ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-200-212

Филиальные кольца на прямых суммах и прямых произведениях абелевых групп без кручения

Е.И. Компанцева, Т.К.Ч. Нгуен, В.А. Газарян

Екатерина Игоревна Компанцева — Московский педагогический государственный университет; Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).

e-mail: kompantseva@yandex.ru

Нгуен Тхи Куинь Чанг — Вьетнамское акционерное общество по сотрудничеству в области образования (Вьетнам).

e-mail: trangnguyn.ru@gmail.com

Варвара Арамовна Газарян — Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).

e-mail: vagazaryan@fa.ru

Аннотация

Кольцом на абелевой группе G называется кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G . Абелева группа G называется TI -группой, если любое ассоциативное кольцо на G является филиальным. Если любое кольцо (ассоциативное кольцо) на абелевой группе G является SI -кольцом (гамильтоновым кольцом), то G называется SI -группой (SI_H -группой). В работе описаны TI -группы, SI_H -группы, SI -группы в классах почти вполне разложимых групп, сепарабельных групп без кручения и неизмеримых векторных групп. Кроме того, получено описание нередуцированных TI -групп, SI_H -групп и SI -групп, это сводит проблему исследования TI -групп к случаю редуцированных групп.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на абелевой группе, филиальное кольцо, TI -группа.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

Е.И. Компанцева, Т.К.Ч. Нгуен, В.А. Газарян. Филиальные кольца на прямых суммах и прямых произведениях абелевых групп без кручения // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 200–212.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-200-212

Filial rings on direct sums and direct products of torsion-free abelian groups

E.I. Kompantseva, T.Q.T. Nguyen, V.A. Gazaryan

Ekaterina Igorevna Kompantseva — Moscow Pedagogical State University; Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).

e-mail: kompantseva@yandex.ru

Nguyen Thi Quynh Trang — Vietnam education cooperation joint stock company (Vietnam).

e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Varvara Aramovna Gazaryan — Moscow State University named after M.V. Lomonosov; Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).

e-mail: vagazaryan@fa.ru

Abstract

A ring whose additive group coincides with an abelian group G is called a ring on G . An abelian group G is called a TI -group if every associative ring on G is filial. If every (associative) ring on an abelian group G is an SI -ring (a hamiltonian ring), then G is called an SI -group (an SI_H -group). In this article, TI -groups, SI_H -groups and SI -groups are described in the following classes of abelian groups: almost completely decomposable groups, separable torsion-free groups and non-measurable vector groups. Moreover, a complete description of non-reduced TI -groups, SI_H -groups and SI -groups is given. This allows us to only consider reduced groups when studying TI -groups.

Keywords: abelian group, ring on a group, filial ring, TI -group.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

E.I. Kompantseva, T.Q.T. Nguyen, V.A. Gazaryan, 2021, "Filial rings on direct sums and direct products of torsion-free abelian groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 200–212.

1. Введение

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu : G \otimes G \rightarrow G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на G . На любой группе G можно определить умножение $\mu : G \otimes G \rightarrow 0$, которое называется нулевым. Кольцо с таким умножением называется нуль-кольцом. Если на группе G не существует умножений (ассоциативных умножений), кроме нулевого, то G называется nil -группой (nil_a -группой). Проблема определения кольцевых структур на абелевой группе была поставлена Бьюмонтом [1], который рассматривал кольца на прямых суммах циклических групп.

Одним из направлений теории аддитивных групп колец является изучение абелевых групп, на которых любое кольцо принадлежит определённому классу. Мы рассматриваем классы филиальных, гамильтоновых и SI -колец. Согласно [2], SI -кольцом называется кольцо, в котором любое подкольцо является идеалом. Ассоциативное SI -кольцо называется гамильтоновым кольцом или H -кольцом, поскольку эти структуры в определенном смысле аналогичны

гамильтоновым группам. Гамильтоновы кольца систематически изучались многими авторами, наиболее значительные результаты содержатся в [3, 4, 5]. Естественным обобщением гамильтоновых колец являются филиальные кольца, которые были введены в [6] и изучались в [7, 8, 9, 10, 11]. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Подкольцо A ассоциативного кольца R называется метаидеалом индекса n , если существует такой ряд $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = R$, что A_i является идеалом A_{i+1} для всех $i = 0, \dots, n-1$ [12]. Нетрудно видеть, что ассоциативное кольцо филиально тогда и только тогда, когда в нём отношение «быть идеалом» транзитивно. Отметим, что класс филиальных колец содержит не только гамильтоновы, но и регулярные (в смысле фон Неймана), и простые кольца. В настоящей работе изучаются абелевы группы, на которых любое ассоциативное кольцо является филиальным (гамильтоновым), такие группы называются TI -группами (SI_H -группами), а также SI -группы, то есть абелевы группы на которых любое кольцо является SI -кольцом. Проблема изучения TI -групп сформулирована в [13], там же получено описание периодических TI -групп. С. Фейгельстоком в [2] были введены SI -группы и SI_H -группы, там же и в [14] описаны такие группы в классе периодических абелевых групп. Кроме того, в [15] описаны TI -группы, SI -группы и SI_H -группы в классе алгебраически компактных абелевых групп. Отметим, что если $\mathcal{NIL}$ – класс всех nil -групп, $\mathcal{SI}$ – класс всех SI -групп, $\mathcal{SI}_H$ – класс всех SI_H -групп, $\mathcal{TI}$ – класс всех TI -групп, то из определений следует, что

$$\mathcal{NIL} \subseteq \mathcal{SI} \subseteq \mathcal{SI}_H \subseteq \mathcal{TI}.$$

Работа посвящена изучению TI -групп, SI_H -групп и SI -групп без кручения. В разделе 2, описаны нередуцированные TI -группы, SI_H -группы и SI -группы, это позволило в дальнейшем при исследовании TI -групп ограничиться редуцированным случаем. Известно, что прямое слагаемое TI -группы (SI -группы, SI_H -группы) является TI -группой [16] (SI -группой [2], SI_H -группой [14]). Однако каждый из этих классов не замкнут относительно взятия прямых сумм и прямых произведений групп. Этот факт определил выбор классов редуцированных абелевых групп для описания в них TI -групп, SI -групп, SI_H -групп. В разделах 3 и 4 такие группы описаны в следующих классах абелевых групп, так или иначе связанных с прямыми суммами и прямыми произведениями групп без кручения ранга 1: почти вполне разложимых групп, сепарабельных групп без кручения и векторных групп. Отметим, что ни один из этих классов не содержится в объединении двух других. В заключении показано, что для групп из рассмотренных классов, ранг которых больше 1, понятия TI -группы, SI_H -группы, SI -группы и nil -группы совпадают.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа». Умножение $\mu : G \otimes G \rightarrow G$ на группе G часто обозначается знаком $\times$ и т. п., то есть $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ определяет кольцо на группе G , которое обозначается $(G, \times)$. Кольцо $(G, \times)$ называется нуль-кольцом, если $g_1 \times g_2 = 0$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Как обычно, $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{P}$ – множества натуральных, целых неотрицательных, всех простых чисел соответственно, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ – группа (поле) рациональных чисел, $\mathbb{Z}(n)$ – циклическая группа порядка n . Пусть G – группа, $g \in G$ и $(G, \times)$ – кольцо на G , через $(g)_\times$ и $\langle g \rangle_*$ будем обозначать соответственно идеал кольца $(G, \times)$ и сервантную подгруппу группы G , порожденные элементом g . Характеристика, тип и порядок элемента $g \in G$ обозначаются $\chi(g)$, $t(g)$ и $o(g)$ соответственно. Под $T(G)$ понимается периодическая часть группы G , $r(G)$ – ранг группы G , $\overline{G}$ – делимая оболочка группы G . Через π_A обозначается проекция группы $G = A \oplus B$ на подгруппу A . Циклический модуль над ассоциативным кольцом R , порожденный элементом e , будем записывать в виде Re . Запись $A \triangleleft R$ означает, что A – идеал кольца R . За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [17].

2. Нередуцированные TI -группы

В этом разделе описаны TI -группы, SI_H -группы и SI -группы в классе нередуцированных групп. Полученное описание позволяет свести проблему исследования TI -групп, SI_H -групп и SI -групп к случаю редуцированных групп.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно теореме 1 в [8], кольцо $(G, \times)$ – филиально тогда и только тогда, когда

$$(g)_{\times} = (g)_{\times}^2 + \mathbb{Z}g$$

для любого $g \in G$.

ЛЕММА 1. Пусть $G = \mathbb{Q} \oplus A$, где $A \neq T(A)$. Тогда G не является TI -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем группу G в виде $G = \mathbb{Q}e \oplus A$, где $e \in G$ и выберём произвольный элемент $a \in A \setminus T(A)$. Делимую оболочку $\overline{G}$ группы G можно представить в виде $\overline{G} = \mathbb{Q}e \oplus \mathbb{Q}a \oplus B$ для некоторой группы B . Положим $a \times a = e$, $(\mathbb{Q}e \oplus B) \times \overline{G} = \overline{G} \times (\mathbb{Q}e \oplus B) = 0$. Эти соотношения определяют ассоциативное и коммутативное умножение на $\overline{G}$, при этом G – подкольцо кольца $(\overline{G}, \times)$. В кольце $(G, \times)$ рассмотрим множества

$$(a)_{\times} = a \times G + \mathbb{Z}a = \mathbb{Q}e + \mathbb{Z}a,$$

$$(a)_{\times}^2 + \mathbb{Z}a = \mathbb{Q}e \times (a)_{\times} + \mathbb{Z}a \times (a)_{\times} + \mathbb{Z}a = \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}a.$$

Значит, $(a)_{\times} \neq (a)_{\times}^2 + \mathbb{Z}a$, откуда в силу замечания 1 кольцо $(G, \times)$ не является филиальным. Следовательно, G не является TI -группой. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Любая группа без кручения ранга 1 является TI -группой [13].

ТЕОРЕМА 1. 1) Нередуцированная непериодическая группа G является TI -группой тогда и только тогда, когда $G = \mathbb{Q} \oplus \left[\bigoplus_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p) \right]$ при некотором $P_0 \subseteq \mathbb{P}$ (если $P_0 = \emptyset$, полагаем $\bigoplus_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p) = 0$).

2) Нередуцированная периодическая группа G является TI -группой тогда и только тогда, когда

$$G = \left[\bigoplus_{p \in P_0} D_p \right] \oplus \left[\bigoplus_{p \in P'_0} \mathbb{Z}(p) \right] \oplus \left[\bigoplus_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p^{n_p}) \right] \oplus \left[\bigoplus_{p \in P_2} (\mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p)) \right],$$

где P_0, P_1, P_2 – попарно непересекающиеся множества простых чисел, $P_0 \neq \emptyset$ и $P'_0 \subseteq P_0$, D_p – делимая p -группа ($p \in P_0$), $n_p > 1$ для всех $p \in P_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Пусть G – нередуцированная непериодическая TI -группа. По теореме 3 в [13] периодическая часть группы G имеет вид $T(G) = \bigoplus_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p)$ при некотором $P_0 \subseteq \mathbb{P}$. Следовательно, G содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbb{Q}$. По лемме 1 имеем $G = \mathbb{Q} \oplus T(G) = \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p)$, где $P_0 \subseteq \mathbb{P}$.

Обратно, если $G = \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p)$ при некотором $P_0 \subseteq \mathbb{P}$, то G является TI -группой в силу замечания 2 и замечания 3.4 в [16].

Утверждение 2) следует из теоремы 1 в [13]. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Прямое слагаемое TI -группы (SI -группы, SI_H -группы) является TI -группой [16] (SI -группой [2], SI_H -группой [14]).

В следующей теореме описаны SI -группы и SI_H -группы в классе всех нередуцированных групп.

ТЕОРЕМА 2. *Для нередуцированной группы G следующие условия равносильны:*

- 1) G – SI -группа,
- 2) G – SI_H -группа,
- 3) $G = \left[\bigoplus_{p \in P_0} D_p \right] \oplus \left[\bigoplus_{p \in P'_0} \mathbb{Z}(p) \right] \oplus \left[\bigoplus_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p^{n_p}) \right]$, где P_0, P_1 – непересекающиеся множества простых чисел, $P_0 \neq \emptyset$ и $P'_0 \subseteq P_0$, D_p – делимая p -группа ($p \in P_0$), $n_p > 1$ для всех $p \in P_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что из 1) следует 2), очевидно. Из 3) следует 1) в силу теоремы 7 в [2].

Докажем, что из 2) следует 3). Пусть G – нередуцированная SI_H -группа. Допустим, $G \neq T(G)$. Тогда по теореме 3.10 в [14] имеем $T(G) = \bigoplus_{p \in S} \mathbb{Z}(p^{n_p})$, где $S \subseteq \mathbb{P}$, $n_p \in \mathbb{N}$ для всех $p \in S$.

Значит, группа G содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbb{Q}$. Так как в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ существует подкольцо $\mathbb{Z}$, которое не является идеалом, то аддитивная группа $\mathbb{Q}$ не является SI_H -группой. Следовательно, SI_H -группой не является и группа G в силу замечания 3. Значит, любая нередуцированная SI_H -группа является периодической. По замечанию 2.4 в [14] и теореме 7 в [2] периодическая группа G является SI_H -группой тогда и только тогда, когда $G = \left[\bigoplus_{p \in P_0} D_p \right] \oplus \left[\bigoplus_{p \in P'_0} \mathbb{Z}(p) \right] \oplus \left[\bigoplus_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p^{n_p}) \right]$, где P_0, P_1 – непересекающиеся множества простых чисел, $P_0 \neq \emptyset$ и $P'_0 \subseteq P_0$, D_p – делимая p -группа ($p \in P_0$), $n_p > 1$ для всех $p \in P_1$. $\square$

3. TI -группы в классе почти вполне разложимых групп

В этом разделе описаны TI -группы в классе почти вполне разложимых групп. Группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой ($ПВР$ -группой), если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. Теория $ПВР$ -групп интенсивно развивается в последнее десятилетие (см. [18, 19, 20] и др.), за эти годы она выделилась в самостоятельную ветвь общей теории абелевых групп. В ряде работ (см. [21, 22]) изучаются кольца на $ПВР$ -группах.

ЛЕММА 2. *Пусть $G = A \oplus B$, $m \in \mathbb{N}$, где $B \neq T(B)$, A – редуцированная группа, на которой существует такое ассоциативное кольцо $(A, \cdot)$, что $m(A \cdot A) \neq 0$. Тогда существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$, для которого $G \times G \subseteq mG$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим умножение $\times$ на G , положив

$$(a_1 + b_1) \times (a_2 + b_2) = m(a_1 \cdot a_2),$$

для любых $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$. По условию существуют такие элементы $a, c \in A$ и такое $t \in \mathbb{Z}$, что $t \nmid m(a \cdot c)$. Отметим, что кольцо $(G, \times)$ – ассоциативно, $G \times G \subseteq mA \subseteq mG$ и $t \nmid a \times c$. Пусть $b \in B \setminus T(B)$ и $g = ta + b$. Тогда

$$\begin{aligned} (g)_{\times} &\subseteq tA + \mathbb{Z}g, \\ (g)_{\times}^2 + \mathbb{Z}g &\subseteq t^2A + \mathbb{Z}g. \end{aligned}$$

Рассмотрим элемент $ta \times c = g \times c \in (g)_{\times}$. Допустим, $ta \times c \in (g)_{\times}^2 + \mathbb{Z}g$, тогда $ta \times c = t^2x + kta + kb$ при некоторых $x \in A$ и $k \in \mathbb{Z}$. Так как $o(b) = \infty$, то $k = 0$. Значит, $ta \times c = t^2x$, откуда $a \times c = tx$, что противоречит выбору числа t и элементов a, c . Следовательно, $(g)_{\times} \neq (g)_{\times}^2 + \mathbb{Z}g$, и поэтому кольцо $(G, \times)$ не является филиальным. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $G = A \oplus B$, где $B \neq T(B)$, A – редуцированная группа без кручения, не являющаяся nil_a -группой. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$ такое, что $G \times G \subseteq mG$.

Пусть $\mathfrak{T}$ – некоторая система типов, будем говорить, что $\mathfrak{T}$ удовлетворяет nil -условию, если $t_1 t_2 \not\leq t_3$ для любых $t_1, t_2, t_3 \in \mathfrak{T}$ (среди типов t_1, t_2, t_3 которых могут быть совпадающие).

ЛЕММА 3. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ – вполне разложимая группа, $r(G_i) = 1$ при $i \in I$. Пусть $r(G) \geq 2$ и система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ не удовлетворяет nil -условию. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$ такое, что $G \times G \subseteq mG$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если среди групп G_i есть группа идемпотентного типа, то G не является TI -группой в силу следствия 1. Пусть все группы G_i ($i \in I$) имеют неидемпотентный тип. Возможны следующие случаи.

Случай 1. $t(G_k) \cdot t(G_k) \leq t(G_s)$ при некоторых $k, s \in I$, $k \neq s$.

Тогда группа G имеет вид $G = G_k \oplus G_s \oplus \bigoplus_{i \notin \{k, s\}} G_i$. Группы G_k и G_s можно представить в виде $G_k = R_k e_k$, $G_s = R_s e_s$, где R_k, R_s – подгруппы группы $\mathbb{Q}$ такие, что $\mathbb{Z} \leq R_k \leq R_s$, $e_k \in G_k$, $e_s \in G_s$, причем $\chi(e_k) \cdot \chi(e_k) \leq \chi(e_s)$. Определим ассоциативное и коммутативное умножение $\times$ на группе G , положив $e_k \times e_k = m e_s$ и $G_i \times G_j = 0$, если $i \neq k$ или $j \neq k$. Очевидно, $G \times G \subseteq mG$. В кольце $(G, \times)$ идеал $(e_k)_\times$ имеет вид $(e_k)_\times = m R_k e_s \oplus \mathbb{Z} e_k$. Тогда

$$(e_k)_\times^2 + \mathbb{Z} e_k = m \mathbb{Z} e_s \oplus \mathbb{Z} e_k.$$

Так как $t(e_k)$ неидемпотентный тип, то найдется $p \in \mathbb{P}$ такое, что $p \nmid m$ и $\frac{1}{p} e_k \in R_k e_k$. Имеем $\frac{m}{p} e_s = \frac{1}{p} e_k \times e_k \in (e_k)_\times$. С другой стороны, так как $\frac{m}{p} \notin \mathbb{Z}$, то $\frac{m}{p} e_s \notin (e_k)_\times^2 + \mathbb{Z} e_k$. Следовательно, кольцо $(G, \times)$ не является филиальным.

Случай 2. $t(G_k) \cdot t(G_s) \leq t(G_s)$ при некоторых $k, s \in I$, $k \neq s$.

Так как $t(G_k) \leq t(G_k) \cdot t(G_s) \leq t(G_s)$ по условию, то $t(G_k) \cdot t(G_k) \leq t(G_k) \cdot t(G_s) \leq t(G_s)$. Значит, группы G_k и G_s удовлетворяют случаю 1, поэтому существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$, для которого $G \times G \subseteq mG$.

Случай 3. $t(G_k) \cdot t(G_l) \leq t(G_s)$ при некоторых $k, l, s \in I$, $k \neq l$, $k \neq s$, $l \neq s$.

Тогда G имеет вид $G = G_k \oplus G_l \oplus G_s \oplus \bigoplus_{i \notin \{k, l, s\}} G_i$. Группы G_k , G_l и G_s можно представить в виде $G_k = R_k e_k$, $G_l = R_l e_l$, $G_s = R_s e_s$, где R_k, R_l, R_s – подгруппы группы $\mathbb{Q}$, $e_k \in G_k$, $e_l \in G_l$, $e_s \in G_s$, причем $\chi(e_k) \cdot \chi(e_l) \leq \chi(e_s)$. На группе G определим ассоциативное и коммутативное кольцо $(G, \times)$, положив $e_k \times e_l = e_l \times e_k = m e_s$, и $G_i \times G_j = 0$, если $(i, j) \neq (k, l)$ или $(i, j) \neq (l, k)$. Тогда $G \times G \subseteq mG$ и идеал $(e_k)_\times$ имеет вид $(e_k)_\times = R_k R_l e_s + \mathbb{Z} e_k$. Нетрудно видеть, что $(e_k)_\times^2 = 0$, и, значит, $(e_k)_\times^2 + \mathbb{Z} e_k = \mathbb{Z} e_k$. Так как $m e_s = e_k \times e_l \in (e_k)_\times$ и $m e_s \notin (e_k)_\times^2 + \mathbb{Z} e_k$, то кольцо $(G, \times)$ не является филиальным. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ – вполне разложимая группа, $r(G_i) = 1$ при $i \in I$, $r(G) \geq 2$.

Тогда следующие условия равносильны:

- 1) G – TI -группа;
- 2) система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil -условию;
- 3) G – nil -группа;
- 4) G – nil_a -группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из 1) следует 2) по лемме 3. Согласно теореме 3.1 в [23], группа G является nil -группой тогда и только тогда, когда $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil -условию, поэтому 2) влечет 3). То, что из 3) следует 4), а из 4) следует 1), легко получить из определений. $\square$

Теорема 3 и замечание 2 позволяют описать TI -группы в классе вполне разложимых групп.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Вполне разложимая группа $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ является TI -группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$ или система типов $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil -условию.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. *Для вполне разложимой группы $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$, где $r(G_i) = 1$, система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ является инвариантом [25], поэтому описание вполне разложимых TI -групп в следствии 2 не зависит от разложения группы G в прямую сумму групп ранга 1.*

Рассмотрим теперь TI -группы в классе почти вполне разложимых групп ($ПВР$ -групп). Любая $ПВР$ -группа G содержит однозначно определенную вполне разложимую подгруппу $R(G)$ конечного индекса, которая является вполне характеристикой подгруппой группы G и называется её регулятором. Индекс регулятора $R(G)$ в группе G называется регуляторным индексом.

Пусть G – группа без кручения. Для произвольного типа t определим вполне характеристические подгруппы группы G :

$$G(t) = \{g \in G \mid t(g) \geq t\}, \quad G^*(t) = \langle g \in G \mid t(g) > t \rangle,$$

$$G^\sharp(t) \text{ — сервантная оболочка группы } G^*(t).$$

Тип t называется критическим для группы без кручения G , если $G(t)/G^\sharp(t) \neq 0$ [18, определение 2.4.6]. Множество $T_{cr}(G)$ всех критических типов группы G совпадает с множеством $T_{cr}(R(G))$ всех критических типов регулятора $R(G)$. При этом множество $T_{cr}(R(G))$ определяется разложением $R(G)$ в прямую сумму групп ранга 1 и является инвариантом группы G .

ЛЕММА 4. *Редуцированная $ПВР$ -группа G является nil -группой (nil_a -группой) тогда и только тогда, когда её регулятор $R(G)$ является nil -группой (nil_a -группой).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – nil -группа (nil_a -группа) и $\times$ – умножение (ассоциативное умножение) на $R(G)$. Пусть регуляторный индекс равен n . Определим умножение $\circ$ на G , положив $g_1 \circ g_2 = ng_1 \times ng_2$. Заметим, что если $\times$ – ассоциативное умножение, то и умножение $\circ$ ассоциативно. Так как G – nil -группа (nil_a -группа), то $\circ$ – нулевое умножение. Значит, $0 = a \circ b = n^2(a \times b)$ для любых $a, b \in R(G)$. Следовательно, $\times$ – нулевое умножение на $R(G)$, откуда $R(G)$ – nil -группа (nil_a -группа).

Пусть теперь $R(G)$ – nil -группа (nil_a -группа) и $\times$ – умножение (ассоциативное умножение) на G . Так как $R(G)$ – вполне характеристическая подгруппа группы G , то определено кольцо $(R(G), \times)$, которое является нуль-кольцом. Умножение $\times$ на группе G однозначно продолжается до умножения на её делимой оболочке $\overline{G}$, которая совпадает с делимой оболочкой регулятора $R(G)$. Значит, $(\overline{G}, \times) = (\overline{R(G)}, \times)$ – нуль-кольцо, откуда и $(G, \times)$ – нуль-кольцо. Следовательно, G – nil -группа (nil_a -группа). $\square$

ЛЕММА 5. *Пусть A – подгруппа индекса n группы без кручения G . Пусть на A существует ассоциативное нефиллиальное кольцо $(A, \times)$ такое, что $A \times A \subseteq n^2A$. Тогда G не является TI -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $nG \subseteq A$, то делимая оболочка $\overline{A}$ группы A совпадает с делимой оболочкой $\overline{G}$ группы G . Умножение $\times$ на A однозначно продолжается до умножения на группе

$\bar{A} = \bar{G}$. Нетрудно видеть, что G является подкольцом кольца $(\bar{G}, \times)$. Действительно, пусть $g_1, g_2 \in G$, тогда в кольце $(\bar{G}, \times)$ имеем $ng_1 \times ng_2 \in A \times A \subseteq n^2 A$. Значит, $n^2(g_1 \times g_2) = n^2 a$ при некотором $a \in A$, откуда $g_1 \times g_2 \in A$. Так как $G \times A \subseteq A$ и $A \times G \subseteq A$, то A – идеал кольца $(G, \times)$.

Так как кольцо $(A, \times)$ по условию не является филиальным, то найдутся подкольца J, K кольца $(A, \times)$ такие, что $J \triangleleft K \triangleleft A$ и J не является идеалом кольца A . Следовательно, в кольце $(G, \times)$ имеем $J \triangleleft K \triangleleft A \triangleleft G$ и J не является идеалом кольца G . Значит, кольцо $(G, \times)$ нефилиально, и группа G не является TI -группой. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – почти вполне разложимая группа с регулятором $R(G)$, $r(G) > 1$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) G является TI -группой;
- 2) $T_{cr}(G)$ удовлетворяет nil -условию;
- 3) $R(G)$ является TI -группой;
- 4) $R(G)$ является nil_a -группой;
- 5) $R(G)$ является nil -группой;
- 6) G является nil -группой;
- 7) G является nil_a -группой;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – TI -группа, $A = R(G)$, n – регуляторный индекс группы G , $T_{cr}(G)$ не удовлетворяет nil -условию. Тогда по лемме 3 существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(A, \times)$, для которого $A \times A \subseteq n^2 A$. Следовательно, G не является TI -группой по лемме 5.

По теореме 3 получаем 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5). По лемме 4 имеем 5) $\Rightarrow$ 6). Нетрудно видеть, что из 6) следует 7), а из 7) следует 1). $\square$

Теорема 4 и замечание 2 позволяют описать TI -группы в классе $ПВР$ -групп.

СЛЕДСТВИЕ 3. Почти вполне разложимая группа G является TI -группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$ или множество $T_{cr}(G)$ критических типов группы G удовлетворяет nil -условию.

4. Сепарабельные и векторные TI -группы

Далее мы перейдём к описанию сепарабельных TI -групп без кручения. Группа без кручения G называется сепарабельной, если каждое конечное подмножество элементов из G содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы G . Любая вполне разложимая группа является сепарабельной. Однако лишь несчетные сепарабельные группы представляют собой нечто новое, так как счетная сепарабельная группа вполне разложима [24].

Пусть A – сервантная подгруппа группы без кручения G . Согласно [24], элемент $g \in G \setminus A$ назовем собственным относительно A , если $\chi(g) \geq \chi(g + a)$ для всех $a \in A$. Это условие равносильно тому, что $\chi_G(g) = \chi_{G/A}(g + A)$. Элемент $g \in G$ назовем примитивным типа t , если $g \in G(t) \setminus G^*(t)$ и g – собственный элемент относительно $G^*(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. [24] Пусть G – сепарабельная группа без кручения. Элементы $g_1, \dots, g_n \in G$, имеющие различные типы, примитивны тогда и только тогда, когда $\langle g_1, \dots, g_n \rangle_*$ – прямое слагаемое группы G , причём $\langle g_1, \dots, g_n \rangle_* = \langle g_1 \rangle_* \oplus \dots \oplus \langle g_n \rangle_*$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – несчетная сепарабельная группа без кручения. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) G является TI -группой;
- 2) система типов всех примитивных элементов группы G удовлетворяет nil -условию;
- 3) G является nil -группой;
- 4) G является nil_a -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – TI -группа и пусть $g_1, \dots, g_n$ ($n \in \mathbb{N}$) – примитивные элементы группы G , причем типы элементов $g_1, \dots, g_n$ различны, если $n \geq 2$. В силу замечания 5 группу G можно представить в виде $G = \langle g_1 \rangle_* \oplus \dots \oplus \langle g_n \rangle_* \oplus A$ для некоторой группы A . Сумма $S = \langle g_1 \rangle_* \oplus \dots \oplus \langle g_n \rangle_*$ является TI -группой в силу замечания 3. По следствию 1 все типы $t(g_1), \dots, t(g_n)$ неидемпотентны. Поэтому, если $n = 1$, то множество $\{t(g_1)\}$ удовлетворяет nil -условию. Если $n \geq 2$, то множество $\{t(g_1), \dots, t(g_n)\}$ удовлетворяет nil -условию по теореме 3. Таким образом, система типов всех примитивных элементов удовлетворяет nil -условию.

Покажем, что из 2) следует 3). Пусть система типов всех примитивных элементов группы G удовлетворяет nil -условию, и пусть $(G, \times)$ – произвольное кольцо на G . Пусть $x, y \in G$, тогда существует разложение $G = B \oplus C$ группы G , в котором C – группа без кручения, $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ – такая вполне разложимая группа, что $n \geq 2$, элементы x, y и $x \times y$ принадлежат B , $r(B_i) = 1$ ($i = \overline{1, n}$).

Определим умножение $\times_B$ на группе B , положив $a \times_B b = \pi_B(a \times b)$ для любых $a, b \in B$. Так как, согласно замечанию 5, каждый из типов $t(B_i)$, где $i = \overline{1, n}$, является типом некоторого примитивного элемента, то система $\{t(B_i) \mid i = \overline{1, n}\}$ удовлетворяет nil -условию. Следовательно, B является nil -группой по теореме 3, отсюда, $x \times y = \pi_B(x \times y) = x \times_B y = 0$. Значит, $(G, \times)$ – нуль-кольцо. Таким образом, G является nil -группой.

То, что из 3) следует 4), а из 4) следует 1), очевидно. $\square$

Теоремы 3, 5 и замечание 2 позволяют описать TI -группы в классе сепарабельных групп без кручения.

СЛЕДСТВИЕ 4. Сепарабельная группа без кручения G является TI -группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$ или система типов всех примитивных элементов группы G удовлетворяет nil -условию.

Далее мы опишем TI -группы в классе неизмеримых векторных групп. Векторной группой называют прямое произведение групп без кручения ранга 1. Отметим, что векторная группа в общем случае не является сепарабельной, критерий сепарабельности векторных групп получен в [26]. Напомним, что множество I называется измеримым, если оно допускает счетно аддитивную меру η , принимающую значения 0 и 1, такую, что $\eta(I) = 1$, $\eta(\{x\}) = 0$ для любого $x \in I$ [17]. Отметим, что до сих пор неизвестно, противоречит ли аксиомам теории множеств гипотеза о существовании измеримых чисел.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $G = \prod_{i \in I} G_i$, где $r(G_i) = 1$, I – бесконечное неизмеримое множество. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) G является TI -группой;
- 2) система типов $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil -условию;
- 3) G является nil -группой;

4) G является nil_a -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что из 1) следует 2). Допустим, система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ не удовлетворяет nil -условию. Тогда группа G обладает вполне разложимым прямым слагаемым $B = \bigoplus_{i \in I_1} G_i$, где I_1 – конечное подмножество множества I , $|I_1| \geq 2$ и система $\{t(G_i) \mid i \in I_1\}$ не удовлетворяет nil -условию. По теореме 4 группа B не является TI -группой, значит, и группа G не является TI -группой.

Если система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil -условию, то G является nil -группой по теореме 3 в [23].

Нетрудно видеть, что из 3) следует 4), а из 4) следует 1). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для векторной группы $G = \prod_{i \in I} G_i$, где $r(G_i) = 1$ и множество I неизмеримо, система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ является инвариантом [25]. Поэтому описание векторных TI -групп в теореме 6 не зависит от разложения группы G в прямое произведение групп ранга 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что теоремы 3, 4, 5, 6, а также следствия 2, 3, 4 сформулированы для всех групп из соответствующих классов, а не только для редуцированных. Действительно, если в некотором множестве типов $\mathfrak{T}$ есть тип $t(\mathbb{Q}) = (\infty, \infty, \dots)$, то $\mathfrak{T}$ не удовлетворяет nil -условию.

5. Заключение

В заключение обобщим некоторые из полученных результатов. Пусть $\mathfrak{K}$ – объединение классов почти вполне разложимых групп, сепарабельных групп без кручения и неизмеримых векторных групп, $\mathfrak{K}_2 = \{G \in \mathfrak{K} \mid r(G) \geq 2\}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $G \in \mathfrak{K}_2$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) G – nil -группа;
- 2) G – SI -группа;
- 3) G – SI_H -группа;
- 4) G – TI -группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4)$. То, что из 4) следует 1), получаем из теорем 4, 5, 6. $\square$

Как уже отмечалось, имеют место включения

$$NIL \subseteq SI \subseteq SI_H \subseteq TI.$$

В общем случае данные включения нельзя заменить равенством ни на каком месте, соответствующие примеры приведены в [14, 16]. Однако в силу теоремы 7 для класса $\mathfrak{K}_2$ имеют место равенства

$$NIL \cap \mathfrak{K}_2 = SI \cap \mathfrak{K}_2 = SI_H \cap \mathfrak{K}_2 = TI \cap \mathfrak{K}_2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beaumont R. A. Rings with additive groups which is the direct sum of cyclic groups // Duke Math. J. 1948. Vol. 15, №2. P. 367-369.
2. Feigelstock S. Additive groups of rings whose subrings are ideals // Bull. Austral. Math. Soc. 1997. Vol. 55. P. 477-481.

3. Redei L. Vollidealringe im weiteren Sinn. I // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1952. Vol. 3. P. 243-268.
4. Андриянов В. И. Периодические гамильтоновы кольца // Матем. сб. 1967. Vol. 74(116). №2. С. 241-261
5. Kruse R. L. Rings in which all subrings are ideals // Canad. J. Math. 1968. Vol. 20. P. 862-871.
6. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983-1984. Vol. 42. P. 185-194.
7. Sands A. D. On ideals in over-rings // Publ. Math. Debrecen. 1988. Vol. 35. P. 273-279.
8. Andruszkiewicz R., Puczyłowski E. On filial rings// Portugal. Math. 1988. Vol. 45, №2. P. 139-149.
9. Filipowicz M., Puczyłowski E. R. Left filial rings // Algebra Colloq. 2004. Vol. 11. P. 335-344.
10. Filipowicz M., Puczyłowski E. R. On filial and left filial rings // Publ. Math. Debrecen 2005. Vol. 66. P. 257-267.
11. Andruszkiewicz R., Pryszczepko K. On fully filial torsion rings // Bull. Korean Math. Soc. 2019. Vol. 56. №1. P. 23-29.
12. Baer R. Meta ideals. Report conf. linear algebras. June. 1956. // Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Council. 1957. №502. P. 33-52.
13. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI -groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33-41.
14. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On SI -groups // Bull. of the Australian Math. Soc. 2015. Vol. 91. №1. P. 92-103.
15. Компанцева Е. И., Нгуен Т. К. Ч. Алгебраически компактные абелевы TI -группы // Чебышевский сборник. 2019. Vol. 20. №1. С. 202-211.
16. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On additive groups of associative and commutative rings // J. Quaest. Math. 2017. Vol. 40. №4. P. 527-537.
17. Fuchs L. Abelian Groups, Springer Int. Publ. Switzerland. 2015.
18. Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups, Amsterdam: Gordon and Breach, 2000. (Algebra Logic Appl. Ser. Vol. 13).
19. Arnold D. M., Mader A., Mutzbauer O., Solak E. Almost completely decomposable groups and unbounded representation type // J. of Algebra. 2012. Vol. 349(1). P. 50-62.
20. Solak E. Classification of a class of torsion-free abelian groups // Math. Journal of the Univ. of Padova. 2016. Vol. 135. P. 111-131.
21. Компанцева Е. И. Кольца на почти вполне разложимых абелевых группах // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Vol. 14(5). С. 93-101.
22. Компанцева Е. И., Фомин А. А. Абсолютные идеалы почти вполне разложимых абелевых групп // Чебышевский сб. 2015. №4 (16). С. 200-211.
23. Чехлов А. Р. Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2009. №3(7). С. 64-67.

24. Baer R. Abelian groups without elements of finite order // *Duke Math. J.* 1937. Vol. 3. P. 68-122.
25. Sasiada E. On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one // *Bull. Acad. Polon. Sci.* 1959. Vol. 7. P. 145-149.
26. Мишина А. П. Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // *Матем. сб.* 1962. Vol. 57. С. 375-383.

REFERENCES

1. Beaumont, R. A. 1948, "Rings with additive groups which is the direct sum of cyclic groups", *Duke Math. J.*, vol. 15, no. 2, pp. 367-369.
2. Feigelshtock, S. 1997, "Additive groups of rings whose subrings are ideals", *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 477-481.
3. Redei, L. 1952, "Vollidealringe im weiteren Sinn. I", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 3, pp. 243-268.
4. Andriyanov, V. I. 1967, "Periodic Hamiltonian rings", *Math. USSR-Sb.*, vol. 3, no. 2, pp. 225-242.
5. Kruse, R. L. 1968, "Rings in which all subrings are ideals", *Canad. J. Math.*, vol. 20, pp. 862-871.
6. Ehrlich, G. 1983-1984. "Filial rings", *Portugal. Math.*, vol. 42, pp. 185-194.
7. Sands, A. D. 1988, "On ideals in over-rings", *Publ. Math. Debrecen.*, vol. 35, pp. 273-279.
8. Andruszkiewicz, R. & Puczyłowski, E. 1988, "On filial rings", *Portugal. Math.*, vol. 45, no. 2, pp. 139-149.
9. Filipowicz, M. & Puczyłowski, E. R. 2004, "Left filial rings", *Algebra Colloq.*, vol. 11, pp. 335-344.
10. Filipowicz, M. & Puczyłowski, E. R. 2005, "On filial and left filial rings", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 66, pp. 257-267.
11. Andruszkiewicz, R. & Pryszycki, K. 2019, "On fully filial torsion rings" *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 56, no. 1, pp. 23-29.
12. Baer, R. 1957, "Meta ideals", Report conf. linear algebras. June. 1956., *Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Council*, no.502, pp. 33-52.
13. Andruszkiewicz, R. & Woronowicz, M. 2014, "On *TI*-groups", *Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie.*, pp. 33-41.
14. Andruszkiewicz, R. & Woronowicz, M. 2015, "On *SI*-groups", *Bull. of the Australian Math. Soc.*, vol. 91, no. 1, pp. 92-103.
15. Kompantseva, E. I. & Nguyen, T. Q. T. 2019, "Algebraically compact abelian *TI*-groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 202-211.
16. Andruszkiewicz, R. & Woronowicz, M. 2017, "On additive groups of associative and commutative rings", *J. Quaest. Math.*, vol. 40, no. 4, pp. 527-537.
17. Fuchs, L. 2015, "Abelian groups", Switz.: Springer International Publishing.
18. Mader, A. 2000, "Almost Completely Decomposable Abelian Groups", Amsterdam: Gordon and Breach (*Algebra Logic Appl. Ser.*, vol. 13).

19. Arnold, D. M. & Mader, A. & Mutzbauer, O. & Solak, E. 2012, “Almost completely decomposable groups and unbounded representation type”, *J. of Algebra*, vol. 349(1), pp. 50-62.
20. Solak, E. 2016, “Classification of a class of torsion-free abelian groups”, *Math. Journal of the Univ. of Padova*, vol. 135, pp. 111–131.
21. Kompantseva, E. I. 2009, “Rings on almost completely decomposable Abelian groups”, *J. of Mathematical Sciences*, vol. 163, no. 6, pp. 688-693.
22. Kompantseva, E. I. & Fomin, A. A. 2015, “Absolute ideals of almost completely decomposable abelian groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, no. 4, pp. 200–211.
23. Chekhlov, A.R. 2009, “On abelian groups, in which all subgroups are ideals”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, no. 3(7), pp. 64-67.
24. Baer, R. 1937, “Abelian groups without elements of finite order”, *Duke Math. J.*, vol. 3, pp. 68-122.
25. Sasiada, E. 1959, “On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one”, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, vol. 7, pp. 145-149.
26. Mishina, A. P. 1962, “Separability of fully direct sums of abelian groups of rank 1”, *Math. Sbornik*, vol. 57, pp. 375-383.

Получено 20.12.2020 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.