ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.532.3 + 512.533.8 + 519.713.2 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-188-199

Коммутативные полугруппы с ограниченными в совокупности порядками подпрямо неразложимых полигонов[1]

И. Б. Кожухов

Игорь Борисович Кожухов — Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», Центр ФПМ Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Аннотация

Подпрямо неразложимые универсальные алгебры, т.е. алгебры, неразложимые в нетривиальное подпрямое произведение алгебр, играют в математике важную роль благодаря хорошо известной теореме Биркгофа, утверждающей, что любая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразлодимых алгебр (в другой терминологии: любая алгебра аппроксимируется подпрямо неразложимыми алгебрами). В связи с этим кажется разумным исследовать классы алгебр с теми или иными ограничениями на подпрямо неразложимые алгебры. Одно из естественных ограничений – конечность всех подпрямо неразложимых алгебр. Более сильное ограничение: порядки подпрямо неразложимых алгебр ограничены в совокупности.

Полигон над полугруппой (или автомат, или унарная алгебра) – множество, на котором действует данная полугруппа. Полигоны над фиксированной полугруппой образуют многообразие, сигнатура которой совпадает с самой полугруппой. С другой стороны, это категория, морфизмы которой – гомоморфизмы одного полигона в другой.

Нетрудно видеть, что полугруппы, над которыми все подпрямо неразложимые полигоны конечны, – это в точности полугруппы, над которыми все полигоны финитно аппроксимируемы (в другой терминологии: резидуально конечны). Более узкий класс – полугруппы, над которыми все полигоны аппроксимируются полигонами, содержашими не более, чем n элементов, где n – фиксированное натуральное число.

В 2000 г. И.Б.Кожуховым было доказано, что все нетривиальные полигоны над полугруппой S аппроксимируются двухэлементными в том и только том случае, если S – полурешётка (коммутативная полугруппа идемпотентов). В работе И.Б.Кожухова и А.Р.Халиуллиной 2014 года было доказано, что всякая полугруппа с ограниченными в совокупности порядками подпрямо неразложимых полигонов является равномерно локально конечной, т.е. для каждого k порядки k-порождённых подполугрупп ограничены в совокупности. В работе И.Б.Кожухова и А.В.Царёва 2019 года были полностью описаны абелевы группы, над которыми все полигоны финитно аппроксимируемы, а также абелевы группы, над которыми все полигоны аппроксимируются конечными, порядки которых ограничены в совокупности.

В настоящей работе характеризуются коммутативные полугруппы, над которыми все полигоны аппроксимируются полигонами, состоящими из не более, чем n элементов.

Ключевые слова: коммутативная полугруппа, полигон над полугруппой, подпрямо неразложимый полигон, финитная аппроксимируемость

Библиография: 19 названий.

[1]Исследование выполнено при поддержке Международного Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ

Для цитирования:
И. Б. Кожухов. Коммутативные полугруппы с ограниченными в совокупности порядками подпрямо неразложимых полигонов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 188–199.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.532.3 + 512.533.8 + 519.713.2 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-188-199

Commutative semigroups with bounded orders of subdirectly irreducible acts

I. B. Kozhukhov

Igor Borisovich Kozhukhov — National Research University of Electronic Technology, Centre Fund. Appl. Math. of M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Abstract

Subdirectly irreducible universal algebras, i.e., algebras which are not decomposable into non-trivial subdirect product, play an important role in mathematics due to well-known Birkhoff Theorem which states that any algebra is a subdirect product of subdirectly irreducible algebras (in another terminology: every algebra is approximated by the subdirectly irreducible algebras). In view of this, it seems reasonable to study algebras with certain conditions on subdirectly irreducible algebras. One of the natural restrictions is the finiteness of all subdirectly irreducible algebras. More stronger restriction is boundness of orders of all subdirectly irreducible algebras.

An act over a semigroup (it is also an automaton, and a unary algebra) is a set with an action of the given semigroup on it. The acts over a fixed semigroup form a variety whose signature coincides with self semigroup. On the other hand, it is a category whose morphisms are homomorphisms from one act into another.

It is not difficult to see that the semigroups over which all subdirectly ireducible acts are finite, are exactly the semigroups over which all subdirectly irreducible acts are finitely approximated (in another terminology: residually finite). A more narrow class form semigroups over which all acts are approximated by acts of n or less elements where n is a fixed natural number.

In 2000, I.B.Kozhukhov proved that all non-trivial acts over a semigroup S are approximated by two-element ones if and only if S is a semilattice (a commutative idempotent semigroup). In 2014, I.B.Kozhukhov and A.R.Haliullina proved that any semigroup with bounded orders of dubdirectly irreducible acts is uniformly locally finite, i.e., for every k, the orders of k-generated subsemigroups are bounded. In the work of I.B.Kozhukhov and A.V.Tsarev 2019, the authors described completely the abelian groups over which all acts are finitely approximated, and also abelian groups over which all acts are approximated by acts of bounded orders.

In this work, we characterize the commutative semigroups over which all acts are approximated by acts consisted of n or less elements.

Keywords: commutative semigroup, act over semigroup, subdirectly irreducible act, finite approximation

Bibliography: 19 titles.

For citation:
I. B. Kozhukhov, 2021, "Commutative semigroups with bounded orders of subdirectly irreducible acts", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 188–199.

1. Введение

Полигоном над полугруппой S (или S-полигоном, см. [15]) называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$ такое, что $x(ss') = (xs)s'$ при всех $x \in X$, $s, s' \in S$. Хорошо известно, что полигон является алгебраической моделью автомата, при этом X – множество состояний, а S – полугруппа входных сигналов (см. [10, 12]). Вместе с тем полигон является универсальной алгеброй сигнатуры S: каждый элемент $s \in S$ задаёт унарную операцию $x \mapsto xs$ на множестве X.

Пусть X – полигон над полугруппой S. Элемент $z \in X$ называется *нулём*, если $zs = z$ для всех $s \in S$. Полигон называется *унитарным*, если полугруппа S имеет единицу (обозначим её через e) и $xe = x$ для всех $x \in X$. *Конгруэнция* полигона X – это такое отношение эквивалентности ρ на множестве X, что $(x, y) \in \rho \to (xs, ys) \in \rho$ для всех $x, y \in X$, $s \in S$. Хорошо известно, что множество $\mathrm{Con}X$ всех конгруэнций полигона X, частично упорядоченное отношением включения, образует полную решётку, являющуюся полной подрешёткой решётки $\mathrm{Eq}X$ всех отношений эквивалентности на множестве X, причём наименьшим элементом обеих решёток является отношение равенства $\triangle_X = \{(x, x) | x \in X\}$, а наибольшим элементом – универсальное отношение $\nabla = X \times X$. В дальнейшем индекс у $\triangle$ и ∇ будем опускать, если понятно, о каком множестве идёт речь. Конгруэнция $\rho \in \mathrm{Con}A$ называется *нетривиальной*, если $\rho \neq \triangle$. Пусть Y – подполигон полигона X (т.е. непустое подмножество такое, что $YS \subseteq Y$). Отношение $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \triangle_X$ является конгруэнцией на X, называемой *конгруэнцией Риса*. К любому полигону можно внешним образом присоединить нуль. А именно, пусть $\theta \notin X$. Положим $X^0 = X \cup \{\theta\}$ и $\theta \cdot s = \theta$ для всех $s \in S$. Как обычно, S^1 обозначает наименьшую полугруппу с единицей, содержащую S. Если A – универсальная алгебра и $M \subseteq A$ – непустое подмножество, то $\langle M \rangle$ – подалгебра, порождённая множеством M. Если X – какое-либо множество и ρ – отношение эквивалентности на X, то множество ρ-классов (фактор-множество) мы будем обозначать через X/ρ, а ρ-класс, содержащий элемент $x \in X$, – через $[x]_\rho$ или просто $[x]$.

Универсальная алгебра A называется *подпрямо неразложимой*, если она не может быть разложена в нетривиальное подпрямое произведение нетривиальных алгебр (алгебра A *нетривиальна*, если $|A| > 1$). Интерес к подпрямо неразложимым алгебрам объясняется замечательной теоремой Биркгофа о том, что всякая алгебра разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых алгебр (см. [8, теорема 7.3]). Хорошо известно (и легко следует из определений), что нетривиальная алгебра A подпрямо неразложима в том и только том случае, если решётка $\mathrm{Con}A$ имеет наименьшую нетривиальную конгруэнцию. Эту конгруэнцию обозначим $\rho_0(A)$ (или просто ρ_0). Понятно, что в подпрямо неразложимой алгебре для любого семейства конгруэнций $\{\rho_i | i \in I\}$ выполняется соотношение $\bigcap_{i \in I} \rho_i \neq \triangle$, если $\rho_i \neq \triangle$ для каждого $i \in I$.

Подпрямо неразложимым алгебрам посвящена обширная литература. Что касается подпрямо неразложимых полигонов над полугруппами, то первой работой, по-видимому, можно считать работу [11]. Эти исследования были продолжены в работе [6], где были охарактеризованы подпрямо неразложимые полигоны над произвольными полугруппами "с точностью до ядра"(наименьшего нетривиального подполигона). В той же работе были описаны подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными связками (т.е. прямыми произведениями полугрупп правых и левых нулей, см. [6, теорема 7]). В работе [14] были описаны коммутативные подпрямо неразложимые полигоны (полигон X над полугруппой S называется коммутативным, если $x(st) = x(ts)$ для всех $x \in X$, $s, t \in S$). Подпрямо неразложимые полигоны над некоторыми другими классами полугрупп описывалмсь в работе [17]. Обобщения подпрямо неразложимых полигонов (однородные и конечно подпрямо неразложимые полигоны) исследовались в [19].

Пусть $\mathcal{K}$ – класс универсальных алгебр одной сигнатуры. Говорят, что алгебра A *аппрок-*

симируется алгебрами класса $\mathcal{K}$, если A может быть разложена в подпрямое произведению алгебр класса $\mathcal{K}$. В работе [3] был введён класс полугрупп S, удовлетворяющих следующему условию:

> ($\diamondsuit$) существует натуральное число n такое, что каждый S-полигон аппроксимируются полигонами, состоящими не более, чем из n элементов.

Эквивалентная формулировка условия ($\diamondsuit$): $|X| \leqslant n$ для любого подпрямо неразложимого S-полигона X.

В теореме 1 уже упоминавшейся работы [3] было доказано, что нильполугруппа удовлетворяет условию ($\diamondsuit$) тогда и только тогда, когда она конечна. Там же были охарактеризованы коммутативные полугруппы с условием ($\diamondsuit$), однако, эта характеризация довольно громоздка. В теореме 1 работы [16] доказывалось, что над полугруппой S все нетривиальные S-полигоны аппроксимируются двухэлементными в том и только том случае, если S – полурешётка (т.е. коммутативная полугруппа идемпотентов). В работе [5] исследования полугрупп с условием ($\diamondsuit$) продолжились. Было доказано, что полугруппа с этим условием равномерно локально конечна – т.е. для каждого $k \in \mathbb{N}$ порядки k-порождённых подполугрупп ограничены в совокупности. Для коммутативной полугруппы S равномерная локальная конечность, очевидно, эквивалентна равномерной периодичности, т.е. выполнению тождества $a^{m+r} = a^m$ при некоторых $m, r > 0$. Наконец, в [7] были охарактеризованы абелевы группы с условием ($\diamondsuit$). Оказалось, что это в точности ограниченные группы, т.е. группы, удовлетворяющие какому-либо тождеству $a^r = 1$.

Цель данной статьи – получить более прозрачную, чем в [3], характеризацию коммутативных полугрупп, удовлетворяющих условию ($\diamondsuit$). Кроме того, мы устанавливаем некоторые неравенства, связывающие числа m, r, n и некоторые другие числовые параметры полугруппы.

Необходимые сведения из теории полугрупп можно найти в [1], теории полигонов в [15], универсальной алгебры в [8].

2. Предварительные результаты

Для дальнейшего нам необходимо получить ряд предварительных результатов. *Ядро* полигона X – это наименьший нетривиальный подполигон. Понятно, что ядро существует тогда и только тогда, когда пересечение всех нетривиальных подполигонов нетривиально. Со всяким полигоном X можно связать граф, у которого множеством вершин является множество X, а рёбрами являются пары (x, xs), где $x \in X$, $s \in S$ и $x \neq xs$. Полигон называется *связным*, если соответствующий граф связен, компонентами связности полигона будем называть компоненты связности графа. Следующее утверждение доказывается непосредственно.

Предложение 1. *Пусть X – полигон над полугруппой S и $|X| > 1$. Тогда:*

(i) если X подпрямо неразложим, то всякий подполигон Y полигона X также подпрямо неразложим;

(ii) если X – полигон без нулей, то X^0 подпрямо неразложим в том и только том случае, если X подпрямо неразложим;

(iii) если X подпрямо неразложим, то X имеет ядро;

(iv) если X подпрямо неразложим, то X имеет не более двух компонент связности, причём если компонент связности две, то хотя бы одна из них состоит из одного элемента;

(v) подпрямо неразложимый полигон имеет не более двух нулей.

Наиболее простой для рассмотрения случай – когда у полигона ровно два нуля. В этом случае условие подпрямой неразложимости полигона даётся следующим утверждением.

Предложение 2. *[6, теорема 1] Полигон X с двумя нулями θ_1, θ_2 над полугруппой S является подпрямо неразложимым в том и только том случае, если для любых элементов $x \neq y$ из X существует $s \in S^1$ такое, что $\{xs, ys\} = \{\theta_1, \theta_2\}$.*

Ещё более простым оказывается этот случай, когда накладывается дополнительное условие коммутативности полигона.

Предложение 3. *Пусть X – коммутативный полигон с двумя нулями θ_1, θ_2. Тогда X подпрямо неразложим в том и только том случае, если $X = \{\theta_1, \theta_2\}$.*

Доказательство. Достаточность здесь очевидна, докажем необходимость. Пусть $x \in X \backslash \{\theta_1, \theta_2\}$. По предложению 1(iii) X имеет ядро, обозначим его через K. Так как $\{\theta_1, \theta_2\}$ – минимальный нетривиальный подполигон, то $K = \{\theta_1, \theta_2\}$. Так как xS^1 – нетривиальный подполигон, то $xS^1 \supseteq K$. Следовательно, существуют элементы $s, t \in S$, для которых $xs = \theta_1$ и $xt = \theta_2$. Отсюда, используя коммутативность полигона, получаем: $\theta_1 = \theta_1 t = xst = xts = \theta_2 s = \theta_2$, но это невозможно. Таким образом, $X = \{\theta_1, \theta_2\}$. $\square$

Пусть X – полигон, имеющий ядро K. В теоремах 2, 3, 5 работы [6] были получены условия подпрямой неразложимости полигона X в зависимости от K и количества нулей в полигоне X.

В работе [18] было замечено, что всякий идемпотент подпрямо неразложимой справа полугруппы (т.е. такой полугруппы S, что S – подпрямо неразложимый S-полигон) является левой единицей или левым нулём. Это утверждение было обобщено на полигоны (см. лемму 3 в [3]). Применительно к коммутативным полигонам мы получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть X – коммутативный подпрямо неразложимый полигон над полугруппой S и $e^2 = e \in S$. Тогда либо $|Xe| = 1$, либо $xe = x$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Так как полигон X коммутативный, то Xe – подполигон. Пусть $\rho_1 = \rho_{Xe}$ (конгруэнция Риса), $\rho_2 = e^{\perp} = \{(x, y) \in X \times X | xe = ye\}$. Очевидно, $\rho_1 \cap \rho_2 = \triangle$. Так как X подпрямо неразложим, то $\rho_1 = \triangle$ или $\rho_2 = \triangle$. Если $\rho_1 = \triangle$, то $|Xe| = 1$, а если $\rho_2 = \triangle$, то $xe = x$ для всех $x \in X$. $\square$

3. Сведе́ние к точному полигону

Пусть X – полигон над полугруппой S. Для каждого $a \in S$ обозначим через φ_a оператор умножения справа на a, т.е. отображение $\varphi_a : X \to X$, $x \mapsto xa$. Далее, обозначим через $T(X)$ полугруппу всех отображений $\alpha : X \to X$, в которой умножение осуществляется слева направо, т.е. $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$. Нетрудно проверить, что $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$, поэтому отображение $\Phi : S \to T(X)$, $a \mapsto \varphi_a$ является гомоморфизмом полугрупп. Пусть $\overline{S} = \Phi(S)$. По теореме об изоморфизме $\overline{S} \cong S/\sigma$, где $\sigma = \mathrm{ker}\Phi$ (ядро гомоморфизма Φ).

Полигон X над полугруппой S называется *точным*, если $\varphi_a \neq \varphi_b$ при $a \neq b$. Нетрудно видеть, что S-полигон X точный в том и только том случае, если $\mathrm{ker}\Phi = \triangle_S$. Полигон X можно рассматривать также как $\overline{S}$-полигон: если $\overline{a} \in \overline{S}$ – σ-класс, содержащий элемент $a \in S$, а $x \in X$, то полагаем $x\overline{a} = xa$. Будем обозначать X, рассматриваемый как S-полигон и как $\overline{S}$-полигон, соответственно через X_S и $X_{\overline{S}}$. Нетрудно видеть, что полигоны X_S и $X_{\overline{S}}$ имеют одни и те же конгруэнции. При этом полигон $X_{\overline{S}}$ точный. Очевидно, полигон X_S подпрямо неразложим в том и только том случае, если $X_{\overline{S}}$ подпрямо неразложим.

Переход от полигона над S к полигону над $\overline{S}$ аналогичен тому, как в теории колец и модулей переходят от произвольного модуля к точному. Роль ядра $\mathrm{ker}\Phi$ там выполняет аннулятор модуля.

При переходе от S к $\overline{S}$ сохраняются все полугрупповые тождества и, в частности, тождество $a^{m+r} = a^m$.

4. NG-образ коммутативной периодической полугруппы

Напомним, что полурешёткой называется частично упорядоченное множество, в котором любое двухэлементное подмножество (а значит, и всякое конечное подмножество) имеет точную нижнюю грань. Хорошо известно, что полурещётка – это в точности коммутативная полугруппа идемпотентов, связь между порядком и операцией такова: $a \cdot b = \inf\{a, b\}$, $a \leqslant b \leftrightarrow ab = a$.

Подполурешётка E_1 полурешётки E называется *направленной вверх*, если

$$\forall x, y \in E \ \ (x \in E' \wedge y \geqslant x \to y \in E').$$

Очевидно, в этом случае множество $E \backslash E_1$, если оно непусто, также является подполурешёткой.

Пусть S – периодическая полугруппа. Обозначим через E множество идемпотентов полугруппы S. Из периодичности следует, что для любого элемента $a \in S$ существует $k > 0$ такое, что $a^k \in E$. В циклической подполугруппе $\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots\}$ в этом случае имеется ровно один идемпотент. Для $e \in E$ положим

$$P(e) = \{a \in S | \exists k \ a^k = e\}.$$

Подмножества $P(e)$ называются *классами кручения*. Очевидно, $S = \bigcup_{e \in E} P(e)$ и $P(e_1) \cap P(e_2) = \emptyset$ при $e_1 \neq e_2$. Для подмножества $E_1 \subseteq E$ положим $S(E_1) = \cup\{P(e) | e \in E_1\}$.

Пусть теперь S – коммутативная периодическая полугруппа. Тогда множество E её идемпотентов и классы кручения $P(e)$ являются подполугруппами. Пусть E' – направленная вверх подполурешётка полурешётки E. Положим $E'' = E \backslash E'$. В этом разделе будет предполагаться, что $E'' \neq \emptyset$. Пусть $\rho_1 = \{(a, b) \in S \times S | \exists e \in E' \ \ ae = be\}$.

Лемма 2. *(i) ρ_1 – конгруэнция полугруппы S;*
(ii) $(e_1, e_2) \in \rho_1$ при $e_1, e_2 \in E'$;
(iii) $[e]_{\rho_1}$ – единица полугруппы S/ρ_1, если $e \in E'$;
(iv) $(a, b) \notin \rho_1$, если $a \in S(E')$, $b \in S(E'')$.
(v) $S/\rho_1 = N \cup G$, где N – идеал полугруппы S/ρ_1, G – подгруппа, причём единица группы G является единицей полугруппы S/ρ_1.

Доказательство. Положим $S_1 = S/\rho_1$. Утверждение (i) очевидно. Так как E' – подполурешётка полугруппы S, то $e_1 e_2 \in E'$ при $e_1, e_2 \in E'$ – отсюда получаем (ii). Так как $(ae, a) \in \rho_1$ при $a \in S$, $e \in E'$, то выполнено (iii). Утверждение (iv) докажем методом "от противного". Пусть $a \in S(E')$, $b \in S(E'')$ и $(a, b) \in \rho_1$. Тогда $ae = be$ при некотором $e \in E'$. Имеем: $a \in P(e_1)$, $b \in P(e_2)$ при некоторых $e_1 \in E'$, $e_2 \in E''$. Отсюда $ae \in P(e_1) \cdot E' \subseteq S(E')$, $be \in P(e_2)S \subseteq S(E'')$, и мы получаем противоречие с равенством $ae = be$.

Положим $N = \{[a]_{\rho_1} | a \in S(E'')\}$, $G = \{[a]_{\rho_1} | a \in S(E')]\}$. Тогда $S_1 = N \cup G$. Очевидно, N – идеал полугруппы S_1. Пусть $a \in S(E')$. Так как S перилдическая, то $a^k = e$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$, $e \in E'$. Отсюда следует, что $[a]_{\rho_1} \cdot [e]_{\rho_1} = [a]_{\rho_1}$. Тем самым доказано, что всякий элемент из G имеет обратный, поэтому G – группа. □

Заметим, что ρ_1 – наименьшая конгруэнция среди таких конгруэнций σ, для которых все элементы из E' лежат в одном σ-классе, являющемся единицей полугруппы S/σ.

NG-образом коммутативной периодической полугруппы S мы будем называть гомоморфный образ S/ρ полугруппы S такой, что $S/\rho = N \cup G$, где N – пустое множество или идеал полугруппы S/ρ, являющийся нильполугруппой, G – пустое множество или группа, причём если $G \neq \emptyset$, то единица группы G является единицей полугруппы S/ρ.

Оказывается, что у любой коммутативной периодической полугруппы существует NG-образ. Этот факт нам далее не понадобится, поэтому приведём лишь эскиз доказательства. Пусть S – коммутативная периодическая полугруппа. Возьмём какую-либо направленную вверх подполурешётку E' полурешётки $E = E(S)$ такую, что $E' \neq E$, и положим $E'' = E \setminus E'$. Рассмотрим конгруэнцию ρ_1, определённую выше. Положим $\overline{S} = S/\rho_1$, По предыдущей лемме $\overline{S} = N \cup G$. Пусть $\overline{E}''$ – образ полурешётки E'' при естественном гомоморфизме $S \to \overline{S}$. Нетрудно проверить, что множество $\overline{S}\ \overline{E}''$ – идеал полугруппы $\overline{S}$, а фактор-полугруппа Риса $\overline{S}/\overline{S}\ \overline{E}'' = \overline{N} \cup G$, где $\overline{N}$ – нильидеал.

5. Формулировка основной теоремы. Доказательство необходимости

Следуя А.Г.Пинусу [9], назовём универсальную алгебру A *равномерно локально конечной*, если существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $|\langle a_1, \ldots, a_t\rangle| \leqslant f(t)$ для любого $t \in \mathbb{N}$ и любых $a_1, \ldots, a_t \in A$. Если S – полугруппа и $|\langle a\rangle| \leqslant k$ при некотором k для всех $a \in S$, то полугруппу S естественно назвать *равномерно периодической*. Так как в случае коммутативной полугруппы S имеет место включение $\langle a_1, \ldots, a_t\rangle \subseteq (\langle a_1\rangle \cup \{1\}) \cdot \ldots \cdot (\langle a_t\rangle \cup \{1\})$, то коммутативная равномерно периодическая полугруппа является равномерно локально конечной, можно взять $f(t) = (k + 1)^t$.

Основным результатом нашей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Коммутативная полугруппа S удовлетворяет условию $(\diamondsuit)$ при некотором n в том и только том случае, если в S выполняется тождество $a^{m+r} = a^m$ при некоторых $m, r > 0$ и существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любого NG-образа $\overline{S} = N \cup G$ полугруппы S такого, что G – циклическая группа порядка p^j, где p – простое число, $j \geqslant 0$ и $p^j \mid r$, выполняется неравенство $|N| \leqslant f(r)$.*

Докажем *необходимость*.

Доказательство. Пусть S – коммутативная полугруппа, удовлетворяющая условию $(\diamondsuit)$. Ввиду следствия 10 из [5] S равномерно локально конечна. То есть $|\langle a\rangle| \leqslant k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ и всех $a \in S$. Имеем: $\langle a\rangle = \{a, a^2, \ldots, a^k\}$ (здесь a^i не обязательно различны). Отсюда $a^{k+1} = a^t$ при некотором $t \leqslant k$. Так как $k + 1 > t$, то $k + 1 = t + r$ при некотором $r > 0$. Следовательно, $a^{t+r} = a^t$. Существует $j \leqslant r$ такое, что $t + j \equiv 0 (\mod r)$. Имеем: $(a^{t+j})^2 = a^{2(t+j)} = a^{t+j+kr} = a^{t+kr} \cdot a^j = a^t \cdot a^j = a^{t+j}$, т.е. a^{t+j} – идемпотент. Таким образом, нами доказано, что для любого $a \in S$ существует $l \leqslant k + 1$ такое, что $a^l = a^{2l}$. Пусть $m =$НОК$(1, 2, \ldots, k + 1)$. Тогда будем иметь $a^{2m} = a^m$ для всех $a \in S$. Это можно рассматривать как выполнение тождества $a^{m+r} = a^m$ при некоторых $m, r > 0$.

Будем считать, что $m \geqslant 2$, – это не ограничивает общности. Осталось доказать, что порядки $|N|$ нильидеалов N в разложениях $\overline{S} = N \cup G$ со сформулированными в теореме условиями на G ограничены в совокупности. Если это не выполнено, то можно найти такой NG-образ $\overline{S} = N \cup G$, что $|G| \leqslant r$, а $|N| > m^n r$. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на $\overline{S}$:

$$\tau = \{(\overline{a}, \overline{b}) \in \overline{S} \times \overline{S} | \exists g \in G\ \overline{a}g = \overline{b}\}.$$

Непосредственно проверяется, что τ – конгруэнция на $\overline{S}$. Пусть $S_1 = \overline{S}/\tau$. Очевидно, $S_1 = N_1 \cup \{1\}$, где N_1 – нильидеал. Каждый класс конгруэнции τ содержит не более $|G|$ элементов, поэтому $|N_1| > \frac{|N|}{r} \geqslant m^n$.

Так как нильполугруппа N_1 удовлетворяет тождеству $a^{m+r} = a^m$, то $a^m = 0$ для всех $a \in N_1$. Пусть $N_1 \setminus N_1^2 = \{a_1, \ldots, a_t\}$. Тогда любой ненулевой элемент из N_1 представим в виде $a_1^{i_1} \ldots a_t^{i_t}$, поэтому $|N_1| \leqslant m^t + 1$. Вместе с неравенством $|N_1| > m^n$ это даёт неравенство $n \leqslant t$. Полугруппа N_1/N_1^2 – это полугруппа с нулевыи умножением. Её порядок равен $|N_1/N_1^2| = t + 1 \geqslant n + 1$. По лемме 1 из [3] над полугруппой N_1/N_1^2 существует подпрямо неразложимый полигон X такой, что $|X| = n + 1$. Полигон X можно считать полигоном над полугруппой $N_1/N_1^2 \cup \{1\}$, причём свойство быть подпрямо неразложимым сохранится. В свою очередь, полугруппа $N_1/N_1^2 \cup \{1\}$ является гомоморфным образом полугруппы S, поэтому X можно рассматривать как полигон над S, и его подпрямая неразложимость сохранится. Таким образом, над полугруппой S есть плдпрямо неразложимый полигон порядка $n+1$, а это противоречит условию ($\diamondsuit$). $\square$

6. Окончание доказательства основной теоремы: достаточность

Пусть S – коммутативная полугруппа, удовлетворяющая условиям тееоремы. В частности, полугруппа S удовлетворяет тождеству $a^{m+r} = a^m$. Очевидно, все гомоморфные образы этой полугруппы также удовлетворяют этому тождеству. Требуется доказать, что порядки $|X|$ подпрямо неразложимых S-полигонов X ограничены в совокупности.

Рассмотрим произвольный подпрямо неразложимый S-полигон X. Переходя от полугруппы S к полугруппе $\overline{S} = S/\ker\Phi$, как это делалось в разделе 3, мы получим, что X – точный $\overline{S}$-полигон.

Обозначим полугруппу $\overline{S}$ снова буквой S, убрав "старое" S из рассмотрения. То есть будем считать, что X – точный подпрямо неразложимый S-полигон, где S – коммутативная полугруппа, удовлетворяющая условию теоремы. Кроме того, будем считать, что $|X| \geqslant 3$, – это не ограничивает общности.

Лемма 3. *Каждый идемпотент полугруппы S – это 1 или 0.*

Доказательство. Пусть $e^2 = e \in S$. По лемме 1 либо $|Xe| = 1$, либо $xe = x$ для всех $x \in X$. Так как полигон X точный, то полугруппа S изоморфна подполугруппе полугруппы $T(X)$. Если $|Xe| = 1$, то ввиду коммутативности полугруппы S имеем: $Xe = \{\theta\}$, где θ – нуль полигона X. Этот нуль у полигона X единственный ввиду предложения 1(v), предложения 3 и условия $|X| \geqslant 3$. Так как полигон X точный, то e – нуль полугруппы S. Если $xe = x$ для всех $x \in X$, то e – единица полугруппы S. $\square$

Из лемм 2 и 3 непосредственно вытекает

Лемма 4. *Если $m + j \equiv 0 \pmod r$, то $a^{m+j} \in \{0,1\}$ для каждого $a \in S$.*

Лемма 5. *Полугруппа S представима в виде $S = N \cup G$, где N – пустое множество или нильполугруппа, G – пустое множество или группа и N, если непусто, является идеалом полугруппы S.*

Доказательство. Положим $N = \{a \in S | a^{m+j} = 0\}$, $G = \{a \in S | a^{m+j} = 1\}$. По лемме 4 $S = N \cup G$, остальные утверждения проверяются непосредственно. $\square$

Если $N = \emptyset$, то $S = G$ – абелева группа с тождеством $a^r = 1$. По теореме 7 из [7] $|X| \leqslant r$.

Если $G = \emptyset$, то добавим единицу 1 к полугруппе S, положим $x \cdot 1 = x$ для всех $x \in X$ и будем вместо S рассматривать полугруппу $S \cup \{1\}$, обозначая теперь уже новую полугруппу буквой S.

Далее считаем, что $N, G \neq \emptyset$. Согласно предложению 1 X имеет не более двух нулей. Если X не имеет нулей или имеет ровно два нуля, то пл леммам 2 и 5 из [2] $|X| \leqslant \max\{2, r\}$. Нам осталось рассмотреть случай, когда X имеет ровно один нуль, скажем, θ.

Итак, X – подпрямо неразложимый точный полигон над полугруппой $S = N \cup G$, причёи X имеет единственный нуль θ. Кроме того, $a^{m+j} = 0$ при $a \in N$ и $a^{m+j} = 1$ при $a \in G$ для некоторого $j \leqslant r$.

Ввиду предложения 1 полигон X имеет ядро K.

Лемма 6. *Если $\theta \notin K$, то $|X| \leqslant r + 2$.*

Доказательство. Докажем вначале, что $X \setminus \{\theta\}$ – подполигон. Предположим, что это не так. Тогда $xs = \theta$ апм некоторых $x \in X \setminus \{\theta\}$ и $s \in S$. Если $s \in G$, то $s^{m+j} = 1$, откуда получаем, что $x = x \cdot 1 = xs^{m+j} = xs \cdot s^{m+j-1} = \theta$, что противоречит выбору элемента x. Таким образом, $s \in N$. Так как $x \neq \theta$, то $|xS^1| \geqslant 2$, т.е. xS^1 – нетривиальный подполигон. Следовательно, $xS^1 \supseteq K$, а значит, $xa \in K \setminus \{\theta\}$ при некотором $a \in S$. Имеем: $\theta = \theta a = xsa = xas \in K$, что противоречит условию леммы.

Теперь докажем, что $X = K \cup \{\theta\}$. Предлоложим, что это не так. Тогда найдётся $x \in X \setminus (K \cup \{\theta\})$. Так как xS^1 – нетривиальный подполигон, то $xS^1 \supseteq K$. Возьмём такое $s \in S$, что $xs \in K$. Если $s \in N$, то $s^{m+j} = 0$, а значит, $\theta = xs^{m+j} = xs \cdot s^{m+j-1} \in K$, что невозможно. Если $s \in G$, то $s^{m+j} = 1$, поэтому $x = x \cdot 1 = xs \cdot s^{m+j-1} \in K$, что противоречит выбору элемента x.

Итак, $X = K \cup \{\theta\}$. Ясно, что K – подпрямо неразложимый полигон над группой G

Так как G – абелева группа экспоненты, не превосходящей r (это следует из того, что полугруппа S удовлетворяет тождеству $a^{m+r} = a^m$, а значит, её подгруппа G – тождеству $a^r = 1$), то по теореме 7 из [7] $|K| \leqslant r + 1$. Следовательно, $|X| \leqslant r + 2$. □

Ввиду только что доказанной леммы мы можем далее считать, что $\theta \in K$.

Лемма 7. $KN = \{\theta\}$.

Доказательство. Пусть $a \in N$. Так как полугруппа S коммутативна, то Ka – подполигон полигона X. Если $|Ka| \geqslant 2$, то $Ka = K$, а значит, $K \cdot a^{m+j} = K$, $K \cdot 0 = K$, $K = \{\theta\}$, что невозможно. Следовательно, $|Ka| = 1$, т.е. $Ka = \{\theta\}$. □

Лемма 8. *G – циклическая группа порядка $p^j \,|\, r$, где p – простое число.*

Доказательство. Ввиду предложения 1 ядро K полигона X является подпрямо неразложимым S-полигоном, а так как $KN = \{\theta\}$ по только что доказанной лемме, то K является подпрямо неразложимым полигоном над полугруппой $G \cup \{0\}$. Конгруэнции K как $(G \cup \{0\})$-полигона и как G-полигона – одни и те же. Значит, K – подпрямо неразложимый G-полигон. Так как полигон K унитарный, то по теореме 6 из [5] $K \cong (G/H) \cup \{0\}$, где H – некоторая подгруппа. Группа G, а значит, и группа G/H удовлетворяет тождеству $a^r = 1$, т.е. G/H – ограниченная абелева группа. По первой теореме Прюфера (см. [13, теорема 17.2]) она является прямой суммой примарных циклических групп.

Если $G/H \cong A \times B$, где $|A|, |B| \geqslant 2$, то отношения $\rho_1 = \{(ab, ab') | a \in A,\, b, b' \in B\} \cup \Delta_K$, $\rho_2 = \{(ab, a'b) | a, a' \in A,\, b \in B\} \cup \Delta_K$ – конгруэнции полигона K, причём $\rho_1, \rho_2 \neq \Delta_K$, $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_K$, а это противоречит тому, что K подпрямо неразложим. Таким образом, группа G/H неразложима в прямое произведение, а так как лна удовлетворяет тождеству $a^r = 1$, то G/H – циклическая группа порядка p^j для некоторого простого числа p и целого неотрицательного j, причём $p^j \,|\, r$.

Докажем, что $H = \{1\}$. Предположим, что $H \neq \{1\}$. Возьмём элемент $h_0 \in H \setminus \{1\}$. Так как X точный, то $x_0 h_0 \neq x_0$ при некотором $x_0 \in X$. Пусть $\rho_1 = \{(x, xh) | x \in X < h \in H\}$, $\rho_2 = (K \times K) \cup \Delta_X$. Нетрудно проверить, что $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Con}X$. Так как $(x_0, x_0 h_0) \notin \Delta_X$, то $\rho_1 \neq \Delta_X$. Так как $|K| \geqslant 2$, то $\rho_2 \notin \Delta_X$. Докажем, что $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_X$. Пусть $(x, xh) \in \rho_2$ и $x \neq xh$. Тогда $x \in K$. Следовательно, либо $x = Hg$ при некотором $g \in G$, либо $x = \theta$. В обоих случаях $xh = x$, что противоречит выбору пары (x, xh). Таким образом, $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_X$. Но это противоречит подпрямой неразложимости полигона X.

Итак, $H = \{1\}$. Следовательно, G – циклическая группа порядка $p^j \,|\, r$. □

Теперь мы можем завершить доказательство основной теоремы.

Доказательство. Пусть S – полугруппа, в которой выполняется тождество $a^{m+r} = a^m$ и $|N| \leqslant f(r)$ для любого NG-образа $N \cup G$ полугруппы S такого, что G – циклическая группа порядка $p^j \,|\, r$. Возьмём любой подпрямо неразложимый полигон X. Факторизуя полугруппу S

по $\ker\Phi$, как это делалось в разделе 3, мы получим, что X – точный подпрямо неразложимый полигон над NG-образом $N\cup G$ полугруппы S. Если X не имеет нулей или имеет ровно два нуля, то, как отмечалось выше, $|X|\leqslant\max\{2,r\}$. Пучть теперь X имеет единственный нуль. По лемме 8 тогда G – циклическая группа порядка $p^j\,|\,r$, следовательно, $|N|\leqslant f(r)$. Отсюда $|N\cup G|\leqslant f(r)+r$. Так как X – подпрямо неразложимый полигон над $N\cup G$, то по теореме 1 из [4] $|X|\leqslant 2^{f(r)+r+1}$. Этим завершается доказательство теоремы. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клиффорд А., Престон Г. "Алгебраическая теория полугрупп", 1872, т. 1,2. Мир, М., 286 + 432 с.

2. Кожухов И. Б. "Коммутативные полугруппы с ограничениями на подпрямо неразложимые полигоны", 2020, *Информатика и кибернетика (ДонНТУ)*, т. 21, вып. 3, с. 21–24.

3. Кожухов И. Б. "Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны", 1998, *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 4, вып. 4, с. 1335–1344.

4. Кожухов И. Б. "Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов и модулей", 1998, *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 4, вып. 2, с. 763–767.

5. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. "Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами", 2014, *Математические заметки СВФУ*, т. 21, вып. 3 (83), с. 60–67.

6. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. "Характеризация подпрямо неразложимых полигонов", 2015, *Прикладная дискретная математика*, т. 27, вып. 1, с. 5–16.

7. Кожухов И. Б., Царёв А. В. "Абелевы группы с финитно аппроксимируемыми полигонами", 2019, *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 22, вып. 5, с. 81–89.

8. Кон П., "Универсальная алгебра", 1968, Мир, М., 353 с.

9. Пинус А. Г. "Внутренние гомоморфизмы и позитивно-условные термы", 2001, *Алгебра и логика*, т. 40, вып. 2, с. 158–173.

10. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. "Элементы алгебраической теории автоматов", 1994, Высш. школа, М., 191 с.

11. Ройз Е. Н. "О подпрямо неразложимых монарах", 1874, Межвуз. научн. сборник "Упорядоченные множества и решётки", вып. 2, с. 80–94.

12. Сб. статей под ред. М. Арбиба "Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп", 1875, Статистика, М., 335 с.

13. Фукс Л. "Бесконечные абелевы группы", т. 1, 1874, Мир, М., 336 с.

14. Esik Z., Imreh B. "Subdirectly irreducible commutative automata", 1981, *Acta Cybernetica*, vol. 5, iss. 3, pp. 251–260.

15. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. "Monoids, acts and categories", 2000, W. de Gruyter, N.Y., Berlin, xvii + 529 pp.

16. Kozhukhov I. B., "One characteristical property of semilattices", 1997, *Commun. Algebra*, vol. 25, iss. 8, pp. 2569–2577.

17. Moghaddasi Gh., Mahmoudi M., "Subdirectly irreducible acts over some semigroups", 2017, *Bull. Iranian Math. Soc.*, vol. 43, iss. 6, pp. n1913–1924.

18. Rankin S. A., Reis C. M., Thierrin G., "Right subdirectly irreducible semigroups", 1979, *Pacific J. Math.*, vol 85, iss. 2, pp. 403–412.

19. Roueentan M., Sedaghatjoo M. "The structure of subdirectly irreducible and uniform acts over rectangular bands", 2020, *Semigroup Forum*, vol. 101, no. 1, pp. 192–201.

REFERENCES

1. Clifford, A. H. & Preston, G. B. 1961, 1967 "The algebraic theory of semigroups". Vol. I and II, Mathematical Surveys, Number 7, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, xvi + 244 pp. and xv + 350 pp.

2. Kozhukhov, I. B. 2020 "Commutative semigroups with restrictions on subdirectly irreducible acts". Informatics and Cybernetics (DonNTU), vol. 21, no. 3, pp. 21–24. (in Russian)

3. Kozhukhov, I. B. 1998, “Semigroups over which all acts are residually finite”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 4, no. 4, pp. 1335–1344. (in Russian)

4. Kozhukhov, I. B. 1998, “Finiteness conditions for subdirectly irreducible S-acts and modules”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 4, no. 2, pp. 763–767. (in Russian)

5. Kozhukhov, I. B. & Khaliullina, A. R. 2014. "Semigroups with finitely approximated finite acts". Yakutian Math. J., vol. 21, no. 3(83), pp. 52-57. (in Russian)

6. Kozhukhov, I. B. & Khaliullina, A. R. 2015. “A characterization of subdirectly irreducible acts”. Prikl. Diskr. Mat., 2015, vol. 27, no. 1, pp. 5–16. (in Russian)

7. Kozhukhov, I. B. & Tsarev, A.V. 2019. “Abelian groups with finitely approximated acts”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 22, no. 5, pp. 81–89. (in Russian)

8. Cohn, P. M. 1965 "Universal algebra". , Harper & Row, xv + 333 pp.

9. Pinus, A. G. 2001, “Inner homomorphisms and positive-conditional terms”, Algebra and Logic, vol. 40, no. 2, pp. 87–95.

10. Plotkin, B. I. & Gringlaz, L. Ya. & Gvaramiya, A. A. 1994. "Elements of the algebraic theory of automata"Vysshaya Shkola, Moscow, 191 pp. (in Russian)

11. Roiz, E. N. 1974 "On subdirectly irreducible monars", Inter-Univ. Sci. Coll. "Ordered sets and lattices", Saratov, iss. 2, pp. 80–84. (in Russian)

12. "Algebraic theory of machines, languages and semigroups"(Ed. Arbib, M. A.) 1968. Acad. Press, N.Y. – London, 359 pp.

13. Fuchs, L. 1970 "Infinite abelian groups"1970. Acad. Press, N.Y. & Berlin, 290 pp.

14. Ésik, Z. & Imreh, B. 1981, "Subdirectly irreducible commutative automata", Acta Cybernetica, vol. 5, iss. 3, pp. 251–260.

15. Kilp, M. & Knauer, U. & Mikhalev, A. V. "Monoids, acts and categories"2000. W. de Gruyter, N.Y. & Berlin, xvii + 529 pp.

16. Kozhukhov, I. B. 1997 "One characteristical property of semilattices" , Commun. Algebra, vol. 25, iss. 8, pp. 2569–2577.

17. Moghaddasi, Gh. & Mahmoudi, M. 2017 "Subdirectly irreducible acts over some semigroups" , Bull. Iranian Math. Soc., vol. 43, no. 6, pp. 1913–1924.

18. Rankin, S. A. & Reis, C. M. & Thierrin, G. 1979 "Right subdirectly irreducible semigroups" , Pacific J. Math., vol 85, iss. 2, pp. 403–412.

19. Roueentan, M. & Sedaghatjoo, M. 2020 "The structure of subdirectly irreducible and uniform acts over rectangular bands" , Semigroup Forum, vol. 101, no. 1, pp. 192–201.

Получено 29.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.