ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.382 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-328-339

Условие сходимости несобственных кратных интегралов в терминах многогранников Ньютона

Т. Ю. Семенова

Татьяна Юрьевна Семенова — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: station@list.ru

Аннотация

В статье рассматриваются многомерные несобственные интегралы от функций, являющихся произведением обобщенных многочленов в некоторых степенях. Такие интегралы встречаются во многих разделах математики и теоретической физики. В частности, к ним относятся интегралы Фейнмана, возникающие при изучении различных объектов квантовой теории поля. Точное вычисление этих интегралов является сложной и не всегда возможной задачей, поэтому определение условий их сходимости и получение их асимптотического разложения по одному из параметров представляет значительный практический интерес. Условия сходимости рассмотренных в работе интегралов ещё могут быть использованы, например, при исследовании кратных рядов, представляющих сумму значений рациональной функции в узлах целочисленной решетки.

В статье рассмотрена задача, когда областью интегрирования является $\mathbb{R}^n_+$, а обобщенные многочлены, входящие в подынтегральную функцию, либо положительны всюду, кроме нуля, либо имеют положительные коэффициенты. Описано множество сходимости этих интегралов и доказана равносильность условия сходимости условию на многогранники Ньютона многочленов в подынтегральных функциях.

Доказанный в работе критерий сходимости совпадает по формулировке с соответствующим результатом работ А. К. Циха и Т. О. Ермолаевой, но он получен другими методами и для немного более широкого множества подынтегральных функций.

Доказательства утверждений в работе основаны на простейших свойствах выпуклых многогранников и базовых фактах из теории несобственных кратных интегралов.

Ключевые слова: сходимость несобственных кратных интегралов, многогранники Ньютона.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Т. Ю. Семенова Условие сходимости несобственных кратных интегралов в терминах многогранников Ньютона // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 328–339.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517.382 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-328-339

The convergence condition for improper short integrals in terms of Newton polytopes

T. Yu. Semenova

Tatyana Yuryevna Semenova — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: station@list.ru

Abstract

The article considers multidimensional improper integrals of functions that are the product of generalized polynomials in some degrees. Such integrals are found in many branches of mathematics and theoretical physics. In particular, they include Feynman integrals arising in the study of various objects of quantum field theory. The exact calculation of these integrals is a difficult and not always possible task; therefore, determining the conditions for their convergence and obtaining their asymptotic expansion in one of the parameters is of considerable practical interest. The convergence conditions for the integrals considered in the article can still be used, for example, in the study of multiple series representing the sum of the values of a rational function at the nodes of an integer lattice.

The article considers the problem when the integration area is $\mathbb{R}^n_+$, and the generalized polynomials included in the integrand are either positive everywhere except zero or have positive coefficients. The convergence set of these integrals is described and the equivalence of the convergence condition to the condition on the Newton polytopes of polynomials in integrands is proved.

The convergence criterion proved in the paper coincides in formulation with the corresponding result of the work of A. K. Tsikh and T. O. Ermolaeva, but it was obtained by other methods and for a slightly wider set of integrands.

The proofs of the statements in the paper are based on the simplest properties of convex polytopes and basic facts from the theory of improper multiple integrals.

Keywords: convergence of improper multiple integrals, Newton polytopes.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
T. Yu. Semenova, 2021, "The convergence condition for improper short integrals in terms of Newton polytopes *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 328–339.

1. Введение

Обобщенными многочленами, определенными на $\mathbb{R}^n_+$, будем называть выражения вида $\sum\limits_w c_w x^w$, где $w = (w_1, \dots, w_n)$ — $n-$мерный мультииндекс, составленный из неотрицательных (необязательно целых) чисел, $x^w = x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n}$, коэффициенты $c_w \in \mathbb{R}$.

Обозначим $\mathcal{P}_{c+}$ — множество обобщенных многочленов с положительными коэффициентами, $\mathcal{P}_+$ — множество обобщенных многочленов, принимающих положительные значения на $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. Понятно, что $\mathcal{P}_{c+} \not\subset \mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_+ \not\subset \mathcal{P}_{c+}$.

Исследуем сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx_1 \ldots dx_n. \tag{1}$$

Здесь знаменатель $Q(x) = Q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot Q_m^{\beta_m}(x)$, где $Q_j(x) \in \mathcal{P}_{c+} \cup \mathcal{P}_+$, числа $\beta_j > 0$. Для числителя $P(x)$ будем рассматривать два варианта: либо это произвольный обобщенный многочлен, либо выражение вида $P_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot P_k^{\alpha_k}(x)$, где $P_i(x) \in \mathcal{P}_{c+} \cup \mathcal{P}_+$, числа $\alpha_i > 0$. Изучение подобных интегралов связано с различными задачами в математике и физике, например, с исследованием фейнмановских интегралов (см. [1]-[7]), с исследованием сходимости кратных рядов (см. [8]-[9]).

Частный случай этой задачи для (1) разбирался в работе [10] при получении асимптотического разложения при $t \to 0+$ интеграла

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty (Q(x,t))^{-\beta} dx_1 \ldots dx_n,$$

здесь $\beta > 0$, а $Q(x,t)$ — многочлен с положительными коэффициентами, зависящий от переменных интегрирования $x_1, \ldots, x_n$ и параметра t.

Ранее исследование аналогичного вопроса проводилось в работах А. К. Циха, Т. О. Ермолаевой, Е. В. Зубченковой (см. [11], [12], [8]), там рассматривались интегралы вида

$$\int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx_1 \ldots dx_n, \tag{2}$$

где числитель $P(x)$ — многочлен $\sum c_w x^w$, $w \in \mathbb{N}_0^n$, знаменатель $Q(x)$ — квазиэллиптический многочлен $\sum c_h x^h$, $h \in \mathbb{N}_0^n$ (или произведение степеней квазиэллиптических многочленов), который нигде не обращается в нуль, то есть интеграл не имеет особенностей внутри $\mathbb{R}^n$.

Основной результат данной работы (теоремы 1 и 2) согласуется с результатами работы [12]: необходимым и достаточным условием сходимости интеграла является условие того, что сдвиг многогранника Ньютона, соответствующего числителю $P(x)$, на вектор $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ содержится во внутренности многогранника, соответствующего $Q(x)$.

В некоторых случаях при помощи подходящей замены переменных исследование сходимости интеграла вида (1) сводится к исследованию интеграла вида (2). Однако переход от одной задачи к другой осуществим, если знаменатель нигде не обращается в нуль, показатели степеней переменных в обобщенных многочленах рациональны, а числа α_i, β_j — натуральные. В то же время исследование сходимости интеграла вида (2) всегда может быть сведено к исследованию интегралов вида (1).

Дополнительно, как следствие основных результатов, в статье описано множество сходимости интеграла (1).

2. Формулировка основных результатов

Далее для краткости обобщенные многочлены иногда будем называть просто многочленами. Если $G(x) = \sum\limits_{w \in S} c_w x^w$ — многочлен, $S \subset \mathbb{R}_+^n$ — носитель многочлена, обозначим через $\mathcal{N}_G$ многогранник Ньютона многочлена $G(x)$ — выпуклую оболочку S в $\mathbb{R}_+^n$. Также обозначим $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$ — элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

По определению считаем $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ — сумма Минковского двух подмножеств линейного пространства, $\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}$ — произведение подмножества линейного пространства на число $\lambda > 0$, $Int(A)$ — внутренность множества A. Заметим, что если A и B — выпуклые многогранники, то λA и $A + B$ — выпуклые многогранники (см. [13]-[16]).

Теорема 1. *Пусть* $P(x) = P_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot P_k^{\alpha_k}(x)$, $Q(x) = Q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot Q_m^{\beta_m}(x)$, *где* $P_i(x)$, $Q_j(x) \in \mathcal{P}_{c+} \cup \mathcal{P}_+$, *числа* $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$. *Интеграл* (1) *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{N}_{P_i} + \mathbf{e} \subset Int\Big(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}\Big). \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $P(x)$ — *обобщенный многочлен,* $Q(x) = Q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot Q_m^{\beta_m}(x)$, *где* $Q_j(x) \in \mathcal{P}_{c+} \cup \mathcal{P}_+$, *числа* $\beta_j > 0$. *Интеграл* (1) *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{N}_P + \mathbf{e} \subset Int\Big(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}\Big).$$

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 1 множество значений параметров* $\{(\alpha, \beta)\}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *и* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, *для которых интеграл* (1) *сходится, является открытым полиэдральным множеством в* $\mathbb{R}_+^{k+m}$. *Аналогично, при выполнении условий теоремы 2 множество значений параметров* $\{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)\}$, *для которых интеграл* (1) *сходится, является открытым полиэдральным множеством в* $\mathbb{R}_+^m$.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть многочлен* $G(x) = \sum\limits_{w \in S} c_w x^w \in \mathcal{P}_+$ *и* S_G — *множество вершин многогранника* $\mathcal{N}_G$. *Тогда верны следующие утверждения:*

(I) коэффициенты c_w *многочлена* $G(x)$, *где* $w \in S_G$, *положительны;*

(II) существуют такие положительные постоянные k *и* K, *что для любого* $x \in \mathbb{R}_+^n$ *выполняется неравенство*

$$k \cdot \sum_{w \in S_G} x^w \le G(x) \le K \cdot \sum_{w \in S_G} x^w.$$

Доказательство.

(I) Возьмём $w^* \in S_G$ — одну из вершин многогранника $\mathcal{N}_G$. В силу выпуклости множества $\mathcal{N}_G$ существует гиперплоскость $a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n + a_0 = 0$ (или, если кратко, $(a, w) + a_0 = 0$), разделяющая w^* и $\mathcal{N}_G \setminus \{w^*\}$. Гиперплоскость можно взять такую, что для точки w^* верно $(a, w^*) + a_0 = 0$, а для всех точек $w = (w_1, \ldots w_n) \in \mathcal{N}_G \setminus \{w^*\}$ выполняется неравенство $(a, w) + a_0 < 0$.

Среди чисел a_i, где $i = 1, \ldots, n$, есть не равные нулю. Без ограничения общности можно считать, что это $a_1, \ldots, a_l$. В многочлене $G(x)$ сделаем невырожденную замену переменных $x_i = y_i^{a_i}$ для $i = 1, \ldots l$:

$$G(y_1, \ldots y_l, x_{l+1}, \ldots x_n) = \sum_{w \in S} c_w y_1^{a_1 w_1} \ldots y_l^{a_l w_l} \cdot x_{l+1}^{w_{l+1}} \ldots x_n^{w_n}.$$

Далее, от координат $y_1, \ldots, y_l$ перейдём к стандартным гиперсферическим координатам $r \in [0, +\infty)$, $\theta_1, \ldots, \theta_{l-1} \in [0; \pi/2]$. Тогда многочлен G представляется в виде

$$\sum_{w \in S} c_w \psi_w r^{(a,w)} = r^{-a_0} \cdot \Big(c_{w^*} \psi_{w*} + \sum_{w \in S \setminus \{w^*\}} c_w \psi_w r^{(a,w)+a_0}\Big),$$

где ψ_w – функции, зависящие от $\theta_1, \ldots, \theta_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n$, и они почти всюду положительны, показатель степени с основанием r в последней сумме меньше нуля. При фиксированных

$\theta_1,\dots,\theta_{l-1},x_{l+1},\dots,x_n$, и таких, что $\psi_{w*}\neq 0$, существует такое значение r_0, что при $r>r_0$ выражение в скобках будет одного знака с коэффициентом c_{w^*} почти всюду. Поскольку $G(x)$ положителен при любом $x\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$, коэффициент $c_{w^*}>0$. Первая часть леммы доказана.

(II) Докажем оценку сверху. Очевидно, что $G(x)\leq\sum\limits_{w\in S_+}c_wx^w$, где $S_+=\{w\in S, c_w>0\}$. При этом $S_G\subset S_+$ в силу доказанного первого утверждения леммы. Поскольку выпуклый многогранник является выпукой комбинацией своих вершин, любое $h\in\mathcal{N}_G$ можно представить в виде $h=\sum\limits_{w\in S_G}\lambda_w\cdot w$, где $\lambda_w\in[0;1]$ и $\sum\lambda_w=1$. Тогда в силу теоремы о средних (см. [17], глава 2.5), выполняется неравенство

$$x^h=\prod_{w\in S_G}(x^w)^{\lambda_w}\leq\sum_{w\in S_G}\lambda_w\cdot x^w\leq\sum_{w\in S_G}x^w.$$

Отсюда можно получить, что существует $K>0$ такое, что

$$G(x)\leq\sum_{w\in S_+}c_wx^w=\sum_{w\in S_G}c_wx^w+\sum_{h\in S_+\setminus S_G}c_hx^h\leq K\sum_{w\in S_G}x^w.$$

Теперь докажем оценку снизу. По условию для любых $x\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$ выполнено $G(x)=\sum\limits_{w\in S_+}c_wx^w-\sum\limits_{w\in S\setminus S_+}|c_w|x^w>0$. Введем функцию

$$F(x)=\sum_{w\in S\setminus S_+}|c_w|x^w\cdot\Big(\sum_{w\in S_+}c_wx^w\Big)^{-1},$$

которая будет определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$ и значения которой принадлежат промежутку $[0;1)$. Докажем, что существует такое $\varepsilon<1$, что $F(x)\leq\varepsilon$, тогда из этого будет следовать неравенство $G(x)\geq(1-\varepsilon)\sum\limits_{w\in S_+}c_wx^w\geq(1-\varepsilon)\sum\limits_{w\in S_G}c_wx^w$, то есть пункт (II) леммы.

Сначала сделаем это при двух допущениях: носитель S многочлена G содержит $w=0$ и значения $(w_1+...+w_n)$ различны для всех $w\in S$. Первое допущение даёт дополнительное условие $G(x)|_{x=0}>0$, и тогда функция $F(x)$ определена при $x=0$ и непрерывна на $\mathbb{R}^n_+$.

Предположим, нет такого значения $\varepsilon<1$, что $F(x)\leq\varepsilon$. Тогда существует последовательность $\{x^N\}$, такая, что $F(x^N)\to 1$ при $N\to+\infty$. Если последовательность ограничена, из нее можно выбрать сходящуюся к некоторому $x^*\in\mathbb{R}^n_+$ подпоследовательность, и тогда, в силу непрерывности F, будет выполнено $F(x^*)=1$, что невозможно. Значит, последовательность $\{x^N\}$ неограничена. От переменных x_1,...,x_n перейдём к гиперсферическим координатам $r\in[0,+\infty)$, $\theta_1,\dots,\theta_{n-1}\in[0;\pi/2]$. Из последовательности $\{x^N\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x^{N_p}\}$, такую, что $r^{N_p}\to+\infty$, $\theta_1^{N_p}\to\theta_1^*$, ..., $\theta_{n-1}^{N_p}\to\theta_{n-1}^*$ при $p\to+\infty$, при этом θ_1^*, ...,θ_{n-1}^* – некоторые значения из $[0;\pi/2]$. Теперь, в силу непрерывности F, имеем

$$1=\lim_{p\to+\infty}F(x^{N_p})=\lim_{p\to+\infty}F(r^{N_p},\theta_1^*,\,...,\theta_{n-1}^*).$$

Поскольку $F(r,\theta_1^*,\,...,\theta_{n-1}^*)$ представляет из себя отношение двух многочленов от переменной r, предел может быть равен 1, если максимальный показатель степени r в числителе равен максимальному показателю степени r в знаменателе. Показатели степеней r совпадают со значениями $(w_1+...+w_n)$ и различны для всех $w\in S$. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно и существует $\varepsilon<1$, что $F(x)\leq\varepsilon$.

Теперь разберёмся, почему утверждение достаточно доказать при сделанных допущениях. Действительно, если множество S не содержит $w=0$, то, поскольку $G(x)|_{x=(1,0,...,0)}>0$, множество S_+ должно содержать элементы вида $w=(w_1,0,....,0)$. Сделаем замену $x_i=y_i^{a_i}$, где числа $a_i>0$ подбираются таким образом, что для новых показателей w степеней переменной y будет выполняться $\min\limits_w(w_1+...+w_n)=w_1^*$ для некоторого $w^*=(w_1^*,0,...,0)$. Теперь сделаем ещё одну замену $y_1 = \widetilde{x}_1$, $y_2 = \widetilde{x}_1^{w_1^*} \cdot \widetilde{x}_2$, ..., $y_n = \widetilde{x}_1^{w_1^*} \cdot \widetilde{x}_n$, после которой дробь, представляющая функцию F, может быть сокращена на множитель $\widetilde{x}_1^{w_1^*}$, и задача сведётся к случаю, когда S содержит нуль. Сделав обратные замены, останется отдельно рассмотреть значения F при $x_1 = 0$. Оценка $F(x) \le \varepsilon$ для $x_1 = 0$ будет следовать из непрерывности $F(x)$ на $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$.

Выполнения второго условия, при котором мы провели доказательство, — различия значений $(w_1 + ... + w_n)$ при разных w — можно добиться заменой $x_i = y_i^{a_i}$, подобрав соответствующие $a_i > 0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть $G(x) = \sum\limits_{w \in S} c_w x^w \in \mathcal{P}_{c+}$, число $\gamma > 0$. Тогда существуют такие положительные постоянные k и K, что для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$ выполняется неравенство*

$$k \cdot \sum_{w \in \gamma S} x^w \le G^\gamma(x) \le K \cdot \sum_{w \in \gamma S} x^w.$$

Доказательство. Очевидно, что лемму достаточно доказать для многочлена $G(x)$ с коэффициентами $c_w = 1$.

Сначала рассмотрим случай $\gamma > 1$. Пусть a_i, $i = 1, \ldots, k$, — неотрицательные числа. В силу выпуклости вниз функции $z(t) = t^\gamma$, верно соотношение $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^\gamma \le \frac{a_1^\gamma + a_2^\gamma}{2}$ или $(a_1 + a_2)^\gamma \le 2^{\gamma - 1}(a_1^\gamma + a_2^\gamma)$. Далее, $\left(\sum\limits_{i=1}^k a_i\right)^\gamma \le 2^{\gamma-1}\left(a_1^\gamma + \left(\sum\limits_{i=2}^k a_i\right)^\gamma\right) \le \ldots \le C(k, \gamma) \sum\limits_{i=1}^k a_i^\gamma$. Применив это неравенство, получаем

$$G^\gamma(x) = \Big(\sum_{w \in S} x^w\Big)^\gamma \le C(|S|, \gamma) \sum_{w \in S} x^{\gamma w}. \tag{4}$$

В силу неравенства $\sum\limits_{i=1}^k a_i^\gamma \le \left(\sum\limits_{i=1}^k a_i\right)^\gamma$, верного для любых неотрицательных a_i и любого $\gamma > 1$ (см. [17], глава 2.12), будем иметь оценку

$$\sum_{w \in S} x^{\gamma w} \le \Big(\sum_{w \in S} x^w\Big)^\gamma = G^\gamma(x). \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) и того факта, что $\sum\limits_{w \in S} x^{\gamma w} = \sum\limits_{w \in \gamma S} x^w$, получаем утверждение леммы.

Аналогичный результат можно получить и при $0 < \gamma < 1$, только там уже будет использована оценка $C(|S|, \gamma) \cdot \sum\limits_{w \in S} x^{\gamma w} \le \left(\sum\limits_{w \in S} x^w\right)^\gamma \le \sum\limits_{w \in S} x^{\gamma w}$.

Случай $\gamma = 1$ тривиален. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть функция $f(x)$, определеннная на $\mathbb{R}^n_+$, неотрицательна и интегрируема по Риману на любом замкнутом кубируемом подмножестве $\mathbb{R}^n_+$. Для любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, и $\beta_1, \ldots, \beta_m$, для любых многочленов $P_1, \ldots, P_k$ и $Q_1, \ldots, Q_m$, принадлежащих множеству $\mathcal{P}_+ \cup \mathcal{P}_{c+}$, верно*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x) \cdot \frac{P_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot P_k^{\alpha_k}(x)}{Q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot Q_m^{\beta_m}(x)} dx < +\infty \Longleftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x) \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} dx < +\infty,$$

где $P(x) = \sum\limits_{w \in S_P} x^w$, $Q(x) = \sum\limits_{w \in S_Q} x^w$, S_P и S_Q — множества вершин многогранников $\sum\limits_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{N}_{P_i}$ и $\sum\limits_{j=1}^m \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}$ соответственно.

Доказательство. Пусть S_{P_i} и S_{Q_j} — множества вершин многогранников $\mathcal{N}_{P_i}$ и $\mathcal{N}_{Q_j}$ соответственно. Применив несколько раз утверждение пункта (II) леммы 1, можно получить равносходимость интегралов от функции $f(x)\cdot\frac{P_1^{\alpha_1}(x)\cdot\ldots\cdot P_k^{\alpha_k}(x)}{Q_1^{\beta_1}(x)\cdot\ldots\cdot Q_m^{\beta_m}(x)}$ и функции $f(x)\cdot\frac{\widetilde{P_1}^{\alpha_1}(x)\cdot\ldots\cdot\widetilde{P_k}^{\alpha_k}(x)}{\widetilde{Q_1}^{\beta_1}(x)\cdot\ldots\cdot\widetilde{Q_m}^{\beta_m}(x)}$, где $\widetilde{P}_i(x)=\sum\limits_{w\in S_{P_i}}x^w$, а $\widetilde{Q_j}(x)=\sum\limits_{w\in S_{Q_j}}x^w$.

Воспользовавшись несколько раз леммой 2, будем иметь равносходимость интегралов от функций $f(x)\cdot\frac{\widetilde{P_1}^{\alpha_1}(x)\cdot\ldots\cdot\widetilde{P_k}^{\alpha_k}(x)}{\widetilde{Q_1}^{\beta_1}(x)\cdot\ldots\cdot\widetilde{Q_m}^{\beta_m}(x)}$ и $f(x)\cdot\frac{P_1^*(x)\cdot\ldots\cdot P_k^*(x)}{Q_1^*(x)\cdot\ldots\cdot Q_m^*(x)}$, где многочлены $P_i^*(x)=\sum\limits_{w\in\alpha_i S_{P_i}}x^w$, а $Q_j^*(x)=\sum\limits_{w\in\beta_j S_{Q_j}}x^w$. Так как многогранник Ньютона для многочлена $P_1^*(x)\cdot\ldots\cdot P_k^*(x)$ совпадает с многогранником $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\mathcal{N}_{P_i}$, а многогранник Ньютона для многочлена $Q_1^*(x)\cdot\ldots\cdot Q_m^*(x)$ совпадает с многогранником $\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i\mathcal{N}_{Q_j}$, применив ещё раз результат леммы 1, получаем, что интеграл от функции $f(x)\cdot\frac{P_1^*(x)\cdot\ldots\cdot P_k^*(x)}{Q_1^*(x)\cdot\ldots\cdot Q_m^*(x)}$ равносходим с интегралом от функции $f(x)\cdot\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены вида $\sum x^w$ с носителями, являющимися множествами вершин многогранников $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\mathcal{N}_{P_i}$ и $\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j\mathcal{N}_{Q_j}$ соответственно. Лемма доказана. $\square$

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Из леммы 3 следует, что теорему достаточно доказать для случая $I=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $P(x)=\sum\limits_{\delta\in T}x^\delta$, $Q(x)=\sum\limits_{w\in S}x^w$ — многочлены с произвольными носителями T и S из $\mathbb{R}_+^n$. Доказательство проведем в несколько шагов.

(I) Докажем, что интеграл $I=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}Q^{-1}(x)dx$, где $Q(x)=\sum\limits_{w\in S}x^w$, сходится тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q)$.

Начнем с необходимого условия сходимости. Предположим противное, что интеграл I сходится, но при этом $\mathbf{e}$ не принадлежит внутренности многогранника $\mathcal{N}_Q$. В силу выпуклости множества $\mathcal{N}_Q$ существует гиперплоскость $a_1w_1+\ldots+a_nw_n+a_0=0$, разделяющая $Int(\mathcal{N}_Q)$ и $\mathbf{e}$. Пусть для внутренних точек $w=(w_1,\ldots,w_n)$ многогранника $\mathcal{N}_Q$ выполняется неравенство $a_1w_1+\ldots+a_nw_n+a_0<0$, тогда для точки $\mathbf{e}$ верно $a_1+\ldots+a_n+a_0\geq 0$. Далее сделаем замену, такую же как в пункте (1) леммы 1, получим:

$$I=\prod_{i=1}^{l}|a_i|\cdot\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{i=1}^{l}y_i^{a_i-1}\cdot\Big(\sum_{w\in S}y_1^{a_1w_1}\ldots y_l^{a_lw_l}\cdot x_{l+1}^{w_{l+1}}\ldots x_n^{w_n}\Big)^{-1}dy_1\ldots dy_l dx_{l+1}\ldots dx_n.$$

После перехода от $y_1,\ldots,y_l$ к гиперсферическим координатам $r\in[0,+\infty)$, $\theta_1,\ldots,\theta_{l-1}\in[0;\pi/2]$, которые изменяются независимо друг от друга, для сходимости интеграла нам будет необходима сходимость интеграла по переменной r, то есть

$$\int_0^\infty\frac{r^{a_1+\ldots+a_l-l}\cdot r^{l-1}dr}{Q(r,\theta_1,\ldots,\theta_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_n)}.$$

Заметим, что теперь функция $Q(r,\theta_1,\ldots,\theta_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_n)$ — многочлен от переменной r, в него входят слагаемые вида $r^{a_1w_1+\ldots+a_lw_l}$ с коэффициентами, зависящими от $\theta_1,\ldots,\theta_{l-1}$, $x_{l+1},\ldots,x_n$, которые почти всюду положительны. Поэтому для сходимости в $+\infty$ необходимо, чтобы

$$\max_{w\in S}(a_1w_1+\ldots+a_lw_l)-(a_1+\ldots+a_l)>0$$

или

$$\max_{w\in S}(a_1w_1+\ldots+a_nw_n)-(a_1+\ldots+a_n)>0.$$

Поскольку для всех $w\in S$ выполнено неравенство $a_1w_1+\ldots+a_nw_n<-a_0$ и при этом $a_1+\ldots+a_n\geq -a_0$, левая часть неравенства отрицательна. Противоречие. Необходимое условие сходимости доказано.

Для доказательства достаточного условия заметим, что если $\mathcal{K}$ — произвольное конечное подмножество $\mathcal{N}_Q$, то интеграл $I=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}Q^{-1}(x)dx$ равносходим с интегралом $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big(\sum\limits_{w\in S\cup\mathcal{K}}x^w\big)^{-1}dx$. Это следует из леммы 1. Поэтому, если интеграл I расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big(\sum\limits_{w\in S\cup\mathcal{K}}x^w\big)^{-1}dx$. Тогда, из признака сравнения несобственных интегралов следует, что расходится и интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big(\sum\limits_{w\in \mathcal{K}}x^w\big)^{-1}dx$.

Предположим, что интеграл I расходится, но при этом $\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q)$. Возьмем $n-$мерный куб, лежащий внутри многогранника $\mathcal{N}_Q$ и содержащий $\mathbf{e}$, такой, что его грани параллельны координатным плоскостям. Пусть $\mathcal{K}$ — множество вершин куба и тогда, по замечанию выше, интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big(\sum\limits_{w\in \mathcal{K}}x^w\big)^{-1}dx$ расходится. Так как $\mathcal{K}$ — вершины специальным образом выбранного куба, существуют положительные q и p такие, что этот интеграл представляется в виде:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\prod_{i=1}^n(x_i^q(1+x_i^p))^{-1}\,dx=\Big(\int_0^\infty(x_1^q(1+x_1^p))^{-1}\,dx_1\Big)^n=$$

$$=\Big(\frac{1}{q}B\Big(\frac{1-q}{q},\frac{(q+p)-1}{q}\Big)\Big)^n.$$

Поскольку $\mathbf{e}$ лежит внутри куба, выполнено условие $q<1<q+p$. Тогда бета-функция, через которую выражается значение интеграла, определена, то есть интеграл сходится. Противоречие. Достаточное условие доказано.

(II) Теперь докажем, что интеграл $I=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}x^\delta\cdot Q^{-1}(x)dx$, где $Q(x)=\sum\limits_{w\in S}x^w$, $\delta_i>-1$ для любого $i=1,\ldots,n$, сходится тогда и только тогда, когда $\delta+\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q)$.

Сделаем замену переменных $y_i=x_i^{\delta_i+1}$. Тогда I преобразуется к виду

$$I=\prod_{i=1}^n(\delta_i+1)^{-1}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\Big(\sum_{w\in S}y_1^{\frac{w_1}{\delta_1+1}}\ldots y_n^{\frac{w_n}{\delta_n+1}}\Big)^{-1}dy.$$

Применим утверждение пункта (I). Интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}$ попадает внутрь многогранника Ньютона многочлена с носителем

$$\Big\{\Big(\frac{w_1}{\delta_1+1},\ldots,\frac{w_n}{\delta_n+1}\Big),w\in S\Big\},$$

что равносильно тому, что $\delta+\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q)$. Утверждение пункта доказано.

(III) Последний шаг доказательства: необходимое и достаточное условие сходимости интеграла $I=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $P(x)=\sum\limits_{\delta\in T}x^\delta$, $Q(x)=\sum\limits_{w\in S}x^w$. Используя свойства несобственного интеграла и результат пункта (II), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{P(x)}{Q(x)}dx<+\infty\Longleftrightarrow\forall\delta\in T\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{x^\delta}{Q(x)}dx<+\infty\Longleftrightarrow\forall\delta\in T\;\delta+\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q).$$

Последнее условие в силу выпуклости $\mathcal{N}_Q$ равносильно условию $\mathcal{N}_P+\mathbf{e}\subset Int(\mathcal{N}_Q)$. Теорема доказана. $\square$

5. Доказательство теоремы 2

Доказательство. Для одномерного случая утверждение теоремы легко получается из признака сравнения несобственных интегралов.

Рассмотрим случай $n \geq 2$. Числитель в подынтегральной функции представим в виде $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$, где P_1 и P_2 — многочлены с положительными коэффициентами, причём их носители S_1 и S_2 не пересекаются. Из равносильности сходимости и абсолютной сходимости несобственного интеграла и утверждения леммы 3 следует, что доказательство достаточно провести для интеграла

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{P_1(x) - P_2(x)}{Q(x)} dx,$$

где $Q(x)$ — многочлен с положительными коэффициентами.

Достаточность условия $\mathcal{N}_P + \mathbf{e} \subset Int(\mathcal{N}_Q)$ для сходимости интеграла I очевидно следует из оценки $|P_1(x) - P_2(x)| \leq P_1(x) + P_2(x)$. Докажем необходимость. Предположим, что $\mathcal{N}_P + \mathbf{e} \not\subset Int(\mathcal{N}_Q)$, но при этом I сходится. Поскольку добавление к подынтегральной функции слагаемых $\frac{(-1)^i c_w x^w}{Q(x)}$, где $w + \mathbf{e} \in \big(S_i + \mathbf{e}\big) \cap Int(\mathcal{N}_Q)$, не меняет сходимости интеграла, утверждение можно доказать для такого $P(x)$, что $(S_P + \mathbf{e}) \cap Int(\mathcal{N}_Q) = \varnothing$.

Пусть W — множество вершин многогранника $\mathcal{N}_Q$, v — фиксированная точка $\mathcal{N}_Q$, $\lambda \geq 1$. Определим $W_v^\lambda = \{v + \lambda \cdot (w - v), w \in W\}$ — "λ–раздутие"множества W относительно точки v, $\mathcal{N}(W_v^\lambda)$ — многогранник, множество вершин которого есть W_v^λ. Очевидно, что $\mathcal{N}(W_v^1) = \mathcal{N}_Q$ и для любых $\lambda_1 < \lambda_2$ выполняется $\mathcal{N}(W_v^{\lambda_1}) \subsetneqq \mathcal{N}(W_v^{\lambda_2})$.

Обозначим $\mathcal{S} = S_P + \mathbf{e}$. Возьмём произвольную внутреннюю точку v многогранника $\mathcal{N}_Q$ и минимально возможное число λ, чтобы $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}(W_v^\lambda)$. Если точки множества $\mathcal{S} \cap \partial(\mathcal{N}(W_v^\lambda))$ лежат на одной грани γ многогранника $\mathcal{N}(W_v^\lambda)$, положим $\mathcal{B} = W_v^\lambda$. Если точки множества $\mathcal{S} \cap \partial(\mathcal{N}(W_v^\lambda))$ не лежат на одной грани многогранника $\mathcal{N}(W_v^\lambda)$, то возьмём любую точку $u \in \mathcal{S} \cap \partial(\mathcal{N}(W_v^\lambda))$ и достаточно большое μ, чтобы множество $\mathcal{S} \cap \mathcal{N}((W_v^\lambda)_u^\mu)$ содержало только точки, принадлежащие одной из граней многогранника $\mathcal{N}((W_v^\lambda)_u^\mu)$ (то есть той грани, назовём её Γ, которой принадлежит точка u). В этом случае положим $\mathcal{B} = (W_v^\lambda)_u^\mu$.

По признаку сравнения несобственных интегралов из сходимости интеграла I следует сходимость интеграла от функции $\frac{P_1(x) - P_2(x)}{Q(x) + \sum\limits_{w \in \mathcal{B}} x^w}$, и тогда сходится интеграл от функции

$$\frac{P_1(x) - P_2(x) + \sum\limits_{\substack{w \in S_i \\ w + \mathbf{e} \in Int(\mathcal{N}(\mathcal{B}))}} (-1)^i c_w x^w}{Q(x) + \sum\limits_{w \in \mathcal{B}} x^w}.$$

После приведения подобных числитель последней функции есть сумма слагаемых $(-1)^{i+1} c_w x^w$ по всем $w \in S_i$ $(i = 1, 2)$, но таких, что $w + \mathbf{e}$ принадлежат грани Γ многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{B})$.

Далее можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта (I) в доказательстве теоремы 1, а именно: разделить гиперплоскостью внутренность многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ и множество $\{w + \mathbf{e}\}$, где w принадлежат носителю многочлена в числителе подынтегральной функции — в данном случае это будет гиперплоскость, которая содержит грань Γ. Для w, принадлежащих носителю многочлена в числителе будет выполняться равенство $(a, w + \mathbf{e}) + a_0 = 0$, для точек из внутренности многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ неравенство $(a, w) + a_0 < 0$. После соответствующих замен переменных (как в пункте (I) доказательства теоремы 1) нам будет необходима сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{r^{-a_0 - 1} dr}{Q(r, \theta_1, \ldots, \theta_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)},$$

где $Q(r, \theta_1, \ldots, \theta_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)$ — многочлен от переменной r, с показателями степеней, равными (a, w), причём для $w \in \mathcal{B} \cap \Gamma$ они равны $-a_0$, для $w \in \mathcal{B} \setminus \Gamma$ они меньше $-a_0$. Такой интеграл расходится. Противоречие. Теорема доказана. $\square$

6. Доказательство следствия

Доказательство. Пусть A — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда для любых $\lambda, \widehat{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ выполняется неравенство:

$$\sup_{w \in A} \rho(\lambda w, \widehat{\lambda} A) \leq \sup_{w \in A} \rho(\lambda w, \widehat{\lambda} w) \leq |\lambda - \widehat{\lambda}| \cdot \sup_{w \in A} ||w||,$$

где ρ — обычное евклидово расстояние в $\mathbb{R}^n$. Из этой оценки следует, что при достаточно малых изменениях α_i и β_j включение $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{N}_{P_i} + \mathbf{e} \subset Int\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}\Big)$ остается справедливым. То есть существует $\varepsilon > 0$, что для любых $\widehat{\alpha_i} \in U_\varepsilon(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots k$ и для любых $\widehat{\beta_i} \in U_\varepsilon(\beta_j)$, $j = 1, \ldots m$, выполняется $\sum\limits_{i=1}^{k} \widehat{\alpha_i} \mathcal{N}_{P_i} + \mathbf{e} \subset Int\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \widehat{\beta_j} \mathcal{N}_{Q_j}\Big)$. Таким образом, область сходимости интеграла — открытое множество.

Покажем, что множество сходимости интеграла — полиэдральное. Сначала сделаем два небольших замечания.

(I) Если A произвольное полиэдральное множество, то оно может быть задано системой неравенств вида $(w, d) + c \leq 0$ — как пересечение полупространств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Здесь d — вектор нормали к гиперплоскости, ограничивающей соответствующее полупространство. Тогда полиэдральное множество αA задается системой неравенств $(w, d) + \alpha c \leq 0$, то есть нормали к гиперплоскостям, задающим границу αA, не зависят от α.

(II) Пусть A и B — два произвольных полиэдральных множества. Рассмотрим $\alpha A + B$, где $\alpha > 0$, и систему неравенств $(w, d) + c \leq 0$, задающих это множество. Граница множества $\alpha A + B$ содержится в множестве, являющейся суммой границ множеств αA и B, при этом нормали к гиперплоскостям, задающим границу αA, не зависят от α. Из этого следует, что нормали d не зависят от α.

Вернемся к доказательству утверждения. Вложение (3) равносильно тому, что для всех элементов вида $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$, где u_i — вершина многогранника $\mathcal{N}_{P_i}$, выполняются неравенства $(u + \mathbf{e}, d) + c < 0$, где $(w, d) + c \leq 0$ — система неравенств, определяющая многогранник $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}$. Из (I) и (II) следует, что система задаётся так, что нормали d не будут зависеть от $\beta_1, \ldots, \beta_m$, а будут зависеть от параметров многогранников $\mathcal{N}_{Q_1}, \ldots, \mathcal{N}_{Q_m}$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i, d) + (\mathbf{e}, d) + c < 0$. В свою очередь, так как многогранник $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}$ задается неравенствами $(w, d) + c \leq 0$, есть точки вида $w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m$, где w_j — какие-то из вершин многогранников $\mathcal{N}_{Q_j}$, на каждой из которых достигается равенство в одном из неравенств системы, то есть все значения свободных членов в неравенствах представляются виде $c = -(w, d) = -\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j (w_j, d)$. В итоге имеем условия, полностью определяющие α_i и β_j, — линейную систему из конечного числа неравенств

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i, d) + (\mathbf{e}, d) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j (w_j, d) < 0,$$

что и доказывает следствие.

$\square$

7. Заключение

Доказанные в работе результаты могут быть использованы при исследовании сходимости кратных несобственных интегралов, возникающих в прикладных задачах физики и математики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуа Р., Теплиц В. Гомологии и фейнмановские интегралы // Москва, Мир. 1969.
2. Фам Ф. Введение в топологические исследования особенностей Ландау // Москва, Мир. 1967.
3. Beneke M., Smirnov V. A. Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold // Nuclear Physics B. 1998. Vol. 522, p. 321-344.
4. Pak A., Smirnov A. V. Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals // European Physical Journal C. 2011. Vol. 71, p. 1626-1631.
5. Lee R. N., Pomeransky A. A. Critical points and number of master integrals // Journal of High Energy Physics. 2013. Vol. 165, pp. 1311-1326.
6. Семенова Т. Ю. Асимптотика интегралов Фейнмана в одномерном случае // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика и механика. 2019. № 4, с. 46-50.
7. Semenova T. Yu. Asymptotic Series for a Feynman Integral in the One-Dimensional Case // Russian Journal of Mathematical Physics. 2020. Vol. 27, no. 1, p. 126-136.
8. Зубченкова Е. В. Интегральный признак сходимости некоторых кратных рядов // Журнал СФУ. Серия Математика и физика. 2011. 4 (3), с. 344-349.
9. Зубченкова Е. В. Об интегральном признаке сходимости для многомерных рядов Дирихле // Сибирские электронные математические известия. 2014. № 11, с. 76-86.
10. Semenova T. Yu., Smirnov A. V., Smirnov V. A. On the status of expansion by regions // European Physical Journal C. 2019. Vol. 79, p. 136-147.
11. Цих А. К. Интегралы от рациональных функций по пространству R^n // ДАН СССР. 1989. Т. 307, № 6, с. 1325-1329.
12. Ермолаева Т. О., Цих А. К. Интегрирование рациональных функций по R^n с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов // Математический сборник. 1996. 187 (9), с. 45-64.
13. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ // Москва, Мир. 1973.
14. Александров А. Д. Выпуклые многогранники // Москва, Мир. 1950.
15. Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников // Москва, Мир. 1988.
16. Grünbaum B. Convex polytopes // London, Interscience Publ. 1967.
17. Харди Г., Литльвуд Дж., Полиа Г. Неравенства // Москва, УРСС. 2008.

REFERENCES

1. Hwa, R., Teplitz, V. 1966, “Homology and Feynman integrals“, *New York, Amsterdam.*

2. Pham, F. 1967, “ Introduction a l’etude topologique des singularites de Landau“, *Gauthier-villars Editeur, Paris.*

3. Beneke, M., Smirnov, V. A. 1998, “Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold“, *Nuclear Physics B*, vol. 522, pp. 321-344.

4. Pak, A., Smirnov, A. V. 2011, “Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals“, *European Physical Journal C*, vol. 71, pp. 1626-1631.

5. Lee, R. N., Pomeransky, A. A. 2013, “Critical points and number of master integrals“, *Journal of High Energy Physics*, vol. 165, pp. 1311-1326.

6. Semenova, T. Yu . 2019, “Asymptotics of Feynman integrals in one-dimensional case“, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 74, no. 4, pp. 163-166.

7. Semenova, T. Yu. 2020, “Asymptotic series for a Feynman integral in the one-dimensional case“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 27, no. 1, pp. 126-136.

8. Zubchenkova, E. V. 2011, “ Integral convergence criterion for the multiple series“, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 4 (3), pp. 344–349.

9. Zubchenkova, E. V. 2014, “On the integral criterion of convergence for multidimensional Dirichlet series“, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, no. 11, pp. 76-86.

10. Semenova, T. Yu., Smirnov, A. V. & Smirnov, V. A. 2019, “On the status of expansion by regions“, *European Physical Journal C*, vol. 79, pp. 136-147.

11. Tsikh, A. K. 1989, “Integrals of rational functions over space R^n“, *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, vol. 307, no. 6, pp. 1325-1329.

12. Ermolaeva, T. O., Tsikh, A. K. 1996, “Integration of rational functions over R^n by means of toric compactifications and multidimensional residues“, *Sb. Math.*, 187 (9), pp. 1301-1318.

13. Rockafellar, R. 1973, “Convex analysis“, *Princeton, New Jersey, Princeton University Press.*

14. Alexandrov, A. D. 1950, “Convex polytopes“, *Moscow, World.*

15. Brøndsted, A. 1983, “An introduction to convex polytopes“, *New York–Heidelberg–Berlin, Springer-Verlag.*

16. Grünbaum, B. 1967, “Convex polytopes“, *London, Interscience Publ.*

17. Hardy, G., Littlewood, J. & Polia, G. 2008, “Inequalities“, *Moscow, URSS.*

Получено 3.03.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.