

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.444, 517.588

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-225-233

**О двух формулах для функций Макдональда и их
теоретико-групповом смысле**

А. И. Нижников, И. А. Шилин

Александр Иванович Нижников — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: ainizhnikov@mail.ru

Илья Анатольевич Шилин — Национальный исследовательский университет МЭИ; Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: ilyashilin@li.ru

Аннотация

С помощью интегральных билинейных функционалов, определенных на паре пространств представления трехмерной лоренцовой группы или квадрате такого пространства, получены две формулы для функций Макдональда — частном случае цилиндрических функции, широко используемом в математике и приложениях.

Ключевые слова: функции Макдональда, трехмерная лоренцева группа.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

А. И. Нижников, И. А. Шилин. О двух формулах для функций Макдональда и их теоретико-групповом смысле // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 225–233.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 517.444, 517.588

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-225-233

**On two formulas for Macdonald functions and their
group-theoretical sense**

A. I. Nizhnikov, I. A. Shilin

Alexander Ivanovich Nizhnikov — Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: ainizhnikov@mail.ru

Ilya Anatolyevich Shilin — National Research University MPEI; Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: ilyashilin@li.ru

Abstract

Two formulas for Macdonald functions (which are a widely known in mathematics and applications particular case of cylinder functions) are obtained by using some integral bilinear functionals defined on a pair of representation spaces or a square of these spaces.

Keywords: Macdonald functions, three-dimensional Lorentz group.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

A. I. Nizhnikov, I. A. Shilin, 2021, "On two formulas for Macdonald functions and their group-theoretical sense", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 225–233.

1. Введение

Хорошо известно, что цилиндрические функции являются едва ли не самыми востребованными в различных задачах математической физики и квантовой механики. В англоязычной статье [15] читаем: «Если мы попробуем оценить важность специальной функции по числу появлений ее в математике и физике, то модифицированная функция Бесселя третьего рода окажется наиболее важной». В русскоязычной литературе эту функцию, обозначаемую $K_\tau(z)$, называют функцией Макдональда. В теории управления космическими аппаратами и самолетами, эта функция появляется при описании бокового движения самолета, точнее, через нее выражается функция Теодорсена

$$C(x) = \frac{K_1(x)}{K_0(x) + K_1(x)},$$

описывающая боковое движение [12]. В физике функция Макдональда используется в теории арифметического квантового хаоса [10], в теории метрических возмущений гиперболических вселенных [9], в математике в аналитической теории чисел [11, 13], в спектральной теории автоморфных форм [16], в гармоническом анализе на арифметических многообразиях [14], в эргодической теории [23].

Принадлежа к так называемому классу специальных функций математической физики, функции Макдональда естественным образом поддаются теоретико-групповой трактовке. В этой трактовке специальные функции являются функциями, зависящими от параметров матричных элементов представлений соответствующих групп. С теоретико-групповой точки зрения функции Макдональда были изучены многими авторами. Так, в классической работе [1] они появляются при изучении матричных элементов представлений группы движений псевдоевклидова пространства. В нашей работе [18] в терминах функций Макдональда были описаны матричные элементы между сферическим и параболическим базисами в пространстве представления четырехмерной лоренцевой группы.

В настоящей статье цилиндрические функции рассматриваются как значения некоторых интегральных билинейных функционалов, определенных либо на прямом произведении двух пространств представления, либо на квадрате одного такого пространства. Такие функционалы удовлетворяют некоторым свойствам инвариантности относительно трехмерного аналога

$$G = \{g \in SL(3, \mathbb{R}) \mid g^T e_{2,1} g = e_{2,1}\}$$

указанной выше группы, где $e_{2,1} = \text{diag}(1, 1, -1)$. С помощью этих инвариантных свойств в статье будут получены новые формулы для функций Бесселя и Макдональда.

Для нецелого комплексного числа σ неприводимое представление группы G определяется формулой $g \mapsto T_\sigma(g)$, в которой операторы $T_\sigma(g)$ действуют по правилу $f \mapsto f(g^{-1}x)$

в пространстве $\mathfrak{D}_\sigma$ бесконечно дифференцируемых и σ -однородных функций на конусе $C : x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Обозначим γ_1 окружность $x_2^2 + x_3^2 = 1$ на конусе C . Так как γ_1 пересекает все образующие конуса C , произвольную точку $x \in C$ можно записать в виде

$$x = (t, t \cos \alpha, t \sin \alpha).$$

В силу однородности функций $f \in \mathfrak{D}_\sigma$ представление $T - \sigma$ может быть реализовано в подпространстве $\mathfrak{D}_\sigma^{\text{circle}}$ сужений f^{circle} функций f на окружность γ_1 :

$$f(x) = t^\sigma f(x^{\text{circle}}),$$

где x^{circle} — точка пересечения окружности γ_1 и образующей конуса, содержащей точку x . Подгруппа H_1 в G , состоящая из круговых поворотов в плоскости $x_1 = 1$ и изоморфная унимодулярной ортогональной группе $SO(2)$, действует транзитивно на γ_1 . Так как

$$(x_2 + \mathbf{i}x_3)|_{x \in \gamma_1} = \exp(\alpha \mathbf{i})$$

и

$$T_\sigma(g(\varphi))(x_2 + \mathbf{i}x_3)|_{x \in \gamma_1} = \exp(\varphi \mathbf{i}) \exp(\alpha \mathbf{i}),$$

то система $\{(x_2 + \mathbf{i}x_3)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ является базисом в $\mathfrak{D}_\sigma^{\text{circle}}$, а

$$\{f_n(x) = x_1^{\sigma-n}(x_2 + \mathbf{i}x_3)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

есть базис в $\mathfrak{D}_\sigma$.

Проводя аналогичные рассуждения относительно подгрупп

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch} d & 0 & \operatorname{sh} d \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} d & 0 & \operatorname{ch} d \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\}$$

и

$$H_3 = \exp[\mathbb{R}(e_{13} + e_{31} + e_{32} - e_{23})]$$

(здесь e_{ij} обозначают элементы канонического базиса линейного пространства вещественных матриц размера 3×3 , а $\exp$ — экспоненциальное отображение касательной лиевой алгебры к группе G в точке $e = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$ в группу G), действующих транзитивно на гиперболе $\gamma_2 : x_1^2 - x_3^2 = 1$ и параболы $\gamma_3 : x_1 + x_2 = 1$ соответственно, получаем соответствующие базисы «на γ_2 и γ_3 », которые продолжаем по σ -однородности «на весь конус» C до базисов, состоящих из функций

$$\begin{aligned} f_{\rho, \pm}(x) &= (x_1)_{\pm}^{\sigma - \mathbf{i}\rho} (x_0 + x_2)^{\mathbf{i}\rho}, \\ f_\lambda(x) &= (x_0 + x_1)^\sigma \exp\left(\frac{\mathbf{i}\lambda x_2}{x_0 + x_1}\right) \end{aligned}$$

соответственно, где функции $(x)_\pm^\mu$, определенные на вещественной прямой и порождающие однородные обобщенные функции, задаются [3] формулой

$$(x)_\pm^\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{sign} x = \mp 1 \vee x = 0, \\ |x|^\mu & \text{при } \operatorname{sign} x = \pm 1. \end{cases}$$

Интегральные билинейные функционалы $F_i : \mathfrak{D}_\sigma \times \mathfrak{D}_{\hat{\sigma}} \longrightarrow \mathbb{C}$ и $D_i : \mathfrak{D}_\sigma^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ были определены в работах [8, 17, 18] формулами

$$F_i : (u, v) \longmapsto \int_{\gamma_i} u(x)v(x) dx,$$

$$D_i : (u, v) \longmapsto \int_{\gamma_i} \int_{\gamma_i} k(x, \tilde{x})u(x)v(\tilde{x}) dx d\tilde{x}.$$

Для изучения свойств представления особую роль играет инвариантность билинейного функционала относительно представления или пары представлений (см., например, [3, Глава 2]). Для функционалов F_i и D_i такая инвариантность означает, что для всякого $g \in G$ выполняются равенства

$$F_i(T_\sigma(g)[u], T_{\hat{\sigma}}(g)[v]) = F_i(u, v)$$

$$D_i(T_\sigma(g)[u], T_{\hat{\sigma}}(g)[v]) = D_i(u, v),$$

которые естественным образом могут быть использованы при выводе формул для специальных функций. В работах [8, 17, 18] показано, что указанная выше инвариантность равносильна тому, что $\hat{\sigma} = -\sigma - 1$ и ядро функционалов D_i имеет вид

$$k(x, \tilde{x})|_{\gamma_i \times \gamma_i} = C_i(x_1\tilde{x}_1 - x_2\tilde{x}_2 - x_3\tilde{x}_3)^{-\sigma-1},$$

где C_i обозначает константу. Оказывается [8, 20, 21], что это условие является достаточным для того, чтобы при всех i и j выполнялись равенства $F_i = F_j$ и $D_i = D_j$, то есть функционалы F_i и D_i были вдобавок инвариантны относительно контура пути интегрирования. Вычисляя, например, значения функционалов D_i и D_j при различных i и j и сравнивая получившиеся результаты, можно получить формулы для специальных функций.

2. Функции Макдональда как суммы рядов

ТЕОРЕМА 1. При $-1 < \operatorname{Re}(\sigma) < -\frac{1}{2}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{i}\lambda)^l (l+2)}{\Gamma(1+l-\sigma) \exp\left(\frac{\mathbf{i}\pi l}{2}\right)} = \frac{(\mathbf{i}\lambda)^{2\sigma+1} \exp(\mathbf{i}\pi\sigma) \Gamma(-2\sigma-1) \Gamma^3(\sigma+1)}{2^{3/2} \pi^{5/2} |\lambda|^{2\sigma+\frac{1}{2}} \Gamma(-\sigma) \Gamma(-2\sigma)} K_{\sigma+\frac{1}{2}}(|\lambda|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы вычислить интеграл

$$D_3(f_n, f_\lambda) = 2C_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y-z)^{-2\sigma-2} (1+\mathbf{i}y)^{\sigma+n} (1-\mathbf{i}y)^{\sigma-n} e^{\mathbf{i}\lambda z} dy dz,$$

сделаем замену $t = y - z$ и воспользуемся формулами [7, 2.3.3.1] и [7, 2.3.6.19]. Вычисляя интеграл

$$D_1(f_n, f_\lambda) = C_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(\alpha - \beta)]^{-\sigma-1} (1 + \cos \beta)^\sigma \exp(\mathbf{i}n\alpha) \exp\left(\frac{\mathbf{i}\lambda \sin \beta}{1 + \cos \beta}\right) d\alpha d\beta,$$

сделаем замену $t = \alpha - \beta$, разложим функцию $\exp\left(\frac{\mathbf{i}\lambda \sin \beta}{1 + \cos \beta}\right)$ в ряд Тейлора и применим формулу [4, 3.892.4]. Интеграл $D_1(f_n, f_\lambda)$ после этого станет возможным представить в виде ряда, члены

которого содержат гипергеометрическую функцию Гаусса. Подробно интегралы $D_1(f_n, f_\lambda)$ и $D_3(f_n, f_\lambda)$ были вычислены в [8]. Полагая $n = 0$, заменяем в равенстве $D_1(f_0, f_\lambda) = D_3(f_0, f_\lambda)$ функцию Гаусса произведениями гамма-функций по формуле

$${}_2F_1(a, b; 1 + a - b; -1) = 2^{-a} \sqrt{\pi} \Gamma(1 + a - b) \Gamma^{-1} \left(\frac{a+1}{2} \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{a}{2} - b + 1 \right)$$

[5, 7.3.6.2].

Равенство $D_1(f_n, f_\lambda) = D_3(f_n, f_\lambda)$ содержит константы C_1 и c_3 , которыми определяются функционалы D_1 и D_3 соответственно. Эти константы не зависят от значений n и λ , но зависят от числа σ , определяющего пространство $\mathfrak{D}_\sigma$. Взяв для n и λ конкретные значения, можно вычислить отношение $\frac{C_1}{C_3}$. В работе [8] при $n = 0$ и $\lambda = 1$ получено, что $\frac{C_1}{C_3} = \frac{\Gamma^2(-\sigma)}{\Gamma^2(\sigma+1)}$. $\square$

3. Об интеграле, содержащем произведение двух одинаковых функций Макдональда

ТЕОРЕМА 2. При $-1 < \operatorname{Re}(\sigma) < -\frac{1}{2}$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} [K_\tau(\lambda)]^2 d\lambda = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \sin^{-1} \left[\pi \left(\tau + \frac{1}{2} \right) \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножим обе части разложения

$$f_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_{n\lambda} f_\lambda(x) d\lambda,$$

где функции $c_{\lambda,n}$, зависящие от λ и n , являются матричными элементами оператора перехода от базиса $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ к базису $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, на однородную функцию $(x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3)^{-\sigma-1} \in \mathfrak{D}_{-\sigma-1}$, где y принадлежит гиперболоиду $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$, и проинтегрируем левую часть по γ_1 , а правую по γ_2 . Иными словами, мы применим к левой и правой части разложения функций, составляющих первый базис, по функциям, из которых состоит второй базис, преобразование Пуассона Π [20, 21]:

$$\Pi(f_k, \hat{q}^{-\sigma-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_{n\lambda} \Pi(f_\lambda, \hat{q}^{-\sigma-1}) d\lambda.$$

Получим

$$\begin{aligned} e^{inq} P_\sigma^n(\operatorname{ch} p) &= \sqrt{2\pi} \Gamma^{-1}(\sigma - n + 1) \times \\ &\times \int_0^{+\infty} K_{\sigma+\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{\operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p \cos q} \right) [\Gamma^{-1}(n - \sigma) \times \\ &\times W_{n, \sigma+\frac{1}{2}}(2\lambda) \exp \frac{i\lambda \operatorname{sh} p \sin q}{\operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p \cos q} + \\ &+ \Gamma^{-1}(-\sigma - n) W_{-n, \sigma+\frac{1}{2}}(2\lambda) \exp \left(-\frac{i\lambda \operatorname{sh} p \sin q}{\operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p \cos q} \right)] d\lambda. \end{aligned}$$

Положив в этом равенстве $n = p = 0$, выразим функцию Уиттекера через функцию Макдональда по известной формуле

$$W_{0,\mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{2}} K_{\mu}\left(\frac{z}{2}\right).$$

Воспользуемся тем, что

$$P_{\sigma}^0(1) = P_{\sigma}(1) = {}_2F_1(-\sigma, \sigma + 1; 1; 0) = 1.$$

Остается учесть известное соотношение для гамма-функции

$$\Gamma(\sigma + 1) \Gamma(-\sigma) = \frac{\pi}{\sin[\pi(\sigma + 1)]}$$

и положить $\tau = \sigma + \frac{1}{2}$. $\square$

4. Заключение

Теорему 2 можно рассматривать как полученный теоретико-групповыми способами частный случай формулы

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} K_{\mu}(bx) K_{\nu}(cx) dx &= 2^{\alpha-3} c^{-\alpha-\mu} b^{\mu} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{\alpha + \mu + \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + \mu - \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - \mu + \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - \mu - \nu}{2}\right) \times \\ &\times \Gamma^{-1}(\alpha) {}_2F_1\left(\frac{\alpha + \mu + \nu}{2}, \frac{\alpha - \mu + \nu}{2}; \alpha; 1 - \frac{b^2}{c^2}\right), \end{aligned}$$

которая выполняется при ограничениях $\operatorname{Re}(b+c) > 0, \operatorname{Re} \alpha > |\operatorname{Re} \mu| + |\operatorname{Re} \nu|$ [6, 2.16.33.1] (при этом следует учесть, что ${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$). Ряд других формул для функций Макдональда получен в статье [18] при изучении связи между сферическим и параболическим базисами пространства представления классической (четырёхмерной) лоренцевой группы. Напротив, связь между сферическим и гиперболическим базисами приводит [17] к обобщению некоторых ранее известных формул для функций Лежандра второго рода и связанного с ними индексного интегрального преобразования Мелера – Фока [22, Глава 3]. Применение преобразования Пуассона к выводу формул для присоединённых функций Лежандра обсуждается в работах [20, 21]. В работе [19] показано, что связь между параболическим и гиперболическим базисами выражается через регулярную и иррегулярную кулоновские функции, а некоторые формулы для интегральных преобразований этих функций можно выразить на языке сужений представления трёхмерной лоренцевой группы на отдельные ее однопараметрические подгруппы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Наука, Москва, 1965.
2. Виленкин Н. Я., Шлейникова М. А. Интегральные соотношения для функций Уиттекера и представления трёхмерной группы Лоренца // Мат. сб. 1970. Т. 81. С. 185-191.
3. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматлит, Москва, 1962.

4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматлит, Москва, 1963.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. Наука, Москва, 1986.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. Наука, Москва, 1983.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Наука, Москва, 1981.
8. Шилин И. А. Двойные $SO(2,1)$ -инвариантные интегралы и формулы для функций Уиттекера // Известия вузов. Математика. 2012. № 5. С. 56-66.
9. Aurich R., Lustig S., Steiner F. Hyperbolic universes with a horned topology and the cosmic microwave background anisotropy // Classical and Quantum Gravity. 2004. Vol. 21. P. 4901-4925.
10. Bolte J., Steil G., Steiner F. Arithmetical chaos and violation of universality in energy level statistics // Physical Review Letters. 1992. Vol. 69. P. 2188-2191.
11. Booker A. R. A test for identifying Fourier coefficients of automorphic forms and applications to Kloosterman sums // Experimental Mathematics. 2000. Vol. 9. P. 571-581.
12. Bryson A. E. Control of spacecraft and aircraft. Princeton University Press, Princeton, 1994.
13. Heijhal D. A. The Selberg trace formula for $PSL(2, \mathbb{R})$. – Lecture Notes in Mathematics, Volume 1001. Springer, Berlin, 1983.
14. Heijhal D. A., Rackner B. N. On the topography of Maass waveforms for $PSL(2, \mathbb{Z})$ // Experimental Mathematics. 1992. Vol. 1. P. 275-305.
15. Gil A., Segura J., Temme N. M. Computation of the modified Bessel functions of the third kind of imaginary orders: uniform Airy-type asymptotic expansions // Journal Computational and Applied Mathematics. 2003. Vol. 153. P. 225-234.
16. Iwaniec H. Introduction to the spectral theory of automorphic forms. Revista Matematica Iberoamericana, Madrid, 1995.
17. Shilin I. A., Junesang Choi. Certain connections between the spherical and hyperbolic bases on the cone and formulas for related special functions // Integral Transforms and Special Functions. 2014. Vol. 25. No. 5. P. 374 – 383.
18. Shilin I. A., Junesang Choi. Some connections between the spherical and parabolic bases on the cone expressed in terms of the Macdonald functions // Abstract and Applied Analysis. 2014. Article ID 741079.
19. I. A. Shilin, J. Choi, J. W. Lee. Some integrals involving Coulomb functions associated with the three-dimensional proper Lorentz group // AIMS Mathematics. 2020. Vol. 5. No. 6. P. 5664–5682.
20. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform // Acta Polytechnica. 2011. Vol. 51. No. 1, P. 70-73.

21. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions related to the Poisson transform and Lorentz group representation // Journal of Physics. Conference series. 2012. Vol. 356. 012020.
22. Yakubovich S. V. Index transforms. World Scientific, Singapore, 1996.
23. Zhao P. Quantum variance of Maass-Hecke cusp forms // Communications in Mathematical Physics. 2010. Vol. 297. P. 475-514.

REFERENCES

1. Vilenkin N. Ja. 1965, Special functions and group representations theory, Nauka, Moscow. (In Russian.)
2. Gelfand I. M., Graev M. I., Vilenkin N. Ya. 1962, Integral geometry and related aspects in group representation theory, Fizmatlit, Moscow. (In Russian.)
3. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. 1963, Tables of integrals, sums, series and products, Fizmatlit, Moscow. (In Russian.)
4. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1986, Integrals and series: Advanced chapters, Nauka, Moscow. (In Russian.)
5. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 198s, Integrals and series: Special functions, Nauka, Moscow. (In Russian.)
6. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1981, Integrals and series: Elementary functions, Nauka, Moscow. (In Russian.)
7. Shilin I. A. 2012, "Double $SO(2, 1)$ -invariant integrals and formulas for Whittaker functions", *Izv. VUZ.*, no. 5, pp. 56-66.
8. Aurich R., Lustig S. & Steiner F. 2004, "Hyperbolic universes with a horned topology and the cosmic microwave background anisotropy", *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21, pp. 4901-4925.
9. Bolte J., Steil G. & Steiner F. 1992, "Arithmetical chaos and violation of universality in energy level statistics", *Physical Review Letters*, vol. 69, pp. 2188-2191.
10. Booker A. R. 2000, "A test for identifying Fourier coefficients of automorphic forms and applications to Kloosterman sums", *Experimental Mathematics*, vol. 9, pp. 571-581.
11. Bryson A. E. 1994, Control of spacecraft and aircraft, Princeton University Press, Princeton.
12. Heijhal D. A. 1983, The Selberg trace formula for $PSL(2, \mathbb{R})$. Lecture Notes in Mathematics, Volume 1001, Springer, Berlin.
13. Heijhal D. A. & Rackner B. N. 1992, "On the topography of Maass waveforms for $PSL(2, \mathbb{Z})$ ", *Experimental Math.*, vol. 1, pp. 275-305.
14. Gil A., Segura J. & Temme N. M. 2003, "Computation of the modified Bessel functions of the third kind of imaginary orders: uniform Airy-type asymptotic expansions", *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 153, pp. 225-234.
15. Iwaniec H. 1995, Introduction to the spectral theory of automorphic forms, Revista Matematica Iberoamericana, Madrid.

16. Shilin I. A. & Junesang Choi. 2014, "Certain connections between the spherical and hyperbolic bases on the cone and formulas for related special functions", *Int. Transf. Spec. Func.*, vol. 25, no. 5, pp. 374–383.
17. Shilin I. A. & Junesang Choi. 2014, "Some connections between the spherical and parabolic bases on the cone expressed in terms of the Macdonald functions", *Abstract and Appl. Analysis*, article ID 741079.
18. Shilin I. A., J. Choi & J. W. Lee. 2020, "Some integrals involving Coulomb functions associated with the three-dimensional proper Lorentz group", *AIMS Math.*, vol. 5, no. 6, pp. 5664–5682.
19. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. 2011, "Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform", *Acta Polytechnica*, vol. 51, no. 1, pp. 70–73.
20. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. "Some formulas for Legendre functions related to the Poisson transform and Lorentz group representation", *J. of Physics. Conference series*, vol. 356, article 012020.
21. Yakubovich S. V. 1996, Index transforms, World Scientific, Singapore.
22. Zhao P. 2010, "Quantum variance of Maass-Hecke cusp forms", *Comm. Math/ Phys.*, vol. 297, pp. 475–514.

Получено 4.11.2020 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.