ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.948

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-163-176

О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа — Бельтрами в гильбертовом пространстве

О. Х. Каримов

Олимджон Худойбердиевич Каримов — кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан (Таджикистан, г. Душанбе).

e-mail: karimov_olim@mail.ru, karimov_olim72@mail.ru

Аннотация

Проблема разделимости дифференциальных операторов впервые рассмотрена в работах В. Н. Эверитта и М. Гирца. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К. Х. Бойматову, М. Отелбаеву и их ученикам. Основная часть опубликованных работ по этой теории относится к линейным операторам. Нелинейный случай рассматривался в случае слабого возмущения линейного оператора. Случай, когда исследуемый оператор не является слабым возмущением линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Полученные результаты в данной работе также относятся к этому малоизученному случаю. В работе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x, u)u(x),$$

и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость в этом пространстве. Исследуемый оператор не является слабым возмущением линейного оператора, т.е. является строго нелинейным. На основе полученных коэрцитивных оценок и разделимости изучалась разрешимость нелинейного уравнения Лапласа-Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$.

Ключевые слова: оператор Лапласа — Бельтрами, коэрцитивные неравенства, нелинейность, разделимость, разрешимость, гильбертово пространство.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

О. Х. Каримов. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа — Бельтрами в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 163–176.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 517.948

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-163-176

On the coercitive solvability of the non-linear Laplace–Beltrami equation in Hilbert space

O. Kh. Karimov

Olimjon Khudoyberdievich Karimov — candidate of physical and mathematical sciences, docent, Mathematics institute. A. Dzhuraeva Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Tajikistan, Dushanbe).

e-mail: karimov_olim@mail.ru, karimov_olim72@mail.ru

Abstract

The problem of separability of differential operators is considered for the first time in the works of V. N. Everitt and M. Hirz. Further development of this theory belongs to K. H. Boymatov, M. Otelbaev and their students. The main part of the published papers on this theory relates to linear operators. The nonlinear case was considered mainly when studied operator was a weak perturbation of the linear one. The case when the operator under study is not a weak perturbation of the linear operator is considered only in some works. The results obtained in this paper also relate to this little-studied case. The paper studies the coercive properties of the nonlinear Laplace–Beltrami operator in the space $L_2(R^n)$

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x, u)u(x)$$

and proves its separability in this space by coercivity estimates. The operator under study is not a weak perturbation of the linear operator, i.e. it is strongly nonlinear. Based on the obtained coercive estimates and separability, the solvability of the nonlinear Laplace–Beltrami equation in the space $L_2(R^n)$ is studied.

Keywords: Laplace–Beltrami operator, coercitive inequalities, nonlinearity, separability, solvability, Hilbert space.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

O. Kh. Karimov, 2021, “On the coercitive solvability of the non-linear Laplace–Beltrami equation in Hilbert space”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 163–176.

1. Введение

В настоящей работе исследуется разделимость нелинейного оператора Лапласа — Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] + V(x, u)u(x) = f(x),$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$ — эрмитова матрица, а $V(x, z)$ — положительная функция.

Установлены соответствующие неравенства коэрцитивности для оператора $L[u]$ и получены новые достаточные условия разделимости этого оператора в пространстве $L_2(R^n)$. На основе

полученных результатов по разделимости и коэрцитивных оценок изучается разрешимость уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве.

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эверитту и М.Гирцу. В работах [1]–[4] они получили ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Ими был рассмотрен также многомерный случай оператора Шрёдингера. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[5]–[10] и имеющиеся там ссылки). Условия разрешимости нелинейных уравнений Шрёдингера и Дирака рассмотрены в [6]. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера изучена в работе [10]. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [11], а также для линейных операторов Гельмгольца, бигармонического и трижды гармонического операторов в работах [12]–[14]. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [5], [16]–[19]

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в работе К.Х.Бойматова [5]. Разделимость линейного оператора Лапласа-Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x)u(x),$$

ранее изучалась в работе [15]. Данная работа обобщает результаты работы [15] для нелинейного случая.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы могут не являются слабым возмущением линейного оператора.

2. Формулировка основного результата

В пространстве $L_2(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x, u)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n) \quad (1)$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$ - эрмитова матрица, а $V(x, z)$ -положительная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение (1) (*и соответствующий ему дифференциальный оператор*) называется *разделимым* в $L_2(R^n)$, если $\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]$, $V(x, u(x))u(x) \in L_2(R^n)$ для всех $u(x) \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x, z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x, \xi, \eta) = V^{\frac{1}{2}}(x, z), \quad \xi = \operatorname{Re} z, \quad \eta = \operatorname{Im} z,$$

$$Q(x, \xi, \eta) = V(x, z), \quad \xi = \operatorname{Re} z, \quad \eta = \operatorname{Im} z.$$

Предположим, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x, \xi, \eta)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^n \left| g^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))]; \mathbb{C} \right|^2 \leq \sigma_1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \left| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}}; C \right|^2 \leq \sigma_2, \quad (3)$$

$$\left| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \omega; \mathbb{C} \right| \leq \delta_1 \left| F^{\frac{1}{2}} \Omega; \mathbb{C} \right|. \quad (4)$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^n \left| g^{-\frac{1}{2}} F \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))]; \mathbb{C} \right|^2 \leq \sigma_3, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n \left| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2}; \mathbb{C} \right|^2 \leq \sigma_4, \quad (6)$$

$$\left| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) \omega; \mathbb{C} \right| \leq \delta_2 |F\Omega; \mathbb{C}|. \quad (7)$$

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (2) – (7), и пусть числа σ_j, δ_j ($j = \overline{1, 4}$) такие, что

$$n\sigma_1 + 2n\sigma_2 < 4, \sigma_1 + 2\sigma_2 + 4\delta_1 < 4, n\sigma_3 + 2n\sigma_4 < 4, \sigma_3 + 2\sigma_4 + 4\delta_2 < 4. \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_2(R^n)$, и для всех функций $u(x) \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)$ справедливы включения

$$\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right],$$

$$V(x, u)u, \quad g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n), i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]; L_2(R^n) \right\| + \|V(x, u)u; L_2(R^n)\| + \\ & + \sum_{j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n) \right\| \leq M \|f(x); L_2(R^n)\|, \end{aligned} \quad (9)$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

3. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(R^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$. Тогда функции $V^{\frac{1}{2}}u(x)$, $g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) принадлежат пространству $L_2(R^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f, \varphi_\varepsilon u \rangle = \langle -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right], \varphi_\varepsilon u \rangle + \langle V(x, u)u, \varphi_\varepsilon u \rangle,$$

и после интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_\varepsilon u \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} u \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\det g(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} [\det g(x)] \varphi_\varepsilon u \rangle + \langle V(x, u)u, \varphi_\varepsilon u \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle, \rangle$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(R^n)$.

Так как функция φ_ε вещественнозначная и

$$\left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \leq M_1 \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_i} \right| \leq M_0 \varepsilon^2, \quad \forall x \in R^n,$$

где

$$M_1 = \sup |\nabla \varphi_\varepsilon(x)|, \quad M_0 = \sup |\Delta \varphi_\varepsilon(x)|,$$

то из равенства (12), переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая неравенство (2), находим

$$\operatorname{Re} (f, u) \geq (1 - \frac{\alpha \sigma_1}{4}) \sum_{j=1}^n \|g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + (1 - \frac{\sigma_1}{4\alpha}) (V(x, u)u, u),$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (2) – (4), и пусть функция $u(x)$ из класса $L_2(R^n) \cap \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ является решением уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)$. Тогда функции $F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x)$, $g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, принадлежат пространству $L_2(R^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_\varepsilon F(x, \xi, \eta)u \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right], \varphi_\varepsilon F(x, \xi, \eta)u \rangle + \\ &+ \langle V(x, u)u, \varphi_\varepsilon F(x, \xi, \eta)u \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi_\varepsilon F(x, \xi, \eta)u)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} F(x, \xi, \eta)u + \varphi_\varepsilon \frac{\partial F(x, \xi, \eta)}{\partial x_i} u + \\ &+ \varphi_\varepsilon \frac{\partial F(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \varphi_\varepsilon \frac{\partial F(x, \xi, \eta)}{\partial \eta} \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \varphi_\varepsilon F(x, \xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (10)$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \varphi_\varepsilon F u \rangle = \frac{1}{2} A_1^\varepsilon(u) + A_2^\varepsilon(u) + A_3^\varepsilon(u) + A_4^\varepsilon(u) + A_5^\varepsilon(u) + \langle V u, \varphi_\varepsilon F u \rangle, \quad (11)$$

где

$$A_1^\varepsilon(u) = - \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \varphi_\varepsilon F u \rangle, \quad A_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} F u \rangle,$$

$$A_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$A_4^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \xi} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial F}{\partial \eta} \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$A_5^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon F \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle.$$

Здесь и далее значения $F, \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial \xi}, \frac{\partial F}{\partial \eta}$ взяты в точке $(x_1, \dots, x_n, \operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x))$.

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов, находим, что в силу леммы 1 функционал $A_2^\varepsilon(u)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Относительно функционалов $A_m^\varepsilon(u)$, $m = 1, 3, 4, 5$ получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} |A_1^\varepsilon(u)| &= \left| - \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \varphi_\varepsilon F u \rangle \right| \geq \\ &\geq - \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\alpha}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\alpha} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) [\ln(\det g(x))] F^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right\} \geq \\ &\geq - \frac{n\alpha}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 - \frac{n\sigma_1}{2\alpha} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{3}{2}} u \right\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_3^\varepsilon(u)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} u \rangle \right| \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} u \right\|^2 \right\} \leq \\ &\leq \frac{n\beta}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n\sigma_2}{2\beta} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} F^{\frac{3}{2}} u \right\|^2, \end{aligned}$$

$$|A_4^\varepsilon(u)| = \left| \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \xi} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial F}{\partial \eta} \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle \right| \leq n\delta_1 \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2,$$

$$|A_5^\varepsilon(u)| = \left| \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon F \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle \right| \leq n \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Здесь α, β – произвольные положительные числа, а σ_1, σ_2 и δ_1 – константы из условий (2) – (4). На основе полученных оценок из равенства (11) имеем

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi_\varepsilon F u \rangle| &\geq \left(1 - \frac{n\sigma_1}{4\alpha} - \frac{n\sigma_2}{2\beta} \right) \cdot \langle V u, \varphi_\varepsilon F u \rangle - |A_2^\varepsilon(u)| + \\ &+ n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} - \delta_1 \right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \end{aligned}$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \|f; L_2(R^n)\| \|Fu; L_2(R^n)\| &\geq |(f, Fu)| \geq \left(1 - \frac{n\sigma_1}{4\alpha} - \frac{n\sigma_2}{2\beta}\right) \cdot (Vu, Fu) + \\ &+ n \cdot \left(1 - \frac{\alpha\sigma_1}{4} - \frac{\beta\sigma_2}{2} - \delta_1\right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь подбираем положительные числа α, β так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n\sigma_1}{4\alpha} + \frac{n\sigma_2}{2\beta} < 1, \quad \frac{\alpha\sigma_1}{4} + \frac{\beta\sigma_2}{2} + \delta_1 < 1.$$

Так как по лемме 1 $Fu \in L_2(R^n)$, то из неравенства (12) следует, что функции $g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $(j = 1, 2, \dots, n)$, $F^{\frac{3}{2}}u$ принадлежат пространству $L_2(R^n)$.

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \rangle &= \left\langle -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right], \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \right\rangle + \\ &+ \langle V(x, u)u, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \rangle. \end{aligned}$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \varphi_\varepsilon Qu \rangle = \frac{1}{2} B_1^\varepsilon(u) + B_2^\varepsilon(u) + B_3^\varepsilon(u) + B_4^\varepsilon(u) + B_5^\varepsilon(u) + \langle Vu, \varphi_\varepsilon Qu \rangle, \quad (13)$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = - \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \varphi_\varepsilon Qu \right\rangle, \quad B_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Qu \right\rangle,$$

$$B_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \right\rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial \xi} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u \right\rangle,$$

$$B_5^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Здесь и далее значения $Q, \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \frac{\partial Q}{\partial \eta}$ взяты в точке $(x_1, \dots, x_n, \operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x))$.

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j = \overline{1, 5}$, находим, что функционалы $B_j^\varepsilon(u)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m = 1, 3, 4, 5$ получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
|B_1^\varepsilon(u)| &= \left| - \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \varphi_\varepsilon Q u \rangle \right| \geq \\
&\geq - \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\alpha_1}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\alpha_1} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) [\ln(\det g(x))] Q^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right\} \geq \\
&\geq - \frac{n\alpha_1}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 - \frac{n\sigma_3}{2\alpha_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2, \\
|B_3^\varepsilon(u)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \rangle \right| \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta_1}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \right\|^2 \right\} \leq \\
&\leq \frac{n\beta_1}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2, \\
|B_4^\varepsilon(u)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial \xi} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle \right| \leq n \cdot \delta_2 \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2, \\
|B_5^\varepsilon(u)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle \right| \leq n \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.
\end{aligned}$$

Здесь α_1, β_1 — произвольные положительные числа, а σ_3, σ_4 , и δ_2 — константы из условий (5) — (7).

На основе полученных оценок из равенства (13) имеем

$$\begin{aligned}
|\langle f, \varphi_\varepsilon V u \rangle| &\geq \left(1 - \frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} - \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} \right) \cdot \langle V u, \varphi_\varepsilon V u \rangle - |B_2^\varepsilon(u)| + \\
&+ n \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1\sigma_3}{4} - \frac{\beta_1\sigma_4}{2} - \delta_2 \right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим неравенство

$$\begin{aligned}
\|f; L_2(R^n)\| \|V u; L_2(R^n)\| &\geq |(f, V u)| \geq \left(1 - \frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} - \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} \right) \cdot (V u, V u) + \\
&+ n \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1\sigma_3}{4} - \frac{\beta_1\sigma_4}{2} - \delta_2 \right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее подбираем положительные числа α_1, β_1 так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} < 1, \quad \frac{\alpha_1\sigma_3}{4} + \frac{\beta_1\sigma_4}{2} + \delta_2 < 1.$$

Теперь из полученных неравенств после несложных преобразований имеем коэрцитивное неравенство (9).

Разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_2(R^n)$ следует из коэрцитивного неравенства (9).

Теорема 1 доказана.

5. Разрешимость

В этом пункте изучается разрешимость уравнения (1). Как следствие выводов теоремы 1 получим следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дифференциальный оператор

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + Vu$$

разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{i=1}^n \left| g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] Q^{-\frac{1}{2}} \right|^2 \leq \gamma_1 \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n \left| g^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 \leq \gamma_2 \quad (16)$$

где $0 < \gamma_1 + 2\gamma_2 < 4$. Тогда уравнение (1) для всех $f \in L_2(R^n)$ имеет единственное решение в пространстве $L_2(R^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + Vu = 0 \quad (17)$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ - произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle Vu, \phi \psi u \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right], \phi \psi u \right\rangle = \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \phi \psi u \right] \right\rangle = \\ &= - \left\langle \sum_{i,j=1}^n \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \right] \phi \psi u \right\rangle - \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u \right\rangle - \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle - \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \phi \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь находим реальную часть скалярного произведения

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle Vu, t\psi u \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \phi \psi u \rangle - \\ &- \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \rangle - \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} u \rangle - \\ &- \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

Имея в виду

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u \rangle &\leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left\| \left[\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_j} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right] \frac{1}{2} u; L_2(R^n) \right\|^2, \end{aligned} \quad (20)$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \rangle &= -\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} (g^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) Q^{-\frac{1}{2}} u \rangle \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\| \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} (g^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) Q^{-\frac{1}{2}} u \|, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \phi \psi u \rangle &= \\ &= \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} (g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] Q^{-\frac{1}{2}}) Q^{\frac{1}{2}} u \rangle \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|g^{-\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\| \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} (g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] Q^{-\frac{1}{2}}) Q^{\frac{1}{2}} u \|. \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая неравенство (15), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \phi \psi u \rangle &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_1}{2} \sum_{j=1}^n \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \|^2 + \frac{n\gamma_1}{2\alpha_1} \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} u \|^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \rangle &\leq \sum_{i,j=1}^n \|g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\| \| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} (g^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) Q^{\frac{1}{2}} u \| \leq \\ &\leq \frac{n\alpha_2}{2} \sum_{j=1}^n \|g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n\gamma_2}{2\alpha_2} \| \psi^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} u \|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее для равенства (19), применяя неравенства (23)-(24), получим

$$\begin{aligned} (1 - \frac{n\gamma_1}{4\alpha_1} - \frac{n\gamma_2}{2\alpha_2}) \|\phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u\|^2 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \left[\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_j} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right]^{\frac{1}{2}} u; L_2(R^n) \right\|^2 + \\ &+ \left(\frac{n\alpha_1}{4} + \frac{n\alpha_2}{2} \right) \sum_{j=1}^n \|g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n)\|^2 - n \cdot \sum_{j=1}^n \|g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n)\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $\psi(x) \equiv 1$ для любых $x \in R^n$ и $n\gamma_1 + 2n\gamma_2 < 4\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$, тогда имеем

$$0 < (1 - \frac{n\gamma_1 + 2n\gamma_2}{4\alpha_1\alpha_2}) \|\phi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u; L_2(R^n)\|^2 \leq 0. \quad (26)$$

Следовательно, получим

$$0 < (1 - \frac{n\gamma_1 + 2n\gamma_2}{4\alpha_1\alpha_2}) \int_{R^n} |\phi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u|^2 dx \leq 0. \quad (27)$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x) \equiv 0$. Это доказывает, что $u(x) = 0$ является единственным решением уравнения (17).

Далее пусть $u(x) \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ - решение уравнения

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + Vu = f(x) \quad (28)$$

с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)$. Теперь выберем последовательность функций $f_1, f_2, \dots, f_n \in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_2(R^n)$. Положим $\vartheta_p = A^{-1}f_p$, где A -означает замыкание оператора $\dot{A} = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + V$, $D(\dot{A} = C_0^\infty(R^n))$ в $L_2(R^n)$. Функция $\vartheta_p \in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial \vartheta_p}{\partial x_j} \right] + V\vartheta_i = f_i$$

Используя коэрцитивное неравенство (9), находим

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial (\vartheta_p - \vartheta_k)}{\partial x_j} \right]; L_2(R^n) \right\| + \|V(x)(\vartheta_i - \vartheta_j); L_2(R^n)\| + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial (\vartheta_p - \vartheta_k)}{\partial x_j}; L_2(R^n) \right\| \leq M \|f_p - f_k; L_2(R^n)\|, \end{aligned} \quad (29)$$

Переходя к пределу $p, k \rightarrow \infty$, заключаем, что последовательности $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, V\vartheta_1, V\vartheta_2, \dots$,

$$g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_j}, g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_j}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_j} \right],$$

$\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_j} \right], \dots$ будучи фундаментальными, сходятся в $L_2(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\vartheta, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \vartheta^{(3)} \in L_2(R^n)$. Легко проверить, что $\vartheta \in W_{2,loc}^2(R^n)$, $\vartheta^{(1)} = V\vartheta$, $\vartheta^{(2)} = g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}$, $\vartheta^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} \right]$.

Переходя в неравенстве (29) к пределу при $p, k \rightarrow \infty$, получим $\vartheta_p = \vartheta_k = \vartheta$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$, $Au = f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, отсюда следует, что $u = u_1$, т.е. теорема полностью доказана. $\square$

6. Заключение

В работе установлены коэрцитивные оценки для нелинейного оператора вида (1). Найдены достаточные условия разделимости оператора в гильбертовом пространстве. Изучена коэрцитивная разрешимость оператора Лапласа-Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc.London Math.Soc., 1971, v.23, pp.301-324.
2. Everitt W.N., Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc.London Math.Soc., 1972, v.24, pp.149-170.
3. Everitt W.N., Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators // Math.Z., 1972, v.126, pp.308-326.
4. Everitt W.N., Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger -type operators in $L_2(R^n)$ // Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A, 1977, v.79 pp.149-170.
5. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР, 1973, т. 213, № 5, с. 1009-1011.
6. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
7. Бойматов К.Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады Академии наук России, 1992, т.326, № 3, с.393-398.
8. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки, 1989, т.46, № 6, с.110-112.
9. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1983, т.161, с.195-217.
10. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Изв.вузов. Матем., 1989, № 3, с.44-48.
11. Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России, 2010, т.435, № 3, с.310-313.
12. Salem Omram and Khaled A.Gepreel Separation of the Helmholtz Partial Differential Education in Hilbert Space // Adv.Studies Theor. Phys., Vol.6, 2012, № 9, pp.399-410.

13. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math.Anal.Appl. 337(2008), pp.659-666.
14. Zayed E.M.E., Salem Omram Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math.Combin. Vol.4(2010), pp.13-23.
15. Zayed E.M.E., A.S.Mohamed, H.A.Atia Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math.Anal.Appl. 336 (2007), pp.81-92.
16. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 3(157), с.42-50.
17. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. № 8(58), с.665-673.
18. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. 2017. № 1(9), с.55-62.
19. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного класса нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник. 2017. № 4(18), с.245-254.

REFERENCES

1. Everitt, W.N., & Gierz, M. 1971, "Some properties of the domains of certain differential operators", *Proc.London Math.Soc.*, vol. 23, pp. 301 – 324.
2. Everitt, W.N., & Gierz, M. 1972, "On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions", *Proc.London Math.Soc.*, vol.24, pp. 149 – 170.
3. Everitt, W.N., & Gierz, M. 1972, "Some inequallities associated with certain differential operators", *Math.Z.*, vol.126, pp. 308 – 326.
4. Everitt, W.N., & Gierz, M. 1977, "Inequalities and separation for Schrodinger -tupe operators in $L_2(R^n)$ ", *Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A*, vol.79, pp. 149 – 170.
5. Boimatov, K.Kh. 1973, "Theorems of separability", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 213, № 5, pp. 1009 – 1011.
6. Boimatov, K.Kh. 1984, " Separability theorems, weighted spaces and their applications" *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 170, pp. 37 – 76.
7. Boimatov, K.Kh., & Saripov, A. 1992, "Coercitive properties of nonlinear Schrodinger and Dirac operators" *Reports of the Russian Academy of Sciences*, vol. 326, № 3, pp. 393 – 398.
8. Boimatov, K.Kh. 1989, "Coercitive estimates and separability theorems for differential operators of the second order" *Mathematical notes*, vol. 46, № 6, pp. 110 – 112.
9. Otelbaev, M. 1983, "Coercitive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n " *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 161, pp. 195 – 217.
10. Muratbekov, M.B., & Otelbaev, M. 1989, "Smoothness and approximation properties of solutions of a class of nonlinear equations of Schrodinger" *Proc.of the univer. of math.*, № 3, pp. 44 – 48.

11. Muratbekov, M.B., & Muratbekov, M.M., & Ospanov, K.N. 2010, "Coercitive solvability of odd-order differential equations and its applications" *Dokl. Mathematics*, vol. 435, № 3, pp. 310 – 313.
12. Salem, O. & Gepreel, Kh.A. 2012, "Separation of the Helmholtz Partial Differential Equation in Hilbert Space" *Adv.Studies Theor. Phys.*, vol.6, № 9, pp. 399 – 410.
13. Zayed, E. M.E. 2008, "Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem" *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 337, pp. 659 – 666.
14. Zayed, E. M.E., & Salem, O. 2010, "Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert" *International J. Math.Combin.*, vol. 4, pp. 13 – 23.
15. Zayed, E.M.E., & Mohamed,A.S. & Atia, H.A. 2007, "Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces" *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 336, pp. 81 – 92.
16. Karimov, O. Kh. 2014, "On separation of second order nonlinear differential operators with matrix coefficients" *News of the Academy of Sciences of the Republic of Talikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences.* № 3(157), pp. 42 – 50.
17. Karimov, O. Kh. 2015, "On separation of nonlinear second order nonlinear differential operators with matrix coefficients in a weighted space" *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan.* № 8(58), pp. 665 – 673.
18. Karimov. O. Kh. 2017, "Coercitive properties and separability biharmonic operator with matrix potential" *Ufa mathematical journal.* № 1(9), pp. 55 – 62.
19. Karimov. O. Kh. 2017, "Coercitive estimate and the separability theorem for a class of a nonlinear differential operator in a hilbert space" *Chebyshevskii Sbornik.* № 4(18), pp.246-255, DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254>.

Получено 31.05.2019 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.