ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.545+512.552 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-213-224

Проективная геометрия над частично упорядоченными телами, II [1]

А. В. Михалев, Е. Е. Ширшова

Александр Васильевич Михалев — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: aamikhalev@mail.ru
Елена Евгеньевна Ширшова — профессор кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Аннотация

В статье "Проективная геометрия над частично упорядоченными телами, II"продолжается исследование свойств частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами, начатое в части I «Проективная геометрия над частично упорядоченными телами». Рассматриваются производные решетки, ассоциированных с частично упорядоченными линейными пространствами над частично упорядоченными телами. Более точно, исследуются свойства выпуклой проективной геометрии $\mathcal{L}$ частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F. Под выпуклостью линейного подпространства в линейном пространстве ${}_FV$ понимается абелева выпуклость (ab-выпуклость), опирающаяся на определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы. Доказываются вторая и третья теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами. Получены некоторые результаты, касающиеся свойств главных линейных подпространств в интерполяционных линейных пространствах над направленными телами. Главным линейным подпространством I_a частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F является наименьшее ab-выпуклое направленное линейное подпространство линейного пространства ${}_FV$, содержащее данный положительный элемент $a \in V$. Для главных линейных подпространств в интерполяционных линейных пространствах над направленными телами доказан аналог третьей теоремы о порядковых изоморфизмах пространств.

Ключевые слова: частично упорядоченное кольцо, частично упорядоченное тело, частично упорядоченное линейное пространство, направленная группа, выпуклая подгруппа.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. В. Михалев, Е. Е. Ширшова Проективная геометрия над частично упорядоченными телами, II // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 213–224.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ "Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.545+512.552 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-213-224

The projective geometry over partially ordered skew fields, II

A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova

Alexander Vasilyevich Mikhalev — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: aamikhalev@mail.ru
Elena Evgenievna Shirshova — professor of the department of algebra, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Abstract

In this paper «The projective geometry over partially ordered skew fields, II» the investigation of properties for partially ordered linear spaces over partially ordered skew fields is prolonged. This investigation was started in part I «The projective geometry over partially ordered skew fields». Derivative lattices associated partially ordered linear spaces over partially ordered skew fields are examined. More exactly, properties of the convex projective geometry $\mathcal{L}$ of a partially ordered linear space $_FV$ over a partially ordered skew field F are considered. The convexity of linear subspaces has meaning the Abelian convexity (ab-convexity), which is based on the definition of a convex subgroup for a partially ordered group. Second and third theorems of linear spaces order isomorphisms for interpolation linear spaces over partially ordered skew fields are proved. Some theorems are proved for principal linear subspaces of interpolation linear spaces over directed skew fields. The principal linear subspace I_a of a partially ordered linear space $_FV$ over a partially ordered skew field F is the smallest ab-convex directed linear subspace of linear space $_FV$ which contains the positive element $a \in V$. The analog for the third theorem of linear spaces order isomorphisms for principal linear subspaces is demonstrated in interpolation linear spaces over directed skew fields.

Keywords: a partially ordered ring, a partially ordered skew field, a partially ordered linear space, a directed group, a convex subgroup.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova, 2021, "The projective geometry over partially ordered skew fields II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 213–224.

1. Введение

Пусть $F =< F, +, \cdot >$ – тело.

Напомним, что F называется *частично упорядоченным телом*, если $< F, +, \leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

если $a \leqslant b$ и $c > 0$ в $< F, +, \leqslant >$, то $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$.

Частично упорядоченная группа называется *направленной*, если любые два элемента имеют в этой группе верхнюю грань.

Если группа $< F, +, \leqslant >$ является направленной (линейно или решеточно упорядоченной), то F называется *направленным (линейно или решеточно упорядоченным) телом.*

Будем далее считать, что F – частично упорядоченное тело нулевой характеристики с положительной единицей. (Иначе порядок окажется тривиальным.)

Хотя данная работа является продолжением статьи авторов [5], для удобства читателя, мы приводим основные определения статьи [5] и краткие исторические комментарии.

Определение 1. *Левое линейное пространство $_FV = < V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant>$ над частично упорядоченным телом F называется частично упорядоченным (ч.у.) линейным пространством, если $< V, +, \leqslant>$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию: из $0 \leqslant v$ следует $0 \leqslant \alpha v$ для всех $v \in {}_FV$ и $\alpha > 0$ из F.*

Частично упорядоченное линейное пространство $_FV$ над частично упорядоченным телом F называют направленным (линейно или решеточно упорядоченным) пространством, если группа $< V, +, \leqslant>$ является направленной (линейно или решеточно упорядоченной) группой.

В монографии Биркгофа «Теория решеток» [1] определяются частично упорядоченные линейные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ (глава XV, § 1).

В работах Л. В. Канторовича [12] и Риса [15] было начато изучение вещественных линейных пространств $_{\mathbb{R}}V$, для которых группа $< V, +, \leqslant>$ является решеточно упорядоченной группой. Такие линейные пространства принято называть *векторными решетками.*

Векторные решетки играют важную роль в функциональном анализе. В связи с этим, активно исследовались свойства действительных функциональных линейных пространств (см. [3]).

В статье авторов [5] рассматривались свойства частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами. Полученные результаты относятся к направлению, которое А. Г. Курош предлагал называть проективной алгеброй. В целом, это направление восходит к Гильберту. Его развивали Бэр [2] и Капланский [13].

В данной статье продолжается исследование свойств частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами.

Цель работы – рассмотрение производных решеток, ассоциированных с частично упорядоченными линейными пространствами над частично упорядоченными телами.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных алгебраических систем (см. [1, 4, 6, 14, 16]).

При исследовании свойств частично упорядоченных алгебраических систем важную роль играет понятие «выпуклость». Мы рассматриваем абелеву выпуклость, которая опирается на следующее определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы.

Подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для всех $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ следует $g \in M$.

Определение 2. *Линейное подпространство M частично упорядоченного линейного пространства $_FV$ над частично упорядоченным телом F называется ab-выпуклым, если группа $< M, +, \leqslant>$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной абелевой группы $< V, +, \leqslant>$.*

Предметом нашего исследования является множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(_FV)$ всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств частично упорядоченного линейного пространства $_FV$ над частично упорядоченным телом F, т.е. выпуклая проективная геометрия $\mathcal{L}$.

Пусть $_FV = < V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant>$ – частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом F.

Будем обозначать символом $_FV^+$ множество $\{v \in V|\ 0 \leqslant v\}$ всех положительных элементов ч.у. линейного пространства $_FV$.

Пусть $_FV = < V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant_1>$ и $_FU = < U, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant_2>$ – частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченным телом F.

Определение 3. *Отображение $f : {}_FV \to {}_FU$ называется о-гомоморфизмом (порядковым гомоморфизмом) ч.у. линейных пространств, если выполняются условия:*

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ для всех $a, b \in V$;

2) $f(\alpha a) = \alpha \cdot f(a)$ для всех $a \in V$ и $\alpha \in F$;

3) $f({}_FV^+) \subseteq {}_FU^+$.

При этом, f называется строгим о-гомоморфизмом ч.у. линейных пространств, если выполняется условие

4) $f({}_FV^+) = {}_FU^+ \cap Imf$.

Если для о-гомоморфизма f существует о-гомоморфизм f^{-1}, то f называется о-изоморфизмом ч.у. линейных пространств.

В статье [5] приводится доказательство первой теоремы об o-изоморфизмах произвольных частично упорядоченных линейных пространств над произвольным частично упорядоченным телом (см. теорему 3). Для доказательства некоторых следствий из этой теоремы (второй и третьей теорем об o-изоморфизмах ч.у. линейных поостранств) нам пришлось рассмотреть более узкий класс частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами.

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$. Класс интерполяционных групп включает классы решеточно упорядоченных групп, линейно упорядоченных групп и групп Рисса.

Известно, что не все теоремы об изоморфизмах групп непосредственно переносятся на произвольные частично упорядоченные группы (в книге [6] на стр. 36 можно найти соответствующий пример). В статьях [7] и [8] содержатся доказательства теорем об o-изоморфизмах в классе интерполяционных групп.

Определение 4. *Частично упорядоченное линейное пространство*

$${}_FV =< V, +, \{\alpha |\ \alpha \in F\}, \leqslant>$$

над частично упорядоченным телом F будем называть интерполяционным линейным пространством, если группа $< V, +, \leqslant>$ является интерполяционной группой.

Во втором разделе данной статьи содержится доказательство второй теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над произвольным частично упорядоченным телом.

Теорема 1. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ч.у. линейном пространстве ${}_FV$, $M \subset N$. Тогда существует о-изоморфизм интерполяционного линейного пространства ${}_F(V/N)$ на интерполяционное линейное пространство ${}_F(V/M)/{}_F(N/M)$.*

Третий раздел данной статьи содержит доказательство третьей теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над произвольным частично упорядоченным телом.

Теорема 2. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ${}_FV$. Тогда:*

1) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного линейного пространства $_FM$ *на интерполяционное линейное пространство* $_F(M+N/N)$ *с ядром* $M \cap N$*;*

2) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного линейного пространства $_FN$ *на интерполяционное линейное пространство* $_F(M+N/M)$ *с ядром* $M \cap N$*;*

3) интерполяционное линейное пространство $_F(M/M \cap N)$ *o-изоморфно интерполяционному линейному пространству* $_F(M+N/N)$*;*

4) интерполяционное линейное пространство $_F(N/M \cap N)$ *o-изоморфно интерполяционному линейному пространству* $_F(M+N/M)$*.*

Определение 5. *Наименьшее ab-выпуклое направленное линейное подпространство* I_v *частично упорядоченного линейного пространства* $_FV$ *над частично упорядоченным телом* F*, содержащее элемент* $v \in {}_FV$ *(если оно существует), назовем главным линейным подпространством для элемента* v*.*

В статье [5] показано, что в частично упорядоченных линейных пространствах над направленными телами главные линейные подпространства существуют для всех положительных элементов этих пространств (см. теорему 4).

Свойства главных подпространств интерполяционных пространств над направленными телами рассматриваются в четвертом разделе данной статьи. В частности, там содержится доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $_FV$ *– интерполяционное линейное пространство над направленным телом* F*. Если* $a > 0$ *и* $b > 0$ *в* $_FV$*, то:*

1) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного линейного пространства $_FI_a$ *на интерполяционное линейное пространство* $_F(I_{a+b}/I_b)$ *с ядром* $I_a \cap I_b$*;*

2) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного линейного пространства $_FI_b$ *на интерполяционное линейное пространство* $_F(I_{a+b}/I_a)$ *с ядром* $I_a \cap I_b$*;*

3) интерполяционное линейное пространство $_F(I_a/I_a \cap I_b)$ *o-изоморфно интерполяционному линейному пространству* $_F(I_{a+b}/I_b)$*;*

4) интерполяционное линейное пространство $_F(I_b/I_a \cap I_b)$ *o-изоморфно интерполяционному линейному пространству* $_F(I_{a+b}/I_a)$*.*

2. Вторая теорема об o-изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами

Лемма 1. *Всякая выпуклая подгруппа интерполяционной группы сама является интерполяционной группой.*

Доказательство. См. статью [9] (лемма 1) или статью [10] (лемма 2). □

Лемма 2. *Если* $_FV$ *– интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F*,* M *– ab-выпуклое линейное подпространство в* $_FV$*, то* M *– интерполяционное линейное пространство над* F*.*

Доказательство. Утверждение является следствием определения 4 и леммы 1. □

Лемма 3. *Пусть* G *– интерполяционная группа,* M *– выпуклая направленная нормальная подгруппа в* G*. Тогда факторгруппа* G/M *является интерполяционной группой.*

Доказательство. См. статью [9] (лемма 2) или статью [10] (лемма 1). □

Лемма 4. *Пусть* $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant>$ *– частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F. *Если* M *– ab-выпуклое линейное подпространство в* $_FV$, *то факторпространство* V/M *является частично упорядоченным линейным пространством над* F.

Доказательство. См. статью [5] (теорема 1). □

Лемма 5. *Пусть* $_FV$ *– интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F, M *- ab-выпуклое направленное линейное подпространство в* $_FV$. *Тогда факторпространство* V/M *является интерполяционным линейным пространством над* F.

Доказательство. По лемме 4, пространство V/M является частично упорядоченным линейным пространством над F.

Из леммы 3 следует, что группа $< V/M, + >$ является интерполяционной группой.

Остается применить определение 4. □

Лемма 6. *Пусть* G *– интерполяционная группа,* M *– выпуклая направленная нормальная подгруппа в* G, $\pi : G \to G/M$ *– естественный о-гомоморфизм групп. Если* H *– выпуклая направленная подгруппа группы* G, *то* $\pi(H) = \{hM|\ h \in H\}$ *– выпуклая направленная подгруппа факторгруппы* G/M.

Доказательство. См. статью [9] (теорема 1). □

Лемма 7. *Пусть* $_FV$ *– интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F, M *- ab-выпуклое направленное линейное подпространство в* $_FV$, $\pi : {}_FV \to {}_F(V/M)$ *– естественный о-гомоморфизм ч.у. линейных пространств (по правилу* $\pi(v) = v + M$*). Если* A *– ab-выпуклое направленное линейное подпространство в* $_FV$, *то* $\pi(A) = \{v + M|\ v \in A\}$ *– ab-выпуклое направленное линейное подпространство в* $_F(V/M)$.

Доказательство. По лемме 5, пространство V/M является интерполяционным линейным пространством над F.

Из леммы 6 следует, что $< \pi(A), + >$ – выпуклая направленная подгруппа интерполяционной группы $< V/M, + >$.

Остается применить определение 4. □

Лемма 8. *Пусть* $_FV$ *– частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F, M *– ab-выпуклое линейное подпространство в* $_FV$. *Тогда сюръективный гомоморфизм* $\pi : {}_FV \to {}_F(V/M)$ *(по правилу* $\pi(v) = v + M$*) является строгим о-гомоморфизмом ч.у. линейных пространств.*

Доказательство. См. статью [5] (теорема 2). □

Замечание 1. *Пусть* $f : {}_FV \to {}_FU$ *– строгий сюръективный о-гомоморфизм частично упорядоченных линейных пространств. Тогда* $f({}_FV^+) = {}_FU^+$.

Лемма 9. *Пусть* $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant_1>$ *и* $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant_2>$ *– частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченным телом* F, $f : {}_FV \to {}_FU$ *– строгий о-гомоморфизм ч.у. линейных пространств. Тогда существует о-изоморфизм ч.у. линейных пространств* $\varphi : {}_F(V/\ker f) \to {}_F(Imf)$ *по правилу* $\varphi(v + \ker f) = f(v)$ *для всех* $v \in {}_FV$.

Доказательство. См. статью [5] (теорема 3). □

Доказательство теоремы 1. По лемме 4, существуют частично упорядоченные линейные пространства $_F(V/M)$ и $_F(V/N)$.

По лемме 5, эти пространства являются интерполяционными линейными пространствами.

Рассмотрим отображение $f : {}_F(V/M) \to {}_F(V/N)$ по правилу: для любого элемента $v \in {}_FV$ положим $f(v+M) = v+N$.

Легко проверить, что f – биекция, удовлетворяющая условиям 1) и 2) определения 3.

Докажем, что f – строгий o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Из леммы 8 следует существование строгих сюръективных o-гомоморфизмов

$\pi_1 : {}_FV \to {}_F(V/M)$ и $\pi_2 : {}_FV \to {}_F(V/N)$.

В силу замечания 1, заключаем, что:

1) $\pi_1({}_FV^+) = {}_F(V/M)^+$;

2) $\pi_2({}_FV^+) = {}_F(V/N)^+$.

Если $a+M \in {}_F(V/M)^+$, то, по условию 1), существует элемент $v \in {}_FV^+$, для которого $a+M = v+M$.

Тогда, по условию 2), $f(a+M) = v+N \in {}_F(V/N)^+$.

Значит, $f({}_F(V/M)^+) \subseteq {}_F(V/N)^+$.

Следовательно, f – o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Если $b+N \in {}_F(V/N)^+$, то, по условию 2), существует элемент $u \in {}_FV^+$, для которого $b+N = u+N$.

В силу условия 1), $u+M \in {}_F(V/M)^+$, т.е. $b+N \in f({}_F(V/M)^+)$.

Таким образом, ${}_F(V/N)^+ \subseteq f({}_F(V/M)^+)$.

Следовательно, $f({}_F(V/M)^+) = {}_F(V/N)^+$, и f – строгий o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Из леммы 7 следует, что в ч.у. линейном пространстве ${}_F(V/M)$ существует ab-выпуклое направленное линейное подпространство $\pi(N) = \{v+M |\ v \in N\} = N/M$.

Если $v+M \in N/M$, то $f(v+M) = N \in \ker f$.

Если $v+M \in \ker f$, то $f(v+M) = v+N = N$, т.е. $v \in N$.

Значит, $\ker f = N/M$.

Остается применить лемму 9 с учетом леммы 5. □

3. Третья теорема об изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами

Замечание 2. Отметим, что М. Якубикова [11] привела пример частично упорядоченной группы, в которой пересечение выпуклых направленных подгрупп не является направленным.

Лемма 10. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F. Если M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ${}_FV$, то подпространства $M+N$ и $M \cap N$ являются ab-выпуклыми направленными линейными подпространствами в ч.у. линейном пространстве ${}_FV$.*

Доказательство. См. статью [5] (теорема 5). □

Лемма 11. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F. Если M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ${}_FV$, то:*

1) $M+N$ – интерполяционное линейное пространство над F;

2) $M \cap N$ является ab-выпуклым направленным линейным подпространством в ${}_FV$.

Доказательство. Утверждение 1) является следствием леммы 10 и леммы 2.

Утверждение 2) следует из леммы 10. □

Замечание 3. *Пусть G – частично упорядоченная группа, A и B – выпуклые направленные подгруппы группы G, и $B \subseteq A$. Тогда B – выпуклая направленная подгруппа группы A.*

Лемма 12. *Пусть $_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F. Если M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в $_FV$, то:*

1) M, N, $M \cap N$ – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ч.у. линейном пространстве $_F(M+N)$;

2) M и N – интерполяционные линейные пространства над F;

3) $M \cap N$ – ab-выпуклое направленное линейное подпространство в ч.у. линейных пространствах $_FM$ и $_FN$.

Доказательство. Утверждения 1) и 3) являются следствиями определения 2, леммы 11 и замечания 3.

Утверждение 2) справедливо в силу леммы 2. □

Лемма 13. *Для частично упорядоченной группы $G =< G, +, \leqslant>$ следующие условия равносильны:*

1) G – интерполяционная группа;

2) если $0 \leqslant x \leqslant a+b$, для $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$ в группе G, то $x = y+z$, где $0 \leqslant y \leqslant a$ и $0 \leqslant z \leqslant b$.

Доказательство. См. статью [10] (теорема 1). □

Лемма 14. *Если $G =< G, + >$ – частично упорядоченная группа, то следующие условия равносильны:*

1) G является направленной группой;

2) для нуля группы G и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань;

3) каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где a и b – положительные элементы группы G.

Доказательство. См. книгу [6] (см. предложение 1 на странице 23). □

Лемма 15. *Пусть $_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в $_FV$. Если $0 \leqslant v \in M+N$, то существуют элементы $m \in M^+$ и $n \in N^+$, для которых $v = m+n$.*

Доказательство. Так как $v \in M+N$, то $v = x+y$ для некоторых элементов $x \in M$ и $y \in N$.

Так как группы $< M, +, \leqslant>$ и $< N, +, \leqslant>$ являются направленными, то, по условию 2) леммы 14, существуют элементы $a \in M^+$ и $b \in N^+$, для которых верны неравенства $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.

Из последних неравенств следует, что $v \leqslant a+b$.

Так как группа $< V, +, \leqslant>$ является интерполяционной, то, по лемме 13, найдутся элементы $m, n \in V$, для которых $v = m+n$, где $0 \leqslant m \leqslant a$ и $0 \leqslant n \leqslant b$.

Так как $< M, +, \leqslant>$ и $< N, +, \leqslant>$, по определению 2, являются выпуклыми подгруппами группы $< V, +, \leqslant>$, то $m \in M$ и $n \in N$. □

Доказательство теоремы 2. По лемме 11, существует интерполяционное линейное пространство $_F(M+N)$.

По лемме 12, множества M и N являются ab-выпуклыми направленными линейными подпространствами в интерполяционном линейном пространстве $_F(M+N)$.

Докажем утверждение 1).

Из леммы 8 следует существование строгого сюръективного o-гомоморфизма $\pi : {_F(M+N)} \to {_F(M+N)/_FN}$ по правилу;

$$\pi(v) = v + N \quad \text{для каждого} \quad v \in M+N.$$

Рассмотрим отображение $f : {}_FM \to {}_F(M+N)/{}_FN$ по правилу:

$$f(m) = \pi(m) = m + N \quad \text{для каждого} \quad m \in M.$$

Если $v + N \in {}_F(M+N)/{}_FN$, то $v = m + n$ для некоторых элементов $m \in M$ и $n \in N$.

Значит, $v + N = m + N$, т.е. $f(m) = v + N$.

Таким образом, f – сюръективный гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

В силу замечания 1, $\pi({}_F(M+N)^+) = ({}_F(M+N)/{}_FN)^+$.

Так как $f({}_FM) = \pi({}_FM)$, то $f({}_FM^+) \subseteq ({}_F(M+N)/{}_FN)^+$.

Следовательно, f – o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Если $a+N \in ({}_F(M+N)/{}_FN)^+$, то $a+N = v+N$ для некоторого элемента $v \in {}_F(M+N)^+$.

В силу леммы 15, $v = m + n$ для некоторых элементов $m \in {}_FM^+$ и $n \in {}_FN^+$.

Значит, $a + N = m + N$, т.е. $a + N = f(m)$.

Таким образом, $a + N \in f({}_FM^+)$, откуда, $({}_F(M+N)/{}_FN)^+ \subseteq f({}_FM^+)$.

Итак, $f({}_FM^+) = ({}_F(M+N)/{}_FN)^+$, и f – строгий o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Кроме того,

$$\ker f = \{m \in M | \; m + N = N\} = \{v \in V | \; v \in M \cap N\} = M \cap N.$$

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Утверждение 3) является следствием утверждения 1) и леммы 9.

Утверждение 4) является следствием утверждения 2) и леммы 9. □

4. Главные подпространства интерполяционных пространств над направленными телами

Лемма 16. *Пусть ${}_FV$ - частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, A – направленное линейное подпространство в ${}_FV$, B – линейное подпространство линейном подпространстве ${}_FV$, и $A^+ \subset B$. Тогда $A \subseteq B$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения для абелевых групп

$$\overline{V} =< V, +, \leqslant>, \quad \overline{A} =< A, +, \leqslant>, \quad \overline{B} =< B, + > .$$

Из условия леммы следует, что $\overline{A}$ – направленная подгруппа частично упорядоченной группы $\overline{V}$, $\overline{B}$ – подгруппа группы $\overline{V}$, и каждый положительный элемент группы $\overline{A}$ принадлежит группе $\overline{B}$.

Если $a \in \overline{A}$, то, по условию 3) леммы 14, $a = x - y$ для некоторых положительных элементов x и y из подгруппы $\overline{A}$.

Так как $x, y \in \overline{B}$, то $a \in \overline{B}$, т.е. $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. □

Лемма 17. *Пусть ${}_FV =< V, +, \{\alpha | \; \alpha \in F\}, \leqslant>$ – частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом F, и $0 < u \in V$. Тогда в ${}_FV$ существует ab-выпуклое направленное линейное подпространство I_u, в котором каждый положительный элемент $v \in I_u$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant v \leqslant \alpha u$ для некоторых элементов $\alpha > 0$ из F.*

Доказательство. См. статью [5] (теорема 4). □

Лемма 18. *Пусть ${}_FV$ – частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом F. Если M – ab-выпуклое линейное подпространство в ${}_FV$, $a > 0$ и $a \in M$, то $I_a \subseteq M$.*

Доказательство. Так как $a \in M$, и M – линейное подпространство линейного пространства $_FV$, то $\alpha a \in M$ для любого $\alpha \in F$.

Пусть $0 \leqslant x \in I_a$.

Тогда, по лемме 17, $x \leqslant \alpha a$ для некоторого элемента $\alpha > 0$ из F.

Так как, по определению 2, подгруппа $< M, +, \leqslant >$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной группы $< V, +, \leqslant >$, то $x \in M$.

Значит, $(I_a)^+ \subset M$.

Так как I_a – направленное подпространство, то, по лемме 16, $I_a \subseteq M$. □

Лемма 19. *Пусть $_FV$ – частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом F. Если $a > 0$ в $_FV$, то $a \in I_a$.*

Доказательство. Так как $a \leqslant a = 1 \cdot a$ для $1 \in F$, где $1 > 0$, то, по лемме 17, $a \in I_a$. □

Лемма 20. *Пусть $_FV$ – интерполяционное линейное пространство над направленным телом F, $a > 0$ и $b > 0$ в пространстве $_FV$. Тогда $I_{a+b} = I_a + I_b$.*

Доказательство. Так как $a + b > 0$, то, по лемме 17, в $_FV$ существуют ab-выпуклые направленные линейные подпространства I_a, I_b, I_{a+b}.

Согласно лемме 10, в $_FV$ существует ab-выпуклое направленное линейное подпространство $M = I_a + I_b$.

Пусть $m \in M^+$. Тогда, по лемме 15, найдутся элементы $x \in I_a^+$ и $y \in I_b^+$, для которых $m = x + y$.

Из леммы 17 следует, что $x \leqslant \alpha a$ для некоторого элемента $\alpha > 0$ из F, а $y \leqslant \beta b$ для некоторого элемента $\beta > 0$ из F.

Так как $a, b \leqslant a + b$, то, по определению 1, $x \leqslant \alpha(a + b)$ и $y \leqslant \beta(a + b)$.

Значит, по лемме 17, $x, y \in I_{a+b}$, т.е. $m \in I_{a+b}$.

Следовательно, $M^+ \subset I_{a+b}$.

Отсюда, по лемме 16, $M \subseteq I_{a+b}$.

С другой стороны, по лемме 19, $a \in I_a$ и $b \in I_b$, т.е. $a + b \in M$.

Применяя лемму 18, заключаем, что $I_{a+b} \subseteq M$. □

Доказательство теоремы 3. Так как $a + b > 0$, то, по лемме 17, в ч.у. линейном пространстве $_FV$ существуют ab-выпуклые направленные линейные подпространства I_a, I_b, I_{a+b}.

По лемме 11, существует интерполяционное линейное пространство $_F(I_a + I_b)$.

По лемме 12, в интерполяционном линейном пространстве $_F(I_a + I_b)$ существуют ab-выпуклые направленные линейные подпространства $I_a, I_b, I_a \cap I_b$.

Кроме того, в силу леммы 12, $_FI_a$ и $_FI_b$ являются интерполяционными линейными пространствами.

Из условия 1) теоремы 2 следует существование строгого o-гомоморфизма интерполяционного линейного пространства $_FI_a$ на интерполяционное линейное пространство $_F((I_a + I_b)/I_b)$ с ядром $I_a \cap I_b$.

В силу леммы 20, $I_a + I_b = I_{a+b}$.

Таким образом, утверждение 1) теоремы доказано.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Утверждение 3) является следствием утверждения 3) теоремы 2 и леммы 20.

Утверждение 4) является следствием утверждения 4) теоремы 2 и леммы 20. □

5. Заключение

В данном цикле из двух статей, развивая подход Л.В. Канторовича, мы исследуем свойства частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами. В работах рассматриваются производные решетки, ассоциированные с частично упорядоченными линейными пространствами над частично упорядоченными телами.

Используя понятие «выпуклость», мы рассматриваем абелеву выпуклость, которая опирается на определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы.

Предметом нашего исследования является множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}({}_FV)$ всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F, т.е. выпуклая проективная геометрия $\mathcal{L}$.

Оказалось, что ab-выпуклые линейные подпространства играют в теории частично упорядоченных линейных пространств ту же роль, что выпуклые подгруппы в теории частично упорядоченных групп. Доказаны три теоремы об o-изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами.

Получено поэлементное описание наименьшего ab-выпуклого направленного линейного подпространства, содержащего данный положительный элемент, в линейном пространстве над направленным телом F. В интерполяционном линейном пространстве над направленным телом для таких линейных подпространств доказан аналог третьей теоремы об o-изоморфизмах.

Доказано, что в случае интерполяционного линейного пространства ${}_FV$ над произвольным частично упорядоченным телом F, операция объединения в решетке $\mathcal{L}$ вполне дистрибутивна относительно операции пересечения.

Оказалось (см. [5]), что множество $\mathcal{L}$ всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств псевдо решеточно упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F образует полную дистрибутивнаю решетку с единицей и нулем, являющуюся брауэровой решеткой.

Рассматриваемая упорядоченная геометрическая алгебра составляет основу для перехода к рассмотрению геометрических задач в контексте упорядоченных модулей над упорядоченными кольцами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
2. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. М.: ИЛ, 1955.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
4. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
5. Михалев А. В., Ширшова Е. Е. Проективная геометрия над частично упорядоченными телами// Фундамент. и прикл. матем. 2020. Т. 23, № 2. С. 231-245.
6. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
7. Ширшова Е. Е. О свойствах гомоморфизмов групп Рисса// УМН. 1991. Т. 46, № 5 (281). С. 157-158.
8. Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса// Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 1. С. 122-132.
9. Ширшова Е. Е. О свойствах интерполяционных групп// Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 2. С. 295-304.
10. Ширшова Е. Е. О выпуклых подгруппах групп с интерполяционным условием// Фундамент. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17, № 7. С. 187-199.

11. Jakubiková M. Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen// Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. 1971. Vol. 21, № 1. P. 3-8.

12. Kantorovitch L. V. Lineare halbgeordnete Råume // Матем. сб. 1937. Т. 2 (44), № 1. С. 121-168.

13. Kaplansky. I. Infinite Abelian groups. Ann Arbor. The University of Michigan Press. 1954 (2nd ed., 1969).

14. Ma F. Algebraic structure of lattice-ordered rings. World Scientific. New Jersy, 2014.

15. Riesz F. Sur la théorie générale des opérations linéaires// Ann.Math. 1940. Vol. 41. P. 174-206.

16. Steinberg A. S. Lattice ordered rings and modules. Springer. 2010.

REFERENCES

1. Birkhoff, G. *Lattice theory*, 3rd ed., Amer. Math. Soc., Providence, 1967.

2. Baer, R. *Linear algebra and projective geometry*, Academic Press, New York, 1952.

3. Fuchs, L. *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford; Addison-Wesley, Reading, 1963.

4. Jakubiková, M. 1971, “Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen“, *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied.*, vol. 21, no. 1, pp. 3-8.

5. Kantorovitch, L. V. 1937, “Lineare halbgeordnete Råume“, *Rec. Math. (Mat. Sbornik)*, vol. 2 (44), no. 1, pp. 121-168.

6. Kantorovich, L. V., Akilov, G. P. *Functional analysis*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1982.

7. I. Kaplansky, *Infinite Abelian groups*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1954 (2nd ed., 1969).

8. Kopytov, V. M. *Lattice-ordered groups* [in Russian], Nauka, Moscow, 1984.

9. Ma, F. *Algebraic structure of lattice-ordered rings*, World Scientific, New Jersy, 2014.

10. Mikhalev, A. V., Shirshova, E. E. 2020, “The projective geometry over partially ordered skew fields“, *Fundam. Prikl. Mat.* [in Russian], vol. 23, no. 2, pp. 231-245.

11. Riesz, F. 1940, “Sur la théorie générale des opérations linéaires“, *Ann.Math.*, vol. 41, pp. 174-206.

12. Shirshova, E. E. 1991, “Properties of homomorphisms of Riesz groups“, *Russian Math. Surveys*, vol. 46, no. 5, pp. 201.

13. Shirshova, E. E. 2001, “On a generalization of the notion of orthogonality and on the Riesz groups“, *Mathematical Notes*, vol. 69, no. 1, pp. 107-115.

14. Shirshova, E. E. 2013, “On properties of interpolation groups“, *Mathematical Notes*, vol. 93, no. 2, pp. 324-331.

15. Shirshova, E. E. 2014, “On convex subgroups of groups with the interpolation property“, *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 4, pp. 573-581.

16. Steinberg, A. S. *Lattice ordered rings and modules*, Springer, 2010.

Получено 21.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.