ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-105-117

Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова

Игорь Михайлович Буркин — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: i-burkin@yandex.ru

Оксана Игоревна Кузнецова — аспирант, Тульский государственный университет (г. Ту-

ла).

e-mail: oxxy4893@mail.ru

Аннотация

Мультистабильные системы и их динамические свойства являются интересными темами в нелинейной динамике. Небольшие различия в начальных условиях (например, изза ошибок округления при численных вычислениях) приводят к принципиально разным результатам для таких динамических систем, что делает долгосрочное предсказание их поведения практически невозможным. Это происходит, даже если такие системы являются детерминированными, то есть их будущее поведение полностью определяется выбором начальных условий без участия случайных элементов. Другими словами, детерминированная природа этих систем не делает их предсказуемыми. Поведение решений динамической системы зависит как от выбора их начальных условий, так и от значений входящих в систему параметров. Сосуществование нескольких аттракторов, или мультистабильность, соответствует одновременному существованию более одного нетривиального аттрактора для одного и того же набора параметров системы. Это явление было обнаружено почти во всех естественных науках, включая электронику, оптику, биологию. В последние годы усилия многих исследователей были направлены на создание так называемых мегастабильных систем, то есть систем, которые при постоянных значениях входящих в них параметров имеют счетное число сосуществующих аттракторов. Интерес к подобным системам обусловлен широким спектром их прикладного использования, например, для скрытия информации в системах коммуникаций и аудиосхемах шифрования, биомедицинской инженерии, нечетком управлении. В статье предлагаются методы синтезирования мегастабильных систем с использованием систем в форме Лурье. Мегастабильные системы, содержащие 1-D решетку хаотических аттракторов, удается получить, заменяя нелинейность в исходной системе на периодическую функцию. Путем замены на периодические функции некоторых переменных в исходной системе порядка п удается построить мегастабильную систему, содержащую n-D решетку хаотических аттракторов. В качестве одного из примеров в работе впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов. Вычисляются показатели Ляпунова и размерность Каплана-Йорке аттракторов, принадлежащих решеткам.

Ключевые слова: динамические системы, хаос, счетное число сосуществующих аттракторов, показатели Ляпунова, размерность Каплана-Йорке.

Библиография: 24 названий.

Для цитирования:

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова. Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 105–117.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 517.925

 $DOI\ 10.22405/2226\text{--}8383\text{--}2021\text{--}22\text{--}1\text{--}105\text{--}117$

Designing megastable systems with multidimensional lattice of chaotic attractors

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova

Igor Mikhailovich Burkin — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: i-burkin@yandex.ru

Oksana Igorevna Kuznetsova — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: oxxy4893@mail.ru

Abstract

Multistable systems and their dynamic properties are interesting topics in nonlinear dynamics. Small differences in the initial conditions (for example, due to rounding errors in numerical calculations) lead to completely different results for such dynamic systems, which makes a long-term prediction of their behavior practically impossible. This happens even if such systems are deterministic, that is, their future behavior is completely determined by the choice of initial conditions without the participation of random elements. In other words, the deterministic nature of these systems does not make them predictable. The behavior of the solutions of a dynamic system depends both on the choice of their initial conditions and on the values of the system parameters. The coexistence of several attractors, or multistability, corresponds to the simultaneous existence of more than one nontrivial attractor for the same set of system parameters. This phenomenon was discovered in almost all natural sciences, including electronics, optics, biology. In recent years, the efforts of many researchers have been aimed at creating so-called megastable systems, that is, systems that, at constant values of their parameters, have a countable number of coexisting attractors. Interest in such systems is due to a wide range of applications, for example, for hiding information in communication systems and audio encryption schemes, biomedical engineering and fuzzy control. The article proposes methods for the synthesis of megastable systems using systems in Lurie form. Megastable systems containing a 1-D lattice of chaotic attractors can be obtained by replacing the nonlinearity in the original system with a periodic function. By replacing some variables with periodic functions in the original system of order n, one can construct a megastable system containing an n-D lattice of chaotic attractors. As one example, a fourth-order system with a 4-D lattice of chaotic attractors is constructed for the first time. The Lyapunov exponents and Kaplan – Yorke dimension are calculated for attractors belonging to lattices.

Keywords: dynamical systems, chaos, countable number of coexisting attractors, Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke dimension.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova, 2021, "Designing megastable systems with multidimensional lattice of chaotic attractors", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 105–117.

1. Введение

В реальном физическом мире мультистабильность является достаточно распространенным явлением. Ее можно наблюдать, например, в динамических моделях газового лазера [1], биологических систем [2], волоконных лазеров [3], нейронных сетей [4], полупроводниковых суперрешеток [5]. Мультистабильность динамической системы, содержащей хаотические аттракторы, может создать угрозу в практических инженерных приложениях, поскольку поведение системы не может быть однозначно гарантировано. Такая система может демонстрировать решения с принципиально различным поведением в зависимости от выбора их начальных условий. После того как были найдены теоретические решения проблем борьбы с хаосом и синхронизации хаотических систем, многие исследователи обратились к задачам использования хаоса в технических системах. В настоящее время хаотические сигналы и системы широко используются при обнаружении слабого сигнала [6], в системах радиолокации [7], биомедицинской инженерии [23]. нечетком управлении [24], а также в шифровании изображений [8-10] и безопасной связи [11], поскольку в данном случае специальный выбор начальных условий может играть роль "секретного ключа".

Чем сложнее структура хаотической системы, тем больше возможностей она предоставляет для потенциального прикладного использования. Поэтому в последние годы появилось много работ, посвященных вопросам конструирования мегастабильных динамических систем, содержащих счетное число сосуществующих хаотических аттракторов [12-18]. В работах [12-15] мегастабильные системы, содержащие многомерные решетки хаотических аттракторов, строятся путем введения периодических функций в динамические системы, смещаемые по переменным (offset-boostable systems). Динамическую систему X = F(X), $(X = (x_1, x_2, ..., x_n))$ называют смещаемой по переменным, если существует замена переменных $y_k = x_k - c_k$, приводящая систему к виду Y = F(Y) + D, $(Y = (y_1, y_2, ..., y_n), C = (c_1, c_2, ..., c_n), D = (d_1, d_2, ..., d_n)$). Здесь при $k \in i_1, i_2, ..., i_m$, $(1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le n)$ постоянные $c_k \ne 0$ и $c_k = 0$ при $k \in 1, 2, ..., n$ $(i_1, i_2, ..., i_m)$. К смещаемым по переменным системам относятся, в частности, многомерные системы каскадного типа.

$$\dot{x} = y, \dot{y} = z, ..., \dot{u} = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, ..., x)$$
 (1)

Методы, построения мегастабильных систем, применяемые в упомянутых работах, позволяют конструировать системы n-го порядка, содержащие решетку хаотических аттракторов размерности не более чем n-1. Для систем, не являющихся системами каскадного типа, процедура введения периодических функций, позволяющая построить систему с многомерной решеткой аттракторов, оказывается намного сложнее, поскольку такая процедура может существенно менять динамику системы и приводить к разрушению ее аттракторов.

В работах [17,18] предложены методы конструирования мегастабильных систем с использованием систем в форме Лурье, то есть систем вида

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma), \sigma = c^T x, \tag{2}$$

где A — постоянная $n \times n$ — матрица, b и c — постоянные n — векторы, $f(\sigma)$ — непрерывная, кусочно-дифференцируемая скалярная функция. Известно множество примеров систем вида (2), обладающих хаотическими аттракторами [14-20]. Опираясь на эти примеры, можно строить мегастабильные системы, пользуясь приемами, предложенными в [17,18].

2. Методы конструирования мегастабильных систем на основе систем в форме Лурье

Динамическая система $\dot{X} = F(X), X \in \mathbb{R}^n$ называется системой с угловой координатой $\sigma = d^T X$, если существует вектор $d \in \mathbb{R}^n$ такой, что F(X+d) = F(X). Пусть I - единичная $n \times n$

- матрица, $\chi(p) = c^T (A - pI)^{-1} b$ - передаточная функция системы (2). Хорошо известно [19], что система (2) является системой с угловой координатой, если передаточная функция $\chi(p)$ этой системы невырожденная, det A = 0, а функция $f(\sigma)$ периодическая. При этом $d = \Delta s(c^T s)^{-1}$, где s - собственный вектор матрицы A, соответствующий ее нулевому собственному значению, а Δ - период функции $f(\sigma)$. Если при этом существует такое $x_0 \in \mathbb{R}^n$ что система (2) имеет аттрактор, целиком расположенный в полосе $\Pi = \{x : c^T x_0 < c^T x < c^T x_0 + \Delta\}$, то она имеет 1-D решетку идентичных аттракторов-клонов.

Суть одного из приемов конструирования мегастабильных систем, предложенного в [17,18], состоит в следующем. Пусть известна система вида (2) (с произвольной функцией $f(\sigma)$), имеющая хаотический аттрактор, расположенный в полосе П. Пусть существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что матрица $A + kbc^T$ имеет нулевое собственное значение. Заменив в этой системе функцию $f(\sigma)$ на функцию $g(\sigma) + k\sigma$, где $g(\sigma) - \Delta$ -периодическая функция, совпадающая с $f(\sigma) - k\sigma$ на $[0, \Delta]$, получим систему с угловой координатой, обладающую 1-D решеткой идентичных хаотических аттракторов.

Второй прием, предложенный в [17,18], основан на использовании следующего известного факта: система (2) с невырожденной передаточной функцией $\chi(p) = c^T (A-pI)^{-1} b$ неособым линейным преобразованием может быть приведена к системе каскадного типа (1). Если система (2) имела хаотический аттрактор, то заменив подходящим образом в новой системе переменные y, z, ..., u на периодические функции этих переменных можно построить динамическую систему, обладающую решеткой идентичных хаотических аттракторов, размерность которой не превышает n-1.

В настоящей работе предлагается метод конструирования мегастабильных систем, основанный на синтезе описанных приемов. Использование этого метода позволяет строить различные мегастабильные системы n-го порядка, обладающие n-D решеткой идентичных хаотических аттракторов-клонов.

3. Мегастабильные системы с 3-D решеткой хаотических аттракторов, построенные с использованием классической системы Чуа

Цепь Чуа – простейшая электрическая цепь, демонстрирующая режимы хаотических колебаний, была предложена профессором Калифорнийского университета Леоном Чуа в 1983 году. Математическая модель цепи Чуа имеет вид (2) с

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$f(\sigma) = m_1 \sigma + 0.5(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|).$$
 (3)

Система (2)-(3) исследовалась многими авторами при различных значениях входящих в нее параметров.

Пример 1. При $m_1=-1.1468, m_0=-0.1768, \alpha=8.4562, \beta=12.0732, \gamma=0.0052$ в работе [21] в системе (2)-(3) впервые был обнаружен скрытый хаотический аттрактор, который визуализируется численным интегрированием системы с начальными условием $x_0=(5.858,-0.369,8.369)$ и представлен на рисунке 1. Этот аттрактор имеет показатели Ляпунова $\Lambda_1=0.143, \Lambda_2=0, \Lambda_3=-1.135$ и размерность Каплана-Йорке $D_{KY}=2+(\Lambda_1+\Lambda_2)|\Lambda_3|^{-1}=2.126.$

Положим $k = -\beta(\gamma + \beta)^{-1}$, $\varphi(\sigma) = f(\sigma) - k\sigma$. Тогда матрица $A + kbc^T$ будет особой, а функция $\varphi(\sigma)$ будет иметь три нуля $\sigma = 0$, $\sigma = \pm (\gamma + \beta)\rho$, где $\rho = (m_0 - m_1)[\beta + m_1(\gamma + \beta)]^{-1}$.

Заменим функцию $\varphi(\sigma)$ на периодическую функцию $g(\sigma)$ периода $\Delta = -2(\gamma + \beta)\rho$, совпадающую с функцией $\varphi(\sigma)$ на $[(\gamma + \beta)\rho, -(\gamma + \beta)\rho]$. После этого заменим в исходной системе $f(\sigma)$ на $g(\sigma) + k\sigma$. Полученная таким образом система

$$\dot{x} = Ax + b(g(\sigma) + k\sigma), \sigma = c^T x,\tag{4}$$

является системой с угловой координатой и имеет 1-D решетку идентичных аттракторовклонов. Все эти аттракторы могут быть получены численным интегрированием системы (4) с начальными условиями $x_0 + jd$, $j \in \mathbb{Z}$, где $d = 2(-(\gamma + \beta)\rho, -\gamma\rho, \beta\rho)$ – собственный вектор матрицы $A + kbc^T$, соответствующий нулевому собственному значению. Фрагмент 1-D решетки аттракторов системы (4) представлен на рисунке 2. Все расчеты здесь и далее производились с использованием адаптированного метода Рунге-Кутта в пакете Mathcad.

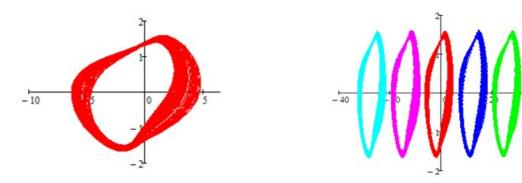


Рис. 1: Скрытый аттрактор системы (2)-(3). Рис. 2: 1-D решетка аттракторов системы (4).

Передаточная функция системы (4) имеет вид

$$\chi(p) = \frac{\alpha p^2 + \alpha(1+\gamma)p + \alpha(\beta+\gamma)}{p^3 + (\gamma+\alpha+1)p^2 + (\gamma+\beta+\alpha\gamma)p + \alpha\beta}$$

Поэтому система (4) неособым линейным преобразованием x = My с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha(\beta + \gamma) & -\alpha(1 + \gamma) & -\alpha \\ -\alpha\gamma & -\alpha & 0 \\ \alpha\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

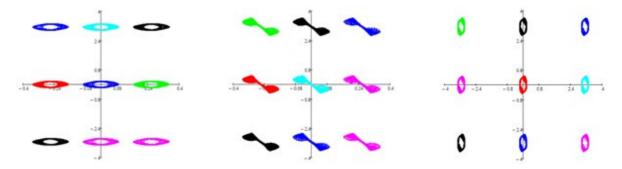
приводится к виду

$$\dot{y}_1 = y_2,
\dot{y}_2 = y_3,
\dot{y}_3 = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_2 y_3 + (g(\sigma) + k\sigma),
\sigma = -c_0 y_1 - c_1 y_2 - c_2 y_3,$$
(6)

где $a_0 = \alpha(\beta + \gamma)$, $a_1 = \gamma + \beta + \alpha \gamma$, $a_2 = \gamma + \alpha + 1$, $c_0 = \alpha(\beta + \gamma)$, $c_1 = \alpha(1 + \gamma)$, $c_2 = \alpha$. Система (6), очевидно, также имеет 1-D решетку идентичных хаотических аттракторов. Заменим теперь переменные y_2, y_3 в системе (6) на периодические функции $y_2 \to 0.49 sin(2y_2), y_3 \to 0.51 sin(2y_3)$. Получим систему

$$\dot{y}_1 = 0.49sin(2y_2),
\dot{y}_2 = 0.51sin(2y_3),
\dot{y}_3 = -a_0y_1 - 0.49a_1sin(2y_2) - 0.51a_2sin(2y_3) + (g(\sigma) + k\sigma),
\sigma = -c_0y_1 - 0.49c_1sin(2y_2) - 0.51c_2sin(2y_3).$$
(7)

Система (7) будет иметь 3-D решетку самовозбуждающихся хаотических аттракторов, проекции фрагментов которой на координатные плоскости приведены на рисунках 3-5.



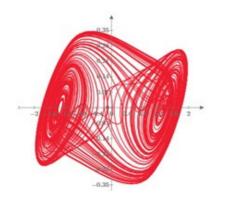
(x,y).

Рис. 3: Проекция на плоскость Рис. 4: Проекция на плоскость Рис. 5: Проекция на плоскость (x,z).

(y,z).

Все аттракторы решетки имеют показатели Ляпунова $\Lambda_1=0.293, \Lambda_2=0, \Lambda_3=-1.200$ и размерность Каплана - Йорке $D_{KY} = 2.244$.

Пример 2. Рассмотрим теперь систему (2)-(3) с $m_1 = -0.7143, m_0 = -1.099, \alpha = 9.8,$ $\beta = 13.37, \gamma = 0$. Хорошо известно [20], что при указанных значениях параметров система имеет double-scroll аттрактор, который представлен на рисунке 6.



Puc. 6: Double-scroll аттрактор системы (2)-(3).

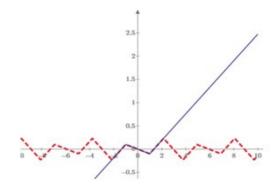


Рис. 7: Графики функций $\varphi(\sigma)$ (сплошная линия) и $g(\sigma)$ (пунктирная линия).

Положим $k=-1, \varphi(\sigma)=f(\sigma)+\sigma$. Тогда матрица $A-bc^T$ будет особой, а функция $\varphi(\sigma)$ будет иметь три нуля $\sigma = 0, \sigma = \pm \sigma_0, \sigma_0 = (m_1 - m_0)(m_1 + 1)^{-1}$. Заменим функцию $\varphi(\sigma)$ на $4.4\sigma_0$ -периодическую функцию $g(\sigma)$, совпадающую с $\varphi(\sigma)$ на $[-1.6\sigma_0, 1.6\sigma_0]$. Графики функций $\varphi(\sigma)$ и $g(\sigma)$ приведены на рисунке 7. При этом система (4) будет иметь 1-D решетку идентичных double-scroll аттракторов, фрагмент которой представлен на рисунке 8.

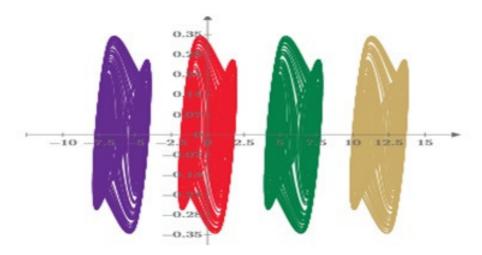


Рис. 8: Фрагмент 1-D решетки аттракторов системы (4).

Все аттракторы решетки, также как аттрактор на рисунке 6, имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1=0.3479, \Lambda_2=0, \Lambda_3=-3.0062$ и размерность Каплана - Йорке $D_{KY}=2.116$. Неособым преобразованием x=My с матрицей (5) приведем систему к виду (6). Заменим переменные y_2,y_3 в полученной системе на периодические функции $y_2\to 0.0625tan(16y_2),y_3\to 0.125tan(8y_3)$. Получим систему

$$\dot{y}_{1} = 0.0625tan(16y_{2}),
\dot{y}_{2} = 0.125tan(8y_{3}),
\dot{y}_{3} = -a_{0}y_{1} - 0.0625a_{1}tan(16y_{2}) - 0.125a_{2}tan(8y_{3}) + (g(\sigma) + k\sigma),
\sigma = -c_{0}y_{1} - 0.0625c_{1}tan(16y_{2}) - 0.125c_{2}tan(8y_{3}).$$
(8)

Система (8) имеет 3-D решетку самовозбуждающихся хаотических аттракторов, проекции фрагментов которой на координатные плоскости приведены на рисунках 9–11.

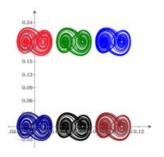


Рис. 9: Проекция на плоскость (x, y).

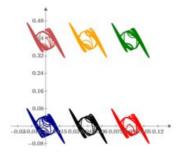


Рис. 10: Проекция на плоскость (x, z).

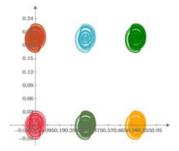


Рис. 11: Проекция на плоскость (y, z).

Все аттракторы 3-D решетки имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1=0.3098, \Lambda_2=0,$ $\Lambda_3=-3.3132$ и размерность Каплана - Йорке $D_{KY}=2.093.$

4. Система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов.

Процедуру конструирования системы с 4-D решеткой хаотических аттракторов начнем с построения системы вида (2) с угловой координатой, содержащей 1-D решетку хаотических аттракторов. Матрицу A и векторы b, c возьмем в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, i=1,2,3$ и $c_j, j=1,...,4$ – положительные числа. Тогда

$$det(A + kbc^{T} - pI) = p^{4} + (a_{3} + c_{4}k)p^{3} + (a_{2} + c_{3}k)p^{2} + (a_{1} + c_{2}k)p + c_{1}k$$

$$(9)$$

Коэффициенты полинома (9) подберем так, чтобы при k < 0 он имел один положительный корень и 3 корня с отрицательными вещественными частями, а при малых k > 0 все его корни располагались в левой открытой полуплоскости. Для этого достаточно потребовать выполнение условия $a_3a_2 > a_1$. Положим $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 3$. При выбранных значениях элементов матрицы A условия гурвицевости полинома (9) примут вид

$$c_3c_4k^2 + (3c_3 - c_2 + c_4)k + 2 > 0, (10)$$

$$(c_2k+1)[c_3c_4k^2 + (3c_3 - c_2 + c_4)k + 2] - c_1k(c_4k+3)^2 > 0.$$
(11)

Коэффициенты c_j подберем так, чтобы условие (10) выполнялось при всех k>0, а условие (11) нарушалось при некотором значении $k=k_0>0$. Тогда на некотором интервале (k_0,k_1) полином (9) будет иметь 2 отрицательных вещественных корня и два корня с положительными вещественными частями. Все перечисленные условия будут выполняться, если положить, например, $c_1=1, c_2=2, c_3=1, c_4=1.6$. При этом условия (10) и (11) выполнены при $k\in(0,0.537591)$ и $k\in(5,\infty)$.

При выбранных значениях параметров системы (2) плоскость (σ, f) разбивается на 4 сектора линейной устойчивости и неустойчивости: сектор $(-\infty,0)$ – сектор неустойчивости степени 1, сектор (0,0.53759) – сектор гурвицевости, сектор (0.537592,5) – сектор неустойчивости степени 2, наконец, сектор $(5,\infty)$ – сектор гурвицевости. Теперь подберем нечетную 2π - периодическую функцию $f(\sigma)$, имеющую 2 нуля на периоде такую, чтобы ее график на периоде попеременно пребывал в секторе линейной неустойчивости степени 2, секторе гурвицевости и секторе линейной неустойчивости степени 1. Если пребывание графика $f(\sigma)$ в каждом из секторов будет "достаточно длительным" то система с такой нелинейностью будет иметь либо устойчивый цикл, либо хаотический аттрактор, расположенный в полосе $\Pi = \{x : -\pi < c^T x < \pi\}$ [22]. Поскольку все состояния равновесия системы будут неустойчивыми, то бассейн притяжения аттрактора будет содержать сколь угодно малую окрестность одного из состояний равновесия. Поэтому такой аттрактор может быть визуализирован путем численного интегрирования с начальным условием из малой окрестности некоторого состояния равновесия системы на периоде.

Путем целенаправленного компьютерного поиска удается выбрать $f(\sigma) = 1.8 sin \sigma$. При таком выборе из окрестности нулевого состояния равновесия возбуждаются два симметричных хаотических аттрактора, проекции которых на плоскости $(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_4)$ представлены на рисунках 12-15.



Рис. 12: Проекция на Рис. 13: Проекция на Рис. 14: Проекция на Рис. 15: Проекция на плоскость (x_1, x_2) . плоскость (x_1, x_4) . плоскость (x_2, x_3) . плоскость (x_3, x_4) .

Из рисунков 12-15 видно, что "размах" аттракторов по координатам x_2, x_3, x_4 не превышает 2π , поэтому можно попытаться заменить каждую из переменных x_2, x_3, x_4 в полученной системе на некоторую 2π -периодическую функцию так, чтобы новая система имела пару симметричных хаотических аттракторов. Тогда такая система будет иметь 4-D решетку хаотических аттракторов-клонов.

Выполним замену: $x_2 \to 1.82 sin x_2, x_3 \to 1.29 sin x_3, x_4 \to 1.42 tan (0.5 x_4)$. Получим систему

$$\dot{x}_1 = 1.82sinx_2,
\dot{x}_2 = 1.29sinx_3,
\dot{x}_3 = -1.42tan(0.5x_4),
\dot{x}_4 = -1.82sinx_2 - 1.29sinx_3 - 4.26tan(0.5x_4) + 1.8sin[-x_1 - 3.64sinx_2 - 1.29sinx_3 - 2.272tan(0.5x_4)].$$
(12)

Фрагменты проекций 4-D решетки аттракторов системы (12) на координатные плоскости представлены на рисунках 16-19

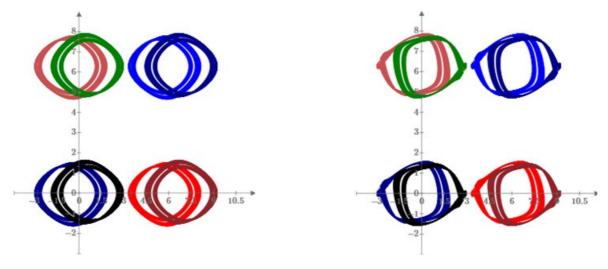


Рис. 16: Проекция на плоскость (x_1, x_2) .

Рис. 17: Проекция на плоскость (x_1, x_4) .

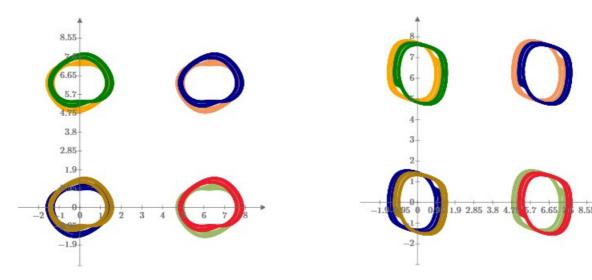


Рис. 18: Проекция на плоскость (x_2, x_3) .

Рис. 19: Проекция на плоскость (x_3, x_4) .

Все аттракторы 4-D решетки имеют показатели Ляпунова $\Lambda_1=0.054, \Lambda_2=0, \Lambda_3=-0.206,$ $\Lambda_4=-3.004$ и размерность Каплана - Йорке $D_{KY}=2.262.$

5. Заключение

В настоящей статье обсуждаются различные подходы к генерированию мегастабильных систем, содержащих бесконечную решетку хаотических аттракторов. Для генерирования мегастабильных систем используются системы в форме Лурье. Обсуждаются методы преобразования таких систем в системы со счетным числом сосуществующих хаотических аттракторов. Предлагаемый подход позволяет конструировать системы с бесконечной n-D решеткой хаотических аттракторов, используя многочисленные примеры существования хаотических аттракторов в n-мерных системах в форме Лурье. В данной работе такая возможность демонстрируется на примерах использования классической системы Чуа. Также впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов.

Метод построения многомерной решетки странных аттракторов имеет потенциальное применение в основанных на использовании хаоса инженерных приложениях, таких, например, как безопасная связь и обнаружение слабых сигналов, где начальные условия важны для определения динамики систем. В защищенной связи на основе хаоса непредсказуемость начального условия может дополнительно повысить безопасность связи. Хаос также имеет потенциальное применение в обнаружении слабых сигналов, потому что хаотические системы чувствительны к определенным сигналам, и в то же время невосприимчивы к шуму, в то время как мегастабильность с бесконечным количеством аттракторов обеспечивает возможность прерывистых переходов между порядком и хаосом, что полезно для обнаружения сигналов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Arecchi F. T , Meucci R., Puccioni G., Tredicce J. Experimental evidence of subharmonic bifurcations-multistability and turbulence in a Q-switched gas laser // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49(17):1217.
- 2. Laurent M., Kellershohn N. Multistability: a major means of differentiation and evolution in biological systems // Trends Biochem Sci. 1999. Vol. 24(11). P. 418–422.

- 3. Komarov A., Leblond H., Sanchez F. Multistability and hysteresis phenomena in passively mode-locked fiber lasers // Phys. Rev. A. 2005. Vol. 71(5):053809.
- 4. Zeng Z., Huang T., Zheng W. Multistability of recurrent neural networks with time-varying delays and the piecewise linear activation function // IEEE Trans Neural Netw. 2010. Vol. 21(8). P. 1371–1377.
- 5. Ying L., Huang D., Lai Y. C. Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 93(6):062204.
- 6. Wang G., He S. A quantitative study on detection and estimation of weak signals by using chaotic Duffing oscillators // IEEE Trans. on Circuits Syst.—I: Fund. Theor. Appl. 2003. Vol. 50, №7. P. 945-953.
- 7. Liu Z., Zhu X. H., Hu W., Jiang F. Principles of chaotic signal Radar // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, №5. P. 1735.
- 8. Guan Z. H., Huang F., Guan W. Chaos-based image encryption algorithm // Phys. Lett. A. 2005. Vol. 346, Nol. 1-3. P. 153-157.
- 9. Gao T., Chen Z. A new image encryption algorithm based on hyper-chaos // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372, №4. P. 394-400.
- 10. Xie E. Y., Li C., Yu S, Lü J. On the cryptanalysis of Fridrich's chaotic image encryption scheme // Signal processing. 2017. Vol.132. P. 150-154.
- 11. Wang S., Kuang J., Li J., Luo Y., Lu H., Hu G. Chaos-based secure communications in a large community // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 66, Art. no. 065202R.
- 12. Li C., Thio W. J.-C., Sprott J. C, Iu H. H. C., Xu Y., Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit // IEEE Access. 2018.Vol. 6. P. 29003–29012.
- 13. Li C., Sprott J. C., Hu W., Xu Y. Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system //Int. J. Bifurc. Chaos. 2017. Vol. 27(10): 1750160.
- 14. Lai Q., Chen S. Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system // Int. J. Bifurcation Chaos. 2016. Vol. 26, №11: 1650177.
- 15. Zhang X., Chen G. Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors // Chaos. 2017. Vol. 27, №7. Art. no. 071101.
- Sprott J. C., Jafari S., Abdul J. M. K., Kapitaniak T. Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping // Eur. Phys. J. Special Topics. 2017. Vol. 226. P. 1979-1985.
- 17. Burkin I. M., Kuznetsova O. I. On some methods for generating extremely multistable systems // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. 1368 042050.
- 18. Буркин И. М., Кузнецова О. И. Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье // Вестник СПбГУ, Математика, Механика, Астрономия. 2019. Т. 6(64), Вып. 4. С. 555-564.
- 19. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavyi A.I. Frequency Methods in Oscillation Theory //Kluwer Academic Publishers. 1996. 404 p.

- 20. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll Family // IEEE Transactions on Circuits Systems. 1986. Vol. CAS-33, №11. P. 1073-1118.
- 21. Брагин В. О., Вагайцев В. И., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа //Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. №4. С. 3-36.
- 22. Burkin I. M. The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems // Diff. Equations. 2002. Vol.38, №5. P. 615-625.
- 23. Chen C.-K., et al. A chaotic theoretical approach to ECG-based identity recognition [application notes] // IEEE Computational Intelligence Magazine. 2014. Vol. 9(1). P. 53-63.
- 24. Wu Z.-G., et al. Sampled-data fuzzy control of chaotic systems based on a T–S fuzzy model // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2014. Vol. 22(1). P. 153-163.

REFERENCES

- 1. Arecchi, F. T., Meucci, R., Puccioni, G. & Tredicce, J. 1982, "Experimental evidence of subharmonic bifurcations-multistability and turbulence in a Q-switched gas laser", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49(17):1217.
- 2. Laurent, M. & Kellershohn, N. 1999, "Multistability: a major means of differentiation and evolution in biological systems", *Trends Biochem Sci.*, vol. 24(11), pp. 418–422.
- 3. Komarov, A., Leblond, H. & Sanchez, F. 2005, "Multistability and hysteresis phenomena in passively mode-locked fiber lasers", *Phys. Rev. A.*, vol. 71(5):053809.
- 4. Zeng, Z., Huang, T. & Zheng, W. 2010, "Multistability of recurrent neural networks with time-varying delays and the piecewise linear activation function", *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 21(8), pp. 1371–1377
- 5. Ying, L., Huang, D. & Lai, Y. C. 2016, "Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices", *Phys. Rev. E.*, vol. 93(6):062204.
- 6. Wang, G. & He, S. 2003, "A quantitative study on detection and estimation of weak signals by using chaotic Duffing oscillators", *IEEE Trans. on Circuits Syst.-I: Fund. Theor. Appl.*, vol. 50, no.7, pp. 945-953.
- 7. Liu, Z., Zhu, X. H., Hu, W. & Jiang, F. 2007, "Principles of chaotic signal Radar", Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 17, no. 5, pp. 1735.
- 8. Guan, Z. H., Huang, F. & Guan, W. 2005, "Chaos-based image encryption algorithm", *Phys. Lett. A.*, vol. 346, no. 1-3, pp.153-157.
- 9. Gao, T. & Chen, Z. 2008, "A new image encryption algorithm based on hyper-chaos", *Phys. Lett. A.*, vol. 372, no. 4, pp. 394-400.
- 10. Xie, E. Y., Li, C., Yu, S. & Lü, J. 2017, "On the cryptanalysis of Fridrich's chaotic image encryption scheme", Signal processing, vol.132, pp.150-154.
- 11. Wang, S., Kuang, J., Li, J., Luo, Y., Lu, H. & Hu, G. 2012, "Chaos-based secure communications in a large community", *Phys. Rev. E.*, vol. 66, Art. no. 065202R.

- 12. Li, C., Thio, W. J.-C., Sprott, J. C, Iu, H. H. C. & Xu, Y. 2018, "Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit", *IEEE Access*, vol. 6. pp. 29003–29012.
- 13. Li, C., Sprott, J. C., Hu, W. & Xu, Y. 2017, "Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system", Int J Bifurc. Chaos, vol. 27(10): 1750160.
- 14. Lai, Q. & Chen, S. 2016, "Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system", *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 26, no. 11: 1650177.
- 15. Zhang, X. & Chen, G. 2017, "Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors", *Chaos*, vol. 27, no. 7. Art. no. 071101.
- Sprott, J. C., Jafari, S., Abdul, J. M. K. & Kapitaniak, T. 2017, "Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping", Eur. Phys. J. Special Topics, vol. 226. pp. 1979–1985.
- 17. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2019, "On some methods for generating extremely multistable systems", J. Phys.: Conf. Ser., 1368 042050.
- 18. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2019, "Generation of Extremely Multistable Systems Based on Lurie Systems", Vestnik St. Petersburg University, Mathematics, vol. 52, no. 4, pp. 342–348.
- 19. Leonov G.A., Burkin I.M. & Shepeljavyi A.I. Frequency Methods in Oscillation Theory. Kluwer Academic Publishers, 1996. 404 p.
- 20. Chua, L. O., Komuro, M. & Matsumoto, T. "The Double Scroll Family *IEEE Transactions on Circuits Systems*, 1986, vol. CAS-33, no. 11, pp. 1073–1118.
- 21. Bragin, V. O., Vagajcev, V. I., Kuznecov, N. V. & Leonov, G. A. 2011, "Algoritmy poiska skrytych kolebaniy v nelineynych sistemach. Problemy Ayzermana, Kalmana i zepi Chua [Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua's circuits.]", *Izvestia RAN*, vol. 4, pp. 3-36 (in Russian).
- 22. Burkin, I. M. 2002, "The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems", *Diff. Equations*, vol. 38, no. 5, pp. 615-625.
- 23. Chen, C.-K. 2014, "A chaotic theoretical approach to ECG-based identity recognition [application notes]", *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 9(1), pp. 53-63.
- 24. Wu, Z.-G. 2014, "Sampled-data fuzzy control of chaotic systems based on a T-S fuzzy model", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 22(1), pp. 153-163.

Получено 14.07.2020 г.

Принято в печать 21.02.2021 г.