ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.554.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-234-272

**О локально нильпотентном радикале Джекобсона
в специальных алгебрах Ли**

О. А. Пихтилькова, Е. В. Мещерина, А. Н. Благовисная, Е. В. Пронина, О. А. Евсеева

Ольга Александровна Пихтилькова — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Елена Владимировна Мещерина — кандидат физико-математических наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: elena_lipilina@mail.ru

Анна Николаевна Благовисная — кандидат физико-математических наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: matmet@bk.ru

Елена Владиславовна Пронина — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).

e-mail: elenavladpronina@rambler.ru

Ольга Алексеевна Евсеева — Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).

*e-mail: o_evseeva@mirea.ru***Аннотация**

В статье проведено исследование возможности гомологического описания радикалов Джекобсона и локально нильпотентного для алгебр Ли, их связь с PI -неприводимо представленным радикалом, а также изучены некоторые свойства примитивных алгебр Ли. Доказывается аналог теоремы Ф. Кубо для почти локально разрешимых алгебр Ли с нулевым радикалом Джекобсона. Показано, что радикал Джекобсона специальной почти локально разрешимой алгебры Ли L над полем F характеристики нуль равен нулю тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ — центр алгебры L , S — конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$. Теорема Е. Маршалла обобщена на случай почти локально разрешимых алгебр Ли. Для произвольной специальной алгебры Ли L показано включение $IrrPI(L) \subset J(L)$, которое в общем случае является строгим. Приведен пример алгебры Ли L , для которой выполнено строгое включение $J(L) \subset IrrPI(L)$. Показано, что для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо включение $N(L) \subset IrrPI(L)$, которое в общем случае является строгим. Показано, что большинство алгебр Ли над полем являются примитивными. Приведен пример абелевой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем не являющейся примитивной. Приведены примеры, показывающие, что бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются примитивными над любыми полями; конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной; пример неартиновой некоммутативной алгебры Ли являющейся примитивной. Показано, что для специальных алгебр Ли над полем характеристики нуль PI -неприводимо представленный радикал совпадает с локально нильпотентным. Приведен пример алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым. Даются достаточные условия примитивности алгебры Ли, приводятся примеры примитивных алгебр Ли и алгебры Ли не являющейся примитивной.

Ключевые слова: алгебра Ли, примитивная алгебра Ли, специальная алгебра Ли, неприводимое PI -представление, радикал Джекобсона, локально нильпотентный радикал, редуктивная алгебра Ли, почти локально разрешимая алгебра Ли.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

О. А. Пихтилькова, Е.В. Мещерина, А.Н. Благовисная, Е.В.Пронина, О.А.Евсеева О локально нильпотентном радикале Джекобсона в специальных алгебрах Ли // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 234–272.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.554.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-234-272

On a locally nilpotent radical Jacobson for special Lie algebras

O. A. Pikhtilkova, E. V. Mescherina, A. N. Blagovisnaya, E. V. Pronina, O. A. Evseeva

Olga Alexandrovna Pikhtilkova — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Russian technological University MIREA (Moscow).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Elena Vladimirovna Meshcherina — candidate of physical and mathematical sciences, Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: elena_lipilina@mail.ru

Anna Nikolaevna Blagovisnaya — candidate of physical and mathematical sciences, Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: matmet@bk.ru

Elena Vladislavovna Pronina — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Russian technological University MIREA (Moscow).

e-mail: elenavladpronina@rambler.ru

Olga Alekseevna Evseeva — Russian technological University MIREA (Moscow).

e-mail: o_evseeva@mirea.ru

Abstract

In the paper investigates the possibility of homological description of Jacobson radical and locally nilpotent radical for Lie algebras, and their relation with a PI - irreducibly represented radical, and some properties of primitive Lie algebras are studied. We prove an analog of The F. Kubo theorem for almost locally solvable Lie algebras with a zero Jacobson radical. It is shown that the Jacobson radical of a special almost locally solvable Lie algebra L over a field F of characteristic zero is zero if and only if the Lie algebra L has a Levi decomposition $L = S \oplus Z(L)$, where $Z(L)$ is the center of the algebra L , S is a finite-dimensional subalgebra L such that $J(L) = 0$. For an arbitrary special Lie algebra L , the inclusion of $IrrPI(L) \subset J(L)$ is shown, which is generally strict. An example of a Lie algebra L with strict inclusion $J(L) \subset IrrPI(L)$ is given. It is shown that for an arbitrary special Lie algebra L over the field F of characteristic zero, the inclusion of $N(L) \subset IrrPI(L)$, which is generally strict. It is shown that most Lie algebras over a field are primitive. An example of an Abelian Lie algebra over an algebraically closed field that is not primitive is given. Examples are given showing that infinite-dimensional commutative Lie algebras are primitive over any fields; a finite-dimensional Abelian algebra of dimension greater than 1 over an algebraically closed field is not primitive; an example of a non-Cartesian noncommutative Lie algebra is primitive. It is shown that for special Lie

algebras over a field of characteristic zero *PI*-an irreducibly represented radical coincides with a locally nilpotent one. An example of a Lie algebra whose locally nilpotent radical is neither locally nilpotent nor locally solvable is given. Sufficient conditions for the primitiveness of a Lie algebra are given, and examples of primitive Lie algebras and non-primitive Lie algebras are given.

Keywords: Lie algebra, primitive Lie algebra, special Lie algebra, irreducible *PI*-representation, Jacobson radical, locally nilpotent radical, reductive Lie algebra, almost locally solvable Lie algebra.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

O.A. Pikhtilkova, E.V. Mescherina, A.N. Blagovisnaya, E.V. Pronina, O.A. Evseeva, 2021, "On a locally nilpotent radical Jacobson for special Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 234–272.

1. Введение

Начало создания теории конечномерных алгебр Ли относится к концу XIX века. Оно связано с именами таких математиков как Софус Ли, Ф. Энгель, Э. Картан, В. Киллинг и др. [1, стр.453].

По аналогии с теорией групп было введено понятие разрешимой и нильпотентной алгебр Ли. В. Киллинг ввел понятие радикала и полупростой алгебры Ли.

В дальнейшем развитие теории конечномерных алгебр Ли привело к классификации конечномерных простых алгебр Ли над полем характеристики нуль, доказательству теоремы Леви-Мальцева и многих других.

Конечномерные алгебры Ли возникли при изучении групп Ли. В настоящее время они имеют хорошо разработанную теорию, которая находит приложение в различных областях математики.

При изучении теории гладких многообразий естественно возникают бесконечномерные алгебры Ли векторных полей.

Бесконечномерные алгебры Ли оказались полезным инструментом при построении примеров групп. Например, Ю. П. Размыслов использовал бесконечномерные алгебры Ли при построении примера группы, удовлетворяющей тождеству $x^p = 1$, где $p \geq 5$ – простое, которая не является разрешимой [2]. Бесконечномерные алгебры Ли широко использовались в работах А. И. Кострикина по проблеме Бернсайда [3]. Они находят и другие применения в математике.

Разработка структурной теории алгебр Ли является актуальной темой исследования. В настоящее время в этой области имеются тысячи научных работ.

Для различных алгебраических систем важную роль при построении структурной теории играет понятие радикала.

Радикал это такой класс идеалов, фактор по которым имеет нулевой радикал и хорошо устроен.

В теории ассоциативных колец используются радикалы Джекобсона, первичный, Левицкого и другие.

В общем случае нельзя утверждать, что полупростое в смысле некоторого радикала кольцо хорошо устроено.

Если наложить на полупростое кольцо дополнительно некоторое условие, то оно может стать хорошо устроенным. Такими условиями могут служить конечномерность, артиновость, наличие полиномиального тождества и другие.

Различные радикалы для алгебр Ли исследовались в работах [4], [5], [6] и других.

В теории конечномерных алгебр Ли в качестве радикала используют наибольший разрешимый идеал.

К числу часто используемых радикалов относится также нильпотентный радикал конечномерной алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L называется пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [1].*

Для конечномерных алгебр был введен аналог радикала Джекобсона для ассоциативных алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L , если их нет [7].*

Для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [7].

В 1963 г. В.Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [8], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Скажем, что алгебра Ли L специальная алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.*

С.А. Пихтильков и К.И. Бейдар показали, что в специальных алгебрах Ли первичный радикал является наибольшим локально разрешимым идеалом [9], [10].

С.А. Пихтильков ввел понятие локально нильпотентного радикала специальной алгебры Ли [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F .*

В работе [11] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

В этой же работе были исследованы некоторые свойства локально нильпотентного радикала специальной алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Пусть M неприводимый L -модуль. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную элементами алгебры L в алгебре $\text{End}(M)$. Назовем алгебру $A(M)$ ассоциированной алгеброй представления.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Назовем PI-представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре Ли эндоморфизмов $\text{End}(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L , для которого ассоциированная алгебра представления $A(L)$ является PI-алгеброй.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Обозначим через $\text{IrrPI}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет.*

2. Основной текст статьи

Исторический очерк. Основные определения и обозначения

Начало создания теории конечномерных алгебр Ли относится к концу XIX века. Оно связано с именами таких математиков как Софус Ли, Энгель, Э, Картан, Киллинг и др. [1].

По аналогии с теорией групп было введено понятие разрешимой и нильпотентной алгебр Ли.

Киллинг ввел понятие радикала и полупростой алгебры Ли.

В дальнейшем развитие теории конечномерных алгебр Ли привело к классификации конечномерных простых алгебр Ли над полем характеристики нуль, доказательству теоремы Леви-Мальцева и многих других.

Конечномерные алгебры Ли возникли при изучении групп Ли. В настоящее время они имеют хорошо разработанную теорию, которая находит приложение в различных областях математики.

При изучении теории гладких многообразий естественно возникают бесконечномерные алгебры Ли векторных полей.

Бесконечномерные алгебры Ли оказались полезным инструментом при построении примеров групп. Они находят и другие применения в математике.

В силу сказанного выше, были предприняты значительные усилия по разработке теории бесконечномерных алгебр Ли. В настоящее время в этой области имеются тысячи научных работ, изучающих бесконечномерные алгебры Ли с разных точек зрения.

К сожалению, не удалось создать удовлетворительную структурную теорию бесконечномерных алгебр Ли.

Создание структурной теории предполагает наличие хорошего радикала, хорошее описание фактора по радикалу и получение ряда результатов, описывающих отдельные классы алгебр.

Единый для всех классов алгебр Ли радикал был построен В.А.Парфеновым [12]. Он предложил рассматривать в качестве радикала наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли.

Везде далее мы будем рассматривать алгебры Ли над полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Алгебра Ли называется слабо разрешимой, если любое ее конечномерное подпространство удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой степени.*

В.А.Парфенов показал, что сумма слабо разрешимых идеалов алгебры Ли является слабо разрешимым идеалом. Кроме того, класс всех слабо разрешимых алгебр Ли является радикальным в универсальном классе всех алгебр Ли.

Для дальнейшего развития структурной теории были найдены аналоги ряда теорем, справедливых для конечномерных алгебр Ли. Для класса всех алгебр Ли этого сделать невозможно.

В 1963 г. В.Н.Латышев ввел новый класс алгебр Ли [8], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. *Ассоциативная алгебра A называется PI-алгеброй, если существует $f(x_1, \dots, x_n) \in F(X)$, где $F(X)$ – свободная ассоциативная алгебра над полем F , такой, что $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для произвольных $a_1, \dots, a_n \in A$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI-алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Назовем алгебру первичной, если из того, что некоторая степень ее идеала равна нулю $I^n = 0$ следует, что $I = 0$. Это определение относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Назовем алгебру первичной, если из того, что произведение идеалов $UV = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$. Это определение относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Идеал I алгебры Ли L называется первичным, если фактор-алгебра L/I по нему является первичной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Назовем первичным радикалом $P(D)$ пересечение всех первичных идеалов алгебры (ассоциативной или алгебры Ли) D или саму алгебру D , если их нет.

Теория алгебр Ли возникла позднее теории групп, теории ассоциативных колец и модулей.

Хорошо известно, что многие результаты, полученные в теории групп, переносятся на алгебры Ли и наоборот.

Алгебры Ли имеют также кольцевую структуру. Поэтому часть результатов переносится с ассоциативных алгебр на алгебры Ли.

К таким например относятся теоремы С.А. Пихтилькова о разрешимости первичного радикала артиновых специальных алгебр Ли и произвольных нётеровых алгебр Ли [13], [14].

Очень редко удастся перенести результаты с алгебр Ли на ассоциативные алгебры.

Назовем ассоциативную алгебру слабо артиновой, если любая убывающая цепочка ее двусторонних идеалов стабилизируется.

В.М. Поляков и С.А. Пихтильков показали, что первичный радикал слабоартиной алгебры – нильпотентен [15].

Аналогичный результат был сперва получен для локально нильпотентных артиновых алгебр Ли. Было показано, что артинова локально нильпотентная алгебра Ли является разрешимой [15].

Изучение многообразий различных алгебраических систем было модной темой второй половины XX века.

Одной из наиболее известных проблем являлась проблема конечной базирюемости многообразий. В настоящее время она исследована почти для всех классов широко изучаемых алгебраических систем. Пока неизвестно существуют ли не конечно базирюемые многообразия для случая алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Хотя проблема конечной базирюемости многообразий носит абстрактный характер, при ее исследовании были разработаны новые методы для работы с тождествами.

При развитии теории многообразий были получены структурные результаты, или результаты имеющие широкое применение при изучении структурных вопросов.

К их числу относятся теоремы И.Капланского и Познера [16], теорема Размыслова-Кемера-Брауна о нильпотентности радикала конечно порожденной ассоциативной PI -алгебры [17], [18], лемма А.И.Ширшова о локальной ограниченности высот [19], теорема Ю.П.Размыслова о ранге [20] и другие. Создались предпосылки для применения результатов теории многообразий при изучении структуры различных алгебраических систем.

В теории ассоциативных колец и модулей были разработаны различные объекты, которые можно применять при построении структурной теории.

К их числу относятся радикалы Джекобсона и первичный [16], кольцо частных [21], [22], центроид Мартиндейла [23], [20], [22] и другие.

Развитие упомянутых выше разделов алгебры позволило приступить к созданию структурной теории специальных алгебр Ли – класса алгебр Ли близких к конечномерным, которые сочетают в себе свойства ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

Для различных алгебраических систем важную роль при построении структурной теории играет понятие радикала.

Радикал это такой класс идеалов, фактор по которым имеет нулевой радикал и хорошо устроен.

В теории ассоциативных колец используются радикалы Джекобсона, первичный, Левицкого и другие.

К сожалению, в общем случае нельзя утверждать, что полупростое в смысле некоторого радикала кольцо хорошо устроено.

Так, например, свободная алгебра над полем полупроста [16] и даже примитивна [24] и, тем не менее, не имеет хорошего строения.

Если наложить на полупростое кольцо дополнительно некоторое условие конечности, то оно может стать хорошо устроенным. Такими условиями могут служить артиновость, наличие полиномиального тождества и другие.

Различные радикалы для алгебр Ли исследовались в работах [4], [5], [6] и других.

В теории конечномерных алгебр Ли в качестве радикала используют наибольший разрешимый идеал.

К сожалению, в бесконечномерных алгебрах Ли сумма всех разрешимых идеалов не всегда является разрешимым идеалом.

Естественным обобщением понятия разрешимого идеала является локально разрешимый идеал.

Р. Амайо и И. Стюарт сформулировали в своей книге [25] вопрос: будет ли сумма локально разрешимых идеалов бесконечномерной алгебры Ли – локально разрешимым идеалом?

Отрицательный ответ на этот вопрос был дан В.Н. Латышевым, А.В. Михалевым и С.А. Пихтильковым [26]. Поэтому исследовать локально разрешимый радикал для класса всех алгебр Ли нельзя.

Можно рассматривать для класса всех алгебр Ли слабо разрешимый радикал, построенный В.А.Парфеновым [12].

Для класса всех алгебр Ли не удастся дать хорошую характеристику ни примитивной ни первичной алгебр Ли. В работе [24] показано, что свободная ассоциативная алгебра над полем является примитивной. Такой же будет и свободная алгебра Ли.

Легко заметить, что свободная алгебра Ли является также первичной алгеброй.

В общем случае также не удастся дать хорошую характеристику полупростой в смысле Парфенова алгебры Ли, требуется наложить дополнительное условие.

Оказалось, что класс специальных алгебр Ли в некотором смысле близок к конечномерным алгебрам и, в то же время, содержит интересные примеры бесконечномерных алгебр Ли.

Так, например, Ю.А.Бахтурин доказал для почти разрешимых конечно порожденных специальных алгебр Ли над полем характеристики нуль аналог теоремы Леви-Мальцева [30]. Обобщить этот результат на класс всех алгебр Ли нельзя [28, с. 166].

Ю.П.Размыслов показал, что в конечно порожденных специальных алгебрах Ли существует наибольший разрешимый идеал, фактор по которому представим в виде подпрямого произведения полупростых алгебр Ли, конечномерных над соответствующими полями [29].

С.А. Пихтильков и К.И.Бейдар, показали, что в обобщенно специальных алгебрах Ли первичный радикал является наибольшим локально разрешимым идеалом и совпадает со слабо разрешимым идеалом [9], [10].

Напомним важное определение центроида Мартиндейла.

Для изучения строения специальных алгебр Ли полезна конструкция центроида Мартиндейла и понятие центрального замыкания. Мы будем рассматривать единый подход к алгебрам Ли и ассоциативным алгебрам. В неассоциативном случае он был разработан в [20], [23]. Мы будем следовать подходу, предложенному Ю.П.Размысловым для универсальных алгебр сигнатуры Ω [20].

При этом предполагается, что сигнатура Ω содержит хотя бы одну операцию ариности не меньше двух.

Нам потребуется понятие инъективного модуля и инъективной оболочки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. *Модуль M над ассоциативной алгеброй с единицей A называется инъективным, если для любых двух модулей M_1, M_2 , любого мономорфизма $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ и любого гомоморфизма $\psi : M_1 \rightarrow M$ существует гомоморфизм $\rho : M_2 \rightarrow M$, для которого $\rho \circ \varphi = \psi$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Подмодуль M модуля P называется большим в P , если любой ненулевой подмодуль в P имеет с M ненулевое пересечение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. A -модуль P называется инъективной оболочкой A -модуля M , если выполнены условия:

- а) P – инъективный A -модуль;
- б) M – подмодуль в P ;
- в) M – большой подмодуль в P .

Инъективная оболочка существует для каждого модуля M , и она единственна с точностью до изоморфизма.

Пусть L – F -алгебра сигнатуры Ω и $A = A(L)$ – ассоциированная с ней ассоциативная подалгебра в $End_F A$. Пусть P – инъективная оболочка A -модуля L , $E = End_A P$ – алгебра всех эндоморфизмов A -модуля P , $S = EL$ – A -подмодуль в P .

В случае лиевых алгебр алгебра $A(L)$ является присоединенной алгеброй AdL алгебры L .

Рассмотрим ассоциативный случай. Пусть D – ассоциативная F -алгебра,

$$a, x \in D, R_a(x) = xa, L_a(x) = ax.$$

Для любых $a, b \in D$ отображения R_a, L_a принадлежат $End_F D$. Обозначим через $B(D)$ подалгебру в $End_F D$, порожденную элементами вида R_a, L_b , где a, b пробегает алгебру D . Алгебра $B(D)$ называется алгеброй умножений алгебры D . Имеет место равенство алгебр $A(D) = B(D)$.

Приведем без доказательства ряд утверждений относительно введенных объектов.

Пусть L полупервичная F -алгебра сигнатуры Ω . Тогда ограничение ρ действия алгебры E на A -модуль S коммутативно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы не даем определение первичных и полупервичных алгебр для случая универсальных алгебр, так как будем применять эти понятия только в случае ассоциативных алгебр и алгебр Ли. Для универсальных алгебр они определяются аналогично.

Так как по определению $S = EL$ и согласно лемме 0.A алгебра $C(L) = E/Ker \rho$ коммутативна, то мы можем продолжить все операции сигнатуры Ω по C -линейности с алгебры L на алгебру S и наделить S структурой Z -алгебры сигнатуры Ω . Алгебру $C = C(L)$ мы будем называть центроидом Мартиндейла полупервичной алгебры L , а C -алгебру S – центральным замыканием алгебры L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.A ([20]). Если L – полупервичная F -алгебра сигнатуры Ω , то центроид $C = C(L)$ и центральное замыкание $S = S(L)$ являются полупервичными алгебрами, характеризующимися следующими свойствами:

- 1) C – коммутативная F алгебра с единицей и $S = CL$;
- 2) Произвольный ненулевой A -подмодуль в S пересекается с L по ненулевому идеалу алгебры L ;
- 3) Для любого A -гомоморфизма φ ненулевого A -подмодуля I и A -модуля S в S существует элемент $s \in C$, для которого $si = \varphi(i)$, где i – произвольный элемент модуля I . Более того, если I – большой A -подмодуль в S , то элемент s однозначно определяется гомоморфизмом φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.B ([20]). Если L – первичная F -алгебра сигнатуры Ω , то центроид $C(L)$ является полем, $S(L)$ – первичной F -алгеброй и C -алгебра S характеризуется следующими свойствами:

- 1) $S = CL$;

- 2) произвольный ненулевой A -подмодуль в S имеет ненулевое пересечение с L ;
 3) любой частичный A -эндоморфизм φ ненулевого идеала I алгебры L в L однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на I совпадает с φ .

Сформулируем важную теорему Ю.П. Размыслова о ранге.

Хотя теорема о ранге справедлива даже для универсальных алгебр [20], мы будем иметь в виду ассоциативные алгебры или алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Пусть A – алгебра Ли или ассоциативная алгебра над полем F . Любой полином

$$d_k(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$$

из свободной алгебры Ли $F(X)$ или ассоциативной соответственно, который полилинеен и кососимметричен относительно $x_1, \dots, x_k$, называется полиномом Капелли порядка k . Пусть V – произвольное векторное F -подпространство в алгебре A . Скажем, что на V выполнены все тождества Капелли порядка k , если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов

$$v_1, \dots, v_k \in V, a_1, \dots, a_l \in A$$

в алгебре A выполняются равенства

$$d_k(v_1, \dots, v_k, a_1, \dots, a_l) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Рангом векторного F -подпространства V относительно алгебры A называется наименьшее число k , для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k . Это число обозначается $\text{rank}(A, V)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко заметить, что для конечномерной алгебры A размерности n над F ранг любого подпространства относительно алгебры A не превосходит $n + 1$. То же можно сказать и про все алгебры, лежащие в многообразии, порожденном алгеброй A .

ТЕОРЕМА 0.A (Размыслова о ранге, [20]). Пусть V – векторное F -подпространство в первичной ассоциативной алгебре A или алгебре Ли. Если $\text{rank}(A, V) < \infty$, то в центральном замыкании $S(A)$ алгебры A справедливо равенство

$$\dim_{C(A)} C(A)V = \text{rank}(A, V) - 1.$$

Согласно теореме Размыслова о ранге, первичные специальные алгебры Ли являются конечномерными над своими центроидами Мартиндейла, что позволяет применять первичный радикал при решении различных задач.

При изучении строения специальной алгебры Ли полезно изучить возможные вложения алгебры Ли в ассоциативную PI -алгебру.

Следуя Ю.А.Бахтуруину [30] скажем, что ассоциативная PI -алгебра $A^{(-)}$ является PI -оболочкой алгебры Ли L , если $L \subseteq A^{(-)}$ и алгебра A порождена множеством L как ассоциативная алгебра.

Ю.А.Бахтурин показал, PI -оболочки конечномерных редутивных алгебр Ли над полем характеристики нуль являются конечномерными [30].

В.А. Парфеновым, И.Н. Балабой, А.В. Михалевым и С.А. Пихтильковым было проведено исследование слабо разрешимого радикала для алгебр Ли [31], [12].

Обозначим через $T(L)$ наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли, который назовем слабо разрешимым радикалом алгебры Ли L .

В некотором смысле, слабо разрешимая алгебра Ли является аналогом ассоциативной ниль-алгебры.

Так же как и для ассоциативных алгебр [32], для алгебр Ли можно определить верхний и нижний слабо разрешимые радикалы.

Назовем наибольший слабо разрешимый идеал $T(L)$ алгебры Ли L верхним слабо разрешимым радикалом.

По аналогии с построением нижнего ниль-радикала в ассоциативных алгебрах, обозначим через $\rho(L)$ сумму всех разрешимых идеалов алгебры Ли L .

Так как сумма двух разрешимых идеалов алгебры Ли является разрешимым идеалом, идеал $\rho(L)$ является локально разрешимым.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha)$ следующим образом.

1. $\rho(0) = 0$.

2. Предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом.

а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\rho(\beta)/\rho(\gamma) = \rho(L/\rho(\gamma))$.

б) Если β – предельное порядковое число, то

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \rho(\gamma).$$

Расширение локально разрешимой алгебры Ли с помощью локально разрешимой алгебры может не быть локально разрешимым [25], но оно будет слабо разрешимым [12].

Если $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$ скажем, что $\rho(\beta)$ – нижний слабо разрешимый радикал алгебры Ли L .

Были получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 0.C ([31]) *Первичный радикал произвольной алгебры Ли над полем совпадает с нижним слабо разрешимым радикалом.*

ТЕОРЕМА 0.D ([31]) *Первичный радикал $P(L)$ произвольной алгебры Ли L над полем характеристики нуль является характеристическим.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.D ([31]) *В любой специальной алгебре Ли L локально разрешимый радикал $R(L)$ совпадает с верхним и нижним слабо разрешимыми радикалами. Более точно $R(L) = \rho(2)$.*

Был получен следующий критерий полупервичности алгебры Ли.

ЛЕММА 0.B ([31]) *Алгебра Ли L над полем является полупервичной тогда и только тогда, когда для всех $a \in L$ из равенства $(a)^2 = 0$ следует, что $a = 0$.*

Для построения хорошей структурной теории полезно наложить на алгебру дополнительные условия.

Таковыми условиями могут служить артиновость и нётеровость.

По аналогии с ассоциативными алгебрами скажем, что алгебра Ли является артиновой, если любая не пустая убывающая цепочка ее идеалов стабилизируется.

Назовем алгебру Ли нётеровой, если в ней стабилизируется любая возрастающая цепочка идеалов.

Важную роль в теории конечномерных алгебр Ли играет нильпотентный радикал.

Нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L называется пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [1].

Известно, что для произвольной конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = R \cap L'$, где $L' = [L, L]$, R – наибольший разрешимый идеал конечномерной алгебры Ли, который называется ее радикалом.

Известно также [1, стр. 73], что $N(L) = [R, L]$.

Обобщение нильпотентного радикала для специальных алгебр было введено С.А. Пихтильковым.

Он определил локально нильпотентный радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F как пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F [11].

В работе [11] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Оказалось, что локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли обладает свойствами похожими на свойства нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли.

Следующая теорема является аналогом утверждения, справедливого для конечномерных алгебр Ли [1].

ТЕОРЕМА 0.Е (Пихтилькова [11]) Пусть L – обобщенно специальная алгебра Ли над полем F характеристики нуль, $R(L)$ – ее локально разрешимый радикал. Тогда следующие условия эквивалентны

- 1) L – локально нильпотентно полупростая алгебра Ли.
- 2) L – редуцируема.
- 3) L^2 – полупервичная алгебра.

Отметим, что некоторые утверждения справедливые для конечномерных алгебр Ли не переносятся на обобщенно специальные.

Так например, для конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = [L, R(L)]$, где $N(L)$ – нильпотентный, а $R(L)$ – разрешимый радикалы [1].

Кроме того, для конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль равенство нулю нильпотентного радикала $N(L)$ равносильно тому, что радикал $R(L)$ совпадает с центром.

Оба этих утверждения не имеют места для обобщенно специальных алгебр Ли. Контрпримером к ним является известный пример Ю.В.Биллига [33].

Алгебра Ли L называется обобщенно специальной, если ее присоединенная ассоциативная алгебра является PI -алгеброй [34].

Ю.В.Биллиг построил пример обобщенно специальной алгебры Ли g над полем комплексных чисел C такой, что она является расширением центра при помощи первичной специальной алгебры Ли и не является специальной. При этом локально нильпотентно полупростая обобщенно специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль является специальной [11].

К числу классических радикалов для алгебр Ли относится также радикал Джекобсона.

Следующее определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L , если их нет [7] (у Е.Маршалла было только пересечение максимальных идеалов, прибавка "сама алгебра L , если их нет" добавлена Ф.Кубо для бесконечномерных алгебр Ли [4]).

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [7].

Е. Маршалл доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.G Если конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики нуль имеет разложение Леви в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где S – полупростая алгебра, а $\sigma(L)$ – разрешимый радикал L .

Идеал идеала алгебры Ли называется подидеалом.

Н. Камийя [35] доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.H Если алгебра Ли L порождена конечномерными локальными подидеалами L , тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L .

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал также Ф. Кубо [4].

Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально-конечных алгебр. Им были также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

Ф. Кубо доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.I ([4]) Пусть L – локально-конечная алгебра Ли. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где S – подалгебра L такая, что $J(S) = 0$, а $Z(L)$ – центр алгебры Ли L .

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008) Борис Исаакович Плоткин отметил важность изучения радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Он поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Понятие радикала Джекобсона для ассоциативных алгебр тесно связано с понятием примитивной алгебры.

Скажем, что ассоциативная алгебра или алгебра Ли – примитивная, если она имеет точное неприводимое представление.

Радикал Джекобсона примитивной ассоциативной алгебры равен нулю.

Полупростая ассоциативная алгебра раскладывается в подпрямую сумму примитивных [32], [16].

Аналогичное утверждение справедливо для алгебр Ли при некоторых условиях на алгебру Ли.

Поэтому исследование примитивных алгебр Ли представляет интерес.

2.1. Радикал Джекобсона и связанные с ним радикалы алгебр Ли

В этом разделе рассматривается возможность гомологического описания радикала Джекобсона, его связь с другими радикалами алгебр Ли.

2.1.1. Радикал Джекобсона алгебр Ли

Следующее определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L , если их нет [7] (у Е. Маршалла было только пересечение максимальных идеалов, прибавка "сама алгебра L , если их нет" добавлена Ф. Кубо для бесконечномерных алгебр Ли [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. *Нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L называется пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [1].*

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [7].

Е. Маршалл доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1.А. *Если конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики нуль имеет разложение Леви в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где S – полупростая алгебра, а $\sigma(L)$ – разрешимый радикал L .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. *Идеал идеала алгебры Ли называется подидеалом.*

Н. Камийя [35] доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1.В. *Если алгебра Ли L порождена конечномерными локальными подидеалами L , тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L .*

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал также Ф. Кубо [4].

Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально-конечных алгебр. Им были также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

Определение Обозначим через $Z(L)$ центр алгебры Ли L , т.е. $Z(L) = \{z \mid (\forall x \in L) [z, x] = 0\}$. Ф. Кубо доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1.С. ([4]) *Пусть L – локально-конечная алгебра Ли. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где S – подалгебра L такая, что $J(S) = 0$.*

В 1963 г. В. Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [8], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. *Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI-алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. *Назовем присоединенной ассоциативной алгеброй $\text{Ad } L$ ассоциативную алгебру, порожденную в алгебре $\text{End}(L)$ линейными преобразованиями $\{\text{ad } x \mid x \in L\}$, где $\text{ad } x(y) = [x, y]$, $x, y \in L$.*

Класс специальных алгебр Ли оказался не замкнутым относительно гомоморфизмов. Пример такой алгебры Ли был придуман Ю.В. Биллигом [33].

Следующее определение, обобщающее определение В.Н. Латышева, было дано С.А. Пихтильковым [34].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. *Алгебра Ли L называется обобщенно специальной, если ее присоединенная алгебра $\text{Ad } L$ является PI-алгеброй.*

Свойство быть обобщенно специальной алгеброй сохраняется при гомоморфизмах [34].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. *Назовем алгебру Ли L почти разрешимой (почти локально разрешимой), если в ней существует разрешимый (локально разрешимый) идеал R такой, что алгебра L/R – конечномерна.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Пусть R – идеал алгебры Ли L , G – подалгебра. Скажем, что L представима в виде полупрямого произведения $L = G \ltimes R$, если: 1. $L = G + R$; 2. $G \cap R = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Пусть R – разрешимый (почти разрешимый) радикал алгебры Ли L , если он существует. Назовем полупростую конечномерную подалгебру G алгебры Ли L подалгеброй Леви, если L представима в виде полупрямого произведения $L = G \ltimes R$.

ТЕОРЕМА 1.1.D. (Леви [36]) Пусть L – конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль с радикалом R . Тогда в L существует полупростая подалгебра G такая, что $L = G \ltimes R$.

Заметим, что подалгебра G является подалгеброй Леви.

Ю.А. Бахтурин доказал следующий аналог теоремы Леви.

ТЕОРЕМА 1.1.E. ([37, стр. 266-268]) Пусть L – конечно порожденная почти разрешимая специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль. Тогда в L существует подалгебра Леви.

Ю.А. Терехова следующим образом обобщила теорему Ю.А. Бахтурина.

ТЕОРЕМА 1.1.F. ([38]) Пусть L – специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль, R – локально разрешимый радикал, фактор-алгебра L/R – конечномерна. Тогда в L существует полупростая конечномерная подалгебра G такая, что L представима в виде полупрямой суммы $L = G \ltimes R$.

Следующая теорема является обобщением теоремы Е. Маршалла на случай почти локально разрешимых алгебр Ли. Доказательство теоремы основано на идеях из [7].

ТЕОРЕМА 1.1.1. Пусть L – почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Если алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus R$, где S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$, а R – локально разрешимый радикал, то $J(L) = [L, R]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем сначала очевидное замечание: радикал Джекобсона абелевой алгебры Ли равен нулю.

Можно также воспользоваться леммой 2.1.2 которая рассматривает более общий случай и будет доказана позднее.

Следовательно, $J(L) \subset L^2$.

Пусть I – максимальный идеал алгебры L . Фактор алгебра L/I не содержит собственных идеалов, является простой или абелевой.

Если алгебра L/I – простая, то идеал I содержит локально разрешимый радикал R и представим в виде $I = M + R$, где M – максимальный идеал S . Мы пользуемся тем, что алгебра $S \cap R$ является разрешимой и, следовательно, $S \cap R = 0$ (пересечение локально разрешимой алгебры и конечномерной является локально разрешимой).

Полупростая конечномерная алгебра S над полем характеристики нуль представима в виде суммы идеалов, являющихся простыми алгебрами Ли [1].

Следовательно, пересечение идеалов I таких, что фактор-алгебра L/I – простая, совпадает с R и $J(L) \subset R$.

Учитывая сделанное в начале доказательства замечание, получили $J(L) \subset L^2 \cap R$.

Если фактор-алгебра L/I – абелева, то I содержится в локально разрешимом радикале R (факторы алгебры Ли S не могут быть абелевыми).

Фактор-алгебра $L/(S + R^2)$ абелева.

Учитывая сделанное в начале доказательства замечание, получим, что радикал Джекобсона алгебры $L/(S + R^2)$ равен нулю.

Следовательно, $J(L) \subset S + R^2$, $S + R^2 = L^2$. Получили включение $J(L) \subset L^2 \cap R$.

Покажем, что пересечение всех максимальных идеалов содержит $L^2 \cap R$.

Снова рассмотрим фактор-алгебру L/I по максимальному идеалу I .

Если алгебра Ли $M = L/I$ простая, $I = D + R$, где D – полупростая алгебра или нуль (мы использовали разложение алгебры S в прямую сумму простых идеалов).

Радикал Джекобсона абелевой алгебры R/R^2 равен нулю. Следует, что $J(L) \supset J(R) \supset R^2$. Получили включение $J(L) \supset L^2 \cap R$.

Если алгебра Ли $M = L/I$ абелева, то $I \supset R^2$.

Мы доказали включение $J(L) \supset L^2 \cap R$.

Следовательно, $J(L) = L^2 \cap R$.

Запишем один из коммутаторов алгебры L .

Пусть $l_i = s_i + r_i$, где $i = 1, 2$, $s_i \in S$, $r_i \in R$.

Тогда

$$[l_1, l_2] = [s_1, s_2] + [s_1, r_2] + [r_1, s_2] + [r_1, r_2].$$

Если $[l_1, l_2] \in R$, то $[s_1, s_2] = 0$.

Тогда

$$[l_1, l_2] = [s_1, r_2] - [s_2, r_1] + [r_1, r_2].$$

Следует

$$L^2 \cap R \subset [L, R].$$

Включение $[L, R] \subset L^2 \cap R$ – очевидно.

Окончательно получили $J(L) = [L, R]$. $\square$

Докажем следствие, которое является аналогом теоремы Ф. Кубо.

СЛЕДСТВИЕ 1.1.1. Пусть L – специальная почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(S) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – специальная почти локально разрешимая алгебра Ли, R ее локально разрешимый радикал.

Согласно теореме F, для алгебры L имеет место разложение Леви $L = S + R$, где S – полупростая конечномерная алгебра, а R – локально разрешимый радикал.

Из теоремы 1.1.1 получаем $J(L) = [L, R]$.

Следовательно, $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда $R = Z(L)$. $\square$

2.1.2. Конечно неприводимо представленный, PI -неприводимо представленный и неприводимо представленный радикалы для алгебр Ли

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008) Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Под гомологическим описанием идеалов колец, алгебр, алгебр Ли понимается понимается их задание через модули [39, статья "Гомологическая классификация колец", с. 1052].

Для сопоставления радикала Джекобсона алгебры Ли с естественными, гомологически заданными радикалами, дадим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Обозначим через $\text{Irr}(L)$ пересечение аннуляторов неприводимых модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L если их нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. Пусть M неприводимый L -модуль. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную элементами алгебры L в алгебре $\text{End}(M)$. Назовем алгебру $A(M)$ ассоциированной алгеброй представления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Назовем PI -представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $\text{End}(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L , для которого ассоциированная алгебра представления $A(L)$ является PI -алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Обозначим через $\text{Irr}PI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет.

Ю. А. Бахтурин использовал пересечение аннуляторов конечномерных неприводимых представлений для доказательства аналога теоремы Леви-Мальцева для специальных алгебр Ли [37].

Известно, что для конечномерных алгебр Ли пересечение аннуляторов конечномерных представлений совпадает с нильпотентным радикалом [1] и, следовательно, с радикалом Джекобсона для поля нулевой характеристики [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. Обозначим через $\text{Irr}Fin(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L если их нет.

Л.А. Симонян рассматривал пары $L \subseteq A^{(-)}$, где L – алгебра Ли над полем F характеристики нуль, A – локально конечная ассоциативная алгебра [40]. Он ввел обозначение $J_A(L) = L \cap J(A)$.

В [40] было доказано:

1. Всякий идеал алгебры Ли L , состоящий из нильпотентных в A элементов, лежит в $J_A(L)$;
2. Если R – локально разрешимый идеал L , то $[R, L] \subseteq J_A(L)$.

Напомним определение радикала Джекобсона ассоциативной алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Назовем радикалом Джекобсона $J(R)$ ассоциативной алгебры R пересечение аннуляторов всех правых (или левых) неприводимых R -модулей.

Известно [16], что радикал Джекобсона можно определять и через правые и через левые R -модули.

Рассмотрим радикал Л.А. Симоняна применительно к паре $L \subseteq U(L)$. Получим следующее соответствие с введенным радикалом.

ЛЕММА 1.2.1. Пусть L – произвольная алгебра Ли. Тогда

$$\text{Irr}(L) = L \cap J(U(L)),$$

где $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – произвольный неприводимый $U(L)$ -модуль. Тогда M также является неприводимым L -модулем.

Имеет место включение $\text{Irr}(L)$ содержится в аннуляторе $U(L)$ модуля M .

Так как радикал Джекобсона $J(U(L))$ ассоциативной алгебры $U(L)$ совпадает с пересечением аннуляторов всех неприводимых $U(L)$ -модулей, получим $\text{Irr}(L) \subseteq J(U(L))$.

Пусть $x \in L \cap J(U(L))$ – произвольный, M – произвольный неприводимый L -модуль, $A(L)$ – ассоциированная с представлением L ассоциативная алгебра и $\alpha : L \rightarrow A(L)^{(-)}$ – гомоморфизм алгебр Ли, задающий L -модуль M .

Тогда существует его продолжение $\bar{\alpha} : U(L) \rightarrow A(L)$, где $\bar{\alpha}$ – гомоморфизм ассоциативных алгебр и $\bar{\alpha}(l) = \alpha(l)$ для всех $l \in L$.

Следовательно, M также является $U(L)$ -модулем.

Модуль M неприводим над $U(L)$ тогда и только тогда, когда неприводимым является L -модуль M .

Следовательно, x содержится в аннуляторе модуля M и $x \in Irr(L)$.

Включение $L \cap J(U(L)) \subseteq Irr(L)$ завершает доказательство леммы.

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что доказательство можно проводить по-другому.

Если M – модуль над алгеброй Ли L , то он является модулем над универсальной обертывающей алгеброй $U(L)$ и наоборот.

В этом случае отдельно надо рассматривать одномерные модули M с нулевым действием алгебры Ли L .

Такой модуль неприводим над $U(L)$ (согласно определению $U(L)$ содержит 1 [1]) и не является неприводимым над L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.0. *Радикал Джекобсона универсальной обертывающей алгебры $U(L)$ произвольной алгебры Ли L над полем равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $J(U(L)) = 0$ для произвольной алгебры Ли L над полем хорошо известный факт (см. например, [41, стр. 126]).

Для удобства чтения дадим другое доказательство этого утверждения.

Универсальную обертывающую алгебру $U(L)$ над полем F можно рассматривать с единицей и без. В учебнике Н.Бурбаки универсальная обертывающая алгебра рассматривается с единицей [1]. Мы также будем рассматривать универсальную обертывающую алгебру с единицей.

Если алгебра Ли L нулевая, то универсальная обертывающая алгебра $U(L) \simeq F$. Радикал Джекобсона поля $J(F)$ равен нулю.

Предположим, что алгебра Ли L ненулевая. Пусть элемент $x \in J(U(L))$ – ненулевой. Тогда существует правый квазиобратный элемент $y \in J(U(L))$. Условие квазиобратимости $x + y - xy = 0$.

Обозначим через $A_n = span(l_1 l_2 \dots l_n | l_i \in L)$ множество элементов универсальной обертывающей алгебры $U(L)$ являющихся линейной оболочкой произведений n элементов из L .

Алгебра $A = A_1 \oplus A_1/A_2 \oplus \dots \oplus A_{n+1}/A_n \oplus \dots$, где множество A_{n+1}/A_n – фактор-векторное пространство, является градуированной и изоморфна алгебре многочленов от коммутирующих переменных над F , в которой в качестве образующих можно взять любой базис алгебры Ли L [1].

Пусть m и n наименьшие натуральные такие, что $x \in A_m, y \in A_n$.

Алгебра многочленов A является областью целостности.

Следовательно, $xy \in A_{m+n} \setminus A_{m+n-1}$. Учитывая, что $m, n < m+n$ получаем $x + y - xy \neq 0$.

Полученное противоречие доказывает равенство нулю радикала Джекобсона универсальной обертывающей алгебры $U(L)$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.1. *Пусть L – произвольная алгебра Ли над полем. Тогда $Irr(L) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение следует из леммы 1.2.1 и предложения 1.2.0. □

Проиллюстрируем предложение 1.2.1 явным вычислением множества $Irr(L)$ для некоторых алгебр Ли.

Пример 1.2.1 Пусть $L = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in F\}$ – двумерная абелева алгебра Ли над полем F .

Рассмотрим представления $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha, \psi(\alpha x + \beta y) = \beta$. Эти представления одномерные неприводимые. Пересечение их ядер равно нулю.

Получили $Irr(L) = IrrPI(L) = IrrFin(L) = N(L) = 0$.

Нам потребуются следующие определения и теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Назовем алгебру первичной, если из того, что произведение идеалов $UV = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$. Это определение относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Назовем первичным радикалом $P(D)$ пересечение всех первичных идеалов алгебры (ассоциативной или алгебры Ли) D или саму алгебру D , если их нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Пусть L – алгебра Ли. Рассмотрим следующий ряд идеалов алгебры L :

$$L' = [L, L], L'' = [L', L'], \dots, L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}], \dots$$

Скажем, что L – разрешимая алгебра Ли, если $L^{(n)} = 0$ для некоторого натурального n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39. Алгебра Ли называется локально разрешимой, если любая ее конечнопорожденная подалгебра – разрешима.

Известно [10], что первичный радикал специальной алгебры Ли совпадает с наибольшим локально разрешимым радикалом, для конечномерных алгебр Ли – с разрешимым радикалом.

ТЕОРЕМА 1.2.A. (Капланского [16]). Если A – примитивная PI -алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d , то A – конечномерная простая над своим центром Z алгебра, и ее размерность над Z не превосходит $[d/2]^2$, где $[d/2]$ – целая часть числа $d/2$. При наложенных в теореме условиях алгебра A изоморфна алгебре матриц Δ_n над телом Δ , а ее центр Z изоморфен центру Δ и, следовательно, является полем.

ТЕОРЕМА 1.2.B. (Ли [36, стр. 62]) Если L – разрешимая алгебра Ли линейных преобразований конечномерного векторного пространства M над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, то матрицы из L могут быть приведены одновременно к треугольному виду.

ТЕОРЕМА 1.2.C. (О нильпотентном радикале [1, стр. 59]) Для произвольной конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = P(L) \cap L'$, где $L' = [L, L]$.

Известно также [1, стр. 73], что $N(L) = [P(L), L]$.

ТЕОРЕМА 1.2.D. (О радикале Джекобсона алгебры матриц [16]) $J(R_n) = J(R)_n$, где R – произвольная ассоциативная алгебра над полем F .

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1.2.2. Пусть L – конечномерная разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Тогда неприводимое PI -представление алгебры Ли L может быть только коммутативным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – неприводимый модуль, задающий PI -представление алгебры L .

Тогда алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L .

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI -алгеброй. Согласно теореме Капланского [16] (теорема 1.2.A), она простая, конечномерная над своим центром Z , изоморфна алгебре матриц Δ_n над телом Δ , размерности не выше $[d/2]^2$ над Z .

Рассмотрим максимальное подполе E тела Δ . Согласно [16, стр. 151] справедлив изоморфизм

$$K \otimes_Z A(L) \simeq K_{mn}.$$

Тогда алгебра $K \otimes_Z A(L)$ имеет точное неприводимое представление в модуле V размерности mn над K .

Пусть $\bar{K}$ алгебраическое замыкание K .

Конечномерная алгебра $\bar{K} \otimes_Z A(L)$ над $\bar{K}$ имеет конечномерное представление в модуле $\bar{K} \otimes_Z V$.

Согласно теореме Ли, разрешимая алгебра $\bar{K} \otimes_Z \bar{L}$ представима треугольными матрицами в некотором базисе модуля $\bar{K} \otimes_Z V$, а, следовательно, и порожденная ей алгебра $\bar{K} \otimes_Z A(L)$.

Тогда простая алгебра $A(L)$ является коммутативной. Это означает, что $A(L)$ изоморфна некоторому полю, являющемуся расширением основного поля F .

Лемма доказана. $\square$

Пример 1.2.2. Дадим новую интерпретацию следующего известного примера.

Пусть F – поле характеристики нуль, $F[x]$ – кольцо многочленов.

Зададим для произвольного $f(x) \in F[x]$ три отображения:

$$a(f(x)) = f'(x), b(f(x)) = x \cdot f(x), e(f(x)) = f(x).$$

Легко проверить, что тождественное отображение e коммутирует с a и b , $[a, b] = e$.

Мы получили представление трехмерной разрешимой алгебры Ли

$$L = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \in F\}$$

в алгебре эндоморфизмов $\text{End}(F[x])$.

Легко проверить, что векторное пространство $F[x]$ является неприводимым L -модулем. Следовательно, $\text{Irr}(L) = 0$.

Согласно теореме 1.2.С, $N(L) = L' = \{\alpha e \mid \alpha \in F\}$.

Согласно лемме 1.2.2, неприводимое PI -представление алгебры Ли L может быть только коммутативным.

Это означает, что L' лежит в аннуляторе любого неприводимого PI -представления.

Следовательно, справедливо включение $L' \subseteq \text{Irr}PI(L)$.

Как уже было рассмотрено в примере 1.2.1, для двумерной абелевой алгебры Ли $\text{Irr}PI(L/Z(L)) = 0$. Следовательно,

$$\text{Irr}PI(L) = Z(L) = N(L).$$

Алгебра Ли L является разрешимой ступени 2. Получим, $P(L) = L$ (первичный радикал совпадает с разрешимым для конечномерных алгебр [10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40. Конечномерная алгебра Ли называется полупростой, если ее разрешимый радикал равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41. Алгебра Ли называется редуктивной, если она является произведением полупростой и коммутативной подалгебр.

Докажем еще одну лемму.

ЛЕММА 1.2.3. Пусть Δ – тело характеристики нуль, удовлетворяющее полиномиальному тождеству. Рассмотрим алгебру матриц $L = \Delta_n^{(-)}$ как алгебру Ли по отношению к операции коммутирования над простым подполем $\mathbb{Q}$. Рассмотрим лиевский разрешимый идеал I алгебры L . Тогда множество I лежит в центре алгебры матриц Δ_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Z центр тела Δ . Согласно теореме Капланского, тело Δ является конечномерным над центром Z .

Рассмотрим представление Δ_n над Δ^n (пространство векторов-столбцов) с помощью левых умножений.

Хорошо известно, что такое представление матричной алгебры над телом – неприводимо. Алгебра L имеет точное конечномерное над Z представление. Следовательно, $N(L) = 0$. Согласно [1, предложение 5 е), стр. 71], алгебра Ли L – редуктивна как алгебра над Z . Редуктивная алгебра L является произведением полупростой алгебры S и центра Z .

Полупростая конечномерная алгебра Ли S над полем характеристики нуль раскладывается в произведение простых подалгебр $\sigma_i, i = 1, \dots, k$.

Подалгебры σ_i являются идеалами алгебры Ли L . Любой идеал алгебры L является суммой нескольких идеалов σ_i и, возможно, $\mathbb{Q}$ -подпространства центра Z .

Множество ZI является разрешимым лиевским идеалом алгебры Ли L над Z . Оно не может содержать простых подалгебр σ_i .

Следовательно, $ZI \subset Z$ и $I \subset Z$. $\square$

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть L – конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Тогда $\text{IrrPI}(L) = N(L)$, где $N(L)$ – нильпотентный радикал алгебры Ли L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для конечномерной алгебр Ли L справедливо $\text{IrrFin}(L) = N(L)$ [1], получаем включение $\text{IrrPI}(L) \subseteq N(L)$.

Пусть M неприводимый модуль над конечномерной алгеброй Ли L задающий PI -представление алгебры Ли L .

Тогда алгебра $A(L)$ является примитивной PI -алгеброй.

Применяя теорему Капланского и лемму 1.2.3, получим: образ $\overline{P(L)}$ разрешимого идеала лежит в центре Z алгебры $A(L)$.

Следовательно, образ $N(L) = [L, P(L)]$ равен нулю.

Тогда справедливо включение $N(L) \subseteq \text{IrrPI}(L)$.

Из полученных включений следует равенство $\text{IrrPI}(L) = N(L)$.

Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 1.2.2. Пусть основное поле имеет нулевую характеристику. Тогда следующее включение в общем случае строгое:

$$\text{IrrPI}(L) \subset \text{IrrFin}(L).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Амицура-Левицкого [16], алгебра матриц порядка n удовлетворяет стандартному тождеству

$$st_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = 0.$$

Пусть M – конечномерное представление алгебры Ли L над полем F . Тогда ассоциированная алгебра представления $A(M)$ вложена в алгебры $\text{End}(M)$, которая является PI -алгеброй так как изоморфна алгебре матриц.

Следовательно, конечномерное представление алгебры Ли является ее PI -представлением.

Докажем строгость включения.

Пусть $F \subseteq K$ – расширение поля F характеристики нуль, которое не является конечномерным. Таким, например, будет поле рациональных функций с коэффициентами из F .

Алгебра $sl_2(K)$ является простой алгеброй Ли над K . Несложно проверить, что $sl_2(K)$ является простым кольцом Ли и, следовательно, простой алгеброй Ли над F .

Алгебра $sl_2(K)$ имеет точное PI -представление над двумерным арифметическим векторным пространством K^2 .

Следовательно, $\text{IrrPI}(sl_2K) = 0$.

В силу бесконечности над полем F и простоты алгебра $sl_2(K)$ не может иметь конечномерных неприводимых представлений над F .

Следовательно, $\text{IrrFin}(sl_2K) = sl_2K$.

Теорема доказана. $\square$

Из примера 1.2.2 следует, что $\text{IrrPI}(L)$ может быть ненулевым.

Нам потребуется еще одна лемма.

ЛЕММА 1.2.4. *Радикал Джекобсона $J(L)$ абелевой алгебры Ли над полем совпадает с $\text{IrrFin}(L)$ и равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В абелевой алгебре Ли любое подпространство коразмерности 1 является идеалом. Их пересечение равно нулю, а фактор-алгебра по такому идеалу – одномерна, имеет точное одномерное представление.

Следовательно, пересечения ядер конечномерных представлений алгебры Ли L равно нулю. $\square$

ТЕОРЕМА 1.2.3. *Пусть L – специальная алгебра Ли. Тогда имеет место включение $\text{IrrPI}(L) \subset J(L)$, которое в общем случае строгое.)*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – максимальный идеал алгебры Ли L .

Возможны два случая.

1. Алгебра $H = L/I$ – абелева.

Тогда, согласно лемме 2.1.2, $\text{IrrFin}(L) = 0$.

Следовательно, идеал I равен пересечению ядер точных конечномерных представлений.

2. Алгебра $H = L/I$ – простая.

Рассмотрим отображение $\text{ad} : H \rightarrow \text{End}(H)^{(-)}$.

Из простоты H следует, что $\text{Ker}(H) = 0$ и представление является неприводимым.

Так как L – специальная алгебра, и следовательно, обобщенно специальная, алгебра $\text{Ad } H$ является PI -алгеброй [34].

Следовательно, представление L в $\text{End}(H)^{(-)}$ является PI -представлением.

Мы доказали, что радикал Джекобсона специальной алгебры Ли L является пересечением ядер некоторых неприводимых PI -представлений алгебры L .

Следует включение $\text{IrrPI}(L) \subset J(L)$.

Строгость включения показывает пример 1 из [11]. В этом примере построена специальная алгебра Ли с нулевым локально нильпотентным радикалом и ненулевым радикалом Джекобсона. $\square$

Из теоремы 1.2.1 и результата Маршалла следует, что $\text{IrrPI}(L) = J(L)$ для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

2.2. Локально нильпотентный радикал для алгебр Ли

2.2.1. Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли

Нильпотентный радикал алгебры Ли играет важную роль в теории полупростых конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Нам потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42. *Если модуль M – конечномерный, то наибольший идеал U , алгебры L такой, что эндоморфизм x_M , соответствующий элементу x , является нильпотентным для всех $x \in L$, в алгебре $\text{End } M$, – называется наибольшим идеалом нильпотентности представления.*

Для конечномерной алгебры Ли L нильпотентный радикал $N(L)$ характеризуется эквивалентным образом не только как пересечение ядер конечномерных представлений, но и как пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L [1].

Для бесконечномерных алгебр Ли нильпотентный в смысле приведенного определения радикал может не быть нильпотентным.

Пример 2.1.1. Рассмотрим какую-нибудь бесконечномерную локально нильпотентную алгебру Ли L не являющуюся нильпотентной.

Пусть L – это алгебра Ли бесконечных верхнетреугольных матриц по отношению к операции коммутирования над полем F характеристики нуль, содержащих лишь конечное число элементов отличных от нуля.

Обозначим через N подалгебру матриц алгебры Ли L с нулевыми элементами на диагонали.

Покажем, что $N = [L, N]$. Пусть матрица $A \in N$ содержит ненулевые слагаемые $a_{ij_1}e_{ij_1}, a_{ij_2}e_{ij_2}, \dots, a_{ij_k}e_{ij_k}, i \neq j_1, \dots, i \neq j_k$, где $e_{i,j}$ – матричная единица.

Элементы $e_{ii}, e_{j_1j_1}$ принадлежат L . Тогда

$$[e_{ii}, A] = \sum_{s=1}^k a_{ij_s}e_{ij_s} \Rightarrow \sum_{s=1}^k a_{ij_s}e_{ij_s} \in N,$$

$$[[e_{ii}, A], e_{j_1j_1}] = a_{ij_1}e_{ij_1} \Rightarrow a_{ij_1}e_{ij_1} \in N. \quad (1)$$

Из включения 1 следует $N \subset [L, N]$. Обратное включение $[L, N] \subset N$ следует из того, что N идеал.

Так как любое конечное множество матриц алгебры Ли L может быть вложено в алгебру Ли матриц конечного порядка (предполагается, что при вложении можно отбросить бесконечное множество нулевых элементов), можно утверждать, что алгебра Ли L является разрешимой, а N – локально нильпотентной.

Рассмотрим конечномерное представление M алгебры Ли L .

Пусть $\bar{L}, \bar{N}$ гомоморфные образы алгебр Ли L и N в алгебре Ли $\text{End}(M)^{(-)}$.

Алгебра Ли $\bar{L}$ является конечномерной. Согласно теореме 1.2.С, нильпотентный радикал алгебры Ли $\bar{L}$ равен $N(\bar{L}) = \bar{N}$.

Согласно определению нильпотентного радикала, эндоморфизм x_M , соответствующий элементу x , является нильпотентным для всех $x \in \bar{L}$, в алгебре $\text{End}M$.

Следовательно, алгебра Ли N содержится в наибольшем идеале нильпотентности представления M .

Учитывая произвольность конечномерного представления M , мы получили включение $N \subset N(L)$.

Покажем, что пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений совпадает с N .

Пусть для матрицы $A \in L$ слагаемое $a_{ii}e_{ii}$ отлично от нуля.

Алгебра Ли L представлена эндоморфизмами бесконечномерного векторного пространства V . Запись ее элементов в виде матриц получается после выбора базиса $t_1, t_2, \dots$

После перенумерации элементов базиса можно считать, что слагаемое $a_{11}e_{11}$ матрицы A отлично от нуля.

Рассмотрим подпространство W , являющееся линейной оболочкой базисных элементов $t_2, t_3, \dots$. Пусть $\bar{V} = V/W$ фактор-пространство.

Будем считать, что матрицы действуют справа на векторы V .

Покажем, что подпространство W инвариантно относительно алгебры Ли L .

Алгебра Ли L является линейной оболочкой матричных единиц $e_{ij}, i \leq j$.

Получим $t_k e_{ij} = \delta_{ki} t_j$, где δ_{ki} – символ Кронекера, $k \leq j$.

Можно считать, что L действует на фактор-пространстве $\bar{V}$.

Тогда $\bar{t}_1 A = a_{11} \bar{t}_1$. Следовательно, $\bar{t}_1 A^n = a_{11}^n \bar{t}_1 \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Мы показали, что матрица A не лежит в наибольшем идеале нильпотентности представления алгебры Ли L в пространстве $\bar{V}$.

Так как A – это произвольная матрица L с ненулевыми элементами на диагонали, мы доказали включение $N(L) \subset N$.

Следовательно, $N(L) = N$. Алгебра N не является нильпотентной.

Приведенный пример показывает, что для бесконечномерных алгебр Ли естественно ввести понятие локально нильпотентного радикала.

Такой радикал будет удовлетворять свойствам аналогичным свойствам нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли для специальных алгебр Ли.

Если алгебра Ли имеет точное PI -представление, то она является специальной. Для PI -представлений алгебр Ли можно ввести аналог наибольшего идеала нильпотентности.

ТЕОРЕМА 2.1.A. ([11]) Пусть алгебра Ли L имеет PI -представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M . Тогда

- i) Все идеалы J алгебры L такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in J$, содержатся в одном из них, например U .
- ii) Образ $\bar{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $End M$.
- iii) Идеал U является множеством элементов $x \in L$ таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43. По аналогии с конечномерными алгебрами, назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности PI -представления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F .

В работе [11] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Приведем еще одно важное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45. Скажем, что алгебра Ли L полупростая, если ее первичный радикал $P(L)$ равен нулю.

ТЕОРЕМА 2.1.B. ([11]) Пусть L – специальная алгебра Ли над полем F характеристики нуль, $N(L)$ – ее локально нильпотентный радикал. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $N(L) = 0$;
- 2) L – редуktивна;
- 3) L^2 – полупростая алгебра.

2.2.2. Соотношения между локально нильпотентным радикалом алгебры Ли и неприводимо представленными радикалами

Цель данного раздела исследовать соотношения между локально нильпотентным радикалом специальной алгебры Ли и радикалами $IrrPI(L)$ и $IrrFin(L)$.

Следующее включение непосредственно следуют из определения

$$IrrPI(L) \subset IrrFin(L) \quad (2)$$

В разделе 2.1.2 показана строгость этого включения в общем случае.

Нам потребуется определение примитивной ассоциативной алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46. Скажем, что ассоциативная алгебра – примитивная, если она имеет точное неприводимое представление.

ТЕОРЕМА 2.2.1 *Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо включение*

$$N(L) \subset \text{Irr}PI(L), \quad (3)$$

которое в общем случае является строгим.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2.2.1 *Пусть алгебра Ли L над полем F характеристики нуль имеет неприводимое PI -представление в алгебре эндоморфизмов $\text{End}(M)^{(-)}$ векторного пространства M над F . Пусть I – некоторый локально разрешимый идеал L . Тогда образ $\bar{I}$ идеала I в алгебре $\text{End}(M)^{(-)}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M -неприводимый $A(L)$ -модуль, алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L .

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI -алгеброй.

Согласно теореме Капланского [16], она простая, конечномерная над своим центром Z изоморфна алгебре матриц над телом $A(L) \simeq \Delta_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\bar{I}$ – гомоморфный образ идеала I в алгебре $A(L)$. В конечномерной над центром алгебре локально разрешимый идеал является разрешимым.

Согласно лемме 2.1.2, идеал $\bar{I}$ лежит в центре Z алгебры $A(L)$.

Напомним, что алгебра $A(L)$ порождена элементами L .

Следовательно, идеал $\bar{I}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Теоремы 2.2.1). Локально нильпотентный радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным [11]. Заметим, что локально нильпотентный идеал является локально разрешимым.

Пусть специальная алгебра Ли L имеет неприводимое PI -представление в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \rightarrow \text{End}(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F .

Тогда, согласно лемме 2.2.2, $\varphi(N(L)) \subset Z(\varphi(L))$.

Алгебра Ли $\varphi(L)$ порождает ассоциативную алгебру $A(L)$. Ее центр $Z(\varphi(L))$ лежит в центроиде неприводимого L -модуля M .

Согласно лемме Шура [16], центроид неприводимого модуля является телом. Вложение в тело можно было также вывести из теоремы Капланского.

Ненулевые элементы $Z(\varphi(L))$ в любой степени отличны от нуля.

Следовательно, ненулевые элементы $\varphi(N(L))$ не лежат в наибольшем идеале локальной нильпотентности модуля M . Получили $\varphi(N(L)) = 0$.

Из произвольности неприводимого PI -представления M следует включение $N(L) \subseteq \text{Irr}PI(L)$. $\square$

Для построения примера, доказывающего строгость включения (3), напомним понятия алгебраического и трансцендентного расширения полей и теорему Гильберта о конечности базисов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47. Пусть K – расширение поля F .

Элемент $\alpha \in F$ называется алгебраическим над F если он является корнем многочлена $f(x)$ положительной степени $f(x) \in F[x]$.

Расширение K поля F называется алгебраическим над F , если все его элементы алгебраические над F .

Подмножество $S \subset K$ называется алгебраически независимым над F если из соотношения

$$0 = \sum a(\nu) \prod_{x \in S} x^{\nu(x)}$$

с коэффициентами $a(\nu) \in F$, почти все из которых равны нулю, следует, что все $a(\nu) = 0$ [42, стр. 288].

Подмножество S в F , алгебраически независимое над F и максимальное относительно упорядоченности по включению, будет называться базисом трансцендентности поля K над полем F [42, стр. 288].

Известно, что любые два базиса трансцендентности расширения полей имеют одинаковую мощность, не превосходящую мощности множества образующих [42, теорема 1 на стр. 287].

Мощность множества базиса трансцендентности называется степенью трансцендентности расширения полей [42, стр. 289].

ТЕОРЕМА 2.2.А. ([42, стр. 169]) Пусть A – нётерово коммутативное кольцо. Тогда кольцо многочленов $A[x_1, \dots, x_n]$ также нётерово.

Пример 2.2.1. Пример специальной алгебры Ли L над полем F , $\text{char } F \neq 2$, такой, что $\text{IrrPI}(L) \neq 0$, локально нильпотентный радикал которой равен нулю.

В частности, $\text{IrrPI}(L)$ радикальная специальная алгебра Ли.

Для алгебры Ли L справедливо строгое включение

$$N(L) \subset \text{IrrPI}(L) \quad (4)$$

Обозначим через B коммутативную алгебру над полем F формальных степенных рядов со свободным членом от одной коммутирующей переменной. Идеал рядов без свободного члена R это – известный пример коммутативной радикальной алгебры Ли [32].

Рассмотрим алгебру матриц второго порядка B_2 с элементами из B . Известно, что ее радикал Джекобсона $J(B_2)$ равен R_2 [16], [32].

В частности, при гомоморфном отображении ψ алгебры B_2 в алгебру эндоморфизмов неприводимого B_2 -модуля M справедливо $\psi(R_2) = 0$.

Рассмотрим алгебру Ли $L = B \otimes_F \mathfrak{sl}_2(F)$, где $\mathfrak{sl}_2(F)$ – алгебра Ли матриц второго порядка над F со следом нуль. Обозначим через H идеал $H = R \otimes_F \mathfrak{sl}_2(F)$.

Алгебра L вложена в PI -алгебру B_2 и, следовательно, является специальной.

Пусть $\varphi : L \rightarrow \text{End}(M)^{(-)}$ – неприводимое PI -представление алгебры L .

Предположим, $\varphi(H) \neq 0$.

Ассоциированная с представлением алгебра $A(L)$ является PI -алгеброй. Согласно теореме Капланского [16] (теорема 1.2.А), она простая, конечномерная над своим центром Z , изоморфна алгебре матриц Δ_n над телом Δ .

Можно считать, что алгебра L вложена в алгебру матриц $\Delta_n^{(-)}$.

Алгебра $\mathfrak{sl}_2(F)$ является простой (напомним, что характеристика поля F отлична от двух). Пусть элемент $l \in \mathfrak{sl}_2(F)$ – произвольный. Тогда существуют элементы

$$l'_1, \dots, l'_k, l''_1, \dots, l''_k \in \mathfrak{sl}_2(F)$$

такие, что

$$l = \sum_{i=1}^n [l'_i, l''_i].$$

Рассмотрим произвольный элемент b из B . Справедливо равенство

$$bl = \sum_{i=1}^n [bl'_i, l''_i].$$

Учитывая, что алгебра матриц Δ_n порождена как ассоциативная алгебра над F алгебра элементами алгебры Ли L , можно считать, что алгебра $\varphi(B)$ лежит в центре Z алгебры матриц Δ_n , который является полем. Так как матрицы из центра являются диагональными, с помощью отождествления матрицы

$$\begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z \end{pmatrix}$$

и элемента $z \in Z$ можно считать, что Z содержится в теле Δ .

Пусть в представлении элементов $e_{11} - e_{22}, e_{12}, e_{21}$ в виде матриц из Δ_n участвуют элементы $a_1, \dots, a_s$ тела Δ .

Пусть K – максимальное подполе в Δ . Согласно теореме 4.2.1 [16, стр. 94] и конечномерности Δ над Z получим $K \otimes_Z \Delta \simeq K_m$ для некоторого натурального m .

Можно считать, что элементы $a_1, \dots, a_s$ представимы матрицами порядка m от элементов $k_1, \dots, k_l$ из K .

Пусть $Q_{\varphi(B)}$ – классическое кольцо частных алгебры $\varphi(B)$.

Обозначим через A расширение $A = Q_{\varphi(B)}(k_1, \dots, k_l)$ поля F .

Отметим, что расширение K поля F может быть трансцендентным (K является алгебраическим расширением поля Z , а Z содержит $\varphi(B)$ и является трансцендентным расширением поля F).

Пусть E – множество алгебраических элементов поля A над F . Степень трансцендентности расширения A над E не превосходит l [42, теорема 1 на стр. 287].

Можно считать, что для каждого элемента r из A найдутся подполя $E_r, K_r \in A$ такие, что E_r конечное расширения поля F , K_r трансцендентное расширение E_r , степени трансцендентности не выше l и $r \in K_r$ или расширение $F(r)$ алгебраическое над F .

Пусть b произвольный элемент алгебры $Q_{\varphi(B)}$. Он лежит в центре алгебры $A(L)$.

Можно считать, что он выражен над F через образующие алгебры $B \otimes_F sl_2(F)$.

Тогда b лежит в конечно порожденном подполе поля $Q_{\varphi(B)}$ (напомним, что он выражается через конечное множество элементов $k_1, \dots, k_l$ из K).

В знаменателях дробей из $\varphi(B)$ могут стоять только образы элементов из R (формальные степенные ряды с ненулевым свободным членом обратимы в B).

Пусть $T = \{t_1, \dots, t_p\}$ конечное множество элементов R таких, что их образы $\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_p)$ стоят в знаменателях дробей участвующих в представлении b .

Кольцо R является радикальным. Следовательно, R не имеет максимальных идеалов.

Если бы R порождалось множеством T , то согласно теореме Гильберта о конечности базисов (теорема 2.2.A) оно было бы гомоморфным образом нётерова кольца многочленов от конечного числа образующих и само являлось бы нётеровым. Нётерово кольцо содержит максимальный идеал. Противоречие.

Полученное противоречие доказывает, что $F[T] \neq R$.

Обозначим через $I = \ker \varphi$ ядро вложения R в Z . Мы предположили, что $\varphi(R) \neq 0$.

Следовательно, $I \neq R$. Фактор-алгебра R/I не является конечно порожденной из тех же соображений, что и выше.

Тогда существует элемент $t \in R \setminus (F(T) \cup I)$ такой что, $\varphi(t) \neq 0$.

Элемент $\frac{1}{t}$ не представим через дроби из Q_B со знаменателями из T . Противоречие.

Полученное противоречие доказывает, что $\varphi(H) = 0$.

Следовательно, $H \subset \text{IrrPI}(L)$.

Представление, полученное с помощью естественного гомоморфизма $\tau : B \rightarrow B/R$ задает неприводимое PI -представление алгебры Ли L в арифметическом векторном пространстве $\bar{\tau} : L \rightarrow F^2$. Алгебра H лежит в ядре $\ker \tau$.

Получили включение $\text{IrrPI}(L) \subset H$.

Мы доказали равенство $\text{IrrPI}(L) = H$.

Пусть K кольцо частных алгебры B . Тогда $L \subseteq K_2^{(-)}$, которая имеет точное представление в K^2 . Легко проверить, что наибольший идеал нильпотентности такого представления алгебры L равен нулю.

Следовательно, $N(L) = 0$.

Строгое включение $0 \subset H$ завершает обоснование примера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48. Также как и для специальных алгебр Ли, назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.

Приведем еще один пример. Он основан на примере Ф.Кубо [4], но используется для других целей.

Пример 2.2.2. Пусть L – множество линейных отображений конечного ранга бесконечномерного векторного пространства V над полем F в себя.

Обозначим через S множество отображений из L со следом нуль. Рассмотрим L и S как алгебры Ли по отношению к операции коммутирования.

Легко проверить, что $L^2 = S$, S простая алгебра Ли.

Заметим, что диагональные матрицы из L не образуют идеал L .

Пусть матрица $A \in L$ – диагональная, с конечным числом ненулевых элементов на диагонали. Обозначим через $a_{ii}e_{ii}$ ненулевое слагаемое A с наибольшим номером i . Тогда коммутатор

$$[a_{ii}e_{ii}, e_{i,i+1}] = a_{ii}e_{i,i+1}$$

не является диагональной матрицей.

Идеал S алгебры Ли L является простым. Все нетривиальные идеалы L – это векторные пространства, содержащие S .

Алгебра Ли S не является специальной и, следовательно, содержится в аннуляторах неприводимых PI -представлений L .

Алгебра $H = L/S$ является абелевой. Следовательно, согласно лемме 2.1.2, $J(H) = 0$ и $\text{IrrPI}(H) = 0$.

Установили равенства $J(L) = S, \text{IrrPI}(L) = S$.

Фактор-алгебра $H = L/S$ – абелева и, следовательно, специальная. Согласно теореме 2.1.В локально нильпотентный радикал $N(H)$ алгебры H равен нулю. Получили $N(L) = S$.

Алгебра S не является ни локально разрешимой, ни локально нильпотентной.

Следовательно, радикал Джекобсона $J(L)$, $\text{IrrPI}(L)$ и локально нильпотентный радикал $N(L)$ произвольной алгебры Ли L могут не быть ни локально разрешимыми, ни локально нильпотентными.

Алгебра S простая, не является специальной алгеброй Ли.

Радикал Джекобсона простой алгебры Ли равен нулю $J(S) = 0$. Алгебра S не имеет неприводимых PI -представлений.

Получили $\text{IrrPI}(S) = S$.

Пример 2.2.2 показывает, что для произвольной алгебры Ли локально нильпотентный радикал может не быть локально нильпотентным.

Из примера 2.2.2 следует, что для произвольной алгебры Ли возможно строгое включение

$$J(L) \subset \text{IrrPI}(L). \quad (5)$$

Согласно теореме 1.2.3, для специальных алгебр Ли имеет место включение

$$\text{IrrPI}(L) \subset J(L), \quad (6)$$

которое в общем случае является строгим.

Из включений (5) и (6) делаем вывод, что нельзя дать удовлетворительного гомологического описания радикала Джекобсона даже для специальных алгебр Ли.

Предлагаем вместо радикала Джекобсона для специальных алгебр Ли использовать локально нильпотентный радикал, который совпадает с радикалом Джекобсона для конечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики.

2.3. Прimitивные алгебры Ли

2.3.1. Основные определения и формулировки

Понятие радикала Джекобсона для ассоциативных алгебр тесно связано с понятием примитивной алгебры.

Радикал Джекобсона примитивной ассоциативной алгебры равен нулю.

Полупростая ассоциативная алгебра раскладывается в подпрямую сумму примитивных [32], [16].

В этой главе мы исследуем примитивные алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 49. Скажем, что алгебра Ли – примитивная, если она имеет точное неприводимое представление.

Для представления алгебр Ли L с нулевым радикалом $\text{IrrPI}(L)$ будут полезны следующие алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 50. Скажем, что алгебра Ли – PI -примитивная, если она имеет точное неприводимое PI -представление.

Нам потребуется определение подпрямой суммы алгебр Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51. Алгебра Ли L называется подпрямой суммой алгебр Ли $L_\alpha, \alpha \in I$, если существуют гомоморфизмы $f_\alpha : L \rightarrow L_\alpha, \alpha \in I$ такие, что:

- а) все гомоморфизмы f_α – сюръективны;
- б) $\bigcap_{\alpha \in I} \text{Ker } f_\alpha = 0$.

Сначала сформулируем одно очевидное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если PI -неприводимо представленный $\text{IrrPI}(L)$ радикал алгебры Ли L равен нулю, то алгебра L представима в виде подпрямой суммы PI -примитивных алгебр Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В монографии Джекобсона [32] приведено необходимое и достаточное условие разложимости ассоциативного кольца U в подпрямую сумму колец U_i : “... утверждение о том, что кольцо U является подпрямой суммой колец $U_i, i \in I$ эквивалентно тому, что в кольце существует такое множество идеалов с нулевым пересечением J_i , фактор-кольца по которым изоморфны $U_i \simeq U/J_i, i \in I$ ”.

Приведенное условие разложимости в прямую сумму справедливо также для ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

Для завершения доказательства предложения осталось заметить, что в алгебре Ли L пересечение аннуляторов неприводимых PI -представлений равно нулю и гомоморфный образ алгебры L в алгебре эндоморфизмов представления является PI -примитивной алгеброй Ли.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52. *Идеал алгебры Ли назовем примитивным, если фактор-алгебра по нему примитивна.*

Пример 1.2.2 показывает, что даже нильпотентная конечномерная алгебра Ли степени 2 может быть примитивной.

Нильпотентная алгебра Ли является разрешимой, а разрешимая конечномерная алгебра Ли совпадает со своим разрешимым радикалом, что то же самое – первичным радикалом.

Парадоксальность примера состоит в том, что радикальная алгебра Ли является примитивной.

Напомним, что в ассоциативном случае радикал Джекобсона, а, следовательно, и первичный, примитивной алгебры равны нулю [16]. Более того, примитивная алгебра является первичной.

Оказалось, что примитивных алгебр Ли достаточно много.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53. *Скажем, что алгебра Ли является артиновой, если любая убывающая цепочка ее идеалов – стабилизируется.*

Для ассоциативных алгебр артиновость определяется через правые (правая артиновость) и левые (левая артиновость) идеалы. Известны примеры право, но не левоартиновых алгебр. Для двусторонних идеалов вводят понятие слабой артиновости, которое слабее артиновости.

В алгебрах Ли все идеалы двусторонние и нет понятия правой и левой артиновости. Поэтому некоторые математики предлагают определять артиновость через подалгебры. Определение артиновости через подалгебры более сильное.

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1.1. *Пусть L – артинова алгебра Ли над полем, имеющая единственный минимальный идеал. Тогда алгебра Ли L – примитивна.*

ТЕОРЕМА 3.1.2. *Пусть L_1 и L_2 – примитивные алгебры Ли, имеющие точные неприводимые представления*

$$\varphi_i : L_i \rightarrow M_i$$

такие, что центродиды Δ_i модулей M_i совпадают с основным полем и $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = 0$, где $i = 1, 2$. Тогда их прямая сумма $L_1 \oplus L_2$ также примитивна.

В 70-ых годах прошлого века была известна проблема: является ли универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ полупростой конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль примитивной?

Наибольших успехов в решении этой проблемы добился Ж. Диксмье [41]. Он исследовал не только примитивность универсальной обертывающей алгебры Ли, но и примитивность отдельных ее идеалов.

Очевидна следующая импликация: если $U(L)$ – примитивна, то алгебра Ли L также является примитивной. Обратное в общем случае неверно (смотри пример 3.2.1).

Относительно примитивности полупростых алгебр Ли справедливы следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Полупростые конечномерные алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль – PI- примитивны.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 54. *Скажем, что простая алгебра Ли L – центральная простая, если центрорид представления $\text{ad} : L \rightarrow \text{Ad } L$ совпадает с основным полем.*

Центральными простыми алгебрами над полем характеристики нуль являются, например, простые конечномерные алгебры Ли больших классов A, B, C, D [36].

Применяя теорему 2.3.1, получим утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если полупростая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль раскладывается в прямую сумму центральных простых алгебр, то она является примитивной.*

В [24] была доказана примитивность свободной ассоциативной алгебры с конечным или счетным множеством образующих.

Свободная ассоциативная алгебра является универсальной обертывающей свободной алгебры Ли. Следовательно, свободная алгебра Ли является примитивной.

Все коммутативные алгебры Ли над полями $\mathbb{Z}_p$, где p – простое, и $\mathbb{Q}$ также являются PI -примитивными. Бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются PI -примитивными над любыми полями (см. пример 3.2.2).

Показано, что конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной (см. пример 3.2.3).

Легко указать целый класс неабелевых алгебр не являющихся PI -примитивными.

Согласно теореме 1.2.1, для любой конечномерной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо равенство $IrrPI(L) = N(L)$, где $N(L)$ – нильпотентный радикал алгебры Ли L .

Для конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль нильпотентный радикал равен $N(L) = [P(L), L]$ (теорема 1.2.С).

Неабелева разрешимая алгебра Ли L совпадает со своим первичным радикалом: $P(L) = L$.

Получим: нильпотентный радикал $N(L) = [L, L]$ неабелевой разрешимой алгебры Ли L над полем характеристики нуль отличен от нуля.

Мы доказали следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Конечномерная неабелева разрешимая алгебра Ли L над полем характеристики нуль не является PI -примитивной.*

Приведен пример неартиновой некоммутативной алгебры Ли являющейся примитивной (см. пример 3.2.5).

В заключение сформулируем следующие вопросы, ответ на которые неизвестен авторам.

- 1) Существует ли неабелева алгебра Ли, которая не является примитивной?
- 2) Всегда ли полупростая алгебра Ли является примитивной?
- 3) Указать необходимое и достаточное условие PI -примитивности: а) конечномерных; б) специальных; в) произвольных алгебр Ли.

2.3.2. Примитивность некоторых алгебр Ли

ЛЕММА 3.2.1. *Пересечение примитивных идеалов произвольной алгебры Ли равно нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X пересечение аннуляторов неприводимых представление алгебры Ли L или саму алгебру L если их нет.

Легко проверить, что модуль M – неприводим над алгеброй Ли L тогда и только тогда, когда M является $U(L)$ неприводимым модулем, где $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебры Ли L .

Это означает, что $X = L \cap J(U(L))$.

Из предложений 1.2.0 следует, что $J(U(L)) = 0$ для произвольной алгебры Ли L .

Тогда множество X равно пересечению примитивных идеалов алгебры Ли L , равно 0, что завершает доказательство леммы. $\square$

Пример 3.2.1. Пусть $L = \mathbb{C}$ двумерная абелева алгебра Ли над $\mathbb{R}$.

Представление L умножениями на $\mathbb{C}$ задает точное неприводимое представление. Следовательно, алгебра Ли L – PI -примитивна.

Ее универсальная обертывающая, изоморфная алгебре многочленов над $\mathbb{R}$ от двух коммутирующих переменных, не является примитивной.

Согласно теореме Капланского, примитивная PI -алгебра изоморфна алгебре матриц Δ_n для некоторого тела Δ [16]. В силу коммутативности, примитивная алгебра многочленов от двух переменных должна быть полем, что не выполнено.

Пример 3.2.2. Пусть L – абелева алгебра Ли над полем F . Если размерность $\dim_F L = n$ – конечна и существует алгебраический элемент α степени n над F , то рассмотрим простое алгебраическое расширение $F(\alpha)$.

Поле $F(\alpha)$ является абелевой алгеброй Ли размерности n и имеет точное неприводимое PI -представление.

Следовательно, алгебра Ли L является PI -примитивной.

К числу полей, имеющих алгебраические элементы любой степени относятся поле рациональных чисел и кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_p$, где p – простое.

Если размерность алгебры Ли L – бесконечна, то рассмотрим бесконечное расширение K поля F .

Оно тоже является реализацией абелевой примитивной алгебры Ли над F .

Дадим одно важное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55. Область целостности R называется факториальным кольцом, если в ней каждый ненулевой элемент a является обратимым элементом кольца, либо представляется в виде произведения необратимых элементов $a = p_1 \cdots p_n$ ($n \geq 1$), причем данное разложение единственно в том смысле, что если $p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m$, то $m = n$ и после перенумерации получим равенства $p_i = u_i q_i$ для всех i , где u_i – обратимый элемент кольца R .

Пример 3.2.3. Покажем, что абелева алгебра $L = F \oplus \dots \oplus F$ размерности k , где F – алгебраически замкнутое поле, $k \geq 2$, – не является примитивной.

Универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ алгебры Ли L изоморфна кольцу многочленов от k коммутирующих переменных

$$U(L) = F[x_1, \dots, x_k].$$

Примитивность алгебры Ли L означает, что существует точный неприводимый правый L -модуль M . Тогда он является неприводимым правым $U(L)$ – модулем.

Все неприводимые правые модули над алгеброй являются факторами по максимальным регулярным правым идеалам [16].

Следовательно, в $U(L)$ существует максимальный регулярный правый идеал I .

Из точности неприводимого L -модуля M следует, что идеал I не содержит переменных $x_1, \dots, x_k$.

Алгебра $U(L)$ коммутативна и содержит 1. Поэтому идеал I является максимальным и фактор-алгебра $H = U(L)/I$ является полем. Можно считать, что H расширение поля F .

Модуль M является неприводимым H -модулем.

Отметим, что алгебра H порождена образами образующих $U(L)$. Докажем, что элементы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ не могут быть трансцендентными.

Предположим, что хотя бы один элемент $\bar{x}_i$ – трансцендентный над F .

Сначала рассмотрим подполе P полученное присоединением алгебраических элементов к F .

Тогда H является полем рациональных функций от m переменных ($0 < m \leq k$), порожденным элементами $\frac{f_1}{g_1}, \dots, \frac{f_s}{g_s}$ как кольцо, где $f_i, g_i, i = 1, \dots, s$ - многочлены от m переменных над P .

Рассмотрим многочлен

$$g = \prod_{i=1}^s g_i.$$

Хорошо известно, что кольцо многочленов от одной переменной над факториальным кольцом является факториальным [42]. Следовательно, кольцо многочленов от нескольких переменных является факториальным.

Многочлен G раскладывается в произведение неприводимых многочленов.

Алгебраически замкнутое поле – бесконечно [42]. Найдется $\alpha \in F$ такое, что неприводимый многочлен $x - \alpha$ не входит в разложение g .

Тогда рациональная дробь $\frac{1}{x-\alpha}$ не может быть порождена элементами $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ с помощью кольцевых операций.

Противоречие.

Мы установили, что H – алгебраическое расширение поля F и, следовательно, $H = F$. Получили $x_1, \dots, x_k \in I$ – противоречие.

Следовательно, алгебра L – не является примитивной.

Теорема 3.1.1 следует из леммы 3.2.1 и того, что любой ненулевой примитивный идеал артиновой алгебры Ли содержит единственный минимальный.

Доказательство теоремы 3.1.2.

Пусть алгебры Ли L_1 и L_2 имеют точные неприводимые представления в алгебре эндоморфизмов модулей M_1 и M_2 , такие, что их центроиды совпадают с основным полем F .

Рассмотрим модуль $M_1 \otimes_F M_2$ над $\text{End}(M_1) \otimes_F \text{End}(M_2)$ и вложения алгебр Ли

$$\varphi_i : L_i \rightarrow \text{End}(M_i), \quad i = 1, 2.$$

Построим следующие отображения L_1 и L_2 в алгебру

$$\text{End}(M_1) \otimes_F \text{End}(M_2) :$$

$$\varphi'_1(l_1) = \varphi_1(l_1) \otimes 1 \text{ и } \varphi'_2(l_2) = 1 \otimes \varphi_2(l_2), \quad l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$$

Тогда $\varphi_1 + \varphi_2$ задает вложение $L_1 \oplus L_2$ в $(\text{End}(M_1) \otimes_F \text{End}(M_2))^{(-)}$.

Покажем, что $M_1 \otimes_F M_2$ является $L_1 \oplus L_2$ неприводимым модулем.

Рассмотрим ненулевой элемент $x \in M_1 \otimes_F M_2$. Можно считать, что он представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_{i,j} m_i \otimes n_j,$$

где хотя бы одно $\alpha_{i,j} \neq 0$ и элементы $m_1, \dots, m_k \in M_1$ и $n_1, \dots, n_l \in M_2$ – линейно независимы над центроидами соответствующих модулей и, следовательно, над полем F . Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_{1,1} \neq 0$.

Обозначим через $A(L_i)$ ассоциативные алгебры, порожденные в $\text{End}(M_1)$ множествами L_i , где $i = 1, 2$.

Возьмем произвольный элемент $u \otimes v \in M_1 \otimes_F M_2$. Согласно теореме плотности Джекобсона [16], существуют элементы $a \in A(L_1)$ и $b \in A(L_2)$ такие, что

$$am_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}}u, am_2 = 0, \dots, am_k = 0, bn_1 = v, bn_2 = 0, \dots, bn_l = 0.$$

Тогда $(a \otimes 1)(1 \otimes b)x = u \otimes v$.

Отметим, что произвольный элемент $M_1 \otimes_F M_2$ представим в виде линейной комбинации элементов вида $u \otimes v$, которые лежат в подмодуле, порожденном x .

Следовательно, модуль $M_1 \otimes_F M_2$ – неприводим и алгебра $L_1 \oplus L_2$ – примитивна.

Условие $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = \emptyset$, где $i = 1, 2$ требуется для того, чтобы $a \otimes 1$ и $1 \otimes b$ не могли совпадать.

□

Отметим, что в общем случае тензорное произведение неприводимых модулей может не быть примитивным, что показывает следующий пример.

Пример 3.2.4. Мы уже использовали то, что поле комплексных чисел является двумерной абелевой примитивной алгеброй Ли над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над алгеброй Ли $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Отметим, что ассоциативная подалгебра $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ алгебры $\mathbf{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, порожденная множествами $\mathbb{C} \otimes 1$ и $1 \otimes \mathbb{C}$ содержит также элементы $1 \otimes 1, i \otimes i$.

Покажем, что модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не является неприводимым.

Следующие элементы $1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i$ образуют базис $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим подпространство $M \subseteq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, порожденное элементами $1 \otimes 1 + i \otimes i, 1 \otimes i - i \otimes 1$ и подпространство N , порожденное элементами $1 \otimes 1 - i \otimes i, 1 \otimes i + i \otimes 1$.

Легко проверить, что M и N являются подмодулями $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M \oplus N$.

Следовательно, модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не является неприводимым над алгеброй Ли $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Мы уже отмечали, что алгебра Ли $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(-)}$ не является примитивной.

Пример 3.2.4 дает одно из представлений алгебры $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(-)}$ не являющееся неприводимым.

Доказательство следствия 1.

Пусть L – простая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики нуль.

Рассмотрим представление $\text{ad} : L \rightarrow \text{Ad } L^{(-)}$.

Тогда алгебра Ли L , рассматриваемая как модуль, является неприводимым L модулем, представление ad – PI -неприводимым.

Центроид этого представления Δ является полем (см., например, [36, с. 314]).

Из конечномерности L следует, что Δ – конечное расширение поля F . Конечным расширением алгебраически замкнутого поля может быть только оно само.

Следовательно, отображение ad является центральным представлением алгебры Ли L .

Из простоты L получим $\text{ad}(L) \cap \Delta = 0$.

Выполнены условия теоремы 3.1.2. Осталось использовать разложение полупростой конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль в прямую сумму простых [1], [36].

□

Пример 3.2.5. Пусть алгебра Ли G является прямой суммой счетного количества алгебр, изоморфных алгебре L из примера 1.2.2 над полем $\mathbb{Q}$.

Покажем, что она является примитивной. Очевидно, что G не является артиновой алгеброй Ли.

Рассмотрим различные иррациональные алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$.

Пусть $M = F[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ кольцо многочленов от счетного числа коммутирующих переменных с коэффициентами из поля $F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$.

Рассмотрим следующие линейные отображения векторного пространства M :

$$a_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k}; b_k(f) = \alpha_k x_k \cdot f; e_k(f) = \alpha_k f, f \in M.$$

Легко проверить соотношение $[a_k, b_k] = e_k$. Рассмотрим представления

$$\varphi_k : L \rightarrow (End_{\mathbb{Q}} M)^{(-)},$$

заданные соотношениями

$$\varphi_k(a) = a_k, \varphi_k(b) = b_k, \varphi_k(e) = e_k, k = 1, 2, \dots$$

Гомоморфизм $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots$ задает представление алгебры Ли G в $End_{\mathbb{Q}} M^{(-)}$.

Докажем, что модуль M является неприводимым G -модулем. Пусть элемент $f \in M$ произвольный ненулевой многочлен из M и одночлен $\alpha_{i_1, \dots, i_n} x^{\beta_1} \dots x^{\beta_n}$ – одночлен старшей степени, входящий в запись f с ненулевым коэффициентом.

Тогда

$$\frac{1}{\alpha_{i_1, \dots, i_n} \beta_1! \dots \beta_n!} a_{i_1}^{\beta_1} \dots a_{i_n}^{\beta_n} (\alpha_{i_1, \dots, i_n} x^{\beta_1} \dots x^{\beta_n}) = 1.$$

Действуя на 1 умножениями a_k на переменную x_k можно получить произвольный одночлен M .

Мы доказали неприводимость G -модуля M .

Аналогично можно показать, что прямая сумма конечного числа алгебр, изоморфных алгебре L из примера 1.2.2 над полем $\mathbb{Q}$ является примитивной алгеброй Ли.

Для этого пример 3.2.5 переписывается для конечного числа прямых слагаемых.

3. Заключение

В статье проведено исследование соотношений между радикалом Джекобсона, локально нильпотентным и неприводимо представленными радикалами для алгебр Ли.

Наибольший интерес представляет возможность гомологического описания радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Наиболее вероятным кандидатом на гомологическое описание радикала Джекобсона алгебры Ли является радикал $IrrPI(L)$ – пересечение ядер неприводимых PI -представлений алгебры Ли L .

Из всего вышесказанного делаем вывод, что нельзя дать удовлетворительного гомологического описания радикала Джекобсона даже для специальных алгебр Ли.

Предлагаем вместо радикала Джекобсона для специальных алгебр Ли использовать локально нильпотентный радикал, который совпадает с радикалом Джекобсона для конечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III).- М.: Мир, 1976.- 496 с.
2. Размыслов, Ю. П. Об энгелевых алгебрах Ли / Ю.П. Размыслов // Алгебра и логика.- 1971.- Т. 10.- № 10. С. 33-44.
3. Кострикин, А. И. Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.- 232 с.
4. Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. 1991. V. 38. P. 23-30.

5. Togo, S. Radicals of infinite-dimensional Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1972. V. 2, P. 179-203.
6. Togo, S., Kavamoto N. Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1972. V. 2. P. 253-261.
7. Marshall, E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra. J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 416-422.
8. Латышев, В.Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями / В.Н. Латышев // Сиб. мат. журнал.- 1963.- Т. 4.- № 4.- С. 821-829.
9. Бейдар К.И., Пихтильков С.А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // Успехи матем. наук. 1994. № 1. С. 233.
10. Бейдар, К.И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К.И. Бейдар, С.А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика.- 2000.- Т. 6.- № 3.- С. 643-648.
11. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика.- 2002.- Т. 8.- Вып. 3.- С. 769-782.
12. Парфенов, В.А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли / В.А. Парфенов // Сиб. мат. журнал.- 1971.- Т. 12.- № 1.- С. 171-176.
13. Пихтильков, С.А. Артиновые специальные алгебры Ли / С.А. Пихтильков // В мв. сб. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп.- Тула:ТГПУ, 2001.- С. 189-194.
14. Пихтильков, С.А. Структурная теория специальных алгебр Ли.- Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2005.- 130 с.
15. Пихтильков, С.А. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли /С.А. Пихтильков, В.М. Поляков// Чебышевский сборник.- 2005.- Т. 6.- Вып. 1.- С. 163-169.
16. Херстейн, И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.- 191 с.
17. Кемер, А.Р. Тождества Капелли и нильпотентность радикала конечно порожденной PI -алгебры / А.Р. Кемер // ДАН СССР.- 1980.- Т.- 255.- № 4.- С. 793-797.
18. Braun, A. The nilpotency of the radical in a finitely generated PI -ring// J of Algebra. 1984. V. 89. № 2. P. 375-396.
19. Ширшов, А.И. О кольцах с тождественными соотношениями / А.И. Ширшов// Мат. сборник.- 1957.- Т. 43.- № 2.- С. 277-283.
20. Размыслов, Ю.П. Тождества алгебр и их представления. М.: Наука, 1989.
21. Ламбек, И. Кольца и модули.- М.: Мир, 1971.- 279 с.
22. Beidar K.I., Martindale W.S., Mikhalev A.V. Rings with generalized identities. Pure and Applied Mathematics. New-York: Marcel-Dekker, 1996.
23. Baxter, W.E., Martindale, W.S. Central closure of semiprime non-associative rings// Commun. of Algebra.- 1979.- V. 7. № 11.- P. 1105-1132.
24. Пихтильков, С.А. Примитивность свободной ассоциативной алгебры с конечным числом образующих / С.А. Пихтильков // Успехи матем. наук.- 1974.- № 1.- С. 183-184.

25. Amayo R., Stewart I. Infinite dimensional Lie algebras. Leyden: Noordhoof, 1974.
26. Латышев, В.Н. О сумме локально разрешимых идеалов алгебр Ли / В.Н. Латышев, А.В. Михалев, С.А. Пихтильков // Вестник МГУ.- Сер. 1. матем., мех.- 2003.- № 3.- С. 29-32.
27. Amitsur, S.A. Algebras over infinite fields // Proc. Amer. Math. Soc.- 1956.- V. 7.- P. 35-48.
28. Итоги науки и техники. Серия “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления”.- Т. 18. Алгебра-2.- М.: ВИНТИ, 1988.- 248 с.
29. Размыслов Ю.П. О радикале Джекобсона в PI -алгебрах / Ю.П. Размыслов // Алгебра и логика.- 1974.- Т. 13.- N 3.- С. 337-360.
30. Бахтурин, Ю.А. О строении PI -оболочки конечномерной алгебры Ли / Ю.А. Бахтурин // Изв. вузов. сер. Матем.- 1985.- № 11.- С. 60-62.
31. Балаба И.Н. Первичный радикал градуированных Ω -групп / И.Н. Балаба, А.В. Михалев, С.А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика.- 2006.- Т. 12.- № 2.- С. 159-174.
32. Джекобсон, Н. Строение колец.- М.: Изд-во иностр. литературы, 1961.- 392 с.
33. Биллиг, Ю.В. О гомоморфном образе специальной алгебры Ли // Матем. сборник.- 1988.- Т. 136.- № 3.- С. 320-323.
34. Пихтильков, С.А. О специальных алгебрах Ли / С.А. Пихтильков // Успехи матем. наук.- 1981.- Т. 36.- № 6.- С. 225-226.
35. Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1979, v. 9, pp. 37-40.
36. Джекобсон, Н. Алгебры Ли.- М.: Мир, 1964.- 355 с.
37. Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли.- М.: Наука, 1985.- 447 с.
38. Терехова, Ю.А. О теореме Леви для специальных алгебр Ли / Ю.А. Терехова // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов.- Тула: Изд-во ТГПИ им. Л.Н. Толстого, 1994.- с. 97-103.
39. Математическая энциклопедия / ред. И. М. Виноградов . - М. : Сов. энциклопедия, 1977-1985. - Т. 1 : А - Г. - , 1977. - 1151 с.
40. Симонян, Л. А. О радикале Джекобсона алгебры Ли / Л. А. Симонян // Латвийский математический ежегодник.- 1993.- Вып. 34.- С. 230-234.
41. Диксмье, Ж. Универсальные обертывающие алгебры.- М.: Мир, 1978.- 407 с.
42. Ленг, С. Алгебра.- М.: Мир, 1968.- 564 с.

REFERENCES

1. Burbaki, N. 1976, *Gruppy i algebrы Li (glavy I-III) [Lie groups and algebras (chapters I-III)]*, Mir, Moscow, Russia.
2. Razmyslov, U. P. 1971, “ Ob engelevyh algebrakh Li [On Engel Lie algebras]”, *Algebra i logika*, v. 10.- № 10, pp. 33-44.

3. Kostrikin, A. I. 1986, *Vokrug Bernsajda [Around Burnside]*, Nauka, Moscow, Russia.
4. Kubo, F. 1991, "Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical", *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci.*, v. 38, pp. 23-30.
5. Togo, S. 1972, "Radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, v. 2, pp. 179-203.
6. Togo, S., Kavamoto, N. 1972, "Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras" *Hiroshima Math. J.*, v. 2, pp. 253-261.
7. Marshall, E. I. 1967, "The Frattini subalgebras of a Lie algebra", *J. London Math. Soc.*, v. 42, pp. 416-422.
8. Latyshev, V.N. 1963, "On Lie Algebras with Identities ratios", *Sib. mat. magazine*, v. 4, № 4, pp. 821-829.
9. Beidar, K.I., Pikhtil'kov, S.A. 1994, "O pervichnom radikale special'nyh algebr Li [On a primary radical special Lie algebras]", *Uspekhi matem. nauk*, № 1, p. 233.
10. Beidar, K.I., Pikhtil'kov, S.A. 2000, "Primary radical special Lie algebras", *Fundamental and applied mathematics*, t. 6, v. 3, pp. 643-648.
11. Pikhtil'kov, S.A. 2002, "On a locally nilpotent radical special Lie algebras", *Fundamental and Applied Mathematics*, t. 8, v. 3, pp. 769-782.
12. Parfenov, V.A. 1971, "O slabo razreshimom radikale algebr Li [On the weakly solvable radical of Lie algebras]", *Siberian Mathematical Journal*, v. 12, № 1, pp. 171-176.
13. Pih'til'kov S.A. 2001, "Artinovy special'nye algebry Li [Artinian special Lie algebras]", *V mv. sb. Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp*, Tula:TGPU, pp. 189-194.
14. Pikhtil'kov, S.A., 2005, "Strukturnaya teoriya special'nyh algebr Li [The structural theory of special Lie algebras]", *Izd-vo TGPU im. L.N. Tolstogo*, Tula, pp. 45-48.
15. Pikhtil'kov, S.A., Polyakov, V.M., 2005, "About locally nilpotent Artinian Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, Tula, v. 6, № 1, pp. 163-169.
16. Herstein, I., 1972, *Nekommutativnye kol'ca [Noncommutative rings]*, Mir, Moscow, Russia.
17. Kemer, A.R. 1980, "Tozhdestva Kapelli i nil'potentnost' radikala konechno porozhdennoj PI -algebry [Capelli identities and the nilpotency of the radical of a finitely generated PI - algebra]", *DAN SSSR*, v. 255, № 4, pp. 793-797.
18. Braun, A. 1984, "The nilpotency of the radical in a finitely generated PI -ring", *J of Algebra*, v. 89, № 2, pp. 375-396.
19. SHirshov, A.I. 1957, "O kol'cah s tozhdestvennymi sootnosheniyami [On rings with identical relations]" *Mat. sbornik*, v. 43, № 2, pp. 277-283.
20. Razmyslov, YU.P. 1989, *Tozhdestva algebr i ih predstavleniya [Identities of algebras and their representations]*, Nauka, Moscow, Russia.
21. Lambek, I., 1971, *Kol'ca i moduli [Rings and modules]*, Mir, Moscow, Russia.
22. Beidar, K.I., Martindale, W.S., Mikhalev, A.V. 1996, *Rings with generalized identities*, Pure and Applied Mathematics, Marcel-Dekker, New-York, USA.

23. Baxter, W.E., Martindale, 1979, "W.S. Central closure of semiprime non-associative rings", *Commun. of Algebra*, v. 7, № 11, pp. 1105-1132.
24. Pikhtil'kov, S. A. 1974, "Primitive free associative algebra with a finite number of generators", *Uspekhi matem. nauk*, № 1. pp. 183-184.
25. Amayo, R., Stewart, I. 1974, *Infinite dimensional Lie algebras*, Noordhoof, Leyden, Netherlands.
26. Latyshev, V.N., Mihalev, A.V., Pihtil'kov, S.A. 2003, "O summe lokal'no razreshimyh idealov algebr Li [On the sum of locally solvable ideals of Lie algebras]", *MSU Bulletin*, ser. 1. matem., mekh., № 3, pp. 29-32.
27. Bahturin, Yu. 1980, "On Lie subalgebras of associative PI -algebras", *J. Algebra*, v. 67, № 2, pp. 257-271.
28. Itogi nauki i tekhniki. Seriya "Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya", vol. 18, Algebra-2, VINITI, Moscow, Russia.
29. Razmyslov, U. P. 1974, " O radikale Dzhekobsona v PI -algebrakh [On the Jacobson radical in PI - algebras]", *Algebra i logika*, v. 13.- № 3, pp. 337-360.
30. Bahturin, YU.A. 1985, "O stroenii PI -obolochki konechnomernoj algebr Li [On the structure of the PI - shell of a finite-dimensional Lie algebra]", *Izv. vuzov. ser. Matem.*, № 11, pp. 60-62.
31. Balaba, I.N., Mikhalev, A.V., Pikhtil'kov, S.A., 2006, "The primary radical of graded Ω -groups", *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, Moscow, v. 12, № 2, pp. 159-174.
32. Jacobson, N. 1961 *Stroenie kolec*, Translated by Andrunakievich, V.A., in Kurosh, A.G. (ed.), *Izd-vo inostr. literatury*, Moscow, Russia.
33. Billig Yu. V. 1988, "On the homomorphic image of a special Lie algebras", *Mat. sbornik*, v. 136, № 3, pp. 320-323.
34. Pikhtil'kov, S. A. 1981, "On special Lie algebras", *Uspehi Mat. nauk*, v. 36, № 6, pp. 225-226.
35. Kamiya, N. 1979, "On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, v. 9, pp.37-40.
36. Jacobson, N. 1964, *Lie Algebras*, Translated by ZHizhchenko, A.B., in Kurosh, A.G. (ed.), *Mir*, Moscow, Russia.
37. Bakhturin, Yu. A. 1985, *Tozhdestva v algebrakh Li [Identities in Lie algebras]*, Nauka, Moscow, Russia.
38. Terekhova, Yu. A. 1994, "On the Levi theorem for special Lie algebras", *Algorithmic Problems group and semigroup theories. Interuniversity collection of scientific works*, Tula: Izd-vo TGPI im. L.N. Tolstogo, pp. 97-103.
39. *Matematicheskaya enciklopediya*, 1977, in Vinogradov, I. M. (ed.), M.: Sov. enciklopediya, 1977-1985, v. 1 : A - Г.
40. Simonyan, L. A. 1993, "O radikale Dzhekobsona algebr Li", *Latvijskij matematicheskiy ezhegodnik*, release 34, pp. 230-234.
41. Dixmier, J. 1978, *Universal'nyye obertyvayushchiye algebr Li [Universal enveloping algebras]*, *Mir*, Moscow, Russia.

42. Leng, S. 1968, *Algebra*, Mir, Moscow, Russia.

Получено 18.11.2020 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.