциативности

$$\begin{aligned} &f(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}) = \\ &= f(x_1, f(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}), \ldots, x_{2n-1}) = \ldots \\ &\ldots = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})), \end{aligned} \tag{1}$$

то его называют n-полугруппой. Для удобства в n-полугруппе $\langle G, f \rangle$, используя закон (1), определяют новую $(k(n-1)+1)$-арную операцию $f_{(k)}$ по правилу

$$f_{(k)}(x_1^{k(n-1)+1}) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k \text{ раз}}(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}) \ldots), x_{(k-1)(n-1)+2}^{k(n-1)+1}).$$

Если в n-полугруппе $\langle G, f \rangle$ для любых элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ $(i = 1, \ldots, n)$ существует и притом единственный элемент z такой, что

$$f(x_1^{i-1}, z, x_{i+1}^n) = x_0, \tag{2}$$

то ее называют n-группой. При $n = 2$ имеем хорошо знакомое нам определение группы. Мы будем изучать n-группы для $n > 2$. Более подробную информацию о теории n-групп можно найти в работах [5], [6], [7].

Одним из обобщений абелевых групп являются полуабелевы n-группы. Если в n-группе верно тождество

$$f(x_1, x_2^{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2^{n-1}, x_1), \tag{3}$$

то ее называют полуабелевой. В многообразии n-групп именно полуабелевы n-группы и только они являются абелевыми алгебрами (теорема 3 из [3]).

Если в n-группе верны тождества

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то ее называют абелевой. Ясно, что любая абелева n-группа является полуабелевой, обратно неверно.

Известно, что на множестве E всех эндоморфизмов абелевой алгебры A сигнатуры Ω можно определить операции той же сигнатуры, вместе с которыми E образует абелеву алгебру. Кроме того, композиция эндоморфизмов в E связана с операциями из Ω законами дистрибутивности. Так построенная алгебра E является дистрибутивным кольцоидом над абелевой алгеброй (смотри [4], стр. 89). Например, дистрибутивные кольцоиды над абелевой группой совпадают с ассоциативными кольцами.

Рассмотрим обобщения определений почтикольца и ассоциативного кольца (напомним, алгебру $\langle A, +, \circ\rangle$ называют почтикольцом, если $\langle A, +\rangle$ — группа, не обязательно абелева, $\langle A, \circ\rangle$ — полугруппа и выполнен правый закон дистрибутивности). Алгебру $\langle A, g, \circ\rangle$ с n-арной операцией g и бинарной операцией $\circ$ называют $(n, 2)$-почтикольцом ($(n, 2)$-кольцом), если $\langle A, g\rangle$ является n-группой (абелевой n-группой), $\langle A, \circ\rangle$ является полугруппой и выполнен правый закон дистрибутивности

$$g(x_1, \ldots, x_n) \circ y = g(x_1 \circ y, \ldots, x_n \circ y) \tag{4}$$

(оба закона дистрибутивности: $y \circ g(x_1, \ldots, x_n) = g(y \circ x_1, \ldots, y \circ x_n)$ и (4)) [3], [8]. Множество E всех эндоморфизмов полуабелевой (абелевой) n-группы $\langle G, f\rangle$ является $(n, 2)$-почтикольцом ($(n, 2)$-кольцом) $\langle E, g, \circ\rangle$ с единицей, где n-арная операция g действует по правилу $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(x) = f(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$ $(x \in G)$, и $\circ$ — композиция эндоморфизмов (Следствие 9 (Следствие 10) из [3]).

У изоморфных полуабелевых (абелевых) n-групп $(n, 2)$-почтикольца ($(n, 2)$-кольца) эндоморфизмов изоморфны, более того, верна

Теорема 1. *Изоморфизм ψ полуабелевых (абелевых) n-групп $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ индуцирует изоморфизм τ $(n, 2)$-почтиколец ($(n, 2)$-колец) эндоморфизмов $\langle E_1, g_1, \circ\rangle$ и $\langle E_2, g_2, \circ\rangle$, который определяется по формуле $\tau : \alpha \to \psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi$.*

Доказательство. Проверяется непосредственно.

Обратное утверждение неверно, т.е. можно найти примеры неизоморфных полуабелевых n-групп с изоморфными $(n, 2)$-почтикольцами эндоморфизмов.

Как и в теории абелевых групп, одной из основных проблем для полуабелевых n-групп, касающихся $(n, 2)$-почтиколец эндоморфизмов, является нахождение $(n, 2)$-почтиколец, которые были бы изоморфны $(n, 2)$-почтикольцам эндоморфизмов некоторых полуабелевых n-групп. Для полуциклических n-групп такие $(n, 2)$-почтикольца найдены ниже.

2. Некоторые сведения из теории полуабелевых n-групп

Теория групп помогает изучать n-группы. Отметим частный случай основных результатов работ [9], [10], [11] для полуабелевых n-групп. На любой полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ для фиксированного элемента c определяем сложение

$$a + b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b),$$

здесь $\bar{c}$ — решение уравнения $f(\overset{(n-1)}{c}, x) = c$. Получим абелеву группу G с этим сложением, причем элемент c будет нулем в этой группе. Далее, для отображения $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$, которое является автоморфизмом группы G, и элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ верны равенства

$$\varphi(d) = d, \quad \varphi^{n-1}(x) = x \ \text{ для любого элемента } x \in G, \tag{5}$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d \tag{6}$$

для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$. Группу G в этом случае называют ретрактом n-группы $\langle G, f\rangle$ и обозначают $ret_c\langle G, f\rangle$. Известно, что любые два ретракта одной и той же n-группы изоморфны (смотри [10],[11]).

Верно и обратно: в любой аддитивной абелевой группе G для выбранных автоморфизма φ и элемента d с условиями (5) задается полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$, где f действует по правилу (6). В этом случае n-группу $\langle G, f\rangle$ называют (φ, d)-определенной на группе G и обозначают $der_{\varphi,d}G$.

Применяя теорему 3 из [12] для абелевых групп, получим результат: для абелевой группы G с автомрфизмом φ и элементом d, которые удовлетворяют (5), верно

$$\langle G, +\rangle = ret_0 der_{\varphi,d}\langle G, +\rangle. \tag{7}$$

Применяя теорему 4 из [12] для полуабелевых n-групп, получим результат: для полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ верно

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} ret_c\langle G, f\rangle \tag{8}$$

для любого элемента $c \in G$, где автомрфизм φ и элемент d группы $ret_c\langle G, f\rangle$ определены выше.

Известно (смотри, например, [13]), что для абелевых n-групп и только для них автоморфизм φ, построенный выше, является тождественным.

Следующий результат является следствием структурной теоремы о гомоморфизмах n-групп, которая доказана в [14].

Теорема 2. . *Отображение ψ является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ тогда и только тогда, когда отображение $\sigma = \psi - \psi(c)$ является эндоморфизмом ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$ и верны условия*

$$\sigma(d) = \varphi(\psi(c)) + \ldots + \varphi^{n-2}(\psi(c)) + \psi(c) + d; \qquad \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma. \tag{9}$$

Следствие 1. *Отображение ψ является эндоморфизмом абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ тогда и только тогда, когда отображение $\sigma = \psi - \psi(c)$ является эндоморфизмом ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$ и верны условия*

$$\sigma(d) = (n-1)\psi(c) + d. \tag{10}$$

3. Полуциклические n-группы

Если ретракт полуабелевой n-группы является циклической группой, то эту n-группу называют полуциклической [6]. Рассмотрим аддитивную группу целых чисел Z, в которой всего два автоморфизма: тождественный 1_Z и φ, где $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Строим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где l — любое целое число, она является примером бесконечной абелевой полуциклической n-группы (согласно равенству (7)). Операция f_1 действует по правилу: $f_1(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \ldots + z_n + l$. Для не тождественного автоморфизма φ бесконечной циклической группы Z равенство $\varphi^{n-1}(x) = x$ для любого целого числа x верно только

при нечетных n, причем элемент d может быть только нулем. Тогда на бесконечной циклической группе Z можно задать полуциклическую n-группу $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с n-арной операцией $f_2(z_1, \ldots, z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$.

Любая бесконечная полуциклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, либо n-группе $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для нечетных n (смотри [15]). В первом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$, а во втором случае — имеет тип $(\infty, -1, 0)$.

Если n-группа порождается одним элементом a, то ее называют (как и в группах) циклической с порождающим элементом a. Примером бесконечной циклической n-группы служит n-группа $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,1}Z$ с порождающим элементом 0. Любая другая бесконечная циклическая n-группа изоморфна этой n-группе (смотри, например, [15]).

Примером конечной полуциклической n-группы порядка k служит n-группа $\langle Z_k, f\rangle = der_{\varphi,l}Z_k$, (φ, l)-определенная на аддитивной группы кольца классов вычетов по модулю k. Если φ — тождественный автоморфизм, то n-арная операция f действует по правилу $f(z_1^n) = z_1 + \ldots + z_n + l$ и $\langle Z_k, f\rangle$ будет абелевой полуциклической n-группой. Среди таких абелевых полуциклических n-групп имеются циклические, в этом случае НОД $(l, n-1, k) = 1$. Если же φ отличен от тождественного автоморфизма, то $\varphi(z) = mz$ для любого элемента $z \in Z_k$, где $1 < m < k$ и m взаимно прост с k. Кроме того, число m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod k$ (согласно первому равенству из (5)) и показатель числа m по модулю k делит $n-1$ (согласно второму равенству из (5)). В этом случае n-арная операция f действует по правилу $f(z_1^n) = z_1 + mz_2 + \ldots + m^{n-2}z_{n-1} + z_n + l$.

Любая конечная абелева полуциклическая n-группа порядка k изоморфна абелевой полуциклической n-группе $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l \mid$ НОД $(n-1, k)$, в этом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(k, 1, l)$. Любая конечная циклическая n-группа порядка k изоморфна циклической n-группе $der_{1_{Z_k},1}Z_k$. Любая конечная не абелева полуциклическая n-группа порядка k изоморфна полуциклической n-группе $der_{\varphi,l}Z_k$, где $\varphi(z) = mz$ для любого элемента $z \in Z_k$, $1 < m < k$, m взаимно прост с k, число m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod k$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$, в этом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип (k, m, l) (смотри [15]).

4. $(n, 2)$-Почтикольца эндоморфизмов полуциклических n-групп

В следующей теореме найдено $(n, 2)$-кольцо, которое изоморфно $(n, 2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$.

Теорема 3. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n, 2)$-кольцо эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$. В Z выделим множество $P = \{m | ml \equiv l \pmod{n-1}\}$ и на этом множестве определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1^n) = m_1 + \ldots + m_n$. Тогда алгебра $\langle P, h, \cdot\rangle$, где $\cdot$ — умножение целых чисел, будет $(n, 2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$. Каждый эндоморфизм σ_m кольца целых чисел Z определяется однозначно образом единицы $\sigma_m(1) = m$, т.е. для любого целого числа z верно $\sigma_m(z) = mz$. В кольце целых чисел Z выделим подмножество $P = \{m | ml \equiv l \pmod{n-1}\}$. Для каждого эндоморфизма σ_m, где $m \in P$, находим u — частное от деления числа $l(m-1)$ на число $n-1$ и на аддитивной группе целых чисел Z определим отображение $\psi_m = \sigma_m + u$. Тогда $\psi_m(0) = u$ и отображение $\sigma_m = \psi_m - \psi_m(0)$ — эндоморфизм в Z, кроме того верны условия (9). Согласно теореме 2, отображение ψ_m является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$. По этой же теореме для каждого эндоморфизма ψ полуабелевой n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ отображение $\sigma = \psi - \psi(0)$ является

эндоморфизмом Z и, согласно первому равенству из (9), имеем $\sigma(l) = (n-1)\psi(0) + l$. Если эндоморфизм σ определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = m$, то $\psi_m(0) = u$ — частное от деления числа $l(m-1)$ на число $n-1$. Таким образом, между всеми эндоморфизмами E полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ и множеством P имеется взаимно однозначное соответствие $\tau : \psi_m \to m$.

На множестве P определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1^n) = m_1 + \ldots + m_n$. Докажем замкнутость этой операции на множестве P. Для любых целых чисел $m_1^n \in P$ из сравнений $m_i l \equiv l \pmod{n-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ получим $(m_1 + \ldots + m_n)l \equiv nl \pmod{n-1}$ или $(m_1 + \ldots + m_n)l \equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $h(m_1^n) \in P$.

Очевидно $\langle P, h\rangle$ является n-полугруппой. Выбираем $m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i-1}, \ldots, m_n \in P$, где индекс i равен одному из чисел $1, \ldots, n$. Находим $z = m_0 - (m_1 + \ldots + m_{i-1} + m_{i-1} + \ldots + m_n)$, очевидно $z \in P$. Тогда $h(m_1^{i-1}, z, m_{i+1}^n) = m_0$. Единственность нахождения числа z также очевидна. Таким образом, n-полугруппа $\langle P, h\rangle$ является n-группой, кроме того, она будет абелевой.

Докажем замкнутость множества P относительно умножения целых чисел. Пусть целые числа $m_1, m_2 \in P$. Обе части верного сравнения $m_2 l \equiv l \pmod{n-1}$ домножаем на m_1, получаем $m_1 m_2 l \equiv m_1 l \pmod{n-1}$, но $m_1 l \equiv l \pmod{n-1}$, значит, $m_1 m_2 l \equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $m_1 \cdot m_2 \in P$.

Выполнимость обоих законов дистрибутивности для n-арной операции h и умножения целых чисел очевидна. Итак, $\langle P, h, \cdot\rangle$ — $(n,2)$-кольцо.

Докажем, что биективное отображение τ является изоморфизмом $(n,2)$-колец $\langle E, g, \circ\rangle$ и $\langle P, h, \cdot\rangle$. Так как для любых эндоморфизмов $\psi_{m_1}, \ldots, \psi_{m_n} \in E$ и для любого целого числа z получим

$$g(\psi_{m_1}, \ldots, \psi_{m_n})(z) = f_1(\psi_{m_1}(z), \ldots, \psi_{m_n}(z)) = f_1(\sigma_{m_1}(z) + \psi_{m_1}(0), \ldots, \sigma_{m_n}(z) + \psi_{m_n}(0)) =$$

$$= f_1(m_1 z + \frac{l(m_1-1)}{n-1}, \ldots, m_n z + \frac{l(m_n-1)}{n-1}) = m_1 z + \frac{l(m_1-1)}{n-1} + \ldots + m_n z + \frac{l(m_n-1)}{n-1} + l =$$

$$= (m_1 + \ldots + m_n)z + \frac{l}{n-1}(m_1 + \ldots + m_n - n) + l = (m_1 + \ldots + m_n)z + \frac{l(m_1 + \ldots + m_n - 1)}{n-1},$$

то $\tau(g(\psi_{m_1}, \ldots, \psi_{m_n})) = h(\tau(\psi_{m_1}), \ldots, \tau(\psi_{m_n}))$. Далее, так как для любых эндоморфизмов $\psi_{m_1}, \psi_{m_2} \in E$ и для любого целого числа z получим

$$\psi_{m_1} \circ \psi_{m_2}(z) = \psi_{m_1}(\sigma_{m_2}(z) + \psi_{m_2}(0)) = \psi_{m_1}(m_2 z + \frac{l(m_2-1)}{n-1}) =$$

$$= \sigma_{m_1}(m_2 z + \frac{l(m_2-1)}{n-1}) + \psi_{m_1}(0) = m_1(m_2 z + \frac{l(m_2-1)}{n-1}) + \frac{l(m_1-1)}{n-1} =$$

$$= m_1 m_2 z + \frac{m_1 m_2 l - l m_1 + l m_1 - l}{n-1} = m_1 m_2 z + \frac{l(m_1 m_2 - 1)}{n-1},$$

то $\tau(\psi_{m_1} \circ \psi_{m_2}) = \tau(\psi_{m_1}) \cdot \tau(\psi_{m_2})$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 имеем

Следствие 2. *Построенное в теореме 3 $(n,2)$-кольцо $\langle P, h, \cdot\rangle$ изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$ и бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, следует изоморфизм $(n,2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 3. Следствие доказано.

Следствие 3. *Построенное в теореме 3* $(n,2)$*-кольцо* $\langle P,h,\cdot\rangle$ *при* $l=1$ *изоморфно* $(n,2)$*-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической* n*-группы.*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма бесконечной циклической n-группы и бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z,f_1\rangle = der_{1_Z,1}Z$ следует изоморфизм $(n,2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 3 при $l=1$. Следствие доказано.

В теореме 3 найденое $(n,2)$-кольцо $\langle P,h,\cdot\rangle$ определяется на подмножестве целых чисел Z. Можно ли построить такое же $(n,2)$-кольцо на всем множестве целых чисел (по аналогии как в группах кольцо эндоморфизмов кольца целых чисел изоморфно кольцу целых чисел)? На этот вопрос положительно отвечает следующая

Теорема 4. *На абелевой полуциклической* n*-группе* $\langle Z,f_3\rangle = der_{1_Z,v}Z$, *где* $v=$*НОД*$(n-1,l)$, $0\le l\le[\frac{n-1}{2}]$, *определим бинарную операцию* $*$ *по правилу* $z_1*z_2=z_1z_2t+z_1+z_2$, *где* $t=\frac{n-1}{v}$. *Тогда алгебра* $\langle Z,f_3,*\rangle$ *будет* $(n,2)$*-кольцом, которое изоморфно* $(n,2)$*-кольцу* $\langle P,h,\cdot\rangle$, *построенному в теореме 3.*

Доказательство. Проверим ассоциативность операции $*$. Если $z_1,z_2,z_3\in Z$, то

$$(z_1*z_2)*z_3=(z_1z_2t+z_1+z_2)*z_3=(z_1z_2t+z_1+z_2)z_3t+z_1z_2t+z_1+z_2+z_3=$$
$$=z_1z_2z_3t^2+z_1z_3t+z_2z_3t+z_1z_2t+z_1+z_2+z_3=$$
$$=z_1(z_2z_3t+z_3+z_2)t+z_1+z_2z_3t+z_2+z_3=z_1*(z_2z_3t+z_2+z_3)=z_1*(z_2*z_3).$$

Пусть $z_1,\ldots,z_n,z_{n+1}\in Z$. Проверим правую дистрибутивность операций f_3 и $*$.

$$f_3(z_1,\ldots,z_n)*z_{n+1}=(z_1+\ldots+z_n+v)z_{n+1}t+z_1+\ldots+z_n+v+z_{n+1}=$$
$$=z_1z_{n+1}t+\ldots+z_nz_{n+1}t+vz_{n+1}t+z_1+\ldots+z_n+v+z_{n+1}=$$
$$=z_1z_{n+1}t+\ldots+z_nz_{n+1}t+(n-1)z_{n+1}+z_1+\ldots+z_n+v+z_{n+1}=$$
$$=z_1z_{n+1}t+z_1+z_{n+1}+\ldots+z_nz_{n+1}t+z_n+z_{n+1}+v=f_3(z_1*z_{n+1},\ldots,z_n*z_{n+1}).$$

Аналогично проверяется левая дистрибутивность операций f_3 и $*$. Итак, $\langle Z,f_3,*\rangle$ — $(n,2)$-кольцо.

Докажем изоморфизм этого $(n,2)$-кольца и $(n,2)$-кольца $\langle P,h,\cdot\rangle$ из теоремы 3. Каждому целому числу z ставим в соответствие τ число $z\frac{n-1}{v}+1$. Так как $(z\frac{n-1}{v}+1)l\equiv l \pmod{n-1}$, то $z\frac{n-1}{v}+1\in P$, т.е. соответствие τ является отображением из Z в P. Если $\tau(z_1)=\tau(z_2)$ некоторых целых чисел z_1,z_2, то $z_1\frac{n-1}{v}+1=z_2\frac{n-1}{v}+1$, откуда получим $z_1=z_2$. Инъективность отображения τ доказана. Докажем сюръективность отображения τ. Пусть $m\in P$, тогда $ml\equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $(m-1)l=(n-1)q$ для некоторого целого числа q. Полагаем $l=l_1v$ и $n-1=n_1v$ для некоторых целых чисел l_1 и n_1. Тогда $(m-1)l_1=n_1q$ и l_1, n_1 взаимно просты. Значит, $m-1$ делится на n_1 и $\tau(\frac{m-1}{n_1})=m$. Итак, отображение τ биективно.

Для $z_1,\ldots,z_n\in Z$ получим

$$\tau(f_3(z_1,\ldots,z_n))=(z_1+\ldots+z_n+v)\frac{n-1}{v}+1=$$
$$=(z_1\frac{n-1}{v}+1)+\ldots+(z_n\frac{n-1}{v}+1)=h(\tau(z_1),\ldots,\tau(z_n)),$$

кроме того, для $z_1,z_2\in Z$ будем иметь

$$\tau(z_1*z_2)=\tau(z_1z_2\frac{n-1}{v}+z_1+z_2)=(z_1z_2\frac{n-1}{v}+z_1+z_2)\frac{n-1}{v}+1=$$
$$=(z_1\frac{n-1}{v}+1)(z_2\frac{n-1}{v}+1)=\tau(z_1)\tau(z_2).$$

Теорема доказана

Следствие 4. *Построенное в теореме 4 $(n,2)$-кольцо $\langle Z, f_3, *\rangle$ будет изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$.*

Доказательство. Достаточно учесть следствие 2 и теорему 4. Следствие доказано.

Следствие 5. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы. Тогда $(n,2)$-кольцо $\langle Z, f, *\rangle$, где $f(z_1^n) = z_1 + \ldots + z_n + 1$ и $z_1 * z_2 = z_1 z_2 (n-1) + z_1 + z_2$, будет изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Доказательство. Достаточно учесть следствие 3 и теорему 4 при $l = 1$. Следствие доказано.

В следующей теореме найдено $(n,2)$-почтикольцо, которое изоморфно $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число.

Теорема 5. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-почтикольцо эндоморфизмов бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Выбираем n-группу $\langle Z \times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ и на множестве $Z \times Z$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$(m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2) = (m_1 m_2, m_1 u_2 + u_1).$$

Тогда $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-почтикольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим полуабелеву n-группу $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Для каждого эндоморфизма σ_m кольца целых чисел Z, который определяется однозначно образом единицы $\sigma_m(1) = m$, и для каждого целого числа u определим отображение $\psi_{(m,u)}$ на множестве целых чисел Z по правилу $\psi_{(m,u)}(z) = \sigma_m(z) + u = mz + u$. Тогда $\psi_{(m,u)}(0) = u$ и для σ_m и $\psi_{(m,u)}(0)$ верны условия (9). Согласно теореме 2, отображение $\psi_{(m,u)}$ является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$. Далее, для любого эндоморфизма ψ полуабелевой n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, согласно теореме 2, определяем эндоморфизм σ аддитивной группы Z по правилу $\sigma = \psi + \psi(0)$. Но эндоморфизм σ определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = m$. Таким образом, между всеми эндоморфизмами E полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ и декартовым квадратом Z^2 имеется взаимно однозначное соответствие $\tau : \psi_{(m,u)} \to (m, u)$.

Выбираем n-группу $\langle Z \times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ и на множестве $Z \times Z$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу, указанному в теореме. Так как для любых трех пар целых чисел $(m_1, u_1), (m_2, u_2), (m_3, u_3)$ имеем

$$((m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2)) \diamond (m_3, u_3) = (m_1 m_2, m_1 u_2 + u_1) \diamond (m_3, u_3) =$$

$$= ((m_1 m_2) m_3, m_1 m_2 u_3 + m_1 u_2 + u_1) = (m_1 (m_2 m_3), m_1 (m_2 u_3 + u_2) + u_1) =$$

$$= (m_1, u_1) \diamond (m_2 m_3, m_2 u_3 + u_2) = (m_1, u_1) \diamond ((m_2, u_2) \diamond (m_3, u_3)),$$

то $\langle Z \times Z, \diamond\rangle$ является полугруппой.

Далее, для любых пар целых чисел $(m_1, u_1), \ldots, (m_n, u_n), (m_{n+1}, u_{n+1})$ имеем

$$h((m_1, u_1), \ldots, (m_n, u_n)) \diamond (m_{n+1}, u_{n+1}) = (f_2(m_1^n), f_2(u_1^n)) \diamond (m_{n+1}, u_{n+1}) =$$

$$= ((m_1 - m_2 + \ldots + m_{n-2} - m_{n-1} + m_n) m_{n+1}, (m_1 - m_2 + \ldots + m_{n-2} - m_{n-1} + m_n) u_{n+1} +$$

$$+ (u_1 - u_2 + \ldots + u_{n-2} - u_{n-1} + u_n)) =$$

$$= (m_1 m_{n+1} - m_2 m_{n+1} + \ldots + m_{n-2} m_{n+1} - m_{n-1} m_{n+1} + m_n m_{n+1},$$

$$m_1u_{n+1}+u_1-m_2u_{n+1}-u_2+\ldots+m_{n-2}u_{n+1}+u_{n-2}-m_{n-1}u_{n+1}-u_{n-1}+m_nu_{n+1}+u_n=$$
$$=h((m_1,u_1)\diamond(m_{n+1},u_{n+1}),\ldots,(m_n,u_n)\diamond(m_{n+1},u_{n+1})).$$

Итак, $\langle Z\times Z,h,\diamond\rangle$ — $(n,2)$-почтикольцо.

Докажем, что биективное отображение τ является изоморфизмом $(n,2)$-почтиколец $\langle E,g,\circ\rangle$ и $\langle Z\times Z,h,\diamond\rangle$. Так как для любого целого числа z и для любых эндоморфизмов $\psi_{(m_1,u_1)},\ldots,\psi_{(m_n,u_n)}\in E$ получим

$$g(\psi_{(m_1,u_1)},\ldots,\psi_{(m_n,u_n)})(z)=f_2(\psi_{(m_1,u_1)}(z),\ldots,\psi_{(m_n,u_n)}(z))=$$
$$=f_2(\sigma_{m_1}(z)+u_1,\ldots,\sigma_{m_n}(z)+u_n)=f_2(m_1z+u_1,\ldots,m_nz+u_n)=$$
$$=m_1z+u_1-m_2z-u_2+\ldots+m_{n-2}z+u_{n-2}-m_{n-1}z-u_{n-1}+m_nz+u_n=$$
$$=(m_1-m_2+\ldots+m_{n-2}-m_{n-1}+m_n)z+u_1-u_2+\ldots+u_{n-2}-u_{n-1}+u_n=$$
$$=f_2(m_1^n)z+f_2(u_1^n),$$

то $\tau(g(\psi_{(m_1,u_1)},\ldots,\psi_{(m_n,u_n)}))=h(\tau(\psi_{(m_1,u_1)}),\ldots,\tau(\psi_{(m_n,u_n)}))$. Далее, так как для любых эндоморфизмов $\psi_{(m_1,u_1)},\psi_{(m_2,u_2)}\in E$ и для любого целого числа z получим

$$\psi_{(m_1,u_1)}\circ\psi_{(m_2,u_2)}(z)=\psi_{(m_1,u_1)}(\sigma_{m_2}(z)+\psi_{(m_2,u_2)}(0))=\psi_{(m_1,u_1)}(m_2z+u_2)=$$
$$=\sigma_{m_1}(m_2z+u_2)+\psi_{(m_1,u_1)}(0)=m_1(m_2z+u_2)+u_1=m_1m_2z+m_1u_2+u_1,$$

то $\tau(\psi_{(m_1,u_1)}\circ\psi_{(m_2,u_2)})=\tau(\psi_{(m_1,u_1)})\diamond\tau(\psi_{(m_2,u_2)})$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 5 имеем

Следствие 6. *Построенное в теореме 5 $(n,2)$-почтикольцо $\langle Z\times Z,h,\diamond\rangle$ будет изоморфно $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty,-1,0)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма полуциклической n-группы типа $(\infty,-1,0)$ и бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z,f_2\rangle=der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z)=-z$ для любого целого числа z, следует изоморфизм $(n,2)$-почтиколец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 5. Следствие доказано.

Теперь приступим к изучению $(n,2)$-почтиколец эндоморфизмов конечных полуциклических n-групп. Сначала изучим $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов конечной не абелевой полуциклической n-группы.

Теорема 6. *Пусть $\langle E,g,\circ\rangle$ — $(n,2)$-почтикольцо эндоморфизмов полуциклической n-группы $der_{\varphi,l}Z_k$, где $\varphi(z)=mz$ для любого элемента $z\in Z_k$, $1<m<k$, m взаимно прост с k, число m удовлетворяет сравнению $lm\equiv l \pmod k$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l\mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1},k)$. В полуабелевой n-группе $\langle P,h\rangle=der_{\varphi,l}Z_k\times der_{\varphi,0}Z_l$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$(u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2)=(u_2s_1+u_1,v_2s_1+v_1)$$

где $s_1\in Z_k$ и $s_1-1=s_0+v_1\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x\equiv\frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Тогда алгебра $\langle P,h,\diamond\rangle$ будет $(n,2)$-почтикольцом, которое изоморфно $\langle E,g,\circ\rangle$.

Доказательство. Для каждого эндоморфизма $\psi\in E$ полагаем $\psi(0)=u$. Согласно теореме 2, отображение $\sigma=\psi-u$ является эндоморфизмом аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, который определяется однозначно образом единицы $\sigma(1)=s$, т.е. для любого целого числа $z\in Z_k$ верно $\sigma(z)\equiv sz \pmod k$. Кроме того, согласно первому равенству из (9), верно сравнение

$$sl\equiv(1+m+\ldots+m^{n-2})u+l \pmod k,$$

или, что то же самое, $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \equiv l(s-1) \pmod k$, а значит, целое число $s-1$ является решением сравнения $lx \equiv \frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \pmod k$. Так как $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$, то НОД $(l,k) = l$, а значит, $s-1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0 \le v < l$. Заметим, что второе равенство из (9) верно в силу коммутативности умножения в кольце Z_k.

Таким образом, мы имеем отображение $\tau : E \to P$, заданное по правилу $\tau(\psi) = (u,v)$, где $u = \psi(0)$, а v участвует в процессе вычисления образа единицы s при эндоморфизме $\psi - u$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, т.е. $s-1 = s_0+v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$.

Докажем инъективность отображения τ. Пусть $\tau(\psi_1) = \tau(\psi_2)$ для некоторых эндоморфизмов $\psi_1, \psi_2 \in E$ и $\tau(\psi_1) = (u_1, v_1)$, $\tau(\psi_2) = (u_2, v_2)$. Тогда $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$. Для каждого индекса $i = 1,2$ находим образ единицы s_i при эндоморфизме $\psi_i - u_i$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k: $s_i - 1 = s_{0i} + v_i\frac{k}{l}$, где s_{0i} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l}$ $\pmod{\frac{k}{l}}$. Так как $u_1 = u_2$, то $s_{01} = s_{02}$, а так как $v_1 = v_2$, то $s_1 = s_2$. Каждый эндоморфизм ψ_i $(i = 1,2)$ действует по правилу $\psi_i(z) = s_i z + u_i$ для любого целого числа $z \in Z_k$, значит, $\psi_1 = \psi_2$. Итак, τ — инъективное отображение.

Докажем суръективность отображения τ. Пусть $(u,v) \in Z_k \times Z_l$. Находим s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ и $0 \le s_0 < \frac{k}{l}$. Далее, находим $s-1 = s_0 + v\frac{k}{l}$ — решение сравнения $lx \equiv \frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \pmod k$. Эндоморфизм σ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, действующий по правилу $\sigma(z) = sz$ для любого целого числа $z \in Z_k$, удовлетворяет обоим условиям из (9), а значит, согласно теореме 2, отображение $\psi = \sigma - u$ является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $der_{\varphi,l}Z_k$ и $\tau(\psi) = (u,v)$. Доказана суръективность отображения τ.

Бинарная операция $\diamond$, определенная на множестве $Z_k \times Z_l$ в теореме, является ассоциативной, так как для любых пар (u_1,v_1), (u_2,v_2), (u_3,v_3) из $Z_k \times Z_l$ получим

$$((u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2))\diamond(u_3,v_3) = (u_2s_1+u_1, v_2s_1+v_1)\diamond(u_3,v_3) =$$
$$= (u_3s' + u_2s_1 + u_1, v_3s' + v_2s_1 + v_1),$$

где $s_1 - 1 = s_{01} + v_1\frac{k}{l}$, s_{01} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ и $s'-1 = s'_0 + (v_2s_1+v_1)\frac{k}{l}$, s'_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(u_2s_1+u_1)}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. С другой стороны,

$$(u_1,v_1)\diamond((u_2,v_2)\diamond(u_3,v_3)) = (u_1,v_1)\diamond(u_3s_2+u_2, v_3s_2+v_2) =$$
$$= ((u_3s_2+u_2)s_1+u_1, (v_3s_2+v_2)s_1+v_1) = (u_3s_1s_2+u_2s_1+u_1, v_3s_1s_2+v_2s_1+v_1),$$

где $s_2 - 1 = s_{02} + v_2\frac{k}{l}$, s_{02} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_2}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Так как $s_2 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_2}{l} + v_2\frac{k}{l} \pmod k$, то, домножая обе части этого сравнения на s_1 и складывая с верным сравнением $s_1 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} + v_1\frac{k}{l} \pmod k$, получим

$$s_1s_2 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(s_1u_2+u_1)}{l} + (s_1v_2+v_1)\frac{k}{l} \pmod k. \tag{11}$$

Но $s' - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(s_1u_2+u_1)}{l} + (s_1v_2+v_2)\frac{k}{l} \pmod k$, значит, $s' \equiv s_1s_2 \pmod k$. Из верности последнего сравнения следует $u_3s'+u_2s_1+u_1 \equiv u_3s_1s_2+u_2s_1+u_1 \pmod k$ и $s' \equiv s_1s_2 \pmod l$ (так как $l \mid k$), из верности последнего сравнения следует $v_3s'+v_2s_1+v_1 \equiv v_3s_1s_2+v_2s_1+v_1 \pmod l$. Мы доказали равенство

$$((u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2))\diamond(u_3,v_3) = (u_1,v_1)\diamond((u_2,v_2)\diamond(u_3,v_3)).$$

Итак, $\langle P, \diamond\rangle$ является полугруппой. Докажем, что для n-арной операции h и бинарной операции $\diamond$ выполнен правый закон дистрибутивности (4). Пусть $(u_i, v_i) \in Z_k \times Z_l$, $i = 1, \ldots, n, n+1$. Тогда

$$h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}) =$$

$$= (u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l, v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}) =$$

$$= (u_{n+1}s' + u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l, v_{n+1}s' + v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n),$$

где $s' - 1 = s'_0 + (v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n)\frac{k}{l}$, s'_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(u_1+mu_2+\ldots+m^{n-2}u_{n-1}+u_n+l)}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. С другой стороны,

$$h((u_1, v_1) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}), \ldots, (u_n, v_n) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1})) =$$

$$= h((u_{n+1}s_1 + u_1, v_{n+1}s_1 + v_1), \ldots, (u_{n+1}s_n + u_n, v_{n+1}s_n + v_n)) =$$

$$= (u_{n+1}s_1 + u_1 + m(u_{n+1}s_2 + u_2) + \ldots + m^{n-2}(u_{n+1}s_{n-1} + u_{n-1}) + u_{n+1}s_n + u_n + l,$$

$$v_{n+1}s_1 + v_1 + m(v_{n+1}s_2 + v_2) + \ldots + m^{n-2}(v_{n+1}s_{n-1} + v_{n-1}) + v_{n+1}s_n + v_n),$$

где $s_i - 1 = s_{0i} + v_i\frac{k}{l}$, s_{0i} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $i = 1, \ldots, n$. Верные n сравнений $s_i - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l} + v_i\frac{k}{l} \pmod{k}$ складываем, предварительно умножив каждое i-тое сравнение на m^{i-1} $(i = 1, \ldots, n)$, получим

$$s_1 + ms_2 + \ldots + m^{n-2}s_{n-1} + s_n - 1 - (1 + m + \ldots + m^{n-2}) \equiv$$

$$\equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}}{l}(u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n) + (v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n)\frac{k}{l} \pmod{k},$$

но $1 + m + \ldots + m^{n-2} = \frac{m^{n-1}-1}{m-1}$, тогда

$$s_1 + ms_2 + \ldots + m^{n-2}s_{n-1} + s_n - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}}{l}(u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l) +$$

$$+ (v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n)\frac{k}{l} \pmod{k}. \tag{12}$$

Заметим, что правая часть последнего сравнения также сравнима с целым числом $s' - 1$, значит, $s_1 + ms_2 + \ldots + m^{n-2}s_{n-1} + s_n - 1 \equiv s' \pmod{k}$. Обе части последнего сравнения домножаем на целое число u_{n+1}, а затем прибавляем к обеим частям сравнения сумму $u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l$, получим

$$u_{n+1}s_1 + u_1 + m(u_{n+1}s_2 + u_2) + \ldots + m^{n-2}(u_{n+1}s_{n-1} + u_{n-1}) + u_{n+1}s_n + u_n + l \equiv$$

$$\equiv u_{n+1}s' + u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l \pmod{k}.$$

Аналогично обе части последнего сравнения домножаем на целое число v_{n+1}, а затем прибавляем к обеим частям сравнения сумму $v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n$, получим

$$v_{n+1}s_1 + v_1 + m(v_{n+1}s_2 + v_2) + \ldots + m^{n-2}(v_{n+1}s_{n-1} + v_{n-1}) + v_{n+1}s_n + v_n \equiv$$

$$\equiv v_{n+1}s' + v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n \pmod{k}.$$

Из последних двух сравнений имеем верное равенство

$$h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}) =$$

$$= h((u_1, v_1) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}), \ldots, (u_n, v_n) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1})).$$

Итак, алгебра $\langle P, h, \diamond \rangle$ является $(n, 2)$-почтикольцом. Докажем, что биективное отображение τ сохраняет n-арную и бинарную операции. Пусть $\psi_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$, тогда для любого целого числа $z \in Z_k$ имеем $\psi_i(z) = s_i z + u_i$, где s_i — образ единицы при эндоморфизме $\psi_i - u_i$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k и $s_i - 1 = s_{0i} + v_i \frac{k}{l}$, s_{0i} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1} u_i}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0 \le v_i < l$. Тогда эндоморфизм $g(\psi_1^n)$ из E действует по правилу (для любого целого числа $z \in Z_k$)

$$g(\psi_1^n)(z) = \psi_1(z) + m\psi_2(z) + \ldots + m^{n-2}\psi_{n-1}(z) + \psi_n(z) + l =$$

$$= s_1 z + u_1 + m(s_2 z + u_2) + \ldots + m^{n-2}(s_{n-1} z + u_{n-1}) + s_n z + u_n + l =$$

$$= (s_1 + m s_2 + \ldots + m^{n-2} s_{n-1} + s_n) z + u_1 + m u_2 + \ldots + m^{n-2} u_{n-1} + u_n + l.$$

Так как верно сравнение (12), то

$$\tau(g(\psi_1^n)) = (u_1 + m u_2 + \ldots + m^{n-2} u_{n-1} + u_n + l, v_1 + m v_2 + \ldots + m^{n-2} v_{n-1} + v_n).$$

С другой стороны, согласно правилу действия n-арной операции h, получим

$$h(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n)) = h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) =$$

$$= (u_1 + m u_2 + \ldots + m^{n-2} u_{n-1} + u_n + l, v_1 + m v_2 + \ldots + m^{n-2} v_{n-1} + v_n).$$

Значит, $\tau(g(\psi_1^n)) = h(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n))$. Пусть теперь $\psi_1, \psi_2 \in E$. Эндоморфизм $\psi_1 \circ \psi_2$ из E действует по правилу (для любого целого числа $z \in Z_k$)

$$\psi_1 \circ \psi_2(z) = \psi_1(s_2 z + v_2) = s_1(s_2 z + u_2) + u_1 = s_1 s_2 z + s_1 u_2 + u_1.$$

Так как верно сравнение (11), то $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = (s_1 u_2 + u_1, s_1 v_2 + v_1)$. С другой стороны, согласно правилу действия бинарной операции $\diamond$, получим

$$\tau(\psi_1) \diamond \tau(\psi_2) = (u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (s_1 u_2 + u_1, s_1 v_2 + v_1).$$

Значит, $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = \tau(\psi_1) \diamond \tau(\psi_2)$. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 6 при построении n-группы $der_{\varphi,0} Z_l$ автоморфизм φ задается целым числом m, на которое накладываются условия, указанные в теореме 6. Но при определении n-группы $der_{\varphi,0} Z_l$ автоморфизм φ аддитивной группы кольца целых чисел Z_l должен задаваться целым числом m' таким, что $1 \le m' < l$, m' взаимно прост с l, показатель числа m' по модулю l делит $n - 1$. Поэтому m' выбирается как остаток от деления числа m на l. Понятно, что в этом случае $mz \equiv m'z \pmod{l}$ для любого целого числа $z \in Z_l$. Кроме того, m' взаимно прост с l, так как m взаимно прост с l в силу того, что $l \mid k$ и m взаимно прост с k. Далее, показатель числа m по модулю k делится на показатель этого числа по модулю l (так как $l \mid k$), значит, показатель числа m по модулю l делит $n - 1$, так как показатель этого числа по модулю k делит $n - 1$. Но показатели чисел m и m' по модулю l совпадают (так как $m \equiv m' \pmod{l}$), тогда показатель числа m' по модулю l делит $n - 1$. Таким образом, задания автоморфизма φ целыми числами m и m' при построении n-группы $der_{\varphi,0} Z_l$ совпадают.

Из теорем 1 и 6 имеем

Следствие 7. *Построенное в теореме 6 $(n, 2)$-почтикольцо $\langle P, h, \diamond \rangle$ будет изоморфно $(n, 2)$-почтикольцо эндоморфизмов не абелевой полуциклической n-группы типа (k, m, l).*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма не абелевой полуциклической n-группы типа (k, m, l) и полуциклической n-группы $der_{\varphi,l}Z_k$, где $\varphi(z) = mz$ для любого элемента $z \in Z_k$, $1 < m < k$, m взаимно прост с k, число m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod k$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$, следует изоморфизм $(n, 2)$-почтиколец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 6. Следствие доказано.

Теперь изучим $(n, 2)$-кольцо эндоморфизмов конечной абелевой полуциклической n-группы.

Теорема 7. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n, 2)$-кольцо эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l \mid$ НОД $(n-1, k)$. В абелевой n-группе $\langle P, h\rangle = der_{1_{Z_k},l}Z_k \times der_{1_{Z_l},0}Z_l$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$(u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (u_2 s_1 + u_1, v_2 s_1 + v_1),$$

где $s_1 \in Z_k$ и $s_1 - 1 = s_0 + v_1 \frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Тогда алгебра $\langle P, h, \diamond\rangle$ будет $(n, 2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 6, для каждого эндоморфизма $\psi \in E$ полагаем $\psi(0) = u$. Согласно следствию 1, отображение $\sigma = \psi - u$ является эндоморфизмом аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, который определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = s$, т.е. для любого целого числа $z \in Z_k$ верно $\sigma(z) \equiv sz \pmod k$. Кроме того, согласно равенству (10), верно сравнение $sl \equiv (n-1)u + l \pmod k$, или, что то же самое, $(n-1)u \equiv l(s-1) \pmod k$, а значит, целое число $s-1$ является решением сравнения $lx \equiv (n-1)u \pmod k$. Так как $l \mid$ НОД $(n-1, k)$, то НОД $(l, k) = l$, а значит, $s - 1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0 \le v < l$.

Таким образом, как и в доказательстве теоремы 6, мы имеем отображение $\tau : E \to P$, заданное по правилу $\tau(\psi) = (u, v)$, где $u = \psi(0)$, а v участвует в процессе вычисления образа единицы s при эндоморфизме $\psi - u$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, т.е. $s - 1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Инъективность и сюръективность отображения τ доказывается так же, как при доказательстве этих свойств отображения τ в теореме 6, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$.

Бинарная операция $\diamond$, определенная на множестве $Z_k \times Z_l$ в теореме, является ассоциативной, доказывается так же, как в теореме 6, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Итак, $\langle P, \diamond\rangle$ является полугруппой. Правый закон дистрибутивности (4) для n-арной операции h и бинарной операции $\diamond$ вновь доказывается как в теореме 6, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Докажем левый закон дистрибутивности для этих операций. Пусть $(u_i, v_i), (u, v) \in Z_k \times Z_l$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$(u, v) \diamond h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) = (u, v) \diamond (u_1 + \ldots + u_n + l, v_1 + \ldots + v_n) =$$
$$= ((u_1 + \ldots + u_n + l)s + u, (v_1 + \ldots + v_n)s + v),$$

где $s - 1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. С другой стороны,

$$h((u, v) \diamond (u_1, v_1), \ldots, (u, v) \diamond (u_n, v_n)) = h((u_1 s + u, v_1 s + v), \ldots, (u_n s + u, v_n s + v)) =$$

$$= (u_1 s + u + \ldots + u_n s + u + l, v_1 s + v + \ldots + v_n s + v) = ((u_1 + \ldots + u_n)s + nu + l, (v_1 + \ldots + v_n)s + nv),$$

но $(n-1)u + l \equiv sl \pmod k$ и $(n-1)v \equiv 0 \pmod l$ (так как $l \mid (n-1)$), значит, последнее выражение равно

$$((u_1 + \ldots + u_n + l)s + u, (v_1 + \ldots + v_n)s + v).$$

Тогда

$$(u, v) \diamond h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) = h((u, v) \diamond (u_1, v_1), \ldots, (u, v) \diamond (u_n, v_n)).$$

Итак, алгебра $\langle P, h, \diamond\rangle$ является $(n,2)$-кольцом. Сохранение n-арной и бинарной операции при биективном отображении τ доказывается так же, как в доказательстве теоремы 6, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 7 имеем

Следствие 8. *Построенное в теореме 7 $(n,2)$-кольцо $\langle P, h, \diamond\rangle$ будет изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы типа $(k,1,l)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма абелевой полуциклической n-группы типа $(k,1,l)$ и полуциклической n-группы $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l \mid$ НОД $(n-1,k)$, следует изоморфизм $(n,2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 7. Следствие доказано.

Изучим $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов конечной циклической n-группы.

Следствие 9. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов конечной циклической n-группы порядка k. В циклической n-группе $\langle Z_k, f\rangle = der_{1_{Z_k},1}Z_k$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$u_1 \diamond u_2 = u_1 \cdot u_2 \cdot (n-1) + u_1 + u_2,$$

где $\cdot$ — умножение по модулю k. Тогда алгебра $\langle Z_k, f, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.

Доказательство. Заметим, что при $l=1$ в теореме 7 n-группа $der_{1_{Z_l},1}Z_l$ будет одноэлементной, а операция $\diamond$ преобразуется в указанную операцию. Осталось применить теорему 7. Следствие доказано.

5. Заключение

В работе строились $(n,2)$-кольца и $(n,2)$-почтикольца, которые изоморфны $(n,2)$-кольцам и $(n,2)$-почтикольцам эндоморфизмов различных полуциклических n-групп. Получены следующие основные результаты:

1) Построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы (теорема 3).

2) Построено $(n,2)$-почтикольцо, изоморфное $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы (теорема 5).

3) Построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы (следствие 3).

4) Построено $(n,2)$-почтикольцо, изоморфное $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов конечной не абелевой полуциклической n-группы (теорема 6).

5) Построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов конечной абелевой полуциклической n-группы (теорема 7).

6) Построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов конечной циклической n-группы (следствие 9).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев И. Ш. О наименьшем многообразии симметрических алгебр // Алгебра и логика (семинар). 1966. Т. 5, №6. С. 5-14.

2. Чакани Б. Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр // Acta scient. math. 1964. Vol. 25. P. 202-208.

3. Glazek K., Gleichgewicht B. Abelian n-groups // Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru). 1977. Vol. 29. P. 321-329.

4. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 уч. М.: Наука, 1974. 158 с.

5. Русаков С. А. Алгебраические n-арные системы. Минск: Навука і техніка, 1992. 263 с.

6. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть 1. Гомель: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. 195 с.

7. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть 2. Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 323 с.

8. Crombez G. On (n,m)-rings // Abh. Math. Sem. Univ. 1972. Vol. 37. P. 180-199.

9. Post E. L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48. P. 208-350.

10. Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68 (110), № 3, С. 444-472.

11. Hosszu M. On the explicit form of n-group operacions // Publ. Math. 1963. Vol. 10. P. 88-92.

12. Щучкин Н. А. Прямое произведение n-арных групп // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, Выпуск 2. С. 101-121.

13. Glazek K., Michalski J., SierockiA I. On evaluation of some polyadic groups // Contributions to General Algebra. 1985. Vol. 3. P. 159-171 .

14. Khodabandeh H., Shahryari M. On the representations and automorphisms of polyadic groups // Commun. Algebra. 2012. Vol. 40. P. 2199-2212.

15. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. Т. 3 (54). С. 186-194.

REFERENCES

1. Aliev, I. S. 1966, “On minimal varieties of symmetric algebras”, Algebra and Logic (seminar). 5, №6. pp. 5-14. (In Russian)

2. Chakany, B. 1964, “Abelian properties of primitive classes of universal algebras”, Acta Scient. Math. , 25 : 3–4 (1964) pp. 202–208 (In Russian)

3. Glazek, K., Gleichgewicht, B. 1977, “Abelian n-groups”, Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru) 29 pp. 321-329.

4. Kurosh, A. G. 1974, “General algebra, Lections 1969-1970”, Nauka, Moscow, 158 pp. (In Russian)

5. Rusakov, S. F. 1992, “Algebraic n-ary systems”, Navuka i technika, Minsk, 264 pp. (In Russian)

6. Gal’mak, A. M. 2003, “n-Ary groups”, Part I, Gomel university, Gomel, 195 pp. (In Russian)

7. Gal’mak, A. M. 2007, “n-Ary groups”, Part 2, Publishing center of BSU, Minsk, 325 pp. (In Russian)

8. Crombez, G. 1972, “On (n,m)-rings”, Abh. Math. Sem. Univ. 37, pp. 180-199.

9. Post, E. L. 1940, “Polyadic groups”, Trans. Amer. Math. Soc. 48, pp. 208-350.

10. Gluskin, L. M. 1965, “Positional oeratives”, Math. collection, V.68 (110), No 3, pp. 444-472. (In Russian)

11. Hosszu, M. 1963, “On the explicit form of n-group operacions”, Publ. Math. 10, pp. 88-92.

12. Shchuchkin, N.A. 2014, “Direct product of n-ary groups”, Chebyshev’s collection 15, Issue 2, pp. 101-121. (In Russian)

13. Glazek, K., Michalski, J., SierockiA, I. 1985, “On evaluation of some polyadic groups”, Contributions to General Algebra 3, Proc. Conf., Vienna. pp. 159-171.

14. Khodabandeh, H., Shahryari, M. 2012, “On the representations and automorphisms of polyadic groups”, Commun. Algebra 40, pp. 2199-2212.

15. Shchuchkin, N.A. 2009, “Semicyclic n-ary groups”, Izv. Gomel State Univ. 3(54), pp. 186-194. (In Russian)

Получено 12.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.