ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.583+512.742.72 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-118-132

Тропические последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомоса

В. А. Быковский, М. А. Романов, А. В. Устинов

Виктор Алексеевич Быковский — Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск).
e-mail: vab@iam.khv.ru
Марк Анатольевич Романов — Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск).
e-mail: romanov@iam.khv.ru
Алексей Владимирович Устинов — Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Тихоокеанский государственный университет (г. Хабаровск).
e-mail: ustinov.alexey@gmail.com

Аннотация

Начиная с основополагающей заметки, опубликованной М. Сомосом в 1989 году, большое внимание специалистов по теории чисел и смежных областей привлекают нелинейные последовательности, удовлетворяющие квадратичному рекуррентному соотношению. При этом особое внимание уделяется вопросам построения целочисленных последовательностей Сомоса и их лорановости относительно начальных значений и коэффициентов рекуррентного соотношения. В фундаментальных работах Робинсона, Фомина и Зелевинского была доказана лорановость последовательности Сомос-k при $k = 4, 5, 6, 7$. В работах Хона были найдены представления для числовых последовательностей Сомос-4, 5 через сигма-функцию Вейерштрасса на эллиптических кривых, а при $k = 6$ — через значения сигма-функции Клейна на гиперэллиптических кривых рода 2. Следует также отметить, что последовательности Сомоса естественным образом возникают при построении криптосистем на эллиптических и гиперэллиптических кривых над конечным полем. Это объясняется тем, что для вышеупомянутых последовательностей выполняются теоремы сложения, и они естественным образом возникают при вычислении кратных точек на эллиптических и гиперэллиптических кривых. При $k = 4, 5, 6, 7$ последовательности Сомоса представляют собой полиномы Лорана от k начальных переменных и обычные полиномы от коэффициентов рекуррентного соотношения. Поэтому эти полиномы Лорана можно записать в виде несократимой дроби с обычным полиномом в числителе с начальными значениями и коэффициентами в качестве переменных. При этом знаменатель записывается в виде монома от начальных переменных. С помощью тропических функций мы доказываем, что степени переменных вышеупомянутого монома представляются в виде квадратичных полиномов от порядкового номера элемента последовательности Сомоса, у которых свободные члены представляют собой периодические последовательности рациональных чисел. При этом в каждом случае в явном виде указываются соответствующие полиномы и периоды их свободных членов.

Ключевые слова: последовательности Сомоса, тропические последовательности.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
В. А. Быковский, М. А. Романов, А. В. Устинов. Тропические последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомоса // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 118–132.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 517.583+512.742.72 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-118-132

Tropical sequences associated with Somos sequences

V. A. Bykovskii, M. A. Romanov, A. V. Ustinov

Victor Alekseevich Bykovskii — Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division of FEB RAS (Khabarovsk).
e-mail: vab@iam.khv.ru
Mark Anatolievich Romanov — Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division of FEB RAS (Khabarovsk).
e-mail: romanov@iam.khv.ru
Alexey Vladimirovich Ustinov — Institute of Applied Mathematics (Khabarovsk Division of FEB RAS), Pacific National University (Khabarovsk).
e-mail: ustinov.alexey@gmail.com

Abstract

Since the seminal note published by M. Somos in 1989, a great deal of attention of specialists in number theory and adjacent areas are attracted by nonlinear sequences that satisfy a quadratic recurrence relation. At the same time, special attention is paid to the construction of Somos integer sequences and their Laurent property with respect to initial values and coefficients of a recurrence. In the fundamental works of Robinson, Fomin and Zelevinsky the Laurent property of the Somos-k sequence for $k = 4, 5, 6, 7$ was proved. In the works of Hone, representations for Somos-4 and 5 sequences were found via the Weierstrass sigma function on elliptic curves, and for $k = 6$ via the Klein sigma function on hyperelliptic curve of genus 2. It should also be noted that the Somos sequences naturally arise in the construction of cryptosystems on elliptic and hyperelliptic curves over a finite field. This is explained by the reason that addition theorems hold for the sequences mentioned above, and they naturally arise when calculating multiple points on elliptic and hyperelliptic curves. For $k = 4, 5, 6, 7$, the Somos sequences are Laurent polynomials of k initial variables and ordinary polynomials in the coefficients of the recurrence relation. Therefore, these Laurent polynomials can be written as an irreducible fraction with an ordinary polynomial in the numerator with initial values and coefficients as variables. In this case, the denominator can be written as a monomial of the initial variables. Using tropical functions, we prove that the degrees of the variables of the above monomial can be represented as quadratic polynomials in the order index of the element of the Somos sequence, whose free terms are periodic sequences of rational numbers. Moreover, in each case these polynomials and the periods of their free terms are written explicitly.

Keywords: Somos sequences, tropical sequences.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

V. A. Bykovskii, M. A. Romanov, A. V. Ustinov, 2021, "Tropical sequences associated with Somos sequences" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 118–132.

1. Введение

Пусть $k \geqslant 2$ — натуральное и

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k/2\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_j \mid -k/2 < j \leqslant k/2\}$$

— два множества независимых формальных переменных в количестве $[k/2]$ в первом случае и k во втором. Последовательность рациональных функций Сомос-k от переменных из $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{x}$, $S_k(n) = S_k(n; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x})$ $(n \in \mathbb{Z})$, определяется рекуррентным соотношением

$$S_k(n + [(k+1)/2])S_k(n - [k/2]) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \alpha_i S_k(n + [(k+1)/2] - i)S_k(n - [k/2] + i). \qquad (1)$$

Впервые эту последовательность при $k = 6$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \quad x_{-2} = x_{-1} = x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

рассмотрел Майкл Сомос в связи с изучением свойств эллиптических тэта-функций. Много полезной информации о последовательностях Сомоса находится на ресурсе [1], популярное изложение этой темы содержится в работах [2, 3].

При $k = 2$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_0, x_1\}, \quad S_2(n+1)S_2(n-1) = \alpha_1 S_2^2(n),$$

и индукцией по n легко показать, что

$$S_2(n) = \alpha_1^{n(n-1)/2} x_0^{1-n} x_1^n.$$

При $k = 3$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_{-1}, x_0, x_1\}, \quad S_3(n+2)S_3(n-1) = \alpha_1 S_3(n+1)S_3(n),$$

и с помощью индукции по n получаем равенство

$$S_3(n) = \begin{cases} \alpha_1^{n^2/4} x_{-1}^{-n/2} x_0 x_1^{n/2}, & \text{если } n \text{ — чётное} \\ \alpha_1^{(n^2-1)/4} x_{-1}^{(1-n)/2} x_1^{(1+n)/2}, & \text{если } n \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

При $k \geqslant 4$ ситуация существенно сложнее. В работах [4] – [7] были найдены явные выражения общего члена последовательностей Сомос-4, 5 через сигма-функцию Вейерштрасса, ассоциированную с некоторой эллиптической кривой. В работе [8] найдено представление общего члена последовательности Сомос-6 через сигма-функцию Клейна на гиперэллиптической кривой рода 2.

В работах [9, 10] было доказано, что при $k = 4, 5, 6, 7$

$$S_k(n) \in \mathbb{Z}[\ldots, \alpha_i, \ldots; \ldots, x_j^{\pm 1}, \ldots].$$

Другими словами, элемент $S_k(n)$ является полиномом Лорана от начальных переменных x_j и обычным полиномом от коэффициентов α_i. Поэтому его можно записать в виде

$$S_k(n) = \left(\prod_{-k/2 < j \leqslant k/2} x_j^{p_k^{(j)}(n)} \right) P_k(n), \qquad (2)$$

где $P_k(n) = P_k(n; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x})$ — полиномы с целыми коэффициентами, а $p_k^{(j)}(n)$ — целочисленные последовательности.

В работе изучаются ассоциированные с $S_k(n)$ последовательности $q_k(n)$, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$q_4(n-1)+q_4(n)+q_4(n+1)+\max\{0,q_4(n)\}=0,$$

$$q_5(n-2)+q_5(n-1)+q_5(n)+q_5(n+1)+\max\{0,q_5(n-1)+q_5(n)\}=0,$$

$$q_6(n-3)+q_6(n-2)+q_6(n-1)+q_6(n)+q_6(n+1)+$$
$$+\max\{0,q_6(n-2)+q_6(n-1)+q_6(n),q_6(n-2)+2q_6(n-1)+q_6(n)\}=0,$$

$$q_7(n-4)+q_7(n-3)+q_7(n-2)+q_7(n-1)+q_7(n)+q_7(n+1)+$$
$$+\max\{0,q_7(n-3)+q_7(n-2)+q_7(n-1)+q_7(n),$$
$$q_7(n-3)+2q_7(n-2)+2q_7(n-1)+q_7(n)\}=0.$$

С их помощью мы вычисляем последовательности $p_k^{(j)}(n)$ при $k=4,5,6,7$. Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Для любого целого n:*

$$p_4^{(-1)}(n)=-\frac{1}{16}n^2-\frac{1}{8}n+\delta_4^{(-1)}(n),\quad p_4^{(0)}(n)=-\frac{1}{16}n^2+\delta_4^{(0)}(n),$$

где $\delta_4^{(j)}(n+8)=\delta_4^{(j)}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $j=-1,0$. Значения последовательностей $\delta_4^{(j)}(n)$ приведены в таблицах 1 и 2.

$$p_5^{(-2)}(n)=-\frac{1}{28}n^2-\frac{1}{7}n+\delta_5^{(-2)}(n),\quad p_5^{(-1)}(n)=-\frac{1}{28}n^2-\frac{1}{14}n+\delta_5^{(-1)}(n),$$
$$p_5^{(0)}(n)=-\frac{1}{28}n^2+\delta_5^{(0)}(n),$$

где $\delta_5^{(j)}(n+14)=\delta_5^{(j)}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $j=-2,-1,0$. Значения последовательностей $\delta_5^{(j)}(n)$ приведены в таблицах 3, 4, 5.

$$p_6^{(-2)}(n)=-\frac{1}{40}n^2-\frac{1}{10}n+\delta_6^{(-2)}(n),\quad p_6^{(-1)}(n)=-\frac{1}{40}n^2-\frac{1}{20}n+\delta_6^{(-1)}(n),$$
$$p_6^{(0)}(n)=-\frac{1}{40}n^2+\delta_6^{(0)}(n),$$

где $\delta_6^{(j)}(n+20)=\delta_6^{(j)}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $j=-2,-1,0$. Значения последовательностей $\delta_6^{(j)}(n)$ приведены в таблицах 6, 7, 8.

$$p_7^{(-3)}(n)=-\frac{1}{60}n^2-\frac{1}{10}n+\delta_7^{(-3)}(n),\quad p_7^{(-2)}(n)=-\frac{1}{60}n^2-\frac{1}{15}n+\delta_7^{(-2)}(n),$$
$$p_7^{(-1)}(n)=-\frac{1}{60}n^2-\frac{1}{30}n+\delta_7^{(-1)}(n),\quad p_7^{(0)}(n)=-\frac{1}{60}n^2+\delta_7^{(0)}(n),$$

где $\delta_7^{(j)}(n+30)=\delta_7^{(j)}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $j=-3,-2,-1,0$. Значения последовательностей $\delta_7^{(j)}(n)$ приведены в таблицах 9, 10, 11, 12.

Remark 1. *В работе [14] были получены явные формулы для последовательностей $p_4(n)$ и $p_5(n)$ с любыми начальными значениями. Их вторые разности являются периодическими последовательностями с периодами 8 и 14 соответственно.*

Remark 2. *Вычисления показывают, что при $k\geqslant 8$ периодичность $\Delta^2 p_k^{(j)}(n)$ нарушается.*

2. Тропические последовательности

Для заданного натурального $k \geqslant 2$ зафиксируем целое j с $-k/2 < j \leqslant k/2$. Положим

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{[k/2]} = 1,$$

$$x_i = \begin{cases} x_j, \text{ если } i = j \\ 1, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Возникающую при этом последовательность $S_k^{(j)}(n)$ можно представить в виде последовательности рациональных функций от переменной x_j, числители и знаменатели которых — полиномы с неотрицательными коэффициентами. Очевидно, что

$$S_k^{(j)}(n) = x_j^{p_k^{(j)}(n)} R_k^{(j)}(n),$$

где $R_k^{(j)}(n)$ — отношение полиномов с отличными от нуля свободными членами. При этом мы считаем, что последовательности $S_k^{(j)}(n)$ вычисляются по формуле (1) без сокращения числителей и знаменателей на одинаковые сомножители, за исключением степеней переменных x_j. Отсюда следует, что последовательности $p_k^{(j)}(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered} p_k(n + [(k+1)/2]) + p_k(n - [k/2]) = \\ = \min_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \{ p_k(n + [(k+1)/2] - i) + p_k(n - [k/2] + i) \} \end{gathered} \tag{3}$$

и задаются начальными значениями

$$p_k^{(j)}(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Последовательности подобного рода называются тропическими (ультрадискретными). Примеры таких последовательностей и их рекуррентных соотношений можно найти в работах [11] – [15].

Пусть $\widetilde{S}_k(n)$ — последовательность, которая получается из $S_k(n)$ перестановкой начальных значений в обратном порядке. Замена n на $1 - n$ для чётных k и n на $-n$ при нечётных k в рекуррентном соотношении (1) приводит к равенству

$$\widetilde{S}_k(n) = \begin{cases} S_k(1-n), \text{ если } k \text{ — чётное} \\ S_k(-n), \text{ если } k \text{ — нечётное.} \end{cases} \tag{4}$$

Remark 3. *Из (4) следует, что*

$$p_k^{(j)}(n) = \begin{cases} p_k^{(1-j)}(1-n), \textit{ если } k \textit{ — чётное} \\ p_k^{(-j)}(-n), \textit{ если } k \textit{ — нечётное.} \end{cases}$$

Поэтому последовательности $p_k^{(j)}(n)$ достаточно вычислить только для $-k/2 < j \leqslant 0$.

Для $k = 2$ соотношение (3) приобретает вид

$$p_2(n+1) + p_2(n-1) = 2p_2(n),$$

и поэтому

$$p_2^{(0)}(n) = 1 - n, \quad p_2^{(1)}(n) = n,$$

что соответствует явной формуле для $S_2(n)$ из введения.

Для $k = 3$

$$p_3(n+2) + p_3(n-1) = p_3(n+1) + p_3(n).$$

Поэтому для $\Delta p_2(n) = p_2(n+1) - p_2(n)$ (разность первого порядка)

$$\Delta p_2(n+1) = \Delta p_2(n-1).$$

Следовательно,

$$p_3^{(-1)}(n) = \begin{cases} -n/2, \text{ если } n \text{ — чётное} \\ -(n-1)/2, \text{ если } n \text{ — нечётное,} \end{cases}$$

$$p_3^{(0)}(n) = \begin{cases} 1, \text{ если } n \text{ — чётное} \\ 0, \text{ если } n \text{ — нечётное,} \end{cases}$$

что соответствует формуле для $S_3(n)$ из введения.

2.1. Сомос-4

При $k = 4$ соотношение (3) имеет вид

$$p_4(n+2) + p_4(n-2) = \min\{p_4(n+1) + p_4(n-1), 2p_4(n)\}.$$

С помощью замены

$$q_4(n) = \Delta^2 p_4(n) = \Delta p_4(n+1) - \Delta p_4(n) = p_4(n+2) - 2p_4(n+1) + p_4(n)$$

оно приводится к виду

$$q_4(n) + 2q_4(n-1) + q_4(n-2) = \min\{0, q_4(n-1)\}$$

или, после вычитания из обеих частей $q_4(n-1)$,

$$q_4(n) + q_4(n-1) + q_4(n-2) + \max\{0, q_4(n-1)\} = 0.$$

В соответствии с замечанием 3 рассмотрим последовательности $p_4^{(-1)}(n)$ и $p_4^{(0)}(n)$. Последовательность $p_4^{(-1)}(n)$ задаётся начальными значениями

$$p_4(-1) = 1, \quad p_4(0) = p_4(1) = p_4(2) = 0.$$

Поэтому

$$q_4(-1) = 1, \quad q_4(0) = 0.$$

С помощью рекуррентного соотношения для $q_4(n)$ составим таблицу

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_4^{(-1)}(n)$	1	0	-1	1	-1	0	1	-2	1	0

Так как $q_4(n)$ однозначно определяется двумя соседними значениями, то

$$q_4^{(-1)}(n+8) = q_4^{(-1)}(n)$$

для любого целого n. Отсюда следует, что

$$p_4^{(-1)}(n) = -\frac{1}{16}n^2 - \frac{1}{8}n + \delta_4^{(-1)}(n), \quad \delta_4^{(-1)}(n+8) = \delta_4^{(-1)}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Таблица 1: $\delta_4^{(-1)}(n)$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$16\delta_4^{(-1)}(n)$	15	0	3	8	-1	8	3	0

Последовательность $p_4^{(0)}(n)$ определяется начальными значениями

$$p_4(0) = 1, \quad p_4(-1) = p_4(1) = p_4(2) = 0.$$

Следовательно,

$$q_4(-1) = -2, \quad q_4(0) = 1.$$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_4^{(0)}(n)$	-2	1	0	-1	1	-1	0	1	-2	1

$$q_4^{(0)}(n+8) = q_4^{(0)}(n),$$

$$p_4^{(0)}(n) = -\frac{1}{16}n^2 + \delta_4^{(0)}(n), \quad \delta_4^{(0)}(n+8) = \delta_4^{(0)}(n).$$

Значения последовательности $\delta_4^{(0)}(n)$ приведены в следующей таблице.

Таблица 2: $\delta_4^{(0)}(n)$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$16\delta_4^{(0)}(n)$	1	16	1	4	9	0	9	4

2.2. Сомос-5

При $k = 5$ рекуррентное соотношение (3) имеет вид

$$p_5(n+3) + p_5(n-2) = \min\{p_5(n+2) + p_5(n-1), p_5(n+1) + p_5(n)\}.$$

Из него следует, что

$$q(n) = \Delta^2 p_5(n)$$

удовлетворяет соотношению

$$q_5(n-2) + q_5(n-1) + q_5(n) + q_5(n+1) + \max\{0, q_5(n-1) + q_5(n)\} = 0.$$

Рассматриваем последовательности $p_5^{(j)}(n)$ при $j = -2, -1, 0$. Для $p_5^{(-2)}(n)$

$$p_5(-2) = 1, \quad p_5(-1) = p_5(0) = p_5(1) = p_5(2) = 0,$$

$$q_5(-2) = 1, \quad q_5(-1) = q_5(0) = 0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$q_5^{(-2)}(n)$	1	0	0	-1	1	0	-1	0	1	-1	0	0	1	-2	1	0	0

$$q_5^{(-2)}(n+14) = q_5^{(-2)}(n),$$

$$p_5^{(-2)}(n) = -\frac{1}{28}n^2 - \frac{1}{7}n + \delta_5^{(-2)}(n), \quad \delta_5^{(-2)}(n+14) = \delta_5^{(-2)}(n).$$

Таблица 3: $\delta_5^{(-2)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$28\delta_5^{(-2)}(n)$	24	-3	0	5	12	-7	4	17	4	-7	12	5	0	-3

Для $p_5^{(-1)}(n)$

$$p_5(-1) = 1, \quad p_5(-2) = p_5(0) = p_5(1) = p_5(2) = 0,$$

$$q_5(-2) = -2, \quad q_5(-1) = 1, \quad q_5(0) = 0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$q_5^{(-1)}(n)$	-2	1	0	0	-1	1	0	-1	0	1	-1	0	0	1	-2	1	0

$$q_5^{(-1)}(n+14) = q_5^{(-1)}(n),$$

$$p_5^{(-1)}(n) = -\frac{1}{28}n^2 - \frac{1}{14}n + \delta_5^{(-1)}(n), \quad \delta_5^{(-1)}(n+14) = \delta_5^{(-1)}(n).$$

Таблица 4: $\delta_5^{(-1)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$28\delta_5^{(-1)}(n)$	0	27	0	3	8	15	-4	7	20	7	-4	15	8	3

Для $p_5^{(0)}(n)$

$$p_5(0) = 1, \quad p_5(-2) = p_5(-1) = p_5(1) = p_5(2) = 0,$$

$$q_5(-2) = 1, \quad q_5(-1) = -2, \quad q_5(0) = 1,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$q_5^{(0)}(n)$	1	-2	1	0	0	-1	1	0	-1	0	1	-1	0	0	1	-2	1

$$q_5^{(0)}(n+14) = q_5^{(0)}(n),$$

$$p_5^{(0)}(n) = -\frac{1}{28}n^2 + \delta_5^{(0)}(n), \quad \delta_5^{(0)}(n+14) = \delta_5^{(0)}(n).$$

Таблица 5: $\delta_5^{(0)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$28\delta_5^{(0)}(n)$	4	1	28	1	4	9	16	-3	8	21	8	-3	16	9

2.3. Сомос-6

Последовательности $p_6^{(j)}(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_6(n+3)+p_6(n-3)=\min\{p_6(n+2)+p_6(n-2),p_6(n+1)+p_6(n-1),2p_6(n)\},$$

и поэтому

$$q_6(n-3)+q_6(n-2)+q_6(n-1)+q_6(n)+q_6(n+1)+$$
$$+\max\{0,q_6(n-2)+q_6(n-1)+q_6(n),q_6(n-2)+2q_6(n-1)+q_6(n)\}=0,$$

где

$$q_6(n)=\Delta^2 p_6(n).$$

В соответствии с замечанием 3 рассматриваем последовательности $p_6^{(j)}(n)$ при $j=-2,-1,0$. Для последовательности $p_6^{(-2)}(n)$

$$p_6(-2)=1,\quad p_6(-1)=p_6(0)=p_6(1)=p_6(2)=p_6(3)=0,$$

$$q_6(-2)=1,\quad q_6(-1)=q_6(0)=q_6(1)=0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_6^{(-2)}(n)$	1	0	0	0	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$q_6^{(-2)}(n)$	0	1	-1	0	0	0	1	-2	1	0	0	0

$$q_6^{(-2)}(n+20)=q_6^{(-2)}(n),$$

$$p_6^{(-2)}(n)=-\frac{1}{40}n^2-\frac{1}{10}n+\delta_6^{(-2)}(n),\quad \delta_6^{(-2)}(n+20)=\delta_6^{(-2)}(n).$$

Таблица 6: $\delta_6^{(-2)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$40\delta_6^{(-2)}(n)$	36	-3	0	5	12	21	-8	5	20	-3
n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$40\delta_6^{(-2)}(n)$	16	-3	20	5	-8	21	12	5	0	-3

Для последовательности $p_6^{(-1)}(n)$

$$p_6(-1)=1,\quad p_6(-2)=p_6(0)=p_6(1)=p_6(2)=p_6(3)=0,$$

$$q_6(-1)=-2,\quad q_6(0)=1,\quad q_6(1)=q_6(2)=0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_6^{(-1)}(n)$	-2	1	0	0	0	-1	1	0	-1	1	-1	1
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$q_6^{(-1)}(n)$	-1	0	1	-1	0	0	0	1	-2	1	0	0

$$q_6^{(-1)}(n+20) = q_6^{(-1)}(n),$$
$$p_6^{(-1)}(n) = -\frac{1}{40}n^2 - \frac{1}{20}n + \delta_6^{(-1)}(n), \quad \delta_6^{(-1)}(n+20) = \delta_6^{(-1)}(n).$$

Таблица 7: $\delta_6^{(-1)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$40\delta_6^{(-1)}(n)$	0	39	0	3	8	15	24	-5	8	23
n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$40\delta_6^{(-1)}(n)$	0	19	0	23	8	-5	24	15	8	3

Для последовательности $p_6^{(0)}(n)$

$$p_6(0) = 1, \quad p_6(-2) = p_6(-1) = p_6(1) = p_6(2) = p_6(3) = 0,$$

$$q_6(-2) = 1, \quad q_6(-1) = -2, \quad q_6(0) = 1, \quad q_6(2) = 0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_6^{(0)}(n)$	1	-2	1	0	0	0	-1	1	0	-1	1	-1
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$q_6^{(0)}(n)$	1	-1	0	1	-1	0	0	0	1	-2	1	0

$$q_6^{(0)}(n+20) = q_6^{(0)}(n),$$
$$p_6^{(0)}(n) = -\frac{1}{40}n^2 + \delta_6^{(0)}(n), \quad \delta_6^{(0)}(n+20) = \delta_6^{(0)}(n).$$

Таблица 8: $\delta_6^{(0)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$40\delta_6^{(0)}(n)$	4	1	40	1	4	9	16	25	-4	9
n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$40\delta_6^{(0)}(n)$	24	1	20	1	24	9	-4	25	16	9

2.4. Сомос-7

Рекуррентное соотношение (3) имеет вид

$$p_7(n+4) + p_7(n-3) =$$
$$= \min\{p_7(n+3) + p_7(n-2), p_7(n+2) + p_7(n-1), p_7(n+1) + p_7(n)\}.$$

Следовательно,

$$q_7(n+1) + 2q_7(n) + 3q_7(n-1) + 3q_7(n-2) + 2q_7(n-3) + q_7(n-4) =$$
$$= \min\{q_7(n) + 2q_7(n-1) + 2q_7(n-2) + q_7(n-3), q_7(n-1) + q_7(n-2), 0\},$$

где

$$q_7(n) = \Delta^2 p_7(n)$$

— конечная разность второго порядка для $p_7(n)$.

Будем рассматривать последовательности $p_7^{(j)}(n)$ при $j = -3, -2, -1, 0$. Последовательность $p_7^{(-3)}(n)$ определяется начальными значениями

$$p_7(-3) = 1, \quad p_7(-2) = p_7(-1) = p_7(0) = p_7(1) = p_7(2) = p_7(3) = 0.$$

Следовательно,

$$q_7(-3) = 1, \quad q_7(-2) = q_7(-1) = q_7(0) = q_7(1) = 0,$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_7^{(-3)}(n)$	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1	1	-1

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q_7^{(-3)}(n)$	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	0	1	-1

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
$q_7^{(-3)}(n)$	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	

$$q_7^{(-3)}(n+30) = q_7^{(-3)}(n),$$

$$p_7^{(-3)}(n) = -\frac{1}{60}n^2 - \frac{1}{10}n + \delta_7^{(-3)}(n), \quad \delta_7^{(-3)}(n+30) = \delta_7^{(-3)}(n).$$

Таблица 9: $\delta_7^{(-3)}(n)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$60\delta_7^{(-3)}(n)$	51	-8	-5	0	7	16	27	-20	-5	12	31	-8	15	-20	7

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$60\delta_7^{(-3)}(n)$	36	7	-20	15	-8	31	12	-5	-20	27	16	7	0	-5	-8

Для $p_7^{(-2)}(n)$

$$p_7(-2) = 1, \quad p_7(-3) = p_7(-1) = p_7(0) = p_7(1) = p_7(2) = p_7(3) = 0,$$

$$q_7(-3) = -2, \quad q_7(-2) = 1, \quad q_7(-1) = q_7(0) = q_7(1) = 0,$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_7^{(-2)}(n)$	-2	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1	1

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q_7^{(-2)}(n)$	-1	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	0	1

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
$q_7^{(-2)}(n)$	-1	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	

$$q_7^{(-2)}(n+30) = q_7^{(-2)}(n),$$

$$p_7^{(-2)}(n) = -\frac{1}{60}n^2 - \frac{1}{15}n + \delta_7^{(-2)}(n), \quad \delta_7^{(-2)}(n+30) = \delta_7^{(-2)}(n).$$

Таблица 10: $\delta_7^{(-2)}(n)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$60\delta_7^{(-2)}(n)$	-3	56	-3	0	5	12	21	32	-15	0	17	36	-3	20	-15
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$60\delta_7^{(-2)}(n)$	12	41	12	-15	20	-3	36	17	0	-15	32	21	12	5	0

Для $p_7^{(-1)}(n)$

$$p_7(-1)=1,\quad p_7(-3)=p_7(-2)=p_7(0)=p_7(1)=p_7(2)=p_7(3)=0,$$

$$q_7(-3)=1,\quad q_7(-2)=-2,\quad q_7(-1)=1,\quad q_7(0)=q_7(1)=0,$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_7^{(-1)}(n)$	1	-2	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q_7^{(-1)}(n)$	1	-1	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	0
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
$q_7^{(-1)}(n)$	1	-1	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	

$$q_7^{(-1)}(n+30)=q_7^{(-1)}(n),$$

$$p_7^{(-1)}(n)=-\frac{1}{60}n^2-\frac{1}{30}n+\delta_7^{(-1)}(n),\quad \delta_7^{(-1)}(n+30)=\delta_7^{(-1)}(n).$$

Таблица 11: $\delta_7^{(-1)}(n)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$60\delta_7^{(-1)}(n)$	3	0	59	0	3	8	15	24	35	-12	3	20	39	0	23
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$60\delta_7^{(-1)}(n)$	-12	15	44	15	-12	23	0	39	20	3	-12	35	24	15	8

И, наконец, для $p_7^{(0)}(n)$

$$p_7(0)=1,\quad p_7(-3)=p_7(-2)=p_7(-1)=p_7(1)=p_7(2)=p_7(3)=0,$$

$$q_7(-3)=0,\quad q_7(-2)=1,\quad q_7(-1)=-2,\quad q_7(0)=1,\quad q_7(1)=0,$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_7^{(0)}(n)$	0	1	-2	1	0	0	0	0	-1	1	0	0
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q_7^{(0)}(n)$	-1	1	-1	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
$q_7^{(0)}(n)$	0	1	-1	0	0	0	0	1	-2	1	0	

$$q_7^{(0)}(n+30) = q_7^{(0)}(n),$$
$$p_7^{(0)}(n) = -\frac{1}{60}n^2 + \delta_7^{(0)}(n), \quad \delta_7^{(0)}(n+30) = \delta_7^{(0)}(n).$$

Таблица 12: $\delta_7^{(0)}(n)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$60\delta_7^{(0)}(n)$	9	4	1	60	1	4	9	16	25	36	-11	4	21	40	1
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$60\delta_7^{(0)}(n)$	24	-11	16	45	16	-11	24	1	40	21	4	-11	36	25	16

3. Заключение

Определим последовательность a_n (двучленная последовательность Гейла-Робинсона) с помощью рекуррентного соотношения

$$a_n a_{n-k} = \alpha a_{n-l} a_{n-k+l} + \beta a_{n-m} a_{n-k+m}$$

с любыми $0 < l < m < k$, а последовательность b_n (трехчленная последовательность Гейла-Робинсона) — с помощью соотношения

$$b_n b_{n-k} = \alpha b_{n-p} b_{n-k+p} + \beta b_{n-q} b_{n-k+q} + \gamma b_{n-r} b_{n-k+r},$$

где $p, q, r < k$ — любые попарно различные целые числа, удовлетворяющие условию $p + q + r = k$. Последовательности Сомос-k при $k = 4, 5, 6, 7$ являются частными случаями последовательностей Гейла-Робинсона. Имеются основания считать, что доказанную в работе теорему можно распространить на последовательности Гейла-Робинсона общего вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Propp. The Somos Sequence Site. http://faculty.uml.edu/jpropp/somos.html.
2. Gale D. The strange and surprising saga of the Somos sequences // Math. Intelligencer. 1991. Vol. 13, № 1. P. 40-42.
3. Gale D. Somos sequence update // Math. Intelligencer. 1991. Vol. 13, № 4. P. 49-50 (reprinted in Tracking the Automatic Ant., Springer-Verlag, New York, 1998).
4. Hone A.N.W. Elliptic curves and quadratic recurrence sequences // Bull. Lond. Math. Soc. 2005. Vol. 37. P. 161–171. Corrigendum, Bull. Lond. Math. Soc. 2006. Vol. 38. P. 741–742.
5. van der Poorten A.J., Swart C.S. Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos 4 is a Somos k // Bull. Lond. Math. Soc. 2006. Vol. 38. P. 546–554.
6. Hone A.N.W. Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359. P. 5019-5034.
7. Swart C.S., Hone A.N.W. Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 sequences // math.NT/0508094. 2008. 23 pp.

8. Yuri N. Fedorov, Anrew N.W. Hone. Sigma-function solution to the general Somos-6 recurrence via hyperelliptic Prym varieties // Journal of Integrable Systems. 2016. Vol. 1. P. 1–34.

9. Robinson R. Periodicity of Somos sequences // Proceedings of the AMS. 1992. Vol. 116, № 3. P. 613-619.

10. Fomin S., Zelevinsky A. The Laurent Phenomenon // Adv. Appl. Math. 2002. Vol. 28. P. 119-144.

11. Anrew N.W. Hone. Laurent Polynomials and Superintegrable Maps // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2007. Vol. 3, 022. 18 pp.

12. Nobe A. Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41, 125205. 12 pp.

13. Allan P. Fordy and Andrew Hone. Symplectic Maps from Cluster Algebras // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2011. Vol. 7, 091. 12 pp.

14. Nakata Y. The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations // arXiv:math/1701.04262v1. 2017. 13 pp.

15. Speyer D., Sturmfels B. Tropical mathematics // Math. Mag. 2009. Vol. 82, № 3. P. 163-173.

REFERENCES

1. J. Propp, "The Somos Sequence Site", http://faculty.uml.edu/jpropp/somos.html.

2. Gale D. 1991, "The strange and surprising saga of the Somos sequences", *Math. Intelligencer*, vol. 13, no.1, pp. 40-42.

3. Gale D. 1998, "Somos sequence update", *Math. Intelligencer*, vol. 13, no. 4, pp. 49-50 (reprinted in Tracking the Automatic Ant., Springer-Verlag, New York, 1998).

4. Hone A.N.W. 2006, "Elliptic curves and quadratic recurrence sequences", *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 37, pp. 161–171. Corrigendum, *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 38, pp. 741–742.

5. van der Poorten A.J., Swart C.S. 2006, "Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos 4 is a Somos k", *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 38, pp. 546–554.

6. Hone A.N.W. 2007, "Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 359, pp. 5019-5034.

7. Swart C.S., Hone A.N.W. 2008, "Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 sequences", *math.NT/0508094.*, 23 pp.

8. Yuri N. Fedorov, Anrew N.W. Hone. 2016, "Sigma-function solution to the general Somos-6 recurrence via hyperelliptic Prym varieties", *Journal of Integrable Systems*, vol. 1. pp. 1–34.

9. Robinson R. 1992, "Periodicity of Somos sequences", *Proceedings of the AMS*, vol. 116, no. 3, pp. 613-619.

10. Fomin S. and Zelevinsky A. 2002, "The Laurent Phenomenon", *Adv. Appl. Math.*, vol. 28, pp. 119-144.

11. Anrew N.W. Hone. 2007, "Laurent Polynomials and Superintegrable Maps", *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 3, 022, 18 pp.

12. Nobe A. 2008, “Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves“, *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 41, 125205, 12 pp.

13. Allan P. Fordy and Andrew Hone. 2011, “Symplectic Maps from Cluster Algebras“,*Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 7, 091, 12 pp.

14. Nakata Y. 2017, “ The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations“, *arXiv:math/1701.04262v1*, 13pp.

15. Speyer D., Sturmfels B. 2009, “Tropical mathematics“, *Math. Mag.*, vol. 82, no. 3, pp. 163-173.

Получено 14.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.