ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-304-327

Решетка определимости. Источники и направления исследований[1]

А. Л. Семенов, С. Ф. Сопрунов

Алексей Львович Семенов — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: alsemno@ya.ru
Сергей Федорович Сопрунов — Центр педагогического мастерства Департамента образования и науки Москвы, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: soprunov@mail.ru

Аннотация

В статье представлены результаты и открытые проблемы, относящиеся к пространствам определимости (редуктам), а также источникам этой области, начиная с XIX века. Исследуются условия конечности и ограничения, в том числе глубина чередования кванторов и число аргументов. Описаны результаты, относящиеся к описанию решеток пространств определимости для числовых и других естественных структур. Методы исследования включают изучение групп автоморфизмов элементарных расширений рассматриваемых структур, использование теоремы Свенониуса.

Ключевые слова: определимость, пространство определимости, редукты, теорема Свенониуса, элиминация кванторов, разрешимость, автоморфизмы.

Библиография: 68 названий.

Для цитирования:
А. Л. Семенов, С. Ф. Сопрунов. Решетка определимости. Источники и направления исследований // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 304–327.

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (А. Л. Семенов, грант № 17-11-01377 – разделы 1, 3, 5) и РФФИ (С. Ф. Сопрунов, грант № 19-29-14199 – разделы 2, 4).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-304-327

The lattice of definability. Origins and Directions of Research

A. L. Semenov, S. F. Soprunov

Alexey Lvovich Semenov — Lomonosov Moscow State University, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: alsemno@ya.ru
Sergey Fedorovich Soprunov — Center for pedagogical excellence, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: soprunov@mail.ru

Abstract

The article presents results and open problems related to definability spaces (reducts) and sources of this field since the XIX century. Finiteness conditions and constraints are investigated, including the depth of quantifier alternation and the number of arguments. Results related to the description of lattices of definability spaces for numerical and other natural structures are described. Research methods include the study of automorphism groups of elementary extensions of the structures under consideration, application of the Svenonius theorem.

Keywords: definability, definability space, reducts, Svenonius theorem, quantifier elimination, decidability, automorphisms.

Bibliography: 68 titles.

For citation:
Semenov, A. L., Soprunov, S. F., 2021, "The lattice of definability. Origins and Directions of Research" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 304–327.

"Mathematicians, in general, do not like
to operate with the notion of definability;
their attitude towards this notion
is one of distrust and reserve".
Alfred Tarski [1]

1. Введение. Основное понятие

Одной из «самых экзистенциальных» проблем человечества является «Как определить что-то новое через что-то уже известное?». Иногда это оказывается даже более важным вопросом, чем «Что есть истина?» [Ин. 18:38].

В контексте современной математики этот вопрос формулируется следующим образом.

Мы начинаем с *языка*, в котором мы формулируем наши определения. Это – язык логики отношений (иногда называемой в отечественной литературе логикой предикатов первого порядка), в ее алфавите есть логические связки, переменные: x_0, x_1, ..., кванторы и равенство =. К этому базовому ядру языка мы добавляем *имена отношений* (иногда также имена объектов и операций). Набор этих имен называется *сигнатурой*. Каждое имя имеет свое число аргументов (свою -арность).

Структура сигнатуры Σ – это тройка $\langle D, \Sigma, \mathsf{Int}\rangle$. Здесь D – это множество (обычно счетное бесконечное в этой статье), называемое *универсумом* (или областью) структуры, Int – это *интерпретация*, которая отображает каждое n-арное имя отношения в n-арное отношение на D, другими словами – в подмножество D^n. Если задана структура сигнатуры Σ, то каждая формула в языке с этой сигнатурой *определяет* отношение на D.

Мы описали наиболее распространенный язык, в котором используются кванторы по элементам D. Но иногда мы рассматриваем другие варианты, в частности, с переменными по подмножествам D и кванторами по этим подмножествам (*монадический* язык), или по конечным подмножествам D (*слабый монадический* язык), или вообще без кванторов (*бескванторный* язык).

Зафиксируем универсум D и любое семейство отношений S на D.

Возьмем произвольное конечное подмножество элементов из S и дадим имена его элементам, взяв их из какого-то множества Σ. Теперь у нас есть структура $\langle D, \Sigma, \mathsf{Int}\rangle$. Любая формула в построенном языке определяет отношение на D. Все такие отношения мы называем *определимыми через* отношения из S, другими словами, *определимыми в* S (над D).

Все отношения, определимые в S, составляют *замыкание* S. Мы говорим, что S *порождает* свое замыкание, а S является *базисом* своего замыкания. Описанная операция действительно является замыканием в обычном алгебраическом смысле. Любое замкнутое множество отношений называется *пространством определимости* (над D).

Любое пространство определимости S имеет свою *группу автоморфизмов* $\mathsf{Aut}(S)$, образованную перестановками на D, сохраняющими все отношения из пространства S.

Все пространства определимости над D составляют решетку с естественными решеточными операциями: операция объединения решетки – это замыкание теоретико-множественного объединения, операция пересечения – теоретико-множественное пересечение. Очевидно, что эти решетки для различных счетных бесконечных D изоморфны. Другими словами, мы изучаем только одну решетку.

Исследование этой решетки является основной темой нашей работы. В частности, рассматривается решетка подпространств заданного пространства определимости. Эту решетку мы называем *решеткой определимости* этого пространства или *решеткой определимости* соответствующей структуры. Подпространства, а также порождающие их множества называют также редуктами (reducts) исходного пространства.

Мы будем рассматривать в основном конечно порожденные пространства. Конечно, наша основная решетка таким пространством не является.

Если задан набор порождающих (базис) для пространства, мы получаем теорию пространства. Выбор системы порождающих подобен выбору порождающих для линейного пространства. Для конечно порожденных пространств такие свойства, как разрешимость их теории, инвариантны относительно выбора различных конечных множеств порождающих. Мы часто будем говорить о свойстве пространства, имея в виду свойство теории, возникающей при произвольном выборе конечного порождающего множества. С другой стороны, буквально формулируемое понятие размерности не имеет смысла для пространств определимости: как легко видеть, всякий конечный базис можно заменить на одноэлементный. Некоторым аналогом размерности является «ширина», см. далее.

Сегодня мы считаем, что понятие определимости пространства (независимо от формального определения и терминологии) является одним из основных и центральных для математической логики и даже для математики вообще.

Как мы увидим из следующей главы, оно использовалось все то время, пока развивалась сама дисциплина математической логики. Тем не менее основные результаты, касающиеся этого понятия, в том числе точные определения и фундаментальные теоремы, были получены довольно поздно и пользовались гораздо меньшим вниманием, чем те, которые касались понятий «истинности» и «доказуемости».

Мы стараемся сохранить наш текст самодостаточным и ввести необходимые определения, при этом проследить первоисточники и мотивировки понятий. В некоторых важных случаях понимание проблем и значения понятий существенно уточнялись, менялись с течением времени. Вклад в данную область внесли ученые из ряда стран.

В следующем кратком историческом обзоре используются материалы из [2, 3, 4].

2. Отношения, логика, языки. Ранние подходы XIX века. Возникновение и мотивировка проблематики

Центральное в данной работе понятие отношения, определяемого формулой, неявно имелось уже у Джорджа Пикока (George Peacock) [5] и более конкретно у Джорджа Буля (George Boole) [6], хотя и без точного понятия «формулы».

В 1860–1890 годах Готлоб Фреге (Gottlob Frege) развил представления об отношениях и формулах, в том числе – кванторах [7, 8].

Чарлз Пирс (Charles Peirce) независимо от Фреге установил фундаментальные законы исчисления классов и построил теорию отношений. По сути, это и была постановка проблем определимости. Начиная со статьи 1870 года [9], Пирс представил окончательную форму своей логики отношений, завершенную в статье 1885 года [10]. Теория Пирса уже была контекстом, в котором стало возможным доказательство Леопольдом Лёвенгеймом (Leopold Löwenheim) первой метаматематической теоремы в его [11]. Лёвенгейм доказал, что каждое утверждение (Zählausdrücke) – это либо противоречие, либо имеет счетную модель (см. [12]). По существу, в работах Лёвенгейма, а также у Торалфа Сколема (Скулема) (Thoralf Skolem), была построена семантика логики отношений, хотя формальные определения не были даны.

Эрнст Шрёдер (Ernst Schröder) предложил первую полную аксиоматизацию исчисления классов и значительно расширил исчисление и теорию отношений [13, 14].

2.1. Как определить основные математические структуры? Геометрия и числа. Ширина пространств отношений

В конце XIX века итальянские (Джузеппе Пеано, Алессандро Падоа, Марио Пьери, ...) и немецкие (Готлоб Фреге, Мориц Паш, Давид Гильберт и др.) математики пытались найти «лучший» набор базовых понятий для геометрии и арифметики, рассматриваемых как дедуктивные системы. Речь шла именно о том, «как определить что-то через что-то».

В 1900 году в Париже состоялся Первый международный философский конгресс (1–5 августа) [15] и сразу следом за ним Второй международный конгресс математиков (6–12 августа) [16]. Они проходили во время Всемирной выставки в Париже.

На конгрессе математиков Давид Гильберт (David Hilbert) представил свой список проблем [17], некоторые из которых стали центральными в математической логике. В частности, Десятая проблема Гильберта относилась, по существу, к теории определимости. Алессандро Падоа (Alessandro Padoa) сделал два доклада по аксиоматизации: целых чисел и геометрии.

На философском конгрессе Бертран Рассел (Bertrand Arthur William Russell, 3rd Earl Russell) прочитал доклад о применении теории отношений к проблеме порядка и абсолютного положения в пространстве и времени. Роль математики в философском конгрессе видна хотя бы по докладу на нем видного российского математика А. В. Васильева «Принципы исчисления вероятностей». Итальянская школа логического анализа математики была представлена Джузеппе Пеано (Giuseppe Peano) и его учениками Чезаре Бурали-Форти (Cesare Burali-Forti), Алессандро Падоа и Марио Пьери (Mario Pieri). Пеано и Бурали-Форти говорили об определениях, Пьери говорил о геометрии, рассматриваемой как чисто логическая система. Падоа прочитал свое знаменитое эссе, содержащее «логическое введение в любую теорию», где он утверждает [18]:

> «Чтобы доказать, что система неопределенных символов неприводима по отношению к системе недоказываемых утверждений [аксиом], необходимо и достаточно найти для любого неопределенного символа интерпретацию системы неопределенных символов, которая верифицирует систему недоказываемых утверждений и продолжает делать это, если мы изменим значение только одного символа».

Марио Пьери сформулировал около 1900 года и завершил в своей работе «Точка и сфера» 1908 года полную аксиоматизацию евклидовой геометрии, основанную на неопределяемых понятиях точки и равноудаленности двух точек от третьей точки [19].

Как указано в [3], «в 1904 году Освальд Веблен (Oswald Veblen) предложил альтернативу аксиоматике Пьери. Аксиоматика Веблена была проще и рассматривала в качестве неопределяемых понятий только точку и отношение «лежать между». Однако в 1907 г. Федериго Энрикес (Federigo Enriques) нашел ошибку в работе Веблена».

2.2. Ширина

Стремление построить простейшую систему понятий для исторически важнейшей математической теории – геометрии – привело, в частности, к «погоне» за сокращением количества аргументов у отношений. Уже в 1930-е гг. Альфред Тарский (Alfred Tarski) и Адольф Линденбаум (Adolf Lindenbaum) показали в [20], что выбор Пьери равноудаленности в качестве единственного неопределенного отношения для евклидовой геометрии был оптимальным. Не существует семейства бинарных отношений, через которое можно определить все отношения евклидовой геометрии.

Сам Тарский для определения геометрии использовал два отношения: четырехместное отношение конгруэнтности двух пар точек и трехместное отношение: «точка лежит на отрезке между двумя другими».

В общем контексте теории определимости можно дать следующее определение.

Определение 1. *Пусть задано пространство определимости S. Его* ширина *– это минимальное n такое, что S порождается отношениями с n или меньшим количеством аргументов.*

Следующая теорема отвечает на естественно возникающий вопрос.

Теорема 1. *Существуют пространства определимости любой конечной или счетной ширины.*

Важнейшую американскую группу, занимавшуюся основаниями математики в начале XX в., образовывали «Американские теоретики постулатов» (American Postulate Theorists). Ее лидерами были Эдвард Хантингтон (Edward Huntington) (Президент Американской математической ассоциации и изобретатель системы выделения мест в Палате представителей США) и Освальд Веблен (первый член Принстонского института перспективных исследований). Хантингтон, в частности, занимался аксиоматикой действительных чисел и других упорядоченных множеств. Ему принадлежит и работа 1935 г. [21], где он, по существу, дает описание всех подпространств определимости для порядка рациональных (или действительных) чисел:

> «Четыре типа порядка, взаимосвязи которых рассматриваются в этой статье, можно для краткости назвать (1) линейный порядок; (2) «между»; (3) «цикл» и (4) «разделение».

Эти «четыре типа порядка», с шириной 2, 3, 4, будут играть особую роль в дальнейшем развитии событий, обсуждаемых в настоящей работе. Имеет смысл их выписать в виде формул в современном стиле:

$$x \leqslant y$$

– линейный порядок;

$$(x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3) \vee (x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1)$$

– «между»;

$$(x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3) \vee (x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_1) \vee (x_3 \leqslant x_1 \leqslant x_2)$$

– «цикл»;

$$\begin{aligned} &(x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4) \vee (x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_4) \vee \\ &\vee (x_1 \leqslant x_4 \leqslant x_3 \leqslant x_2) \vee (x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_1 \leqslant x_2) \vee \\ &\vee (x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_1) \vee (x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_4 \leqslant x_3) \vee \\ &\vee (x_4 \leqslant x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1) \vee (x_4 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3) \end{aligned}$$

– «разделение».

Последняя формула выглядит не очень обозримой, но имеет ясный геометрический смысл: отрезки с концами x_1, x_3 и с концами x_2, x_4 пересекаются, но не вложены один в другой.

2.3. Определимость формулы отношением. Элиминация кванторов. Глубина пространства отношений

Вероятно, Тарский впервые ясно сформулировал и использовал понятие отношения, определяемого формулой, в обычной индуктивной форме около 1930 г., в частности, в [1], [22]. В неявной форме, однако, понятие определимости использовалось намного раньше. В частности, оно присутствовало в описаниях элиминации кванторов в работах Сколема, Пресбургера и Лэнгфорда.

Элиминация кванторов. Кванторная глубина

По-видимому, упомянутые авторы рассматривали элиминацию кванторов прежде всего как способ задания семантики, понимания формулы, содержащей кванторы и доказательства «разрешимости» соответствующей теории, то есть установления «метаматематической» теоремы о том, что всякое утверждение теории или доказуемо, или опровержимо.

Купер Лэнгфорд (Cooper Langford) использовал этот метод в 1927 году [23, 24], чтобы доказать разрешимость теории плотного порядка без первого и последнего элемента. Тарский расширил результаты Лэнгфорда до теории первого порядка дискретного порядка без первого или последнего элемента и для теории дискретного порядка с первым и последним элементом.

Мойжеш Пресбургер (Mojżesz Presburger) [25] элиминировал кванторы в сложении и порядке целых чисел.

Сколем продемонстрировал в 1929 году элиминацию кванторов [26] для умножения и порядка натуральных чисел. Полное доказательство было опубликовано Мостовским в 1952 году [27].

Сам Тарский объявил в 1931 году, что он доказал элиминируемость кванторов для элементарной алгебры и геометрии (опубликовано это было, однако, только в 1948 году, см. [28]).

Указанные авторы не давали формального определения элиминации кванторов. Такое определение было бы естественно дать, обращаясь к конечной сигнатуре и потребовав, чтобы всякая формула была эквивалентна бескванторной. Однако многие из упомянутых конструкций этому определению не соответствуют: таких конечных сигнатур там нет. Например, в теории сложения целых чисел, даже если дополнительно использовать фиксированное конечное число функциональных символов, нельзя записать для каждого натурального n, что число делится на m. Тем паче это невозможно в случае (как в данной работе), когда функциональных символов нет.

Естественный выход, как нам кажется, состоит в рассмотрении несколько более общей ситуации и более общего понятия. Это понятие также хорошо известно – это кванторная глубина.

Определение 2. *Пусть S – пространство определимости, порожденное конечным множеством отношений F.*

Кванторная иерархия для S – это возрастающая последовательность классов отношений $F_0, F_1, \ldots$. Здесь F_0 – это бескванторное (булево) замыкание F, для каждого $i = 0, 1 \ldots F_{i+1}$ получается из F_i путем взятия всех проекций отношений из F_i (добавления некоторого числа кванторов существования) и последующего булева замыкания. (Альтернативное определение может быть дано путем подсчета чередований кванторов.) Иерархия может быть бесконечной длины, если F_{i+1} отличается от F_i для всех i, или конечной длины n – минимальной, для которой $F_{n+1} = F_n$. Глубина пространства определимости – это минимальная (по всем конечным множествам образующих) длина кванторной иерархии для него.

В работе [29] была сформулирована задача о возможных значениях глубины. Ответ был получен в 2010 году [30]:

Теорема 2. *Существуют пространства определимости любой конечной или счетной глубины.*

Вот несколько хорошо известных примеров. Мы неформально указываем структуру и ожидаемую глубину иерархии для нее:

- $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ – глубина 0.
- Плотный порядок без первого и последнего элемента – глубина 0.
- Плотный порядок $[0, 1]$ – глубина 0 (если мы включим 0 и 1 в сигнатуру).
- $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$ – глубина 1.
- Арифметика Пресбургера – глубина 1. (Линейные формы, сравнения по модулю m могут быть введены с помощью кванторов существования.)
- Расширения Арифметики Пресбургера быстро растущими функциями – глубина 1 [31].
- Арифметика Сколема – глубина 1.
- Алгебра Тарского – глубина 1. (Многочлены вводятся с помощью кванторов существования.)
- Арифметика нескольких следований – глубина 2, может быть 1 (доказательство с помощью автоматов).
- Арифметика $+$ и $\times$ – бесконечность.

Априори длина иерархии для пространства S может зависеть от выбора (конечного) F.

Проблема 1. *Может ли длина иерархии действительно различаться для разных конечных базисов?*

В частности:

Проблема 2. *Существуют ли естественные примеры «большой» (2, 3, 4, …) конечной глубины?*

Проблема 3. *Какова глубина пространства Рабина [32], [33]?*

2.4. Разрешимость в пространствах отношений. Проблема Элгота – Рабина

Разрешимость в смысле существующего алгоритма решения вопроса о том, является ли утверждение (замкнутая формула) истинным или ложным, в большинстве случаев – не побочный продукт элиминации кванторов или прояснения семантики, а основная цель исследования. Тарский свой результат, относящийся к элиминации кванторов для поля действительных чисел (и очень важный как таковой), формулирует как «разрешающий метод для элементарной алгебры и геометрии» (хотя практически применимого варианта такого метода пришлось ждать еще несколько десятилетий – вплоть до появления мощных цифровых технологий и систем компьютерной алгебры).

В нашем контексте естественно рассматривать не только разрешимость теории, но и разрешимость элементов пространства определимости. Конечно, нам нужна «конструктивизация» области D. Не вдаваясь в тонкости теории конструктивных моделей, договоримся, например, взять в качестве области множество натуральных чисел. Кроме того, как в большей части данной работы, будем предполагать, что пространство обладает конечным базисом.

Определение 3. *Мы называем пространство* разрешимым*, если существует алгоритм, вычисляющий значение всякой формулы на всяком аргументе (наборе натуральных чисел).*

Конечно, разрешимость пространства влечет разрешимость теории соответствующей структуры, и если в языке можно определить любой элемент универсума, то разрешимость пространства эквивалентна разрешимости теории этого пространства.

В то же время, как было показано в [31], существует одноместный предикат R, для которого пространство, порожденное $+$, R на натуральных числах имеет неразрешимую теорию, хотя в этой теории определимы все натуральные числа и каждое отношение, входящее в пространство определимости этой структуры, разрешимо.

Проблема 4. *[29] Существуют ли пространства произвольной конечной или бесконечной глубины с разрешимой теорией?*

Проблема 5. *Существуют ли разрешимые пространства произвольной конечной или бесконечной глубины?*

Следуя Калвину Элготу (Calvin Elgot) и Майклу Рабину (Michael Rabin), мы говорим, что конечно порожденное пространство определимости имеет *максимально разрешимую теорию*, если его теория разрешима, а теория любого большего пространства определимости не разрешима.

Проблема 6. *[34] Существует ли структура с максимально разрешимой теорией?*

В [35] С. Ф. Сопрунов доказал (используя метод форсинга), что каждое пространство, содержащее ветвящийся порядок, не является максимальным. Частичный порядок $\langle B; \succ \rangle$ называется *ветвящимся*, если для каждого $a \in B$ существуют различные элементы $b_1, b_2 \in B$ такие, что $a \succ b_1$, $a \succ b_2$, и ни один элемент $c \in B$ не удовлетворяет как $b_1 \succ c$, так и $b_2 \succ c$. В качестве следствия он также доказал, что проблема Элгота – Рабина имеет отрицательное решение, если рассматривать в качестве языка определимости слабый монадический язык (мы уже говорили, что всюду, если не оговорено противное, мы рассматриваем «элементарный» язык). При этом в самой статье Элгот и Рабин параллельно рассматривали и элементарный, и слабый монадический, и монадический случаи. Вопрос для слабого монадического случая – естествен.

Теорема 3. *[35] Если в структуре с разрешимой теорией выразим ветвящийся порядок, то теория такой структуры не является максимально разрешимой.*

Типичным примером ветвящегося порядка является порядок $\succ$, на словах в конечном алфавите, определенный так, что $a \succ b \leftrightarrows$ (слово a является началом слова b).

Следствие 1. *Разрешимая теория натурального ряда, с несколькими следованиями, не является максимально разрешимой. То же самое верно для любого обогащения данной структуры.*

В случае слабо монадических структур порядок определяется на парах конечных непересекающихся множеств $\langle a, b\rangle$ так, $\langle a_1, b_1\rangle \succ \langle a_2, b_2\rangle \leftrightarrows (a_1 \subset a_2 \wedge b_1 \subset b_2)$ — очевидно, что данный порядок ветвящийся.

Следствие 2. *Не существует структуры с максимально разрешимой слабой монадической теорией.*

Проблема 7. *Существует ли структура с максимально разрешимой монадической теорией?*

Проблема 8. *Верно ли, что у структуры $\langle \mathbb{N}, \{<\}\rangle$ нет максимально разрешимого расширения?*

В [36] Алексис Бес (Alexis Bés) и Патрик Сежелски (Patrick Cégielski) рассматривают ослабление вопроса Элгота – Рабина, а именно вопрос о том, любая ли структура, теория которой разрешима, может быть расширена некоторой константой таким образом, что результирующая структура все еще имеет разрешимую теорию. Они отрицательно отвечают на этот вопрос, доказывая, что существует структура с разрешимой теорией (даже ее монадическая теория разрешима) такая, что любое расширение ее константой имеет неразрешимую теорию.

В [37] они же указывают достаточное условие для того, чтобы структура имела максимально разрешимую теорию.

В силу результата Бес и Сежелски естественно делать различие между структурами с разрешимыми теориями и разрешимыми структурами.

Проблема 9. *Существует ли максимальное разрешимое пространство?*

Наконец, в контексте проблем разрешения для алгебраических систем естественно следующее определение.

Определение 4. *Пусть пространство задано своим конечным базисом и сигнатурой для него.* Проблема определимости *для него состоит в выяснении по двум отношениям, заданным формулами этой сигнатуры, определимо ли первое из этих отношений через второе.*

Несложно доказывается следующее утврeждение:

Теорема 4. *Пусть разрешимое пространство задано конечным базисом и сигнатурой для него. Пусть далее, все подпространства пространства можно без повторения перечислить их базисами (в этой сигнатрue). Тогда проблема определимости для этого пространства разрешима.*

Как будет отмечено далее, для следования на целых числах указанное перечисление существует, таким образом, для этого пространства проблема определимости разрешима. Другим очевидным примером является пространство порядка рациональных чисел.

3. Общие фундаментальные теоремы об определимости. Полнота автоморфизмов. 1950-е годы

Ричард Бюхи (Richard Buchi) и Кеннет Данхоф (Kenneth Danhof) констатировали, что кардинальный прогресс в теории определимости произошел в 1940–1950-х гг. [2]:

> «В то время [1930-е гг.] могло показаться, что большинство основных проблем элементарных систем аксиом были решены. Однако более внимательный наблюдатель, прочитав статьи Тарского [38, 39], возможно, задавался вопросом о существовании общих теорем, которые объясняли бы элементарную определимость. Одной из таких теорем является теорема Бета, доказанная в 1953 г. [40]. В 1959 году Свенониус опубликовал дальнейший результат об элементарной определимости [41]. Так же как и в случае результатов Бета и Крейга, логики не торопились признать важность теоремы Свенониуса как основного инструмента теории определимости – возможно потому, что были плохо о ней осведомлены».

Эти теоремы были получены на пути, который исходно предвидели Падоа и Тарский.

3.1. Автоморфизмы. Изоморфизмы

С появлением Эрлангенской программы Клейна в 1872 г. [42] стало ясно, что группы автоморфизмов являются полезным средством изучения математических теорий.

В определении категоричности у Хантингтона [43] появилось слово «изоморфизм». Там Хантингтон говорит, что «особое внимание можно обратить на обсуждение понятия изоморфизма между двумя системами и понятия достаточного, или категоричного, набора постулатов».

Подводя итоги этой исторической перспективе, Тарский в своей статье «Что такое логические понятия?», опубликованной в 1963 году [1], объясняет предмет логики как изучение «всего... с точностью до перестановок»: «Я попытаюсь расширить его [Клейна] метод за пределы геометрии и применить его также к логике... Я использую термин «понятие» в довольно свободном и общем смысле. Таким образом, понятия включают индивидов, классы индивидов, отношения на индивидах».

3.2. Полнота. Теорема Свенониуса

В 1959 году Ларс Свенониус (Lars Svenonius) [41] опубликовал фундаментальный результат об определимости. Несмотря на его фундаментальность, сравнимую, как мы полагаем, с фундаментальностью теремы о полноте (связываемой с именем Гёделя), этот реультат цитируется намного меньше, не включается в базовые, а часто – и в продвинутые курсы математической логики. Результат Свенониуса может рассматриваться как уточнение и реализация идеи (или «метода») Падоа. Начнем со вспомогательных определений, продолжающих нашу линию базовых определений из введения к настоящей работе.

Пусть S_1 – пространство определимости на носителе A, множество $B \subseteq A$, и пусть S_2 – семейство отношений на B, являющихся ограничениями отношений из S_1. Предположим, что заданы имена для отношений из конечного подмножества F множества S_1, и те же самые имена используются для ограничения отношений из набора F на B. Каждая формула, содержащая только эти имена, определяет два отношения: одно на A и второе на B. Второе отношение не обязано быть ограничением первого на множестве B, но если оно является ограничением для любой формулы, то пространство S_2 называется *элементарным ограничением* пространства S_1 (а S_1 является *элементарным расширением* пространства S_2). Любое элементарное ограничение пространства определимости является пространством определимости.

В нашем контексте теорема Свенониуса является чрезвычайно полезным инструментом. Вот ее формулировка:

Теорема Свенониуса 1. *Пусть S^-, S — счетные пространства определимости на носителе A, причем $S^- \subset S$. Тогда для любого отношения $R \in S$ следующие два утверждения равносильны:*

(a) $R \in S^-$;

и

(b) для любого счетного пространства определимости S', являющегося элементарным расширением пространства S, и любых $S_0 \subset S', R_0 \in S'$, таких, что ограничение S_0 на A совпадает с S^-, ограничение R_0 на A совпадает с R, группа перестановок носителя пространства S', сохраняющая все отношения из S_0, сохраняет и R_0.

Таким образом, Теорема Свенониуса утверждает, что если мы рассматриваем перестановки не только исходного пространства, но и перестановки элементарных расширений, то возможно различить подпространства исходного пространства. Теорему Свенониуса можно считать «Теоремой полноты для определимости». Замечательными ее чертами является естественность формулировки и прозрачность доказательства. Можно выразить уверенность в том, что число ее применений будет существенно возрастать в ближайшие десятилетия.

Фактически, мы можем модифицировать теорему так, чтобы использовать один универсум, как было показано в [44].

Через $\mathcal{F}$ обозначим множество всюду определенных функций $f\colon \mathbb{N} \to D$. Если R является n-арным отношением на D и φ – это отображение $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, тогда мы говорим, что φ *почти сохраняет* R, если $\{i \mid R(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \not\equiv R(\varphi(f_1)(i), \ldots, \varphi(f_n)(i))\}$ конечна для любых $f_1, \ldots, f_n$ в $\mathsf{Dom}(\varphi)$.

Теорема 5. (CH) *Пусть S – пространство определимости. Следующие условия эквивалентны:*

(1) отношение $R \in S$,

(2) любая перестановка φ на $\mathcal{F}$, который почти сохраняет все отношения из S, почти сохраняет R.

Примечательной особенностью этой формы теоремы Свенониуса является то, что условие (2) является чисто комбинаторным, не апеллирующим ни к какому логическому языку.

3.3. Автоморфизмы и соответствие Галуа

Как мы видим в теореме Свенониуса, группа автоморфизмов является важным объектом при изучении пространств определимости. Введем стандартное понятие: *симметрическая группа $Sym(D)$* на множестве D – это группа, состоящая из всех перестановок D. На симметрической группе имеется естественная топология поточечной сходимости: базис окрестностей элемента состоит из всех перестановок, которые совпадают с ним на некотором конечном множестве.

Введем еще одно стандартное обозначение: для пространства S обозначим через $\mathsf{Aut}(S)$ группу всех автоморфизмов S, то есть перестановок носителя пространства, сохраняющих значения всех элементов пространства.

Легко видеть, что для любых пространств S и T мы имеем

$$S \subseteq T \Rightarrow \mathsf{Aut}(S) \supseteq \mathsf{Aut}(T)$$

и что группы автоморфизмов для пространств замкнуты в смысле упомянутой выше топологии. Таким образом, группы, соответствующие подпространствам пространства S, оказываются надгруппами для $\mathsf{Aut}(S)$. Соответствие между пространствами определимости и их группами автоморфизмов – антимонотонное соответствие Галуа. Группы для разных подпространств одного пространства могут совпадать. Теорема Свенониуса помогает обойти это обстоятельство.

Примеры использования групп перестановок для описания решеток определимости см., в частности, в [45].

3.4. ω-категоричность. Максимальность

Пространство (конечно порожденное) называется *ω-категоричным*, если все счетные пространства, элементарно эквивалентные ему, изоморфны ему.

Для ω-категоричных структур определимые подпространства находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми группами автоморфизмов:

$$S \subseteq T \iff \mathsf{Aut}(S) \supseteq \mathsf{Aut}(T)$$

Это сразу же следует из теоремы Свенониуса, или из так называемой теоремы Энгелера – Рыль-Нардзевского – Свенониуса (см. напр. [46]).

Простым обобщением понятия ω-категоричности является понятие (счетной) *максимальности.* А именно: счетное пространство S назовем максимальным, если любое его счетное элементарное расширение изоморфно S.

Из теормы Свенониуса непосредственно следует:

Следствие 3. *Пусть S^-, S – счетные пространства определимости на носителе A, причем $S^- \subset S$ и пространство S максимально. Тогда для любого отношения $R \in S$ следующие два утверждения равносильны:*
(a) $R \in S^-$;
и
(b) группа перестановок на A, сохраняющая все отношения из S^-, сохраняет R.

4. Решетки определимости. Что известно? Открытые вопросы

4.1. Примеры. Соотношения в решетках определимости

Многочисленные результаты были посвящены изучению специфических пространств определимости. Приведем два типичных примера.

Иван Корец (Ivan Korec) в [47] исследовал различные естественные базисы для арифметики сложения и умножения целых чисел.

Теорема Кобхэма – Семенова [48] утверждает, что в нетривиальном случае пересечение пространств, порожденных автоматами, работающими в разных системах счисления, совпадает с арифметикой Пресбургера (пространством, порожденным сложением натуральных чисел).

4.2. Рациональный порядок. Однородные структуры

Начнем с самого известного пространства определимости, где впервые была описана нетривиальная решетка подпространств. Это пространство структуры $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$. Описание подпространств было получено Клодом Фрасне (Claude Frasnay) в 1965 году [49]. Все подпространства указанного пространства задаются следующими группами, которые мы описываем, добавляя что-то к автоморфизмам порядка:

- Группа, порожденная сменой знака – она сохраняет отношение «между».

- Группа, возникающая, если мы сворачиваем рациональные числа в окружность и ее поворачиваем. Иначе можно представить отображения из этой группы как переставляющие два открытых луча рациональных чисел, получающихся сечением по иррациональному числу. Эта группа сохраняет отношение «цикл».
- Используем оба упомянутых выше класса отображений. Группа сохраняет отношение «разделение».

Примечательно, что это именно те отношения, которые в аксиоматической форме были описаны Хантингтоном в работе 1935 года [21], упомянутой выше.

Чтобы получить полный список подпространств порядка на рациональных числах, нужно добавить еще два очевидных пространства, отвечающих отношениям порядка и равенства.

Структура $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ является ω-категоричной. Это установил Хантингтон, видимо, впервые применивший челночный метод («back-and-forth» method), открытие которого иногда приписывается Кантору [50]. На самом деле доказательство Хантингтона показывает, что $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ однородна в следующем смысле.

Определение 5. *Структура называется* однородной, *если каждый изоморфизм между ее конечными подструктурами продолжается до автоморфизма всей структуры.*

Это определение является обобщением его «группового аналога».

Определение 6. *Группа перестановок называется* однородной, *если любое ее конечное подмножество может быть переведено в любое другое подмножество той же мощности посредством элемента группы.*

Очевидно, что если группа $\mathsf{Aut}(S)$ однородна, то и структура S однородна. На самом деле не только структура $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ однородна, но и группа $\mathsf{Aut}(\langle \mathbb{Q}; < \rangle)$ однородна.

Питер Кэмерон [51] показал, что на счетном множестве существует всего пять однородных групп перестановок. В качестве следствия мы получаем, что в случае $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$, помимо $\mathsf{Aut}(\langle \mathbb{Q}; < \rangle)$ и $\mathsf{Sym}(\mathbb{Q})$, есть только три однородные группы. Это – именно те, которые были описаны выше.

Всякое конечно порожденное счетное однородное пространство является ω-категоричным.

Для ω-категоричных структур однородность эквивалентна элиминируемости кванторов. (см., например, [45] , стр. 1607, Proposition 3.1.6).

Все подпространства для $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ однородны и допускают элмиминацию кванторов.

Хорошим источником информации, связанной с однородными структурами, является [45].

4.3. Случайный Граф. Гипотеза Томаса

Наш следующий пример – еще одна замечательная однородная структура.

Определение 7. *Счетный граф называется* случайным, *если для для любых двух конечных непересекающихся множеств U, V его вершин существует вершина z, соединенная с каждой вершиной в U и не соединенная ни с одной вершиной в V.*

Свойство из определения называется «Свойством ресторана Алисы». Последний термин был придуман Питером Винклером [52] со ссылкой на знаменитую песню «Alice's Restaurant Massacree» Арло Гатри (Arlo Guthrie) 1967 г., где в припеве говорится: «Вы можете получить все, что захотите, в ресторане Алисы».

Любые два случайных графа изоморфны. Доказательство аналогично доказательству изоморфизма для любых двух счетных плотных неограниченных порядков (случай $\mathbb{Q}$). Термин «случайный» может быть объяснен следующим свойством:

> Если граф X на фиксированном счетном множестве вершин выбирается путем выбора ребер независимо случайным образом с вероятностью $1/2$ из неупорядоченных пар вершин, то с вероятностью 1 он будет случайным.

Явная конструкция R есть в [53]:

> Множество вершин – это $\mathbb{N}$, и x соединена с y тогда и только тогда, когда x-я цифра в двоичной записи y равна 1 или наоборот.

Вот описание подпространств определимости для случайного графа R из [54].

> Пусть $R(a,b)$ означает, что «(ab) – ребро в R», $R^{(k)}$ – k-арное отношение, содержащее все k-наборы попарно различных вершин $x_1, \ldots, x_k$, для которых количество (неориентированных) ребер между этими вершинами нечетно. Тогда подпространства определимости для случайного графа задаются следующими порождающими: R; $R^{(3)}$; $R^{(4)}$; $R^{(5)}$; $=$.

Легко видеть, что структура $R^{(3)}$ не однородна и не допускает элиминации кванторов.

Саймон Томас (Simon Thomas) получил это описание в [55] и выдвинул следующую гипотезу:

> Решетка всякого конечно порожденного однородного пространства конечна.

Проблема 10. *Доказать или опровергнуть гипотезу Томаса.*

4.4. Примеры конечных решеток

Для проверки гипотезы Томаса в [56] была рассмотрена суперпозиция двух однородных структур: $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ и случайного графа $\langle G; E \rangle$.

Было показано, что без учета очевидных пространств $\langle D; <, E \rangle$ и $\langle D; = \rangle$ существует ровно 42 таких пространства.

В [57] полностью описана решетка подпространств для структуры, получающейся добавлением одной константы к $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$. Это расширение, конечно, можно представить как добавление двух одноместных отношений $x \leqslant a$ и $a \leqslant x$. В этой статье рассматриваются и другие расширения $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ с помощью унарных предикатов в ситуациях, где возможна элиминация кванторов. Получающиеся решетки определимости всегда оказываются конечными. В частности, в простейшем случае разбиения рациональных чисел на два открытых выпуклых подмножества (иррациональное сечение рациональных чисел) существует ровно 53 подпространства, отвечающих 5 стандартным надгруппам на элементах сечения, а также перестановкам, сохраняющим, переставляющим и смешивающим элементы сечения.

4.5. ω-категоричные неоднородные пространства

Примером ω-категоричной структуры, имеющей бесконечно много подпространств определимости, является бесконечномерное векторное пространство над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2$ [58].

4.6. Не ω-категоричные пространства

Мы не так уж много знаем о решетках определимости не ω-категоричных структур. Проясняя ситуацию с гипотезой Томаса, можно спросить, влечет ли конечность решетки однородность? В работе [59] строится пример не ω-категоричной структуры с тривиальной конечной решеткой определимости – в решетке ровно два элемента. Приведем описание структуры из этой работы. Универсумом M структуры является множество «дважды бесконечных», т. е. индексированных целыми числами, последовательностей 0 и 1, у которых число 1 конечно. Определим отношение $C(x,y,z)$ на M: $C(x,y,z)$ выполнено, если на некотором месте последовательности x и y различаются, а y и z на этом и всех предшествующих местах совпадают. Теперь определим отношение D: $D(x,y,z,w)$ выполнено, если выполнено одно из двух условий $C(x,z,w) \wedge C(y,z,w)$; $C(z,x,y) \wedge C(w,x,y)$. Требуемый пример структуры – это $\langle M; D(x,y,z)\rangle$.

Другой пример представлен в [60]. Авторы показывают, что пространство $\langle \mathbb{Q}; S(x,y,z)\rangle$, где $S(x,y,z)$ интерпретируется как $(z{=}(x{+}y)/2)$ (или, то же самое, структура $\langle \mathbb{Q}; f(x,y,z)\rangle$, где $f(x,y,z) = x{-}y{+}z$)), не имеет нетривиальных подпространств (вопрос о существовании нетривиальных подпространств у данного пространства был поставлен в [59]). Общий план доказательств несложен: авторы замечают, что структура $\langle \mathbb{Q}^{<\omega}; +\rangle$ (здесь $\mathbb{Q}^{<\omega}$ – последовательности рациональных чисел, равные 0 почти всюду, сложение определяется покомпонентно) является насыщенным элементарным расширением $\langle \mathbb{Q}; +\rangle$, свойства которого близки к свойствам максимальной структуры (максимальность см. ниже), поэтому достаточно рассмотреть только перестановки структуры $\langle \mathbb{Q}^{<\omega}; +\rangle$. После этого доказывается и используется, что $\mathsf{Aut}(\langle \mathbb{Q}^{<\omega}; f\rangle)$ – это максимальная замкнутая нетривиальная подгруппа в группе всех перестановок универсума.

Упомянем также исследования решеток определимости в структурах действительных [61, 62] и комплексных [63] чисел.

4.7. Следование на целых числах: явное описание бесконечной решетки определимости. Предмаксимальные пространства

Структура $\langle \mathbb{Z}; +1\rangle$ – целые числа с отношением следования – не является ω-категоричной и имеет глубину 1. Для любого натурального числа n мы определяем пространства $A_{i,n}$ их одноэлементными порождающими:

$$|x_1 - x_2| = n \text{ — } A_{0,n}(x_1, x_2)$$
$$(x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = n) \vee (x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = -n) \text{ — } A_{1,n}(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ и}$$
$$x_1 - x_2 = n \text{ — } A_{2,n}(x_1, x_2)$$

Теорема 6. [64] *Любое подпространство пространства $\langle \mathbb{Z}; +1\rangle$ совпадает с $A_{i,n}$ для некоторого $i \leqslant 2$ и натурального n.*
$A_{i,n} \succ A_{i-1,n}$ для любого $0 < i \leqslant 2$ и натурального n
и если $0 < i \leqslant 2$ и $n \neq m$, то $A_{i,n} \succ A_{i,m} \iff n$ является делителем m.
$[A_{i,d}] \cup [A_{j,k}] = [A_{m,n}]$, где $m = \max\{i,j\}, n =$ НОД(d,k); и
$[A_{i,d}] \cap [A_{j,k}] = [A_{m,n}]$, где $m = \min\{i,j\}, n =$ НОК(d,k).
Все $A_{i,n}$ различны.

Доказательство теоремы использует понятие субмаксимальности (пред-максимальности).

Определение 8. *Пространство называется предмаксимальным, если оно элементарно эквивалентно максимальному.*

В данном случае максимальное пространство – это непересекающееся объединение счетного числа копий целых чисел, добавление единицы к элементу какой-то копии действует внутри этой копии. Это пространство является максимальным, и оно элементарно эквивалентно целым числам с отношением следования.

Проблема 11. *Описать решетку подпространств для $\langle \mathbb{N}; +1\rangle$.*

Проблема 12. *Описать решетку подпространств для натуральных чисел с несколькими следованиями.*

5. Разрешимость в решетках. Самоопределимость Мучника

Естественная алгоритмическая проблема для алгебраической структуры, в нашем случае – решетки определимости: принадлежит ли элемент пространства (заданный формулой) подпространству, порожденному заданным набором элементов? Положительные и отрицательные результаты по этому вопросу для однородных структур были получены в [65].

Андрей Мучник в своей работе [66] ввел следующее определение:

Определение 9. *Пространство определимости S называется* самоопределимым, *если существует конечная сигнатура Σ для S и последовательность формул $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ такая, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$*

1. F_n – замкнутая формула в сигнатуре $\Sigma \cup \{P\}$, где P – имя n-арного отношения.

2. Истинность F_n эквивалентна тому, что интерпретация P принадлежит S.

Ан. Мучник доказал следующую теорему.

Теорема 7. *Пространство $\langle \mathbb{N}; + \rangle$ самоопределимо.*

Источником этой теоремы для Мучника было доказательсто Семенова теоремы Кобхэма – Семенова. За счет введения понятия самоопределимости доказательство Мучника не только существенно проще доказательства Семенова, но и показывает, видимо, довольно редкое (если не уникальное) свойство арифметики Пресбургера. В то же время введенное Мучником понятие вполне соответствует духу исследований Тарского по определимости.

Мучник пишет:

> «К сожалению, мы не знаем других хороших примеров самоопределяющихся структур.
>
> Структуры с неразрешимой элементарной теорией обычно взаимно интерпретируются с помощью арифметики сложения и умножения целых чисел, не самоопределимость которых доказана в [67] (с использованием соображений категории и [68] исходя из соображений меры).
>
> Мы считаем, что структура, образованная алгебраическими вещественными числами (со сложением и умножением) не является самоопределимой; однако формальное доказательство отсутствует (и, вероятно, довольно сложно).
>
> (Нетрудно доказать, что структура, образованная всеми вещественными числами со сложением и умножением, не является самоопределимой. Действительно, предположим, что $\Phi(A)$ истинно тогда и только тогда, когда A определимо. Теперь мы заменим $A(x)$ на $x = y$. Новая формула $\Phi'(y)$ истинна тогда и только тогда, когда y – алгебраическое число. Но мы можем исключить кванторы в $\Phi'(y)$ и получить конечное объединение сегментов в качестве множества истинности для $\Phi'(y)$. Противоречие.)»

Проблема 13. *Найти еще примеры структур со свойством самоопределимости.*

6. Благодарности

Авторы выражают благодарность Альберту Абрамовичу Мучнику за первоначальную потановку проблемы, Андрею Мучнику за вклад в решение возникавших задач, Сергею Ивановичу Адяну, Владмиру Андреевичу Успенскому и участникам семинаров кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ за активное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tarski Alfred. What are logical notions? // History and philosophy of logic, 1986, 7.2. — Pp. 143–154.
2. Buchi J. Richard, Danhof Kenneth J. Definibility in normal theories. // Israel Journal of Mathematics, 1973, 14.3. — Pp. 248–256.
3. Smith James T. Definitions and nondefinability in geometry. // The American Mathematical Monthly, 2010, 117.6. — Pp. 475–489.
4. Hodges Wilfrid. Model Theory (Draft 20 Jul 2000) // 2000. [Электронный ресурс] URL: http://wilfridhodges.co.uk/history07.pdf (дата обращения 25 декабря 2020 г.).
5. Peacock George. Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis. // Report of the third meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Cambridge in 1833, John Murrary, London, 1834. — Pp. 185–352.
6. Boole George. The mathematical analysis of logic. // Philosophical Library, 1847.
7. Frege Gottlob. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. // Halle, 1879. Translated in van Heijenoort J. Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic. 1931. — Pp. 3–82.
8. Frege Gottlob. Grundgesetze der Arithmetik. // 1893. Publ. by Jena: Verlag Hermann Pohle, Band I/II. Partial translation of Band I, The Basic Laws of Arithmetic, by M. Furth. Berkeley: U. of California Press, 1964.
9. Peirce Charles Sanders. Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic. // Memoirs of the American academy of arts and sciences, 1873, vol. 9, part 2. — Pp. 317–378.
10. Peirce Charles Sanders. On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation. // American journal of mathematics, 1885, 7.2. – Pp. 180–196.
11. Löwenheim Leopold. Über möglichkeiten im relativkalkül. // Mathematische Annalen, 1915, 76.4. – Pp. 447–470.
12. Skolem Thoralf. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfullbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sdtze nebst einem Theorem über dichte Mengen. // Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 4, 1920.
13. Schröder Ernst. On Pasigraphy. Its Present State and the Pasigraphic Movement in Italy. // The Monist, 1898, 9.1. – Pp. 44–62.
14. Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logik. Volumes 1 to 3. // Teubner, Leipzig. Reprinted by Chelsea, New York, 1966.
15. International Congress of Philosophy. // Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, Four volumes. Paris: Librairie Armand Colin, 1900–1903.
16. Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900: procès-verbaux et communications. // Publies par Ernest Duporcq. Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, 1902. – 455 pp.

17. Hilbert David. Mathematische probleme. // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1900. – Pp. 253–297.

18. Padoa Alessandro. Logical introduction to any deductive theory. // 1900. Опубл. в сб. From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Ed. by Jean van Heijenoort. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967. – Pp. 118—123.

19. Pieri Mario. La geometria elementare istituita sulle nozioni ‘punto’ é ‘sfera’. // Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze, 1908, 15. – Pp. 345–450.

20. Lindenbaum A., Tarski A. Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien. // Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Heft 7, 1935. – Pp. 15–22. Пер. на англ.: On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories. // Alfred Tarski. Logic, Semantics, Metamathematics. // J. Corcoran, ed., Hackett, Indianapolis, 1956. – Pp. 384–392.

21. Huntington Edward V. Inter-Relations Among the Four Principal Types of Order. // Transactions of the American Mathematical Society, 1935, 38.1. – Pp. 1–9.

22. Tarski Alfred. The Concept of Truth in Formalized Languages. // Alfred Tarski: Logic, Semantics, Metamathematics. Trans. J. H. Woodger, second edition ed. and introduced by John Corcoran, Hackett, Indianapolis, 1983. – Pp. 152–278.

23. Langford Cooper Harold. Some theorems on deducibility. // Annals of Mathematics Second Series, 1926–1927, vol. 28, No. 1/4. – Pp. 16–40.

24. Langford Cooper Harold. Theorems on Deducibility (Second paper). // Annals of Mathematics, Second Series, 1926–1927,Vol. 28, No. 1/4. – Pp. 459–471.

25. Presburger M. Über die vollständigkeit eines gewissen systems der arithmetik ganzer zahlen, in welchem die addition als einzige operation hervortritt. // Sprawozdanie z 1 Kongresu Matematyków Krajow Slowianskich, Ksiaznica Atlas, 1930. – Pp. 92–10. Пер. на англ.: On the completeness of a certain system of arithmetic of whole numbers in which addition occurs as the only operation. // History and Philosophy of Logic, 12(2), 1991. – Pp. 225–233.

26. Skolem Torlaf. Über gewisse Satzfunktionen in der Arithmetik. // Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. klasse 7, 1930.

27. Mostowski Andrzej. On direct products of theories. // Journal of Symbolic Logic, 1952, vol. 17. – Pp. 1—31.

28. Tarski Alfred. A decision method for elementary algebra and geometry. // Prepared for publication with the assistance of J. C. C. McKinsey. Second edition, revised. Lithoprinted. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951. – 63 pp.

29. Семенов А. Л. Условия конечности для алгебр отношений. // Труды математического института им. В. А. Стеклова, 2003, т. 242. — С. 103–107.

30. Семенов А. Л., Сопрунов С. Ф. Конечные кванторные иерархии в алгебрах отношений. // Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2011, т. 274. – С. 291–296.

31. Семенов А. Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1979. Т. 43, № 5. – С. 1175–1195.

32. Rabin Michael O. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. // Transactions of the American Mathematical Society, 1969, 141. – Pp. 1–35.

33. Muchnik An. A. Games on infinite trees and automata with dead-ends. A new proof for the decidability of the monadic second order theory of two successors. // Bull. EATCS, 1992, 48. – Pp. 220–267.

34. Elgot Calvin C., Rabin Michael O. Decidability and Undecidability of Extensions of Second (First) Order Theory of (Generalized) Successor. // J. Symb. Log., 1966, vol. 31, No. 2. – Pp. 169–181.

35. Сопрунов С. Ф. Разрешимые обогащения структур. // Вопросы кибернетики, 1988, т. 134. – С. 175–179.

36. Bès Alexis, Cégielski Patrick. Weakly maximal decidable structures. // RAIRO – Theoretical Informatics and Applications, 2008, 42.01. – Pp. 137–145.

37. Bès Alexis, Cégielski Patrick. Nonmaximal decidable structures. // Journal of Mathematical Sciences, 2009, 158.5. – Pp. 615–622.

38. Tarski Alfred. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. // Studia Philosophica, 1935, vol. 1. – Pp. 261–405.

39. Tarski Alfred. Einige methodologifche Unterfuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe. // Erkenntnis, 1935, 5.1. – Pp. 80–100.

40. Beth Evert W. On Padoa's method in the theory of definition. // Indag. Math, 1953, 15. – Pp. 330–339.

41. Svenonius Lars. A theorem on permutations in models. // Theoria, 1959, 25.3. – Pp. 173–178.

42. Klein Felix. Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forsuchungen. // A. Deichert, 1872.

43. Huntington Edward V. The fundamental laws of addition and multiplication in elementary algebra. // The Annals of Mathematics, 1906, 8.1. – Pp. 1–44.

44. Semenov A. L., Soprunov S. F. *A combinatorial version of the Svenonius theorem on definability*, Logic Journal of IGPL. – 23.6 (2015): 966–975.

45. Macpherson D. A survey of homogeneous structures. // Discrete Mathematics, 2011, vol. 311, No. 15. – Pp. 1599–1634.

46. Hodges Wilfrid. Model theory. // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1993, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge.

47. Korec Ivan. A list of arithmetical structures complete with respect to the first-order definability. // Theoretical computer science, 2001, 257.1. – Pp. 115–151.

48. Семенов А. Л. Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления. // Сибирский математический журнал, 1977, т. 18, № 2. — С. 403–418.

49. Frasnay Claude. Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes. // Annales de l'institut Fourier, 1965, vol. 15, No. 2. – Pp. 415–524.

50. Huntington Edward V. The continuum as a type of order: an exposition of the model theory. // Ann. Math., 1904, 6. – Pp. 178–179.

51. Cameron Peter J. Transitivity of permutation groups on unordered sets. // Mathematische Zeitschrift, 1976, 148.2, Pp. 127–139.

52. Winkler Peter. Random structures and zero-one laws. Finite and infinite combinatorics in sets and logic, Springer Netherlands, 1993. – Pp. 399–420.

53. Rado Richard. Universal graphs and universal functions. // Acta Arithmetica, 1964, 9.4. – Pp. 331–340.

54. Thomas Simon. Reducts of random hypergraphs. // Annals of Pure and Applied Logic, 1996, 80.2. – Pp. 165–193.

55. Thomas Simon. Reducts of the random graph. // Journal of Symbolic Logic, 1991, 56(1). – Pp. 176–181.

56. Bodirsky Manuel, Pinsker Michael, Pongrácz András. The 42 reducts of the random ordered graph. // 2013, arXiv:1309.2165.

57. Junker Markus, Ziegler Martin. The 116 reducts of $(\mathbb{Q}, <, a)$. // Journal of Symbolic Logic, 2008, vol. 73, issue 3. – Pp. 861–884. DOI: https://doi.org/10.2178/jsl/1230396752.

58. Ahlbrandt Gisela, Ziegler Martin. Invariant subgroups of ${}^{V}V$. // J. Algebra, 1992, 151, no. 1. – Pp. 26–38.

59. Bodirsky M., Macpherson D. Reducts of structures and maximal-closed permutation groups. // 2013, arXiv:1310.6393.

60. Kaplan I., Simon P. The affine and projective groups are maximal. // 2013, arXiv:1310.8157.

61. Marker D., Peterzil Y. A., Pillay A. Additive reducts of real closed fields. // The Journal of symbolic logic, 1992, vol. 57, issue 1. – Pp. 109–117. DOI: https://doi.org/10.2307/2275179.

62. Peterzil Ya'acov. Reducts of some structures over the reals. // Journal of Symbolic Logic, 1993, 58.3. – Pp. 955–966. DOI: https://doi.org/10.2307/2275107.

63. Marker D., Pillay A. Reducts of $(C, +, \cdot)$ which contain $+$. // Journal of Symbolic Logic, 1990, vol. 55, issue 3. – Pp. 1243–1251.

64. Semenov A. L., Soprunov S. F. Lattice of relational algebras definable in integers with successor. // 2012, arXiv:1201.4439

65. Bodirsky Manuel, Pinsker Michael, Tsankov Todor. Decidability of definability. // IEEE 26th Annual Symposium on Logic in Computer Science, 2011. – Pp. 321–328.

66. Muchnik An. A. The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications. // Theoretical Computer Science, 2003, 290.3. – Pp. 1433–1444.

67. Addison Jr. J. W. The undefinability of the definable. // Notices Amer. Math. Soc., 1965, 12. – Pp. 347.

68. Tanaka Hisao. Some results in the effective descriptive set theory. // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 1967, 3.1. – Pp. 11–52.

REFERENCES

1. Addison, Jr. J. W. 1965, "The undefinability of the definable", *Notices Amer. Math. Soc.*, 12, pp. 347.
2. Ahlbrandt, Gisela & Ziegler, Martin. 1992, "Invariant subgroups of ${}^V V$", *J. Algebra*, 151, no. 1, pp. 26–38.
3. Bès, Alexis & Cégielski, Patrick. 2008, "Weakly maximal decidable structures", *RAIRO – Theoretical Informatics and Applications*, 42.01, pp. 137–145.
4. Bès, Alexis & Cégielski, Patrick. 2009, "Nonmaximal decidable structures", *Journal of Mathematical Sciences*, 158.5, pp. 615–622.
5. Beth, Evert W. 1953, "On Padoa's method in the theory of definition", *Indag. Math*, 15, pp. 330–339.
6. Bodirsky, M. & Macpherson, D. 2013, "Reducts of structures and maximal-closed permutation groups", *arXiv:1310.6393.*
7. Bodirsky, Manuel, Pinsker, Michael & Pongrácz, András. 2013, "The 42 reducts of the random ordered graph", *arXiv:1309.2165.*
8. Bodirsky, Manuel, Pinsker, Michael & Tsankov, Todor. 2011, "Decidability of definability." *IEEE 26th Annual Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 321–328.
9. Boole, George. 1847, *The mathematical analysis of logic*, Philosophical Library.
10. Buchi, J. Richard & Danhof, Kenneth J. 1973, "Definibility in normal theories", *Israel Journal of Mathematics*, 14.3, pp. 248–256.
11. Cameron, Peter J. 1976, "Transitivity of permutation groups on unordered sets". *Mathematische Zeitschrift,* 148.2. – Pp. 127–139.
12. Duporcq, Ernest, ed. 1902, *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900: procès-verbaux et communications*, Gauthier-Villars, imprimeur-library, 455 pp.
13. Elgot, Calvin C. & Rabin, Michael O. 1966, "Decidability and Undecidability of Extensions of Second (First) Order Theory of (Generalized) Successor", *J. Symb. Log.*, Vol. 31, No. 2, pp. 169–181.
14. Frasnay, Claude. 1965, "Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes", *Annales de l'institut Fourier*, vol. 15, No. 2, pp. 415–524.
15. Frege, G. 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle. Translated in van Heijenoort J. 1931, *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, pp. 3–82.
16. Frege, G. 1893, *Grundgesetze der arithmetik*, Publ. in 1964 by Jena: Verlag Hermann Pohle, Band I/II. Partial translation of Band I, *The Basic Laws of Arithmetic*, by M. Furth, Berkeley: U. of California Press.
17. Hilbert, David. 1900, "Mathematische probleme", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 253–297.

18. Hodges, Wilfrid. 1993, “Model theory“, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge.

19. Hodges, Wilfrid. 2000, *Model Theory (Draft 20 Jul 2000)*. Available at: `http://wilfridhodges.co.uk/history07.pdf` (accessed 25 December 2020).

20. Huntington, Edward V. 1904, “The continuum as a type of order: an exposition of the model theory“, *Ann. Math.*, 6, pp. 178–179.

21. Huntington, Edward V. 1906, “The Fundamental Laws of Addition and Multiplication in Elementary Algebra“, *The Annals of Mathematics*, 8.1, pp. 1–44.

22. Huntington, Edward V. 1935, “Inter-Relations Among the Four Principal Types of Order“, *Transactions of the American Mathematical Society*, 38.1, pp. 1–9.

23. International Congress of Philosophy. 1900–1903, *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, Four volumes. Paris: Librairie Armand Colin.

24. Junker, Markus & Ziegler, Martin. 2008, “The 116 reducts of $(\mathbb{Q}, <, a)$“, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 73, issue 3, pp. 861–884. DOI: `https://doi.org/10.2178/jsl/1230396752`

25. Kaplan, I. & Simon, P. 2013, “The affine and projective groups are maximal“, *arXiv:1310.8157*.

26. Klein, Felix. 1872, *Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forsuchungen*, A. Deichert.

27. Korec, Ivan. 2001, “A list of arithmetical structures complete with respect to the first-order definability“, *Theoretical computer science*, 257.1, pp. 115–151.

28. Langford, Cooper Harold. 1926–1927, “Some theorems on deducibility“, *Annals of Mathematics Second Series*, Vol. 28, No. 1/4, pp. 16–40.

29. Langford, Cooper Harold. 1926–1927, “Theorems on Deducibility (Second paper)“, *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 28, No. 1/4, pp. 459–471.

30. Lindenbaum, A. & Tarski, A. 1935, “Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien“, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, Heft 7, pp. 15–22. (Engl. trans.: “On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories“, *In Alfred Tarski: Logic, Semantics, Metamathematics*, J. Corcoran, ed., Hackett, Indianapolis, 1956, pp. 384–392.

31. Löwenheim, Leopold. 1915, “Über möglichkeiten im relativkalkül“, *Mathematische Annalen*, 76.4, pp. 447–470.

32. Macpherson, D. 2011, “A survey of homogeneous structures“, *Discrete Mathematics*, vol. 311, No 15, pp. 1599–1634.

33. Marker, D.& Pillay, A. 1990, “Reducts of $(C, +, \cdot)$ which contain +“, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 55, issue 3, pp. 1243–1251.

34. Marker, D., Peterzil, Y. A.& Pillay, A. 1992, “Additive reducts of real closed fields“, *The Journal of symbolic logic*, vol. 57, issue 1, pp. 109–117. DOI: `https://doi.org/10.2307/2275179`.

35. Mostowski, Andrzej. 1952, “On direct products of theories“, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 17, pp. 1–31.

36. Muchnik, An. A. 1992, “Games on infinite trees and automata with dead-ends. A new proof for the decidability of the monadic second order theory of two successors“, *Bull. EATCS*, 48, pp. 220–267.

37. Muchnik, An. A. 2003, “The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications“, *Theoretical Computer Science*, 290.3, pp. 1433–1444.

38. Padoa Alessandro. 1900, “Logical introduction to any deductive theory“, In From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Ed. by Jean van Heijenoort. Cambridge, Mass., Harvard University Press, pp. 118—123.

39. Peacock, George. 1834, “Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis“, *Report of the third meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Cambridge in 1833*, John Murrary, London, pp. 185–352.

40. Peirce, Charles Sanders. 1873, “Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole’s calculus of logic“, *Memoirs of the American academy of arts and sciences*, vol. 9, part 2, pp. 317–378.

41. Peirce, Charles Sanders. 1885, “On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation“, *American journal of mathematics*, 7.2, pp. 180–196.

42. Peterzil, Ya’acov. 1993, “Reducts of some structures over the reals“, *Journal of Symbolic Logic*, 58.3, pp. 955–966. DOI: https://doi.org/10.2307/2275107.

43. Pieri, Mario. 1908, “La geometria elementare istituita sulle nozioni ‘punto’ é ‘sfera’“, *Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze*, 15, pp. 345–450.

44. Presburger, M. 1930, “Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt“, *Sprawozdanie z 1 Kongresu Matematyków Krajow Slowianskich*, Ksiaznica Atlas. pp. 92–10. (Translated: “On the completeness of a certain system of arithmetic of whole numbers in which addition occurs as the only operation“, *History and Philosophy of Logic*, 12(2), 1991, pp. 225–233.)

45. Rabin, Michael O. 1969, “Decidability of second-order theories and automata on infinite trees“, *Transactions of the American Mathematical Society*, 141, pp. 1–35.

46. Rado, Richard. 1964, “Universal graphs and universal functions“, *Acta Arithmetica*, 9.4, pp. 331–340.

47. Schröder, Ernst. 1898, “On Pasigraphy. Its Present State and the Pasigraphic Movement in Italy“, *The Monist*, 9.1, pp. 44–62.

48. Schröder, Ernst. 1966, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Volumes 1 to 3. Teubner, Leipzig. Reprinted by Chelsea, New York.

49. Semenov, A. L. 1977, “Presburgerness of Predicates Regular in Two Number Systems“, *Siberian Math. J.*, 18.2, pp. 289–300.

50. Semenov, A. L. 1980, “On certain extensions of the arithmetic of addition of natural numbers”, *Izvestiya: Mathematics*, 15.2, pp. 401–418.

51. Semenov, A. L. 2003, “Finiteness Conditions for Algebras of Relations“, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 242, pp. 92–96.)

52. Semenov, A. & Soprunov, S. 2011, “Finite quantifier hierarchies in relational algebras“, *Proceedings of the Steklov I Institute of Mathematics*, 274.1, pp. 267–272.

53. Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 2012, “Lattice of relational algebras definable in integers with successor“, *arXiv:1201.4439.*

54. Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 2013, *A combinatorial version of the Svenonius theorem on definability*, Logic Journal of IGPL. – 23.6 (2015): 966–975.

55. Skolem, Thoralf. 1920, “Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfullbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sdtze nebst einem Theorem über dichte Mengen“, *Videnskapsselskapets skrifter*, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 4.

56. Skolem, Torlaf. 1930, “Über gewisse Satzfunktionen in der Arithmetik“, *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, I. klasse 7.

57. Smith, James T. 2010, “Definitions and Nondefinability in Geometry“, *The American Mathematical Monthly*, 117.6, pp. 475–489.

58. Soprunov, S. 1988, “Razreshimye obogashchenia struktur – Decidable expansions of structures“, *Vopr. Kibern.*, 134, pp. 175–179 (in Russian).

59. Svenonius, Lars. 1959, “A theorem on permutations in models“, *Theoria*, 25.3, pp. 173–178.

60. Tanaka, Hisao. 1967, “Some results in the effective descriptive set theory“, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 3.1, pp. 11–52.

61. Tarski, Alfred. 1935, “Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen“, *Studia Philosophica*, vol. 1, pp. 261–405.

62. Tarski, Alfred. 1935, “Einige methodologifche Unterfuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe“, *Erkenntnis*, 5.1, pp. 80–100.

63. Tarski, Alfred. 1951, *A decision method for elementary algebra and geometry*. Prepared for publication with the assistance of J. C. C. McKinsey. Second edition, revised. Lithoprinted. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, iii + 63 pp.

64. Tarski, Alfred. 1983, “The Concept of Truth in Formalized Languages“, *Alfred Tarski: Logic, Semantics, Metamathematics*. Trans. J. H. Woodger, second edition ed. and introduced by John Corcoran, Hackett, Indianapolis, pp. 152–278.

65. Tarski, Alfred. 1986, “What are logical notions?“ *History and philosophy of logic*, 7.2, pp. 143–154.

66. Thomas, Simon. 1991, “Reducts of the random graph“, *Journal of Symbolic Logic*, 56(1), pp. 176–181.

67. Thomas, Simon. 1996, “Reducts of random hypergraphs“, *Annals of Pure and Applied Logic*, 80.2, pp. 165–193.

68. Winkler, Peter. 1993, *Random structures and zero-one laws. Finite and infinite combinatorics in sets and logic*, Springer Netherlands, pp. 399–420.

Получено 20.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.