ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.548 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-340-352

Гомоморфизмы из бесконечных полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу

Н. А. Щучкин

Николай Алексеевич Щучкин — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).
e-mail: nikolaj_ shchuchkin@mail.ru

Аннотация

Одной из основных проблем для полуабелевых n-групп является нахождение полуабелевых n-групп, которые изоморфны n-группам гомоморфизмов из некоторых n-групп в полуабелеву n-группу. Такие n-группы найдены для бесконечных полуциклических n-групп.

Известно, что множество $Hom(G,C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву (абелеву) n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g, заданной по правилу

$$g(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)), x \in G,$$

образует полуабелеву (абелеву) n-группу. Доказано, что изоморфизмы ψ_1 n-групп $\langle G, f_1\rangle$ и $\langle G', f_1'\rangle$ и ψ_2 полуабелевых n-групп $\langle C, f_2\rangle$ и $\langle C', f_2'\rangle$ индуцируют изоморфизм τ n-групп гомоморфизмов $\langle Hom(G,C), g\rangle$ и $\langle Hom(G',C'), g'\rangle$, который действует по правилу $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.

На аддитивной группе целых чисел Z строим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle$ с n-арной операцией $f_1(z_1,\dots,z_n) = z_1 + \dots + z_n + l$, где l — любое целое число. На Z строим также полуабелеву (не абелеву) n-группу $\langle Z, f_1'\rangle$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с n-арной операцией $f_1'(z_1,\dots,z_n) = z_1 - z_2 + \dots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$. Известно, что любая бесконечная полуциклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, либо n-группе $\langle Z, f_1'\rangle$ для нечетных n. В первом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$, а во втором случае — имеет тип $(\infty, -1, 0)$.

При изучении n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z,C), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ строим на n-группе $\langle C, f_2\rangle$ абелеву группу C с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, в которой имеются элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$. Выбираем множество P_1 таких упорядоченных пар (a, u) элементов из C, которые удовлетворяют равенству $la = d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u)$, где $\widetilde{\varphi_2}(x) = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_2^{n-2}(x), x \in C$ — эндоморфизм группы C, а для первой компоненты этих пар верно равенство $\varphi_2(a) = a$. На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу $h_1((a_1,u_1),\dots,(a_n,u_n)) = (a_1 + \dots + a_n, f_2(u_1,\dots,u_n))$. Доказано, что $\langle P_1, h_1\rangle$ — полуабелева n-группа, которая изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$. Следствием этого изоморфизма является изоморфизм n-группы $\langle P_1, h_1\rangle$ и n-группы гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

При изучении n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z,C), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1'\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ в абелевой группе C выбираем подгруппу $H = \{a \in C \mid \varphi_2(a) = -a\}$. На H определим полуабелеву n-группу $\langle H, h\rangle$, где h действует по правилу $h(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = a_1 + \varphi_2(a_2) + \dots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n$. Затем в

n-группе $\langle C, f_2\rangle$ выбираем подгруппу $\langle T, f_2\rangle$ всех идемпотентов, если $T \neq \emptyset$. Доказано, что для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1'\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T. Следствием этого изоморфизма является изоморфизм n-группы $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ и n-группы гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы типа $(\infty, -1, 0)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

Аналогичные факты получены при изучении n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из n-групп $\langle Z, f_1\rangle$ и $\langle Z, f_1'\rangle$ в абелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

Ключевые слова: n-группа, полуабелева n-группа, абелева n-группа, гомоморфизм.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Н. А. Щучкин. Гомоморфизмы из бесконечных полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 340–352.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.548 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-340-352

Homomorphisms from infinite semilcyclic n-groups to a semiabelian n-group

N. A. Shchuchkin

Nikolay Alekseevich Shchuchkin — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Socio-Pedagogical University (Volgograd).
e-mail: nikolaj_ shchuchkin@mail.ru

Abstract

One of the main problems for semiabelian n-groups is the finding of semiabelian n-groups, which are isomorphic to (n)-groups of homomorphisms from certain n-groups to a semiabelian n-group. Such n-groups are found for infinite semicyclic n-groups.

It is known that the set $Hom(G, C)$ of all homomorphisms from n-groups $\langle G, f_1\rangle$ to a semiabelian (abelian) n-group $\langle C, f_2\rangle$ with n-ary operation g given by the rule

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), x \in G,$$

forms a semiabelian (abelian) n-group. It is proved that the isomorphisms ψ_1 of n-groups $\langle G, f_1\rangle$ and $\langle G', f_1'\rangle$ and psi_2 of semiabelian n-groups $\langle C, f_2\rangle$ and $\langle C', f_2'\rangle$ induce an isomorphism τ of n-groups of homomorphisms $\langle Hom(G, C), g\rangle$ and $\langle Hom(G', C'), g'\rangle$, which acts according to the rule $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.

On the additive group of integers Z we construct an abelian n-group $\langle Z, f_1\rangle$ with n-ary operation $f_1(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \ldots + z_n + l$, where l is any integer. For a nonidentical automorphism $\varphi(z) = -z$ on Z, we can specify semiabelian n-group $\langle Z, f_2\rangle$ for $n = 2k + 1$, $k \in N$, with the n-ary operation $f_2(z_1, \ldots, z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$. Any infinite semicyclic n-group is isomorphic to either the n-group $\langle Z, f_1\rangle$, where $0 \leq l \leq [\frac{n-1}{2}]$, or the n-group $\langle Z, f_2\rangle$ for odd n. In the first case we will say that such n-group has type $(\infty, 1, l)$, and in the second case, it has type $(\infty, -1, 0)$.

In studying the n-groups of homomorphisms $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ from an infinite abelian semicyclic n-group $\langle Z, f_1\rangle$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ to a semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$ we construct on the n-group $\langle C, f_2\rangle$ an abelian group C with the addition operation $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, in

which there is an element $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ and an automorphism $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$. Choose a set P_1 of such ordered pairs (a, u) of elements from C that satisfy the equality $la = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u)$, where $\widetilde{\varphi}_2(x) = x + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(x), x \in C$ is an endomorphism of the group C, and for the first component of these pairs the equality is true $\varphi_2(a) = a$. On this set, we define a n-ary operation h_1 by the rule $h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n))$. It is proved that $\langle P_1, h_1\rangle$ is a semiabelian n-group, which is isomorphic to the n-group of homomorphisms from an infinite abelian semicyclic n-group $\langle Z, f_1\rangle$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ to an n-group $\langle C, f_2\rangle$. The consequence of this isomorphism is an isomorphism of n-groups of $\langle P_1, h_1\rangle$ and n-groups of homomorphisms from an infinite abelian semicyclic n-group of type $(\infty, 1, l)$ to a semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$.

When studying the n-group of homomorphisms $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ from the infinite semicyclic n-group $\langle Z, f_1'\rangle$ to the semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$ in the abelian group C choose the subgroup $H = \{a \in C \mid \varphi_2(a) = -a\}$. On H we define a semiabelian n-group $\langle H, h\rangle$, where h acts according to the rule $h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = a_1 + \varphi_2(a_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n$. Then in the n-group $\langle C, f_2\rangle$ we select the subgroup $\langle T, f_2\rangle$ of all idempotents, if $T \neq \emptyset$. It is proved that for an odd number $n > 1$ a direct product of semiabelian n-groups $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ is isomorphic to n-group of homomorphisms from infinite semicyclic n-groups of $\langle Z, f_1'\rangle$ to a semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$ with a non empty set of idempotents T. The consequence of this isomorphism is the isomorphism of the n-group $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ and n-groups of homomorphisms from an infinite semicyclic n-group of type $(\infty, -1, 0)$ to the semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$.

Similar facts were obtained when studying the n-group of homomorphisms $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ from n-groups $\langle Z, f_1\rangle$ and $\langle Z, f_1'\rangle$ to an abelian n-group $\langle C, f_2\rangle$.

Keywords: n-group, semiabelian $(n, 2)$-group, abelian $(n, 2)$-group, homomorphism.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
N. A. Shchuchkin, 2021, "Homomorphisms from infinite semilcyclic n-groups to a semiabelian n-group", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 340–352.

1. Введение

Одним из основных объектов изучения в теории универсальных алгебр в 60-тых и 70-тых годах прошлого века была абелева алгебра (смотри, например, [1], [2], [3]), это такая универсальная алгебра A сигнатуры Ω (смотри [4], стр. 87), для которой гомоморфизмы в A любой алгебры B этой же сигнатуры суммируемы, т.е. а) для любых гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : B \to A$ и любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geq 1$, отображение $\omega(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, заданное по правилу

$$\omega(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(b) = \omega(\varphi_1(b), \ldots, \varphi_n(b)), \quad b \in B,$$

является гомоморфизмом; б) для любого $\omega \in \Omega_0$, где 0_ω — выделенный операцией ω элемент алгебры A, отображение $(\varphi_\omega) : B \to A$, заданное по правилу $\varphi_\omega(b) = 0_\omega, \quad b \in B$, является гомоморфизмом. Известно (смотри там же в [4]), что алгебра A сигнатуры Ω является абелевой тогда и только тогда, когда а) для любых $\omega \in \Omega_n$, $\omega' \in \Omega_m$, $n, m \geq 1$, в A верно тождество

$$\omega'(\omega(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, \omega(x_{m1}, \ldots, x_{mn})) = \omega(\omega'(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, \omega'(x_{1n}, \ldots, x_{mn}));$$

б) все $\omega \in \Omega_0$ отмечают в A один и тот же элемент, который является подалгеброй в A.

Для многих многообразий классических алгебр описаны все абелевы алгебры. Так, например, в многообразии групп абелевыми алгебрами будут в точности абелевы группы. Непосредственным обобщением понятия группы является определение n-группы ($n \geq 2$). В многообразии n-групп абелевыми алгебрами будут в точности полуабелевы группы (теорема 3, [3]).

Алгебру $\langle G, f\rangle$ называют n-группой, если выполняется закон ассоциативности

$$f(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}) =$$

$$= f(x_1, f(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}), \ldots, x_{2n-1}) = \ldots$$

$$\ldots = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})),$$

и для любых элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ из G $(i = 1, \ldots, n)$ существует и притом единственный элемент z такой, что верно равенство $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_0$. При $n = 2$ получим определение группы. Мы будем изучать n-группы для $n > 2$. Более подробную информацию о теории n-групп можно найти в работах [5], [6], [7].

При действии n-арной операции f для сокращения записи используют стандартные обозначения $f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+s}, x_{k+s+1}, \ldots, x_n) = f(x_1^k, \overset{(s)}{x}, x_{k+s+1}^n)$, где $x_{k+1} = \ldots = x_{k+s} = x$ (x_i^j - пустой символ при $i > j$, также $\overset{(0)}{x}$ - пустой символ).

Обобщением абелевой группы являются полуабелева и абелева n-группы. Если в n-группе верно тождество $f(x_1, x_2^{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2^{n-1}, x_1)$ $(f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma \in S_n)$, то ее называют полуабелевой (абелевой). Ясно, что любая абелева n-группа является полуабелевой, обратно неверно.

Известно, что гомоморфизмы любой группы в абелеву группу образуют абелеву группу по сложению гомоморфизмов. В общем случае аналогичным свойством обладают абелевы алгебры произвольной сигнатуры (смотри, например, [4], стр. 87). В [3] построена n-группа гомоморфизмов из произвольной n-группы в полуабелеву n-группу.

Рассмотрим множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ и на этом множестве определим n-арную операцию g по правилу

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), x \in G. \tag{1}$$

Отметим, что множество $Hom(G, C)$ может быть пустым, в отличие от множества всех гомоморфизмов из группы в абелеву группу, в этом множестве, по крайней мере, есть нулевой гомоморфизм. Дальше будем считать, что если рассматривается множество всех гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу, то это множество не пусто. Множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву (абелеву) n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g образует полуабелеву (абелеву) n-группу [3].

У изоморфных n-групп и изоморфных полуабелевых n-групп n-группы гомоморфизмов также изоморфны, более того, верна

Теорема 1. *Изоморфизмы ψ_1 n-групп $\langle G, f_1\rangle$ и $\langle G', f_1'\rangle$ и ψ_2 полуабелевых n-групп $\langle C, f_2\rangle$ и $\langle C', f_2'\rangle$ индуцируют изоморфизм τ n-групп гомоморфизмов $\langle Hom(G, C), g\rangle$ и $\langle Hom(G', C'), g'\rangle$, который действует по правилу $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.*

Доказательство. Докажем вначале, что $\tau(\alpha) \in Hom(G', C')$. Действительно, если элементы $x_1, \ldots, x_n \in G'$, то $\tau(\alpha)(f_1'(x_1, \ldots, x_n)) = \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(f_1'(x_1, \ldots, x_n)) =$

$$= \psi_2 \circ \alpha(\psi_1^{-1}(f_1'(x_1, \ldots, x_n))) = \psi_2(\alpha(f_1(\psi_1^{-1}(x_1), \ldots, \psi_1^{-1}(x_n)))) =$$

$$= \psi_2(f_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_1)), \ldots, \alpha(\psi_1^{-1}(x_n)))) = f_2'(\psi_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_1))), \ldots, \psi_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_n)))) =$$

$$= f_2'(\psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(x_1), \ldots, \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(x_n)).$$

Докажем теперь инъективность отображения τ. Пусть для некоторых гомоморфизмов α_1 и α_2 из $Hom(G, C)$ верно равенство $\tau(\alpha_1) = \tau(\alpha_2)$. Тогда для любого элемента $x \in G$ полагаем $y = \psi_1(x)$. Из выше указанного верного равенства получаем $\psi_2 \circ \alpha_1 \circ \psi_1^{-1}(y) = \psi_2 \circ \alpha_2 \circ \psi_1^{-1}(y)$ или

$\psi_2 \circ \alpha_1(x) = \psi_2 \circ \alpha_2(x)$. Последнее равенство домножаем слева на ψ_2^{-1} и получаем $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$. Тем самым доказана инъективность отображения τ.

Настало время доказать сюръективность отображения τ. Пусть $\beta \in Hom(G', C')$. Обозначим $\alpha = \psi_2^{-1} \circ \beta \circ \psi_1$, причем $\alpha \in Hom(G, C)$. Тогда $\tau(\alpha) = \tau(\psi_2^{-1} \circ \beta \circ \psi_1) = \psi_2 \circ \psi_2^{-1} \circ \beta \circ \psi_1 \circ \psi_1^{-1} = \beta$. Итак, отображение τ является биективным.

Осталось проверить сохранение действия n-арной операции при отображении τ. Для любых гомоморфизмов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $Hom(G, C)$ и любого элемента $x \in G'$ имеем

$$\tau(g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))(x) = \psi_2 \circ g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \circ \psi_1^{-1}(x) = \psi_2(f_2(\alpha_1(\psi_1^{-1}(x)), \ldots, \alpha_n(\psi_1^{-1}(x)))) =$$

$$= f_2'(\psi_2(\alpha_1(\psi_1^{-1}(x))), \ldots, \psi_2(\alpha_n(\psi_1^{-1}(x)))) = f_2'(\psi_2 \circ \alpha_1 \circ \psi_1^{-1}(x), \ldots, \psi_2 \circ \alpha_n \circ \psi_1^{-1}(x)) =$$

$$= f_2'(\tau(\alpha_1)(x), \ldots, \tau(\alpha_n)(x)) = g'(\tau(\alpha_1), \ldots, \tau(\alpha_n))(x).$$

Теорема доказана.

Одной из основных проблем, касающихся n-групп гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу, является отыскание полуабелевой n-группы, которая была бы изоморфна n-группе гомоморфизмов из некоторой известной n-группы в полуабелеву n-группу. Если такая n-группа будет найдена, то можно сказать, что удалось описать n-группу гомоморфизмов из некоторой известной n-группы в полуабелеву n-группу. Ниже приведено описание n-группы гомоморфизмов из бесконечной (абелевой и не абелевой) полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу.

2. Некоторые сведения из теории полуабелевых n-групп

Имеется тесная связь между группами и n-группами, поэтому хорошо развитая теория групп помогает изучать n-группы. Отметим частный случай основных результатов работ [8], [9], [10] для полуабелевых n-групп. На любой полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ для фиксированного элемента c определяем сложение $a + b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, здесь $\bar{c}$ — решение уравнения $f(\overset{(n-1)}{c}, x) = c$. Получим абелеву группу G с этим сложением, где элемент c будет нулем. Кроме того, для отображения $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$, которое является автоморфизмом группы G, и элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ верны равенства

$$\varphi(d) = d, \quad \varphi^{n-1}(x) = x \quad \text{для любого элемента } x \in G, \tag{2}$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d \tag{3}$$

для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$. Группу G в этом случае называют ретрактом n-группы $\langle G, f\rangle$ и обозначают $ret_c\langle G, f\rangle$. Известно, что любые два ретракта одной и той же n-группы изоморфны (смотри [9],[10]).

Верно и обратно: в любой аддитивной абелевой группе G для выбранных автоморфизма φ и элемента d с условиями (2) задается полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$, где f действует по правилу (3). В этом случае n-группу $\langle G, f\rangle$ называют (φ, d)-определенной на группе G и обозначают $der_{\varphi,d}G$.

Применяя теорему 3 из [11] для абелевых групп, получим результат: для абелевой группы G с автоморфизмом φ и элементом d, которые удовлетворяют (2), верно

$$G = ret_0 der_{\varphi,d}G. \tag{4}$$

Применяя теорему 4 из [11] для полуабелевых n-групп, получим результат: для полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ верно

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} ret_c\langle G, f\rangle \tag{5}$$

для любого элемента $c \in G$, где автомрфизм φ и элемент d группы $ret_c\langle G, f\rangle$ определены выше.

Известно (смотри, например, [12]), что для абелевых n-групп и только для них автоморфизм φ, построенный выше, является тождественным.

Следующий результат является следствием структурной теоремы о гомоморфизмах n-групп, которая доказана в [13].

Теорема 2. *Пусть $\langle G, f_1\rangle = der_{\varphi_1,d_1}G$ — n-группа и $\langle C, f_2\rangle = der_{\varphi_2,d_2}C$ — полуабелева n-группа. Отображение ψ из G в C является гомоморфизмом из $\langle G, f_1\rangle$ в $\langle C, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда отображение $\sigma = \psi - \psi(c_1)$, где c_1 — нуль группы G, является гомоморфизмом из группы G в группу C и верны условия*

$$\sigma(d_1) = \varphi_2(\psi(c_1)) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(\psi(c_1)) + \psi(c_1) + d_2; \qquad \sigma \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma. \tag{6}$$

3. Бесконечные полуциклические n-группы

n-Группу называют полуциклической, если ее ретракт является циклической группой [6]. Рассмотрим аддитивную группу целых чисел Z, в которой всего два автоморфизма: тождественный 1_Z и φ, где $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Строим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где l — любое целое число, она является примером бесконечной абелевой полуциклической n-группы (согласно равенству (4)). Операция f_1 действует по правилу: $f_1(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \ldots + z_n + l$. Для не тождественного автоморфизма φ бесконечной циклической группы Z равенство $\varphi^{n-1}(x) = x$ для любого целого числа x верно только при нечетных n, причем элемент d может быть только нулем. Тогда на бесконечной циклической группе Z можно задать полуциклическую n-группу $\langle Z, f_1'\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с n-арной операцией $f_1'(z_1, \ldots, z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$, она является примером бесконечной не абелевой полуциклической n-группы.

Любая бесконечная абелева (не абелева) полуциклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$ ($\langle Z, f_1'\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для нечетных n). В этом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$ $((\infty, -1, 0))$ (смотри [14]).

Если n-группа порождается одним элементом a, то ее называют (как и в группах) циклической с порождающим элементом a. Примером бесконечной циклической n-группы служит n-группа $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,1}Z$ с порождающим элементом 0. Любая другая бесконечная циклическая n-группа изоморфна этой n-группе (смотри, например, [14]).

4. n-Группа гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу

Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$. На n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, нулем этой группы будет элемент c, причем, имеются элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C, которые удовлетворяют равенствам

$$f_2(x_1^n) = x_1 + \varphi_2(x_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(x_{n-1}) + x_n + d_2,\ x_1, \ldots, x_n \in C; \tag{7}$$

$$\varphi_2(d_2) = d_2; \tag{8}$$

$$\varphi_2^{n-1}(x) = x, \quad x \in C. \tag{9}$$

В группе C для фиксированного целого числа l выделим множество P_1 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют равенству

$$la = d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u), \tag{10}$$

где $\widetilde{\varphi_2}(x) = x+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_2^{n-2}(x), x \in C$ — эндоморфизм группы C, а для первой компоненты этих пар верно равенство

$$\varphi_2(a) = a. \tag{11}$$

На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу

$$h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n)).$$

Проверим замкнутость этой операции на множестве P_1. Пусть $(a_i, u_i) \in P_1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда с учетом очевидного равенства $\varphi_2(d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u)) = d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u)$, используя равенства (8) и (7), получаем $l(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = la_1 + la_2 + \ldots + la_{n-1} + la_n =$

$$= d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_1) + d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_2) + \ldots + d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_{n-1}) + d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_n) =$$

$$= d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_1) + \varphi_2(d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_2)) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_{n-1})) + d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_n) + d_2 - d_2 =$$

$$= f_2(d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_1), d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_2), \ldots, d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_{n-1}), d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_n)) - d_2.$$

Но для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, n-1, n$ верно равенство $d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u_i) = f_2(\overset{(n-1)}{u_i}, c)$. Продолжая последнюю цепочку равенств с использованием признака полуабелевости n-группы (теорема 2.6.13 из [6]), получаем $l(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) =$

$$= f_2(f_2(\overset{(n-1)}{u_1}, c), f_2(\overset{(n-1)}{u_2}, c), \ldots, f_2(\overset{(n-1)}{u_{n-1}}, c), f_2(\overset{(n-1)}{u_n}, c)) - d_2 =$$

$$= f_2(f_2(\overset{(n-1)}{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n}), f_2(\overset{(n)}{c})) - d_2 =$$

$$= f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n) + \varphi_2(f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)) + \ldots$$

$$\ldots + \varphi_2^{n-2}(f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)) + d_2 + d_2 - d_2 =$$

$$= d_2 + \widetilde{\varphi_2}(f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)).$$

Доказана замкнутость операции h_1 на множестве P_1.

Теперь можно утверждать, что $\langle P_1, h_1\rangle$ — полуабелева n-группа.

Теорема 3. *Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Доказательство. По теореме 2, каждое отображение $\psi : Z \to C$ является гомоморфизмом из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x (здесь $+$ — сложение в группе C) и выполнены условия

$$\sigma(l) = u + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u) + d_2, \tag{12}$$

$$\sigma(x) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \text{для всех целых чисел } x. \tag{13}$$

Каждый гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = a$ и действует по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$ (смотри,

например, [15], стр. 212). Тогда из равенства (12) следует $la = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u)$, а из равенства (13) при $x = 1$ получим равенство (11). Таким образом, каждому гомоморфизму ψ из n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$ однозначно соответствует упорядоченная пара элементов (a, u) из P_1. Обозначим это соответствие (которое будет отображением) через τ. Верно и обратно, для каждой пары элементов (a, u) из P_1 однозначно определяется гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C, действующий по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$, из равенства (10) следует равенство (12), используя равенство (11), для любого целого числа x получим $\varphi_2(\sigma(x)) = \varphi_2(xa) = x\varphi_2(a) = xa = \sigma(x)$, т.е. верно равенство (13). Таким образом, каждая пара элементов (a, u) из P_1 однозначно определяет гомоморфизм ψ из n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$, действующий по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$, $x \in Z$. Итак, τ — биективное отображение из n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ в n-группу $\langle P_1, h_1\rangle$.

Докажем сохранение n-арной операции при отображении τ. Выбираем $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Hom$ (Z, C) и $\tau(\psi_i) = (a_i, u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\psi_i(x) = \sigma_i(x) + u_i$ для любого целого числа x, $\sigma_i(1) = a_i$. Действуем n-арной операцией g на гомоморфизмы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ по правилу (1) (здесь $x \in Z$), а затем используем (7) и (13):

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = f_2(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = f_2(\sigma_1(x) + u_1, \ldots, \sigma_n(x) + u_n) =$$

$$= \sigma_1(x) + u_1 + \varphi_2(\sigma_2(x) + u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(\sigma_{n-1}(x) + u_{n-1}) + \sigma_n(x) + u_n + d_2 =$$

$$= \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \ldots + \sigma_{n-1}(x) + \sigma_n(x) + u_1 + \varphi_2(u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) + u_n + d_2.$$

Обозначим $\sigma_g = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ и $u_g = u_1 + \varphi_2(u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) + u_n + d_2 = f_2(u_1, \ldots, u_n)$. С учетом этих обозначений гомоморфизм $g(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ действует по правилу

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = \sigma_g(x) + u_g \quad \text{для любого целого числа } x, \tag{14}$$

причем гомоморфизм σ_g и элемент u_g удовлетворяют равенствам (12), (13).

С учетом правила (14) и вычисления $\sigma_g(1) = (\sigma_1 + \ldots + \sigma_n)(1) = \sigma_1(1) + \ldots + \sigma_n(1) = a_1 + \ldots + a_n$, получаем $\tau(g(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n)) = h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = h_1(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n))$.

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 имеем

Следствие 1. *Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Для бесконечных циклических n-групп верно

Следствие 2. *Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$, построенная при $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Теперь рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, A), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l}Z$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$. На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ также строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, причем, имеется элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$, а автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, кроме того, верно равенство

$$f_2(x_1^n) = x_1 + \ldots + x_n + d_2,\ x_1, \ldots, x_n \in A; \tag{15}$$

В группе A для фиксированного целого числа l выделим множество R_1 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют равенству

$$la = d_2 + (n-1)u. \tag{16}$$

На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу

$$h_1((a_1,u_1),\ldots,(a_n,u_n)) = (a_1+\ldots+a_n, u_1+\ldots+u_n+d_2).$$

Так как каждая абелева n-группа является полуабелевой, то, согласно выше приведенным рассуждениям перед теоремой 3, можно утверждать, что $\langle R_1,h_1\rangle$ — абелева n-группа. Из теоремы 3 получаем

Следствие 3. *Абелева n-группа $\langle R_1,h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z,f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ $(0\le l\le \frac{n-1}{2})$ в абелеву n-группу $\langle A,f_2\rangle$.*

Из теоремы 1 и следствия 3 имеем

Следствие 4. *Абелева n-группа $\langle R_1,h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G,f\rangle$ типа $(\infty,1,l)$ в абелеву n-группу $\langle A,f_2\rangle$.*

Если при построении абелевой n-группы $\langle R,h_1\rangle$ положить $l=1$, то из следствия 3 получаем

Следствие 5. *Абелева n-группа $\langle R_1,h_1\rangle$, построенная для $l=1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов $\langle Hom(G,A),g\rangle$ из бесконечной циклической n-группы $\langle G,f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle A,f_2\rangle$.*

5. n-Группа гомоморфизмов из бесконечной не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу

Пусть n — нечетное число и $n>1$. Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z,C),g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z,f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x)=-x, x\in Z$) в полуабелеву n-группу $\langle C,f_2\rangle$.

На n-группе $\langle C,f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C,f_2\rangle$ с операцией сложение $a+b = f_2(a,\overset{(n-3)}{c},\bar{c},b)$. Элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c,x,\overset{(n-3)}{c},\bar{c})$ группы C удовлетворяют равенствам (7), (8) и (9).

В группе C выделим множество H таких элементов a, для которых верно равенство $\varphi_2(a)=-a$, т.е. $H=\{a\in C \mid \varphi_2(a)=-a\}$. Очевидно H подгруппа в C и ограничение автоморфизма φ_2 на H будет автоморфизмом подгруппы H, причем это ограничение и нуль группы H удовлетворяют равенствам (2). На подгруппе H определим полуабелеву n-группу $\langle H,h\rangle = der_{\varphi_2,0}H$, где h действует по правилу

$$h(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n) = a_1+\varphi_2(a_2)+\ldots+\varphi_2^{n-2}(a_{n-1})+a_n,$$

$a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\in H$.

Далее, обозначим через T множество всех таких элементов u из C, что образ этих элементов при эндоморфизме $\widetilde{\varphi_2} = 1_C+\varphi_2+\ldots+\varphi_2^{n-2}$ группы C (этот эндоморфизм нам уже встречался перед теоремой 3) равен $-d_2$, т.е. $T=\{u\in C \mid \widetilde{\varphi_2}(u)=-d_2\}$. Заметим, что элемент u является идемпотентом тогда и только тогда, когда верно равенство $\widetilde{\varphi_2}(u)=-d_2$ (проверяется непосредственно). Значит, T — множество всех идемпотентов полуабелевой n-группы $\langle C,f_2\rangle$. Согласно предложению 44 из [16], $\langle T,f_2\rangle$ — подгруппа n-группы $\langle C,f_2\rangle$, если $T\ne\emptyset$.

Теорема 4. *Для нечетного числа $n>1$ декартово произведение полуабелевых n-групп $\langle H,h\rangle\times\langle T,f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z,f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x)=-x, x\in Z$) в полуабелеву n-группу $\langle C,f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T.*

Доказательство. Согласно теореме 2, каждое отображение $\psi : Z \to C$ является гомоморфизмом из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x (здесь $+$ — сложение в группе C) и выполнены условия

$$\sigma(0) = u + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u) + d_2, \tag{17}$$

$$\sigma(-x) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \text{для всех целых чисел } x. \tag{18}$$

Среди всех гомоморфизмов σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C, которые определяются однозначно образом единицы $\sigma(1) = a$ и действуют по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$, выбираем такие гомоморфизмы, для которых $\sigma(1) \in H$. Для каждого такого гомоморфизма σ и для каждого элемента $u \in T$ определим отображение $\psi : Z \to C$ по правилу:

$$\psi(z) = \sigma(z) + u = za + u, \quad z \in Z.$$

Так как $\sigma(0) = 0$ и $\widetilde{\varphi_2}(u) = -d_2$, то для выбранных гомоморфизма σ и элемента u группы C верно равенство (17). Кроме того, для всех целых чисел x имеем $\sigma(-x) = -xa$ и $\varphi_2(\sigma(x)) = \varphi_2(xa) = x\varphi_2(a) = -xa$, значит, верно равенство (18). Согласно теореме 2, построенное выше отображение ψ будет гомоморфизмом из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

Верно и обратно, для каждого гомоморфизма ψ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$, по теореме 2, найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x и выполнены условия (17) и (18). Из (17) следует $u \in T$. Если положить $\sigma(1) = a$, то из (18) при $x = 1$ получаем $\varphi_2(a) = \varphi_2(\sigma(1)) = \sigma(-1) = -a$, т.е. $\sigma(1) \in H$.

Таким образом, между множествами $Hom(Z, C)$ и $H \times T$ имеется взаимно однозначное соответствие $\tau : \psi \to (a, u)$, где $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x, $\sigma(1) = a \in H$ и $u \in T$. Докажем сохранение n-арной операции при соответствии τ. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Hom(Z, C)$ и $\tau(\psi_i) = (a_i, u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\psi_i(x) = \sigma_i(x) + u_i$ для любого целого числа x, $\sigma_i(1) = a_i$ и $u_i \in T$. Действуем n-арной операцией g на гомоморфизмы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ по правилу (1) (здесь $x \in Z$), а затем используем (7) и (13):

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = f_2(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = f_2(xa_1 + u_1, \ldots, xa_n + u_n) =$$

$$= xa_1 + u_1 + \varphi_2(xa_2 + u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(xa_{n-1} + u_{n-1}) + xa_n + u_n + d_2 =$$

$$= x(a_1 + \varphi_2(a_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n) + u_1 + \varphi_2(u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) +$$

$$+ u_n + d_2 = xh(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) + f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n).$$

Значит, $\tau(g(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = (h(a_1, \ldots, a_n), f_2(u_1, \ldots, u_n))$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 4 имеем

Следствие 6. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T.*

Заметим, что если в полуабелевой n-группе нет идемпотентов, то нет и гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в эту n-группу.

Для нечетного числа $n > 1$ рассмотрим теперь n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, A), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$ с операцией сложение $a+b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$. Автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, n-арная операция f_2 удовлетворяет равенству

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + d_2, \quad x_1, \ldots, x_n \in A,$$

где $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$.

В группе A выбираем множество M таких элементов a, для которых верно равенство $a = -a$, т.е. $M = \{a \in A \mid a = -a\}$. Очевидно M подгруппа в A. На подгруппе M определим абелеву n-группу $\langle M, h\rangle = der_{1_M,0}M$, где h действует по правилу $h(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n$, $a_1, \ldots, a_n \in M$.

Далее, обозначим через E множество всех таких элементов u из A, для которых верно равенство $(n-1)u = -d_2$, т.е. $E = \{u \in A \mid (n-1)u = -d_2\}$. Все элементы из E будут идемпотентами и каждый идемпотент n-группы $\langle A, f_2\rangle$ принадлежит E (проверяется непосредственно). Кроме того, в абелевой n-группе каждый идемпотент является единицей. Значит, E — множество всех единиц абелевой n-группы $\langle A, f_2\rangle$. Согласно [17], $\langle E, f_2\rangle$ — подгруппа n-группы $\langle A, f_2\rangle$, если $E \neq \emptyset$.

Из теоремы 4 получаем

Следствие 7. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение абелевых n-групп $\langle M, h\rangle \times \langle E, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$ с не пустым множеством единиц E.*

Из теоремы 1 и следствия 6 имеем

Следствие 8. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение абелевых n-групп $\langle M, h\rangle \times \langle E, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$ с не пустым множеством единиц E.*

Вновь заметим, что если в абелевой n-группе нет единиц, то нет и гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в эту n-группу.

6. Заключение

В работе рассматривалась n-группа гомоморфизмов из произвольной n-группы в полуабелеву n-группу, которая была построена в работе [3]. Получены следующие основные результаты:

1) Доказано, что у изоморфных n-групп и изоморфных полуабелевых n-групп n-группы гомоморфизмов также изоморфны (теорема 1).

2) Построена полуабелева (абелева) n-группа гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву (абелеву) n-группу (следствие 1 (следствие 4)).

3) Построена полуабелева (абелева) n-группа гомоморфизмов из бесконечной циклической n-группы в полуабелеву (абелеву) n-группу (следствие 2 (следствие 5)).

4) Для нечетного числа $n > 1$ построена полуабелева (абелева) n-группа гомоморфизмов из бесконечной не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву (абелеву) n-группу (следствие 6 (следствие 8)).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев И. Ш. О наименьшем многообразии симметрических алгебр // Алгебра и логика (семинар). 1966. Т. 5, №6. С. 5-14.
2. Чакани Б. Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр // Acta scient. math. 1964. Vol. 25. P. 202-208.
3. Glazek K., Gleichgewicht B. Abelian n-groups // Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru). 1977. Vol. 29. P. 321-329.
4. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 уч. М.: Наука, 1974. 158 с.
5. Русаков С. А. Алгебраические n-арные системы. Минск: Навука і техніка, 1992. 263 с.
6. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть 1. Гомель: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. 195 с.
7. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть 2. Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 323 с.
8. Post E. L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48. P. 208-350.
9. Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68 (110), № 3, С. 444-472.
10. Hosszu M. On the explicit form of n-group operacions // Publ. Math. 1963. Vol. 10. P. 88-92.
11. Щучкин Н. А. Прямое произведение n-арных групп // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, Выпуск 2. С. 101-121.
12. Glazek K., Michalski J., SierockiA I. On evaluation of some polyadic groups // Contributions to General Algebra. 1985. Vol. 3. P. 159-171 .
13. Khodabandeh H., Shahryari M. On the representations and automorphisms of polyadic groups // Commun. Algebra. 2012. Vol. 40. P. 2199-2212.
14. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. Т. 3 (54). С. 186-194.
15. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: "Мир 1974. 335 с.
16. Щучкин Н. А. Введение в теорию n-групп. Волгоград. ООО "Принт 2019. 234 с.
17. Гальмак А. М. n-Арная подгруппа единиц // Препринты Гомельского гос. ун-та, 1998. 23 с.

REFERENCES

1. Aliev, I. S. 1966, “On minimal varieties of symmetric algebras”, Algebra and Logic (seminar). 5, №6. pp. 5-14. (In Russian)
2. Chakany, B. 1964, “Abelian properties of primitive classes of universal algebras”, Acta Scient. Math. , 25 : 3–4 (1964) pp. 202–208 (In Russian)
3. Glazek, K., Gleichgewicht, B. 1977, “Abelian n-groups”, Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru) 29 pp. 321-329.

4. Kurosh, A. G. 1974, “General algebra, Lections 1969-1970”, Nauka, Moscow, 158 pp. (In Russian)

5. Rusakov, S. F. 1992, “Algebraic n-ary systems”, Navuka i technika, Minsk, 264 pp. (In Russian)

6. Gal’mak, A. M. 2003, “n-Ary groups”, Part I, Gomel university, Gomel, 195 pp. (In Russian)

7. Gal’mak, A. M. 2007, “n-Ary groups”, Part 2, Publishing center of BSU, Minsk, 325 pp. (In Russian)

8. Post, E. L. 1940, “Polyadic groups”, Trans. Amer. Math. Soc. 48, pp. 208-350.

9. Gluskin, L. M. 1965, “Positional oeratives”, Math. collection, V.68 (110), No 3, pp. 444-472. (In Russian)

10. Hosszu, M. 1963, “On the explicit form of n-group operacions”, Publ. Math. 10, pp. 88-92.

11. Shchuchkin, N.A. 2014, “Direct product of n-ary groups”, Chebyshev’s collection 15, Issue 2, pp. 101-121. (In Russian)

12. Glazek, K., Michalski, J., SierockiA, I. 1985, “On evaluation of some polyadic groups”, Contributions to General Algebra 3, Proc. Conf., Vienna. pp. 159-171.

13. Khodabandeh, H., Shahryari, M. 2012, “On the representations and automorphisms of polyadic groups”, Commun. Algebra 40, pp. 2199-2212.

14. Shchuchkin, N.A. 2009, “Semicyclic n-ary groups”, Izv. Gomel State Univ. 3(54), pp. 186-194. (In Russian)

15. Fuchs L. 1970, “Infinite abelian groups”. Vol. I, Moskow: Mir publishing, 335 pp.. (In Russian)

16. Shchuchkin, N.A. 2019, “Introduction to the theory of n-groups”. Volgograd. Print ltd, 234 pp. (In Russian)

17. Gal’mak, A. M. 1998, “n-Ary subgroup of units”. Preprints of Gomel State Univ., 23 pp. (In Russian)

Получено 12.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.