

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-177-187

Характеризация дистрибутивных решеток
квазимногообразий унаров

В. К. Карташов, А. В. Карташова

Владимир Константинович Карташов — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Анна Владимировна Карташова — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

e-mail: kartashovaa@yandex.ru

Аннотация

Пусть $L_q(\mathfrak{M})$ означает решетку всех подквазимногообразий квазимногообразия $\mathfrak{M}$ относительно включения. Существует глубокая взаимосвязь между свойствами решетки $L_q(\mathfrak{M})$ и алгебраических систем из $\mathfrak{M}$. Впервые на этот факт обратил внимание А. И. Мальцев в докладе на Международном конгрессе математиков в 1966 году в Москве.

В данной работе получена характеристика класса всех дистрибутивных решеток, каждая из которых изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{M})$ всех подквазимногообразий некоторого квазимногообразия унаров $\mathfrak{M}$.

Унаром называется алгебра с одной унарной операцией. Очевидно, что любой унар можно рассматривать как автомат с одним входным сигналом без выходных сигналов, либо — как полигон над циклической полугруппой. В работе построены частично упорядоченные множества P_∞ и $P_s (s \in \mathbf{N}_0)$, где $\mathbf{N}_0$ означает множество всех неотрицательных целых чисел. Далее доказано, что дистрибутивная решетка L изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{M})$ для некоторого квазимногообразия унаров $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторому главному идеалу одной из решеток $O(P_s) (s \in \mathbf{N}_0)$ или $O_c(P_\infty)$, где $O(P_s) (s \in \mathbf{N}_0)$ — решетка идеалов частично упорядоченного множества $P_s (s \in \mathbf{N}_0)$ и $O_c(P_\infty)$ — решетка идеалов с выделенным элементом c частично упорядоченного множества P_∞ .

Доказательство основной теоремы существенно опирается на описание Q -критических унаров. Конечно порожденная алгебра называется Q -критической, если она не разлагается в подпрямое произведение своих собственных подалгебр. Ранее было установлено, что каждое квазимногообразие унаров определяется своими Q -критическими унарами. Этот факт часто используется для исследования квазимногообразий унаров.

Ключевые слова: квазимногообразие, унары, дистрибутивные решетки

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

В. К. Карташов, А. В. Карташова. Характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 177–187.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-177-187

Characterization of distributive lattices of quasivarieties of unars

V. K. Kartashov, A. V. Kartashova

Vladimir Konstantinovich Kartashov — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social and Pedagogical University (Volgograd).

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Anna Vladimirovna Kartashova — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social and Pedagogical University (Volgograd).

e-mail: kartashovaa@yandex.ru

Abstract

Let $L_q(\mathfrak{M})$ denote the lattice of all subquasivarieties of the quasivariety $\mathfrak{M}$ under inclusion. There is a strong correlation between the properties of the lattice $L_q(\mathfrak{M})$ and algebraic systems from $\mathfrak{M}$. A. I. Maltsev first drew attention to this fact in a report at the International Congress of Mathematicians in 1966 in Moscow.

In this paper, we obtain a characterization of the class of all distributive lattices, each of which is isomorphic to the lattice of some quasivariety of unars. A unar is an algebra with one unary operation. Obviously, any unar can be considered as an automaton with one input signal without output signals, or as an act over a cyclic semigroup.

We construct partially ordered sets P_∞ and $P_s (s \in \mathbf{N}_0)$, where $\mathbf{N}_0$ is the set of all non-negative integers. It is proved that a distributive lattice is isomorphic to the lattice $L_q(\mathfrak{M})$ for some quasivariety of unars $\mathfrak{M}$ if and only if it is isomorphic to some principal ideal of one of the lattices $O(P_s) (s \in \mathbf{N}_0)$ or $O_c(P_\infty)$, where $O(P_s) (s \in \mathbf{N}_0)$ is the ideal lattice of the poset $P_s (s \in \mathbf{N}_0)$ and $O_c(P_\infty)$ is the ideal lattice with a distinguished element c of the poset P_∞ .

The proof of the main theorem is based on the description of Q-critical unars. A finitely generated algebra is called Q-critical if it does not decompose into a subdirect product of its proper subalgebras. It was previously shown that each quasivariety of unars is determined by its Q-critical unars. This fact is often used to investigate quasivarieties of unars.

Keywords: quasivariety, unars, distributive lattices.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

V. K. Kartashov, A. V. Kartashova, 2021, "Characterization of distributive lattices of quasivarieties of unars", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 177–187.

1. Введение

Основные идеи теории квазимногообразий алгебраических систем были разработаны А. И. Мальцевым. К настоящему времени эта теория глубоко развита (см., например, [1], [2], [4] – [6], [11] – [15], [17]).

Одна из важнейших проблем теории квазимногообразий заключается в следующем. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное квазимногообразие алгебраических систем фиксированной сигнатуры и $L_q(\mathfrak{M})$ – решетка всех подквазимногообразий квазимногообразия $\mathfrak{M}$. А. И. Мальцев в докладе на Международном конгрессе математиков в 1966 году обратил внимание на наличие глубоких

взаимосвязей между свойствами решетки $L_q(\mathfrak{M})$ и свойствами систем из квазимногообразия $\mathfrak{M}$. В связи с этим возникли следующие вопросы:

- 1) Описание квазимногообразий $\mathfrak{M}$, для которых решетка $L_q(\mathfrak{M})$ обладает фиксированным решеточным свойством.
- 2) Описание взаимосвязей между решеткой $L_q(\mathfrak{M})$ и базисами квазитождеств квазимногообразия $\mathfrak{M}$.
- 3) Вопросы характеристики решеток вида $L_q(\mathfrak{M})$. Здесь предполагается выяснить, в каком случае эта решетка изоморфна некоторой уже исследованной ранее решетке, либо получается из таких решеток с помощью стандартных или новых конструкций. Результаты такого типа получены, например, в работах [3], [9], [10].

Заметим, что список результатов исследования решеток квазимногообразий алгебраических систем выходит далеко за рамки указанных выше трёх направлений.

К настоящему времени вопросы первого и второго типа для решеток квазимногообразий унаров (т. е. алгебр с одной унарной операцией) в основном решены ([7] – [9]).

В данной работе получена характеристика класса всех дистрибутивных решеток, каждая из которых изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{M})$ всех подквазимногообразий некоторого квазимногообразия $\mathfrak{M}$.

Доказательство основной теоремы существенно опирается на описание Q -критических унаров, полученное одним из авторов ранее.

Конечно порожденная алгебра называется *Q -критической* (или *квазикритической*), если она не разлагается в подпрямое произведение своих собственных подалгебр (т. е. подалгебр, неизоморфных самой алгебре).

Квазимногообразие унаров определяется своими Q -критическими унарами, поскольку любой конечно порожденный унар разлагается в подпрямое произведение Q -критических подунаров [7].

Этот факт неоднократно использовался и при получении других результатов о квазимногообразиях унаров ([7] – [10]).

2. Основные определения и вспомогательные результаты

В дальнейшем $\mathbf{N}$ всюду означает множество целых положительных чисел и $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Для любых целых чисел $m, n \in \mathbf{N}_0$ запись $m|n$ означает, что m делит n . Если дополнительно $m \neq n$, то будем писать $m < n$. Наименьшее общее кратное чисел $m_1, m_2, \dots, m_k$ записывается как $[m_1, m_2, \dots, m_k]$.

Для любого элемента a унара $\langle A, f \rangle$ через $f^n(a)$ обозначается результат n -кратного применения операции f к элементу a . При этом $f^0(a) = a$. Для любых целых чисел $m \geq 1$ и $n \geq 0$ положим

$$C_m^n = \langle a | f^n(a) = f^{n+m}(a) \rangle$$

и

$$C_{m,n} = \langle a, b | f^m(a) = f^n(b), 0 < m \leq n \rangle.$$

Унар, порожденный одним элементом a , называется *моногонным* и обозначается через (a) . Свободный моногонный унар будем обозначать через F_1 .

Унар C_n^0 называется *циклом длины n* . Элемент a унара $\langle A, f \rangle$ называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых чисел $t \in \mathbf{N}_0$ и $n \in \mathbf{N}$, и – *непериодическим* в противном случае.

Через $T(A)$ и $W(A)$ обозначается соответственно множество периодических и непериодических элементов унара A . Унар A называется *периодическим*, если $A = T(A)$ и *унаром без кручения*, если $A = W(A)$.

Объединение двух непересекающихся унаров B, C будем называть их *суммой* и обозначать через $B + C$. Ясно, что любой унар можно записать в виде $A = W(A) + T(A)$.

Если a – периодический элемент, то наименьшее из чисел t , для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \in \mathbf{N}$, называется *глубиной элемента a* и обозначается через $t(a)$, а наименьшее из чисел $n \in \mathbf{N}$, для которых $f^{t(a)}(a) = f^{t(a)+n}(a)$, называется *периодом элемента a* и обозначается через $p(a)$.

Глубиной унара A называется $\max\{t(a) | a \in T(A)\}$, если $T(A) \neq \emptyset$, и – нуль, если $T(A) = \emptyset$.

В работе [7] дано полное описание Q -критических унаров и доказано, что каждое квазимногообразие унаров порождается своими Q -критическими унарами.

ЛЕММА 1. [7] 1) *Конечный унар A тогда и только тогда является Q -критическим, когда либо $A \cong C_1^0 + C_1^0$, либо $A \cong C_{h_0}^t + C_{h_1}^0 + \dots + C_{h_m}^0$ для некоторых попарно различных чисел $h_0, h_1, \dots, h_m$, удовлетворяющих при $t = 0$ формулам*

$$x \triangleleft u \ \& \ y \triangleleft v \rightarrow u = v, [x_1, x_2, \dots, x_n] = y \rightarrow \bigvee_{i=1}^n (x_i = y_i),$$

и при $t > 0$ – формуле

$$x \triangleleft y \rightarrow y = h_0.$$

2) *Конечно порожденный унар A тогда и только тогда является Q -критическим, когда либо A – конечный Q -критический унар, либо его непериодическая часть $W(A)$ изоморфна одному из унаров F_1 или $C_{m,n}$ для некоторых $m, n \in \mathbf{N}$, а периодическая часть $T(A)$, если она не пуста, является суммой циклов, длины которых попарно не сравнимы по делимости.*

3. Основной результат

Построим частично упорядоченные множества $P_s (s \in \mathbf{N}_0)$ и P_∞ , которые необходимы нам для формулировки основной теоремы.

Носитель $P_s (s \in \mathbf{N}_0)$ является объединением трех множеств A, C, D координатной плоскости:

$$A = \{a_i | a_i = (-2s + i - 1, e_i), e_i = \frac{1}{2}(1 - (-1)^i), i = 0, 1, \dots, 2s\},$$

$$C = \{c_{m,n} | 0 < m \leq n, m, n \in \mathbf{N}\} \cup \{c\}, \text{ где } c = (0, 0) \text{ и } c_{m,n} = (m, m + n - 1) \text{ при } 0 < m \leq n,$$

$$D = \{d_{m,n} | 0 < m \leq n, m, n \in \mathbf{N}\} \cup \{d\}, \text{ где } d = (-\frac{1}{2}, 1) \text{ и } d_{m,n} = (m - \frac{1}{2}, m + n) \text{ при } 0 < m \leq n.$$

Порядок в P_s определяется следующим образом:

$$a_i \leq a_j \Leftrightarrow i = j \vee i = 2k \ \& \ j = 2k \pm 1 \ \& \ k \geq 1, \quad (1)$$

$$c_{m,n} \leq c_{m_1,n_1} \Leftrightarrow m \leq m_1 \ \& \ n \leq n_1, \quad (2)$$

$$d_{m,n} \leq d_{m_1,n_1} \Leftrightarrow m \leq m_1 \ \& \ n \leq n_1,$$

$$c_{m,n} \leq d_{m,n}, c \leq d, a_{2s} \leq d, c \leq c_{m,n}, d \leq d_{m,n}$$

для любых $a_i, a_j \in A, c_{m,n}, c_{m_1,n_1} \in C, d_{m,n}, d_{m_1,n_1} \in D$, и далее рассматривается транзитивное замыкание определенного выше отношения.

Через P_∞ будем обозначать частично упорядоченное множество, носитель которого является объединением двух множеств A и C , где C определяется также, как для носителей частично упорядоченных множеств $P_s (s \in \mathbf{N}_0)$, и

$$A = \{a_i | a_i = (i + 1, e_i), e_i = \frac{1}{2}(1 - (-1)^i), i \in \mathbf{N}_0\}.$$

Порядок в P_∞ задаётся формулами (1) и (2).

Напомним (см., например, [16, с. 82], что *O-идеалом частично упорядоченного множества* P называется всякое непустое подмножество $S \subseteq P$, удовлетворяющее условию

$$\forall x, s (s \in S \ \& \ x \leq s \Rightarrow x \in S).$$

Решетка *O-идеалов* частично упорядоченного множества P обозначается через $O(P)$.

Зафиксируем некоторый элемент $a \in P$. *O-идеал* S называется *O-идеалом с выделенным элементом a* , если он либо конечен, либо содержит элемент a .

Очевидно, что *O-идеалы с выделенным элементом a* также образуют полную решетку относительно включения, которую мы будем обозначать через $O_a(P)$.

ТЕОРЕМА 1. *Дистрибутивная решетка L изоморфна решетке всех подквазимногообразий некоторого квазимногообразия унарков тогда и только тогда, когда L изоморфна либо главному идеалу решетки $O(P_s)$ для некоторого числа $s \in \mathbf{N}_0$, либо главному идеалу решетки $O_c(P_\infty)$.*

Основная идея доказательства этой теоремы исходит из следующего общего факта.

Пусть L – произвольная решетка квазимногообразий алгебраических систем фиксированной сигнатуры. Тогда L является коалгебраической решеткой [4, лемма 1], т. е. каждый её элемент является верхней гранью некоторого множества вполне $\vee$ -неразложимых элементов из L . Сопоставив каждому подмножеству $S \subseteq P$, где P – множество всех вполне $\vee$ -неразложимых элементов решетки L , множество

$$S^* = \{x | x \in P, x \leq \vee S\}, \quad (3)$$

получим оператор замыкания на решетке всех подмножеств множества P . При этом отображение $a \rightarrow \{x | x \in P, x \leq a\}$ осуществляет изоморфизм

$$L \cong C(P), \quad (4)$$

где $C(P)$ – решетка всех замкнутых подмножеств множества P относительно включения.

Поэтому конкретное представление решетки L будет реализовано, если описаны множество P всех её вполне $\vee$ -неразложимых элементов и замкнутые подмножества соответствующего оператора замыкания.

Оказалось, что решетка $L_q(\mathfrak{M})$ квазимногообразий унарков дистрибутивна тогда и только тогда, когда множество P всех её вполне $\vee$ -неразложимых элементов изоморфно некоторому *O-идеалу* одного из двух частично упорядоченных множеств $P_s (s \in \mathbf{N}_0)$ и P_∞ .

При этом замкнутые подмножества соответствующего оператора замыкания являются *O-идеалами* (быть может с выделенным фиксированным элементом).

В дальнейшем для любого квазимногообразия $\mathfrak{M}$ унарков через $K(\mathfrak{M})$ будем обозначать множество всех *Q-критических унарков*, содержащихся в $\mathfrak{M}$, а через $P(\mathfrak{M})$ – множество всех вполне $\vee$ -неразложимых элементов решетки $L_q(\mathfrak{M})$.

Для любого класса унарков $\mathfrak{N}$ обозначим через $q\mathfrak{N}$ наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathfrak{N}$, и через qA , если $\mathfrak{N}$ состоит из одного унара A .

В силу теоремы 1 [9]

$$P(\mathfrak{M}) = \{qA | A \in K(\mathfrak{M})\}. \quad (5)$$

Следующее предложение содержит описание замкнутых подмножеств оператора замыкания на множестве $P(\mathfrak{M})$, определенного по правилу (3).

ЛЕММА 2. [9, леммы 5 – 8]. Пусть $\mathfrak{N} = \{A_i | i \in I\}$ – некоторый класс *Q-критических унарков*.

- 1) Если $B \cong C_0^1 + C_0^1$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $B \leq A_i$ для некоторого $i \in I$.
- 2) Если $B \cong C_{h_0}^{t_0} + C_{h_1}^0 + \dots + C_{h_k}^0$ и $B \not\cong C_0^1 + C_0^1$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда в классе $\mathfrak{N}$ найдутся унарны $A_1, A_2, \dots, A_s$; содержащие элементы $a_{ij} \in A_j$ ($i = 0, 1, \dots, k; j = 1, 2, \dots, s$), такие, что $h_i = [p(a_{i1}), p(a_{i2}), \dots, p(a_{is})]$ и $t_0 = \max\{t(a_{0j}) \mid j = 1, 2, \dots, s\}$.
- 3) Если $B \cong F_1$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда в классе $\mathfrak{N}$ существуют унарны, содержащие моногенные подунары сколь угодно высокого порядка.
- 4) Если $B \cong C_{m,n}(0 < m \leq n)$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:
- а) $C_{m,n} \leq A_i$ для некоторого $i \in I$;
- б) $F_1 \in q\mathfrak{N}$ и существует унар $A \in \mathfrak{N}$, который содержит подунар C_h^t такой, что $t \geq m$.
- 5) Если $B \cong C + C_{h_1}^0 + \dots + C_{h_k}^0$, где либо $C \cong F_1$, либо $C \cong C_{m,n}(0 < m \leq n)$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $C \in q\mathfrak{N}_{h_1, h_2, \dots, h_k}$ и $C_{h_1}^0 + \dots + C_{h_k}^0 \in q\mathfrak{N}_{h_1, h_2, \dots, h_k}$, где $\mathfrak{N}_{h_1, h_2, \dots, h_k}$ – подкласс класса $\mathfrak{N}$, состоящий из таких унарнов, что в каждом из них для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ существует элемент, период которого делит число h_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. [9, теорема 4]. Если $\mathfrak{M} = q\mathfrak{N}$ для некоторого класса унарнов, то решетка $L_q(\mathfrak{M})$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:

- 1) длины циклов унарнов из $\mathfrak{N}$ образуют цепь по делимости;
- 2) если $C_n^1, C_k^0 \in \mathfrak{N}$, то $k|n$;
- 3) если $C_m^0 + C_n^0 \in \mathfrak{N}$ и $m \triangleleft k \triangleleft n$, то $C_k^0 \notin \mathfrak{N}$.

Далее C_0^0 означает свободный унар F_1 .

Продолжим доказательство теоремы 1.

Пусть $L_q(\mathfrak{M})$ – дистрибутивная решетка для некоторого квазимногообразия $\mathfrak{M}$ унарнов.

а) Пусть $|L_q(\mathfrak{M})| < \omega$. Тогда в силу теоремы 1 из [8] квазимногообразие $\mathfrak{M}$ содержит лишь конечное число циклов. Если $C_n^1 \in \mathfrak{M}$ для некоторого $n > 0$, то $F_1 \notin \mathfrak{M}$ согласно предложению 1. Отсюда в силу леммы 2 (пункт 3) вытекает, что порядки всех моногенных унарнов, содержащихся в квазимногообразии $\mathfrak{M}$, ограничены в совокупности, откуда по теореме 2 [9] следует, что $L_q(\mathfrak{M})$ – алгебраическая решетка.

Поскольку любая решетка квазимногообразий является коалгебраической [4], то согласно [16, с. 83]

$$L_q(\mathfrak{M}) \cong O(P(\mathfrak{M})), \quad (6)$$

где $P(\mathfrak{M})$ – частично упорядоченное по включению множество всех $\vee$ -неразложимых элементов решетки $L_q(\mathfrak{M})$.

Покажем, что в этом случае $P(\mathfrak{M})$ изоморфно некоторому идеалу частично упорядоченного множества $P_s(s \in \mathbf{N}_0)$.

Пусть $H(\mathfrak{M})$ означает множество длин циклов, лежащих в квазимногообразии $\mathfrak{M}$. Поскольку порядки моногенных унарнов квазимногообразия $\mathfrak{M}$ ограничены в совокупности, то $H(\mathfrak{M})$ конечно и, в силу предложения 1,

$$1 = h_0 \triangleleft h_1 \triangleleft \dots \triangleleft h_s. \quad (7)$$

По той же причине в $\mathfrak{M}$ существует моногенный унар C_n^t наибольшей глубины t .

Пусть $t > 0$. Тогда по теореме 4 [9] получим $n = h_s$.

Обозначим через $\mathfrak{N}_{s,t}$ частично упорядоченное по включению множество всех квазимногообразий унарнов вида

$$q(C_1^0 + C_1^0), q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0), qC_{h_i}^0, q(C_{h_{s-1}}^0 + C_{h_s}^0), qC_{h_s}^r,$$

где $r \in \{0, 1, \dots, t\}$ и $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ при $s > 0$.

При этом множество $\mathfrak{N}_{0,t}$ состоит из квазимногообразий вида $q(C_1^0 + C_1^0), qC_1^r$ ($0 \leq r \leq t$).

Из (3), (5) и (7) в силу лемм 1 и 2, предложения 1, а также лемм 11 и 13 из [9] вытекает, что $P(\mathfrak{M})$ является О-идеалом в $\mathfrak{N}_{s,t}$.

При $s = 0$ отображение f_1 :

$$q(C_1^0 + C_1^0) \rightarrow a_0,$$

$$qC_1^1 \rightarrow c,$$

$$qC_1^r \rightarrow c_{1,r-1} (r > 1)$$

является инъекцией множества $\mathfrak{N}_{0,t}$ в P_0 , сохраняющей порядок.

Кроме того, $f_1(\mathfrak{N}_{0,t})$ является О-идеалом в P_0 , откуда следует, что $f_1(P(\mathfrak{M}))$ также является О-идеалом в P_0 .

Пусть $s \neq 0$. Тогда отображение f_2 :

$$q(C_1^0 + C_1^0) \rightarrow a_0,$$

$$q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0) \rightarrow a_{2i+1} (1 \leq i \leq s-2),$$

$$q(C_{h_{s-1}}^0 + C_{h_s}^0) \rightarrow d,$$

$$q(C_{h_{s-1}}^0 + C_{h_s}^r) \rightarrow d_{1,r} (1 \leq r \leq t),$$

$$qC_{h_i}^0 \rightarrow a_{2i} (1 \leq i \leq s-1),$$

$$qC_{h_s}^0 \rightarrow c,$$

$$qC_{h_s}^r \rightarrow c_{1,r} (1 \leq r \leq t)$$

осуществляет изоморфизм $\mathfrak{N}_{s,t}$ в О-идеал частично упорядоченного множества P_{s-1} . Отсюда следует, что $f_2(P(\mathfrak{M}))$ является О-идеалом в P_{s-1} .

Предположим теперь, что $t = 0$, т. е. квазимногообразие $\mathfrak{M}$ не содержит унаров вида C_n^1 .

Тогда из леммы 11 [9] и предложения 1 следует, что $P(\mathfrak{M})$ является О-идеалом частично упорядоченного множества $\mathfrak{N}_s$ всех квазимногообразий унаров следующего вида

$$q(C_1^0 + C_1^0), qC_{h_i}^0 (1 \leq i \leq s), q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0) (0 \leq i \leq s-1),$$

$$qF_1, qC_{m,n}, q(C_{m,n} + C_{h_s}^0) (m, n \in \mathbf{N}), q(F_1 + C_{h_0}^0),$$

где числа $h_0, h_1, \dots, h_s$ удовлетворяют условию (7).

В этом случае отображение f_3 :

$$q(C_1^0 + C_1^0) \rightarrow a_0,$$

$$qC_{h_i}^0 \rightarrow a_{2i} (1 \leq i \leq s),$$

$$q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0) \rightarrow a_{2i+1} (1 \leq i \leq s-1),$$

$$qF_1 \rightarrow c,$$

$$q(F_1 + C_{h_s}^0) \rightarrow d,$$

$$qC_{m,n} \rightarrow c_{m,n} (1 \leq m \leq n),$$

$$q(C_{m,n} + C_{h_s}^0) \rightarrow d_{m,n} (1 \leq m \leq n)$$

является изоморфизмом частично упорядоченных множеств $\mathfrak{N}_s$ и P_s .

Отсюда, поскольку $P(\mathfrak{M})$ – О-идеал в $\mathfrak{N}_s$, $f_3(P(\mathfrak{M}))$ – О-идеал в P_s .

Обратно, допустим, что $L \cong O(I)$, где I – некоторый О-идеал в P_s ($s \in \mathbf{N}_0$). Зафиксируем произвольный набор чисел $\{h_i | i = 0, 1, \dots, s\}$, удовлетворяющих условию (7).

Пусть $\mathfrak{N} = f_3^{-1}(I)$ и $\mathfrak{M}$ – квазимногообразие, порожденное всеми унарами A , для которых $qA \in \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M} = q\{A | qA \in \mathfrak{N}\}$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{N}$ является О-идеалом в $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N} \cong I$. Используя предложение 1 и лемму 2, получим

$$P(\mathfrak{M}) \cong \mathfrak{N} \tag{8}$$

и $L_q(\mathfrak{M})$ – конечная либо счётная дистрибутивная решётка. Поскольку $\mathfrak{N} \cong I$, то из (6) и (8) в силу леммы 11 [9] следует, что $L_q(\mathfrak{M}) \cong O(I)$.

б) Пусть $L_q(\mathfrak{M})$ – континуальная дистрибутивная решетка. Согласно теореме 1 [9] квазимногообразие $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное множество $\{C_{h_i}^0 | i \in \mathbf{N}_0\}$ циклов.

В силу предложения 1 при подходящей нумерации циклов получим

$$1 = h_0 \triangleleft h_1 \triangleleft \dots \quad (9)$$

Используя предложение 1, а также леммы 6 и 11 из [9], получим, что $P(\mathfrak{M})$ содержит квазимногообразие qF_1 , порожденное свободным унарным F_1 , и является О-идеалом частично упорядоченного по включению множества $\mathfrak{N}_\infty$ всех квазимногообразий вида

$$q(C_1^0 + C_1^0), qC_{h_i}^0 (i \geq 1), q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0) (i \geq 0), qF_1, qC_{m,n} (0 < m \leq n).$$

В силу (4)

$$L_q(\mathfrak{M}) \cong C(P(\mathfrak{M})),$$

где $C(P(\mathfrak{M}))$ – решетка замкнутых подмножеств множества $P(\mathfrak{M})$ относительно включения. Замкнутые подмножества при этом строятся по правилу (3).

Применяя леммы 1 и 2, а также леммы 11 и 13 из [9], получим, что любой идеал О-идеал в $P(\mathfrak{M})$ с выделенным элементом qF_1 замкнут.

Обратно, пусть T замкнуто в $P(\mathfrak{M})$, т. е. $T^* = T$. Очевидно, что T является О-идеалом в $P(\mathfrak{M})$.

Допустим, что T бесконечно. Тогда $qF_1 \in T$ в силу леммы 2, т. е. T – О-идеал с выделенным элементом qF_1 .

Теперь для завершения доказательства остается отметить, что отображение f_4 :

$$\begin{aligned} q(C_1^0 + C_1^0) &\rightarrow a_0, \\ qC_{h_i}^0 &\rightarrow a_{2i} (i \in \mathbf{N}_0), \\ q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0) &\rightarrow a_{2i+1} (i \in \mathbf{N}_0), \\ qF_1 &\rightarrow c, \\ qC_{m,n} &\rightarrow c_{m,n} (1 \leq m \leq n) \end{aligned}$$

осуществляет изоморфизм частично упорядоченных множеств $\mathfrak{N}_\infty$ и P_∞ .

Таким образом,

$$L_q(\mathfrak{M}) \cong O_c(I),$$

где $I = f_4(P(\mathfrak{M}))$.

Обратно, если $L \cong O_c(I)$, где I – О-идеал в P_∞ с выделенным элементом c , то, полагая $\mathfrak{N} = f_4^{-1}(I)$ и $\mathfrak{M} = q\mathfrak{N}$, и рассуждая также, как и в пункте а), с учетом леммы 13 из [9] получим, что $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условиям предложения 1 и $L \cong L_q(\mathfrak{M})$, откуда следует, что L дистрибутивна. Теорема доказана.

Используя теорему 7 работы [9], получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Произвольная булева решетка L изоморфна некоторой решетке квазимногообразий унарных тогда и только тогда, когда L конечна.

Аналогичным образом из основной теоремы данной работы и из теоремы 5 из [9] вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Произвольная цепь L изоморфна некоторой решетке квазимногообразий унарных тогда и только тогда, когда L конечна.

4. Заключение

В данной работе описан класс всех дистрибутивных решеток, каждая из которых изоморфна решетке некоторого квазимногообразия унарных. Аналогичные вопросы решены для классов булевых решеток и цепей.

К настоящему времени в теории квазимногообразий унарных открытых вопросов остается немного.

Возникает проблема исследования квазимногообразий унарных алгебр, в сигнатуре которых более одной унарной операции.

В этом направлении авторами работ [11], [12] получен ряд содержательных результатов.

Как отмечено выше, для исследования квазимногообразий унарных широко использовалось описание Q -критических унарных алгебр.

Однако, описание Q -критических унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, весьма затруднительно.

В работе [18] вводится понятие NQ -критической алгебры, которое, на наш взгляд, может иметь более широкий спектр применения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белкин В. П., Горбунов В. А. Фильтры решеток квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, №4. С. 373-392.
2. Будкин А. И., Горбунов В. А. К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, №2. С. 123-142.
3. Виноградов А. А. Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, №6. С. 15-19.
4. Горбунов В. А. Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, №5. С. 507-548.
5. Горбунов В. А., Туманов В. И. Об одном классе решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, №1. С. 59-80.
6. Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 368 с.
7. Карташов В. К. Квазимногообразия унарных // Мат. заметки. 1980. Т. 27, №1. С. 7-20.
8. Карташов В. К. Квазимногообразия унарных с конечным числом циклов // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, №2. С. 173-193.
9. Карташов В. К. О решетках квазимногообразий унарных // Сибирский математический журнал. 1985. Т. 26, №3. С. 49-62.
10. Карташов В. К. Характеризация решетки квазимногообразий алгебр $L_q A_{1,1}$ // Алгебраические системы. – Волгоград: изд-во Волгоградского государственного пединститута, 1989. С. 37–45.
11. Кравченко А. В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий унарных алгебр // Математические труды. 2001. Т. 4, №2. С. 113-127.
12. Кравченко А. В., Нуракунов А. М., Швидефски М. В. О строении решеток квазимногообразий. I. Независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, №6. С. 684-710.
13. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

14. Мальцев А. И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966г.) - М.: Мир, 1968. С.217-231.
15. Ольшанский А. Ю. Условные тождества в конечных группах // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15, №6. С. 1409-1413.
16. Crawley P., Dilworth R.P. Algebraic Theory of Lattices. – New-Jersey: Prentice-Hall, Tnc, 1973.– 200 с.
17. Hyndman J., Nation J. B. The Lattice of Subquasivarieties of a Locally Finite Quasivariety, CMS Books in Mathematics. — Springer, 2018. – 162 p.
18. Kartashov V.K., Kartashova A. V. Remarks on NQ-critical commutative unary algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, №2. P. 204-206.

REFERENCES

1. Belkin, V. P., Gorbunov, V. A. 1975, “Filters in lattices of quasivarieties of algebraic systems“, *Algebra and Logic*, vol. 14, no. 4, pp. 229-239. doi: 10.1007/BF01668999.
2. Budkin, A. I., Gorbunov, V. A. 1975, “Quasivarieties of algebraic systems“, *Algebra and Logic*, vol. 14, no. 2, pp.73-84. doi: 10.1007/BF01668420.
3. Vinogradov, A. A. 1965, “Quasivarieties of abelian groups“, *Algebra i Logika [Algebra and Logic]*, vol. 4, no. 6, pp.15-19.
4. Gorbunov, V. A. 1977, “Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability“, *Algebra and Logic*, vol. 16, no. 5, pp.340-369. doi: 10.1007/BF01669475.
5. Gorbunov, V. A., Tumanov, V. I. 1980, “A class of lattices of quasivarieties“, *Algebra and Logic*, vol. 19, no. 1, pp. 38-52. doi: 10.1007/BF01669103.
6. Gorbunov, V. A. 1998, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Consultants Bureau, New-York.
7. Kartashov, V. K. 1980, “Quasivarieties of unars“, *Mathematical Notes*, vol. 27, no. 1, pp. 5-12. doi: 10.1007/BF01149807.
8. Kartashov, V. K. 1980, “Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles“, *Algebra and Logic*, vol. 19, no. 2, pp. 106-120. doi: 10.1007/BF01669836.
9. Kartashov, V. K. 1985, “Lattices of quasivarieties of unars“, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 26, no. 3, pp. 346-357. doi: 10.1007/BF00968621.
10. Kartashov, V. K. 1989, “Characterization of the lattice of quasivarieties of the algebras $L_q A_{1,1}$ “, *Algebraicheskie sistemy*, Izdatel'stvo Volgogradskogo gosudarstvennogo pedinstituta, Volgograd, pp. 37-45.
11. Kravchenko, A. V. 2002, “Complexity of lattices of quasivarieties for varieties of unary algebras“, *Siberian Advances in Mathematics*, vol. 12, no. 1, pp. 63-76.
12. Kravchenko, A. V., Nurakunov, A. M. & Schwidefsky, M. V. 2018, “Structure of Quasivariety Lattices. I. Independent Axiomatizability“, *Algebra and Logic*, vol. 57, no. 6, pp. 445-462. doi: 10.1007/s10469-019-09516-4.

13. Maltsev, A. I. 1973, *Algebraic systems*, Springer, Berlin.
14. Maltsev, A. I. "On some borderline problems of algebra and mathematical logic", *Trudy Mezhdunarodnogo kongressa matematikov* " (Proc. Int. Congr. of mathematicians). Mir, Moscow, 1968, pp. 217-231.
15. Ol'shanskii, A. Yu. 1985, "Conditional identities in finite groups", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 15, no. 6, pp. 1000-1003. doi.org: 10.1007/BF00966568.
16. Crawley, P., Dilworth, R. P. 1973, *Algebraic Theory of Lattices*, Prentice-Hall, New-Jersey.
17. Hyndman, J., Nation, J. B. 2018, *The Lattice of Subquasivarieties of a Locally Finite Quasivariety*, CMS Books in Mathematics, Springer, Berlin.
18. Kartashov, V. K., Kartashova, A. V. 2020, "Remarks on NQ-critical commutative unary algebras", *Lobachevskii J. of Mathematics*, vol. 41, no. 2, pp. 204-206. doi: 10.1134/S1995080220020080.

Получено 12.12.2020 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.