ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.548.2 + 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-292-303

Умеренно частичные алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями¹

А. В. Решетников

Артём Владимирович Решетников — Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»; Центр ФПМ Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: a_reshetnikov@hush.com

Аннотация

Рассматриваются частичные алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией. Вопрос о характеристизации таких частичных алгебр может быть сведён к вопросу о характеристизации частичных n -арных группоидов с тем же условием. В работе используется понятие умеренно частичной операции. Приводится характеристика умеренно частичных операций, сохраняющих любое отношение эквивалентности на заданном множестве.

Пусть A — непустое множество, f — умеренно частичная операция, заданная на A (т.е. если зафиксировать все аргументы частичной операции f , кроме какого-то одного, то получится частичная операция φ , у которой область определения $\text{dom } \varphi$ удовлетворяет условию $|\text{dom } \varphi| \geq 3$), и любое отношение эквивалентности на множестве A стабильно относительно f (иначе говоря, решётка конгруэнций частичной алгебры $(A, \{f\})$ совпадает с решёткой отношений эквивалентности на множестве A). В работе доказано, что в таком случае f можно продолжить до некоторой полной операции g , также заданной на множестве A , которая тоже сохраняет любое отношение эквивалентности на A . Более того, если f — конечноарная частичная операция, то либо f — частичная константа (т.е. $f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in \text{dom } f$), либо f — частичная проекция (существует индекс i такой, что для любого кортежа $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f$ выполняется условие $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$).

Ключевые слова: умеренно частичная алгебра, частичный бесконечноарный группоид, решётка конгруэнций, решётка отношений эквивалентности.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. В. Решетников. Умеренно частичные алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 292–303.

¹Работа выполнена при поддержке Московского Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.548.2 + 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-292-303

Moderately partial algebras whose equivalence relations are congruences

A. V. Reshetnikov

Artem Vladimirovich Reshetnikov — National Research University of Electronic Technology; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics of M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: a_reshetnikov@hush.com

Abstract

Consider partial algebras whose equivalence relations are congruences. The problem of description of such partial algebras can be reduced to the problem of description of partial n -ary groupoids with the similar condition. In this paper a concept of moderately partial operation is used. A description is given for the moderately partial operations preserving any equivalence relation on a fixed set.

Let A be a non-empty set, f be a moderately partial operation, defined on A (i.e. if we fix all of the arguments of f , except one of them, we obtain a new partial operation φ such that its domain $\text{dom } \varphi$ satisfies the condition $|\text{dom } \varphi| \geq 3$). Let any equivalence relation on the set A be stable relative to f (in the other words, the congruence lattice of the partial algebra $(A, \{f\})$ coincides the equivalence relation lattice on the set A). In this paper we prove that in this case the partial operation f can be extended to a full operation g , also defined on the set A , such that g preserves any equivalence relation on A too. Moreover, if the arity of the partial operation f is finite, then either f is a partial constant (i.e. $f(x) = f(y)$ for all $x, y \in \text{dom } f$), or f is a partial projection (there is an index i such that all of the tuples $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f$ satisfy the condition $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$).

Keywords: moderately partial algebra, partial infinite-ary groupoid, congruence lattice, equivalence relation lattice.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. V. Reshetnikov, 2021, "Moderately partial algebras whose equivalence relations are congruences", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 292–303.

1. Введение

В работе [1] были охарактеризованы операции, заданные на некотором множестве A , сохраняющие все отношения эквивалентности на A : по сути это означает, что для произвольной универсальной алгебры (A, Ω) авторы работы [1] приводят необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять каждая операция $f \in \Omega$, чтобы решётка отношений эквивалентности на множестве A совпадала с решёткой конгруэнций алгебры (A, Ω) . Для частичных алгебр аналогичное условие неизвестно, однако в статье [2] автором был опубликован ряд вспомогательных результатов, позволивших охарактеризовать некоторый класс частичных алгебр, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией [2, теорема

12]. В настоящей работе мы усиливаем эту характеристику и получаем критерий, применимый к весьма широкому классу частичных алгебр, названных нами умеренно частичными алгебрами.

Существенно, что в сигнатуру рассматриваемых частичных алгебр мы допускаем включение бесконечноарных частичных операций.

2. Определения и обозначения

Будем придерживаться следующей терминологии. Произвольное отображение $f : A' \rightarrow B$, где $A' \subseteq A$ – некоторое подмножество, назовём *частичным отображением, заданным на множестве A* ; при этом множество A' будем называть *областью определения* частичного отображения f и использовать для него следующее обозначение: $A' = \text{dom } f$. В тех случаях, когда $A' \subseteq A^n$ для некоторого ординала n , отображение $f : A' \rightarrow A$ будем называть *частичной операцией, заданной на множестве A* , а точнее – *частичной n -арной операцией*; если при этом справедливо $\text{dom } f = A^n$, то будем говорить, что f – *полная операция*, или просто *операция*. Если частичное отображение f удовлетворяет условию $f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in \text{dom } f$, то будем говорить, что f – *константное* частичное отображение.

Произвольное множество A будем называть *частичной алгеброй с набором частичных операций Ω* , если каждый элемент $f \in \Omega$ является частичной операцией, заданной на множестве A ; будем обозначать такую частичную алгебру через (A, Ω) . В случае $\Omega = \{f\}$, где f – частичная n -арная операция на множестве A , будем называть частичную алгебру (A, Ω) *частичным n -арным группоидом* и использовать для него обозначение (A, f) . Если все частичные операции частичной алгебры A являются полными, то будем говорить, что A – *полная алгебра*, или просто *алгебра*.

Пусть f – частичная n -арная операция, заданная на некотором множестве A . Рассмотрим произвольное отношение эквивалентности $\rho \subseteq A^2$. Введём следующее обозначение (здесь I – произвольное множество; $\varphi, \psi : I \rightarrow A$ – произвольные отображения):

$$\varphi \rho \psi \Leftrightarrow \text{для всех } i \in I : (\varphi(i), \psi(i)) \in \rho.$$

Упорядоченные наборы элементов множества A будем рассматривать как отображения $I \rightarrow A$, где $I = \{i \mid i < n\}$ – множество ординалов. Если для всех упорядоченных наборов $x, y \in A^n \cap \text{dom } f$ выполняется условие

$$x \rho y \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \rho,$$

то мы говорим, что отношение эквивалентности ρ *стабильно* относительно частичной операции f .

Конгруэнцией частичной алгебры (A, Ω) называется отношение эквивалентности $\rho \subseteq A^2$, стабильное относительно всех частичных операций $f \in \Omega$. Известно, что конгруэнции любой частичной алгебры A образуют алгебраическую решётку [3, §16, теорема 1], а любая алгебраическая решётка, в свою очередь, изоморфна решётке конгруэнций некоторой *полной* алгебры [3, §18, теорема 3].

Для произвольной частичной алгебры (A, Ω) решётку отношений эквивалентности на множестве A и решётку конгруэнций частичной алгебры (A, Ω) будем обозначать, соответственно, через $\text{Eq } A$ и $\text{Con } (A, \Omega)$. Если A – полная алгебра, то решётка её конгруэнций является подрешёткой решётки $\text{Eq } A$. В случае частичной алгебры аналогичное утверждение неверно, как показывает следующий пример.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим частичную алгебру (A, f) с множеством элементов $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и частичным отображением

$$f : \{1, 2\} \rightarrow A : 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3.$$

Введём следующие обозначения:

$$\Delta = \{(a, a) | a \in A\} \text{ (отношение равенства на множестве } A);$$

$$\nabla = A \times A \text{ (универсальное отношение);}$$

для произвольных различных элементов $a, b \in A$:

$$\rho_{ab} = \{(a, b), (b, a)\} \cup \Delta \text{ (атом решётки } \text{Eq } A).$$

Легко видеть, что отношения ρ_{14} и ρ_{24} являются конгруэнциями частичной алгебры (A, f) . Их точной верхней гранью в решётке отношений эквивалентности на A является отношение эквивалентности

$$\rho = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2)\} \cup \Delta.$$

Однако, ρ – не конгруэнция в (A, f) . Таким образом,

$$\rho_{14} \vee \rho_{24} = \rho \text{ в решётке } \text{Eq } A;$$

$$\rho_{14} \vee \rho_{24} = \nabla \neq \rho \text{ в решётке } \text{Con } A.$$

Следовательно, $\text{Con } A$ не является подрешёткой $\text{Eq } A$.

3. Теорема Галвина – Хорна

Напомним определение γ -полного ультрафильтра².

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X – произвольное множество, F – семейство подмножеств множества X , удовлетворяющее четырём³ условиям:

$$(i) \emptyset \notin F;$$

(ii) для некоторого бесконечного кардинала γ справедливо утверждение:

$$\text{для любого } F' \subseteq F: \quad 0 < |F'| < \gamma \Rightarrow \bigcap F' \in F;$$

(iii) для любых подмножеств $A, B \subseteq X$,

$$\text{если } A \subseteq B \text{ и } A \in F, \text{ то } B \in F;$$

(iv) каким бы ни было подмножество $A \subseteq X$, имеет место альтернатива:

$$A \in F \quad \text{или} \quad (X \setminus A) \in F.$$

Тогда F называется γ -полным ультрафильтром, заданным на множестве X .

Легко видеть, что $\aleph_0$ -полный ультрафильтр – это то же самое, что обычный ультрафильтр. Имеет место следующий критерий:

ЛЕММА 1. Пусть X – произвольное множество, γ – произвольный бесконечный кардинал. Множество F , состоящее из подмножеств множества X , является γ -полным ультрафильтром тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

²Англ. γ -complete ultrafilter или γ -complete prime filter.

³На самом деле, условие (iii) является следствием из (i), (ii) и (iv).

каким бы ни было представление множества X в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств, если число этих подмножеств строго меньше γ , то ровно одно из них является элементом множества F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий (i) и (ii) очевидна. Достаточность этих условий напрямую следует из леммы, доказанной в работе [1]. $\square$

Теорема, которую мы сейчас приведём, является прямым следствием основной теоремы работы [1]. В её формулировке используется следующее обозначение: пусть A – произвольное множество, $a \in A$ – произвольный элемент; тогда положим

$$\sigma_a = \{(a, a)\} \cup (A \setminus \{a\})^2. \quad (1)$$

Понятно, что σ_a – отношение эквивалентности, имеющее ровно два класса: $\{a\}$ и $A \setminus \{a\}$.

ТЕОРЕМА 1 ([1]). Пусть (A, Ω) – полная алгебра. Следующие условия равносильны:

- 1) любое отношение эквивалентности на множестве A является конгруэнцией алгебры (A, Ω) ;
- 2) для любого элемента $a \in A$ отношение эквивалентности σ_a (см. формулу (1)) является конгруэнцией алгебры (A, Ω) ;
- 3) если $|A| \neq 2$, то для каждой операции $f \in \Omega$ (обозначим её арность через n) имеет место альтернатива: f – константное отображение или для некоторого бесконечного кардинала $\gamma > |A|$ на множестве ординалов $I = \{i \mid i < n\}$ существует γ -полный ультрафильтр F , удовлетворяющий условию

$$\text{для всех } x \in A^n, a \in A: \quad f(x) = a \Leftrightarrow \{i \in I \mid x(i) = a\} \in F,$$

(здесь x рассматривается как отображение $I \rightarrow A$).

4. Характеристика умеренно частичных алгебр (A, Ω) с условием $\text{Con}(A, \Omega) = \text{Eq } A$

Рассмотрим далее вопрос о переносе утверждения теоремы 1 на частичные алгебры. Очевидно, что отношение эквивалентности ρ является конгруэнцией частичной алгебры (A, Ω) тогда и только тогда, когда для любой частичной операции $f \in \Omega$ отношение ρ является конгруэнцией частичного n -арного группоида (A, f) . Поэтому для изучения частичных алгебр A , у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией, достаточно рассмотреть случай, когда A – частичный n -арный группоид.

Возьмём какую-либо частичную n -арную операцию f , заданную на множестве A , и зафиксируем значения всех её аргументов, кроме какого-то одного. Тогда мы получим унарную частичную операцию φ , которую называют элементарной трансляцией⁴ частичной операции f . Другими словами, φ – элементарная трансляция для f , если существуют такие ординал $k < n$ и отображение $p : I \setminus \{k\} \rightarrow A : i \mapsto p_i$, где $I = \{i \mid i < n\}$, что для любого элемента $t \in A$ и любого кортежа

$$x = (\underbrace{p_0, p_1, \dots, p_i, \dots}_{i < k}, \underbrace{t, p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_j, \dots}_{k < j < n})$$

выполняется условие: $x \in \text{dom } f \Rightarrow \varphi(t) = f(x)$.

⁴Для полных операций понятие элементарной трансляции введено, например, в монографии [4]. В некоторых работах вместо «элементарная трансляция» используется термин «редукт».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Частичную операцию f назовём умеренно частичной операцией, если для любой её элементарной трансляции φ выполняется условие $|\text{dom } \varphi| \geq 3$.

Перейдём к основному результату настоящей работы – приведём утверждение, усиливающее теорему 1 в случае умеренно частичной алгебры A . Говорят, что частичная n -арная операция f' *продолжается* до частичной n -арной операции f , если $\text{dom } f' \subseteq \text{dom } f$ и $f'(x) = f(x)$ для всех $x \in \text{dom } f'$. Если Ω' – множество частичных операций, заданных на множестве A , каждая из которых продолжается до какой-либо частичной операции из множества Ω , то будем говорить, что частичная алгебра (A, Ω') *продолжается* до частичной алгебры (A, Ω) .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \neq \emptyset$. Тогда класс умеренно частичных алгебр, заданных на множестве A , у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией, совпадает с классом умеренно частичных алгебр (A, Ω') , каждая из которых продолжается до некоторой полной алгебры (A, Ω) такой, что каждое отношение эквивалентности на A является конгруэнцией алгебры (A, Ω) . В частности, если $\Omega = \{f\}$, то

$$\left. \begin{array}{l} f - \text{умеренно частичная операция} \\ \text{Con } (A, f) = \text{Eq } A \\ A \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \exists g : \left\{ \begin{array}{l} g - \text{полная операция} \\ f \text{ продолжается до } g \\ \text{Con } (A, g) = \text{Eq } A \end{array} \right. \quad (2)$$

Доказательство существенно опирается на результаты статьи [2] и использует введённое в ней понятие *выделенного множества*⁵. Как было отмечено выше, достаточно рассмотреть случай, когда A – частичный n -арный группоид. Ясно, что если частичный n -арный группоид (A, f) (не обязательно умеренно частичный) продолжается до некоторого частичного n -арного группоида (A, g) (не обязательно полного), удовлетворяющего условию $\text{Con } (A, g) = \text{Eq } A$, то условие $\text{Con } (A, f) = \text{Eq } A$ оказывается выполненным. Поэтому данная теорема будет доказана полностью, как только будет установлена истинность импликации (2).

Покажем сначала, что условие (2) выполняется в случае, когда f – константная умеренно частичная операция. Возможны два подслучая.

1-й подслучай: $\text{dom } f \neq \emptyset$. Тогда среди элементов множества A найдётся, по определению, такой элемент c , что равенство $f(x) = c$ имеет место для всех $x \in \text{dom } f$. В таком случае в качестве g можно взять константную операцию $g(x) \equiv c$.

2-й подслучай: $\text{dom } f = \emptyset$. По условию теоремы $A \neq \emptyset$. Утверждение (2) будет верным, если в качестве g взять любую полную операцию (арность которой совпадает⁶ с арностью операции f), удовлетворяющую условию $\text{Con } (A, g) = \text{Eq } A$. Например, можно произвольным образом выбрать элемент $c \in A$ и положить $g(x) = c$ для всех $x \in A$.

Далее будем считать, что f не является константной частичной операцией. Тогда её арность $n > 0$. Положим $I = \{I \mid i < n\}$ и обозначим через F семейство всех *выделенных* подмножеств множества I (в смысле определения выделенного подмножества, принятого в работе [2]). Ввиду предложения 9 работы [2] достаточно показать, что F является γ -полным ультрафильтром, заданным на множестве I , для *наименьшего* бесконечного кардинала γ , удовлетворяющего условию $\gamma > |A|$. Для этого воспользуемся критерием, сформулированным в лемме 1. Рассмотрим какое-либо представление

$$I = \bigcup_{\alpha} K_{\alpha} \quad (3)$$

множества I в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств K_{α} и покажем, что если их количество не превышает $|A|$, то ровно для одного значения α множество K_{α} является выделенным подмножеством (т.е. принадлежит семейству F).

⁵Точное определение данного понятия приведено в следующем разделе.

⁶Нетрудно заметить, что в данном случае арность частичной операции f заведомо равна 0, так как по условию f – умеренно частичная операция.

Так как для любых выделенных подмножеств K_α и K_β выполняется условие $K_\alpha \cap K_\beta \neq \emptyset$ [2, предложение 10], то доказательство теоремы будет полностью завершено, как только мы покажем, что *хотя бы для одного* значения α множество K_α из правой части равенства (3) является выделенным подмножеством (при условии, что общее количество подмножеств K_α в формуле (3) не превышает $|A|$).

Поскольку пустое множество не выделено ([2, предложение 6]; напомним, что мы рассматриваем случай, когда f не является константной частичной операцией), то можно считать, что количество подмножеств K_α в точности равно мощности $|A|$ и значениями индекса α являются элементы множества A :

$$I = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha; \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow K_\alpha \cap K_\beta = \emptyset. \quad (4)$$

Проведём доказательство от противного. Предположим, что ни для какого значения α подмножество K_α из разбиения (4) не является выделенным. Так как $I \neq \emptyset$, то $K_a \neq \emptyset$ хотя бы для одного элемента $a \in A$. Так как K_a не выделено, то из предложения 11 работы [2] следует, что $I \setminus K_a$ – выделенное подмножество. Следовательно, ввиду [2, предложение 6], $I \setminus K_a \neq \emptyset$, откуда $K_a \neq I$. Поэтому найдётся ещё один элемент $b \in A$, для которого $K_b \neq \emptyset$.

Итак, $a \neq b$, $K_a \neq \emptyset$, $K_b \neq \emptyset$. Зафиксируем какие-либо ординалы $i \in K_a$, $j \in K_b$. Для каждого $t \in A$ построим следующим образом кортеж $x_t \in A^n$:

$$x_t(i) = t; \quad x_t(k) = a \quad \text{при } k \in K_a \setminus \{i\};$$

$$x_t(k) = \xi \quad \text{при } k \in K_\xi, \quad \xi \in A \setminus \{a\}.$$

Поскольку f – умеренно частичная операция, то существует хотя бы одно значение $t \in A \setminus \{a, b\}$, при котором $x_t \in \text{dom } f$. Введём обозначение:

$$c = f(x_t).$$

Далее рассмотрим два случая.

1-й случай: $c \notin \{a, b\}$. Для каждого $u \in A$ определим кортеж $y_u \in A^n$ равенствами

$$y_u(k) = x_t(k) \quad \text{при } k \in K_a \cup K_c;$$

$$y_u(j) = u; \quad y_u(k) = x_t(k) \quad \text{при } k \in K_b \setminus \{j\};$$

$$y_u(k) = a \quad \text{при } k \in K_\xi, \quad \xi \in A \setminus \{a, b, c\}.$$

По определению умеренно частичной операции, хотя бы для одного значения $u \in A \setminus \{c\}$ справедливо условие $y_u \in \text{dom } f$. Но тогда $(x_t(k), y_u(k)) \in \sigma_c$ при всех $k \in I$. Так как $\sigma_c \in \text{Con } A$, то $(f(x_t), f(y_u)) \in \sigma_c$, откуда

$$f(y_u) = c. \quad (5)$$

С другой стороны, по нашему предположению, ни одно из множеств K_a , K_b и K_c не выделено. Поэтому, согласно предложению 11 работы [2], $I \setminus K_a$, $I \setminus K_b$ и $I \setminus K_c$ – выделенные подмножества множества I . Выше мы отмечали тот факт, что семейство F , состоящее из всех выделенных подмножеств, является ультрафильтром на I . Следовательно (по определению ультрафильтра), $(I \setminus K_a) \cap (I \setminus K_b) \cap (I \setminus K_c) \in F$, то есть $I \setminus (K_a \cup K_b \cup K_c)$ – выделенное подмножество. Оно не пусто [2, предложение 6], поэтому из предложения 7 работы [2] (устанавливающего важнейшее свойство выделенных подмножеств) и формул, определяющих компоненты кортежа y_u , следует:

$$f(y_u) = a. \quad (6)$$

Из (5) и (6) вытекает равенство $a = c$, которое противоречит предположению $c \notin \{a, b\}$.

2-й случай: $f(x_t) \in \{a, b\}$. Для всех $v, w \in A$ определим следующими равенствами кортежи $g_v, h_w \in A^n$:

$$g_v(i) = v; \quad h_w(i) = t; \quad g_v(k) = h_w(k) = x_t(k) \quad \text{при } k \in K_a \setminus \{i\};$$

$$g_v(j) = b; \quad h_w(j) = w; \quad g_v(k) = h_w(k) = x_t(k) \quad \text{при } k \in K_b \setminus \{j\};$$

$$g_v(k) = a; \quad h_w(k) = b \quad \text{при } k \in K_\xi, \quad \xi \in A \setminus \{a, b\}.$$

Используя определение умеренно частичной операции, выберем элементы v и w таким образом, чтобы оказались выполненными условия

$$v \neq b; \quad w \neq a; \quad g_v, h_w \in \text{dom } f.$$

Путём рассуждений, аналогичных тем, которые были проведены в 1-ом случае, мы приходим к выводу, что множество $I \setminus (K_a \cup K_b)$ является выделенным, и имеют место равенства

$$f(g_v) = a; \quad f(h_w) = b. \quad (7)$$

Нетрудно заметить, что

$$(x_t(k), g_v(k)) \in \sigma_b; \quad (x_t(k), h_w(k)) \in \sigma_a \quad \text{при всех } k \in I.$$

Тогда из условия $\sigma_a, \sigma_b \in \text{Con } A$ следует:

$$(f(x_t), f(g_v)) \in \sigma_b; \quad (f(x_t), f(h_w)) \in \sigma_a.$$

То есть (см. (7)):

$$(f(x_t), a) \in \sigma_b; \quad (f(x_t), b) \in \sigma_a.$$

Но полученные соотношения не могут быть выполнены ни в случае $f(x_t) = a$, ни в случае $f(x_t) = b$, поскольку $a \neq b$.

□

Частичную n -арную операцию f , удовлетворяющую условию

$$f(\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots}_{i < n}) = x_k$$

для некоторого ординала $k < n$, назовём *частичной проекцией*.

СЛЕДСТВИЕ 1 (из теоремы 2). Пусть (A, Ω) – умеренно частичная алгебра. Если каждая частичная операция $f \in \Omega$ имеет конечную арность, то следующие условия равносильны:

- 1) любое отношение эквивалентности на множестве A является конгруэнцией частичной алгебры (A, Ω) ;
- 2) каждая частичная операция $f \in \Omega$ является константной частичной операцией или частичной проекцией.

5. О выделенных подмножествах множества индексов, которыми индексируются аргументы частичной операции f , заданной на множестве A и удовлетворяющей условию $\text{Con}(A, f) = \text{Eq } A$

Теореме 2 можно придать формулировку, схожую с формулировкой теоремы 1. Для этого нам понадобятся новые определения.

Рассмотрим произвольную частичную n -арную операцию f , заданную на некотором множестве A . Предположим, что $A \neq \emptyset$. Введём обозначение: $I = \{i \mid i < n\}$ (все элементы множества I – ординалы). Зафиксируем значения некоторых аргументов частичной операции f . То есть, выберем какое-либо подмножество $J \subseteq I$ и зафиксируем какое-либо отображение $p : I \setminus J \rightarrow A$. Мы получим таким образом новую частичную операцию f_p^J , которую будем называть *сечением* частичной операции f . Более строго, обозначим через m ординальный тип вполне упорядоченного множества J . Для каждого кортежа $t \in A^m$ поставим ему в соответствие кортеж $x_t \in A^m$ следующим образом: рассмотрим на время кортеж t как отображение $J \rightarrow A$ (мы имеем право так поступить, поскольку вполне упорядоченные множества $\{j \mid j < m\}$ и J изоморфны) и положим

$$x_t(j) = \begin{cases} t(j), & \text{если } j \in J; \\ p(j), & \text{если } j \in I \setminus J. \end{cases}$$

После чего определим на множестве A частичную m -арную операцию f_p^J следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \text{dom } f_p^J &= \{t \in A^m \mid x_t \in \text{dom } f\}; \\ f_p^J(t) &= f(x_t) \quad \text{для всех } t \in \text{dom } f_p^J. \end{aligned}$$

Частичную операцию f_p^J назовём *сечением* частичной операции f .

Предположим теперь, что умеренно частичная n -арная операция f , заданная на некотором множестве A , удовлетворяет условию $\text{Con}(A, f) = \text{Eq } A$. Через I , как и раньше, обозначим множество ординалов $\{i \mid i < n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $K \subseteq I$ назовём *выделенным подмножеством* множества I , если для некоторого константного отображения $p : K \rightarrow A$ сечение $f_p^{I \setminus K}$ является константной частичной операцией.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (A, f) – умеренно частичный n -арный группоид. Следующие условия равносильны:

- 1) любое отношение эквивалентности на множестве A является конгруэнцией частичного n -арного группоида (A, f) ;
- 2) имеет место альтернатива: f – константная частичная операция или на множестве ординалов $I = \{i \mid i < n\}$ множество всех выделенных подмножеств множества I является γ -полным ультрафильтром для наименьшего бесконечного кардинала γ , удовлетворяющего условию $\gamma > |A|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Истинность импликации $1) \Rightarrow 2)$ была установлена в процессе доказательства теоремы 2. Покажем, что утверждение $2) \Rightarrow 1)$ также является верным. Справедливость данной импликации очевидна в том случае, если f – константная частичная операция. Если же частичная операция f не является константной, то согласно предложению 9 работы [2] её можно продолжить до полной операции g , удовлетворяющей условию $\text{Con}(A, g) = \text{Eq } A$. Но тогда условие $\text{Con}(A, f) = \text{Eq } A$ также оказывается выполненным. $\square$

6. Заключение

Понятие конгруэнции универсальной алгебры естественным образом обобщает понятие конгруэнции полугруппы. В теории полугрупп решётки конгруэнций играют важную роль в различных вопросах структурной теории (см., например, результаты работ [5] и [6]). В случае унарной алгебры (A, Ω) , то есть когда элементы семейства Ω являются преобразованиями множества A , к понятию конгруэнции мы можем прийти, рассматривая A как полигон над полугруппой Ω^+ , содержащей всевозможные композиции преобразований из семейства Ω . В приложениях теории полугрупп конгруэнции возникают, например, при изучении гомоморфизмов детерминированных автоматов (сведения о конгруэнциях автоматов приведены, например, в монографиях [7] и [8]): это связано с тем, что класс алгебраических автоматов совпадает с классом унарных алгебр.

Дальнейшее обобщение понятия конгруэнции мы получаем, переходя от полных алгебр к частичным. О конгруэнциях частичных алгебр см., например, главу 2 монографии [3] и главу 2 монографии [9]. Теория частичных алгебр – активно развивающийся раздел современной алгебры. Немало работ в данной теории было посвящено вопросу о продолжении различных классов частичных операций до полных операций (к такому направлению исследований относятся, например, статьи [10], [11], [12], [13], [14], [15]).

В данной работе продолжаемость частичных операций также оказывается в центре внимания: если некоторая частичная алгебра A' продолжается до частичной алгебры A , то любая конгруэнция частичной алгебры A также является конгруэнцией частичной алгебры A' .

Автор выражает благодарность И. Б. Кожухову за постоянное внимание к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galvin F., Horn A. Operations preserving all equivalence relations // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 24, №3. P. 521–523.
2. Решетников А. В. О частичных бесконечноарных группоидах, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией // Информатика и кибернетика. 2020. Т. 20, №2. С. 48–58.
3. Grätzer. G. Universal algebra. Second Edition. 2nd ed. with updates, Springer, New York, 2008; Second Edition, Springer Science+Business Media, LLC, 1979. 586 p.
4. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968. 351 с.
5. Mitsch H. Semigroups and their lattice congruences // Semigroup Forum. 1983. Vol. 26, №1–2. P. 1–64.
6. Mitsch H. Semigroups and their lattice congruences II // Semigroup Forum. 1997. Vol. 54, №1. P. 1–42.
7. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М., Мир, 1985. 440 с.
8. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 368 с.
9. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. Росс. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена: Образование, С.-Петербург, 1991. 163 с.

10. Ляпин Е. С. О внутреннем продолжении частичных действий до полных ассоциативных // Изв. вузов. Матем. 1982. Т. 7. С. 40–44.
11. Ляпин Е. С. Частичные группоиды, получаемые из полугрупп ограничениями и гомоморфизмами // Изв. вузов. Матем. 1989. Т. 10. С. 30–36.
12. Ляпин Е. С. О возможности полугруппового продолжения частичного группоида // Изв. вузов. Матем. 1989. Т. 12. С. 68–70.
13. Ляпин Е. С. Внутреннее полугрупповое продолжение некоторых полугрупповых амальгам // Изв. вузов. Матем. 1993. Т. 11. С. 20–26.
14. Апраксина Т. В., Максимовский М. Ю. Полигоны и частичные полигоны над полурешётками // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №1. С. 3–7.
15. Коробов М. С., Петриков А. О. Продолжение частичных операций в универсальных алгебрах // Информатика и кибернетика. 2018. Т. 11, №1. С. 60–64.

REFERENCES

1. Galvin, F. & Horn, A. 1970, “Operations preserving all equivalence relations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 24, no. 3, pp. 521–523.
2. Reshetnikov, A. 2020, “On partial infinitary groupoids whose equivalence relations are congruences”, *Informatika i Kibernetika*, vol. 20, no. 2 (in Russian), pp. 48–58.
3. Grätzer, G. “Universal algebra”. 2008. – Second Edition. 2nd ed. with updates, Springer, New York; 1979 – Second Edition, Springer Science+Business Media, LLC, 586 p.
4. Cohn, P. M. “Universal Algebra”. 1965. – Harper & Row, 333 p.
5. Mitsch, H. 1983, “Semigroups and their lattice congruences”, *Semigroup Forum*, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–64.
6. Mitsch, H. 1997, “Semigroups and their lattice congruences II”, *Semigroup Forum*, vol. 54, no. 1, pp. 1–42.
7. Lallement, G. “Semigroups and combinatorial applications”. 1979. – John Wiley & Sons, 197 p.
8. Bogomolov, A. M. & Salii, V. N. “Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem” [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. 1997. – Moscow, Nauka (in Russian). 368 p.
9. Ljapin, E. S. & Evseev, A. E. “The Theory of Partial Algebraic Operations”. 1997. – Springer Science + Business Media, B.V., 237 p.
10. Ljapin, E. S. 1982, “Internal extension of partial actions to complete associative ones”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, vol. 26, no. 7, pp. 49–55.
11. Ljapin, E. S. 1989, Partial groupoids that can be obtained from semigroups by restrictions and homomorphisms *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, vol. 33, no. 10, pp. 37–45.
12. Ljapin, E. S. 1989, The possibility of semigroup continuation of a partial groupoid *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, vol. 33, no. 12, pp. 82–85.

-
13. Ljapin, E. S. 1993, Inner semigroup continuation of some semigroup amalgams *Russian Math. (Iz. VUZ)*, vol. 37, no. 11, pp. 18–24.
 14. Apraksina T. V. & Maksimovskiy M. Yu. 2012, Acts and Partial Acts over Semilattices // *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 12, no. 1 (in Russian), pp. 3–7.
 15. Korobov M. S. & Petrikov A. O. 2018, “Continued partial operations in universal algebras”, *Informatika i Kibernetika*, vol. 11, no. 1 (in Russian), pp. 60–64.

Получено 21.12.2020 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.