ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-67-75

Замечание о теореме о среднем значении модуля *L*-функции Дирихле в критической полосе

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков

Людмила Геннадьевна Архипова — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

 $e ext{-}mail: arhipova@mi ext{-}ras.ru$

Владимир Николаевич Чубариков — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В статье продолжены исследования по обобщению и уточнению результата Р. Т. Турганалиева по выводу асимптотической формулы для среднего значения дзета-функции Римана в критической полосе с остаточным членом,имеющим степенное понижение. Нами найдена асимптотика среднего значения L-функции Дирихле в критической полосе, которая уточняет теорему Р.Т.Турганалиева о дзета-функции при всех значениях действительной части ($1/2 < \mathrm{Re}\, s \le 1$). Этот результат получен за счет другого использования оценок тригонометрических сумм на основе второй производной в экспоненте.

Ключевые слова: характеры Дирихле; функции Дирихле; дзетовая сумма, скрученная с характером Дирихле.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Л.Г.Архипова, В. Н. Чубариков. Замечание о теореме о среднем значении модуля *L*-функции Дирихле в критической полосе // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 67–75.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-67-75

The remark on the mean value theorem for the absolute value of Dirichlet L-function in the critical strip

L.G.Arkhipova, V. N. Chubarikov

Lyudmila Gennad'evna Arkhipova — candidate of physical and mathematical sciences, M. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics (Moscow). e-mail: arhipova@mi-ras.ru

Vladimir Nikolaevich Chubarikov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik 2009@live.ru

Abstract

We continue our researches concerning the generalization and improvement of R.T.Turganaliev's result that states an asymptotic formula for the mean value of the Riemann zeta function in the critical strip with power factor saving in the remainder term. We find an asymptotic for the mean value of Dirichlet L-function in the critical strip. This assertion improves R.T.Turganaliev's theorem for zeta-function in the whole interval $(1/2 < \text{Re } s \le 1)$. Our result is based on the special use of the estimation of exponential sums by second derivative test.

Keywords: Dirichlet's characters, Dirichlet's functions, the zeta-sum twisted together with the Dirichlet's character.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

L.G.Arkhipova, V. N. Chubarikov, 2021, "The remark on the mean value theorem for the absolute value of Dirichlet *L*-function in the critical strip", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 67–75.

1. Введение

В настоящей статье дан вывод асимптотики среднего значения модуля L — функций Дирихле в критической полосе. Мы продолжаем исследования Р.Т.Турганалиева [8], получившего впервые асимптотическую формулу со степенным понижением в остатке при $1/2 < \sigma < 1$ и при $T \to \infty$ среднего значения дзета-функции Римана

$$\int_{1}^{T} |\zeta(\sigma + it)| dt = c(\sigma)T + O(T^{\omega}), \omega = 5/4 - \sigma/2 + \varepsilon,$$

где $c(\sigma)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2/n^{2\sigma},\quad \alpha_n$ — коэффициенты разложения в ряд Дирихле функции $\zeta^{1/2}(s)$ при $\mathrm{Re}\,s>1\zeta,\quad \varepsilon>0$ — сколь угодно малая постоянная.

Ранее подобную асимптотику без остаточного члена нашли А.Е.Ингам [5], Г.Дэвенпорт [6] (см. [8],с.155). Здесь мы пользуемся идеей С.М.Воронина о замене конечного эйлеровского произведения на частичную сумму соответствующего ряда Дирихле, что приводит к степенному понижению в остатке.

Пусть q>1— натуральные числа, T>1— вещественное число, p— последовательность всех простых чисел, χ — примитивный характер Дирихле по модулю $q, s=\sigma+it$ — комплексная переменная, $0\leq\sigma\leq 1$ — критическая полоса L-функции Дирихле. При $\mathrm{Re}\,s=\sigma>1$ эта функция определяется абсолютно сходящимся рядом и бесконечным произведением

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 1. При $1/2 < \sigma < 1$ и $T \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$\int_{1}^{T} |L(s,\chi)| dt = C(\sigma,\chi)T + O\left(q^{1-\sigma}T^{3/2-\sigma}\ln(qT)\right),$$

 $e \partial e$

$$C(\sigma, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n^{2\sigma}},$$

причём коэффициенты $\alpha_n, n \geq 1$, определяются из разложения в ряд Дирихле при Res > 1 функции

$$L^{1/2}(s,\chi) = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}.$$

ЛЕММА 1. Пусть f''(x) — непрерывна на промежутке $a < x \le b$ и удовлетворяет условию

$$\frac{1}{A} \le |f''(x)| \le \frac{k}{A},$$

где k-nостоянная, причём $A \geq 5k$. Тогда для суммы

$$S = \sum_{a < x \le b} e^{2\pi i f(x)}$$

справедливо неравенство

$$S \ll \frac{b-a}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln U, U = \max\{b-a, A\}.$$

Доказательство см.[1], лемма 1, с.14.

2. Доказательство теоремы

Пусть, далее, σ_0 — некоторое фиксированное число, $0 < \sigma_0 \le \sigma \le 2, 2\pi \le |t| \le \pi T$. Тогда

$$L(s,\chi) = \sum_{1 \le n \le qT} \chi(n) n^{-s} + O(q^{1-\sigma} T^{-\sigma}), \tag{1}$$

что является следствием простейшего приближения дзета-функции Гурвица, задаваемой при ${\rm Re}\,s>1$ рядом

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}, 0 < \alpha \le 1,$$

начальным отрезком её ряда Дирихле

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{0 \le n \le T} \frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{T^{1-s}}{s-1} + O(T^{-\sigma}),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0 .

Тогда, используя разложение бинома в ряд, при $\sigma > 1$ находим

$$L^{1/2}(s,\chi) = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1/2} = \prod_{p} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} d(l) \left(\frac{\chi(p)}{p^s} \right)^l \right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s},$$

где при $m = \prod_{p|m} p^{l_m(p)}$, имеем

$$d_l = \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l-1)}{l!2^l} < 1, a_1 = 1, a_m = \chi(m) \prod_{p|m} d(l_m(p)).$$

Определим функцию

$$F(s) = \sum_{1 \le n \le \sqrt{qT}} \chi(n) a_n n^{-s}.$$

Имеем

$$F^{2}(s) = \sum_{1 \le n \le \sqrt{qT}} \chi(n) n^{-s} + \sum_{\sqrt{qT} < n \le qT} \chi(n) b_{n} n^{-s}.$$

Следовательно, воспользовавшись формулой (1), при $0 < \sigma_0 \le \sigma \le 2, |t| \le T$, получим

$$L(s,\chi) = F^{2}(s) + G(s) - H(s) + O(q^{1-\sigma}T^{-\sigma}).$$

где

$$G(s) = \sum_{\sqrt{qT} < n \le qT} \chi(n) n^{-s}, H(s) = \sum_{\sqrt{qT} < n \le qT} \chi(n) b_n n^{-s}.$$

Преобразуем интеграл

$$I = \int_{1}^{T} |L(s,\chi)| dt = I_1 + O(I_2) + O(I_3) + O(qT)^{1-\sigma},$$

где

$$I_1 = \int_{1}^{T} |F^2(s)| dt, I_2 = \int_{1}^{T} |G(s)| dt, I_3 = \int_{1}^{T} |H(s)| dt.$$

При $1/2 < \sigma < 1$ находим

$$I_{1} = \int_{1}^{T} |F^{2}(s)| dt = \sum_{m,n \leq \sqrt{qT}} \frac{\chi(n)\bar{\chi}(m)a_{n}a_{m}}{(mn)^{\sigma}} \int_{1}^{T} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt =$$

$$= T \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{a_{n}^{2}}{n^{2\sigma}} + O\left(\sum_{1 \leq m < n \leq \sqrt{qT}} \frac{1}{(mn)^{\sigma} \ln n/m}\right) + O\left(q^{1/2-\sigma}T^{3/2-\sigma}\right),$$

где ряд $\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^{2\sigma}}$ сходится при $\sigma>1/2$.

Оценим двойную сумму

$$\sum_{1 \le m < n \le \sqrt{qT}} \frac{1}{(mn)^{\sigma} \ln n/m} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

$$\Sigma_1 = \sum_{1 \le m < n/2 \le \sqrt{qT}} \frac{1}{(mn)^{\sigma} \ln (n/m)}, \Sigma_2 = \sum_{n/2 \le m < n \le \sqrt{qT}} \frac{1}{(mn)^{\sigma} \ln (n/m)}.$$

При $1/2 < \sigma < 1$ имеем

$$\Sigma_{1} \leq \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{n \leq \sqrt{qT}} n^{-\sigma} \right)^{2} \ll (qT)^{1-\sigma},$$

$$\Sigma_{2} \ll \sum_{n \leq \sqrt{qT}} n^{-2\sigma} \sum_{n/2 \leq m < n \leq \sqrt{qT}} \frac{1}{\ln (n/m)} \ll \sum_{n \leq \sqrt{qT}} n^{1-2\sigma} \sum_{1 \leq r \leq n/2} \frac{1}{r} \ll (qT)^{1-\sigma} \ln (qT).$$

Таким образом

$$I_1 = T \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^{2\sigma}} + O\left(q^{1/2-\sigma}T^{3/2-\sigma} + (qT)^{1-\sigma}\ln(qT)\right).$$

Перейдём к оценке интеграла I_2 . Воспользовавшись преобразованием Абеля в интегральной форме, при $\sqrt{qT} \le A < B \le 2A \le qT$ находим

$$G_1 = G_1(A;t) = \left| \sum_{A < n \le B} \chi(n) n^{-\sigma - it} \right| = C(B) B^{-\sigma} - \int_A^B C(u) d(u^{-\sigma}),$$

где

$$C(u) = \sum_{A < n \le u} \chi(n) n^{-it} = \sum_{A < n \le u} \chi(n) e^{-f(n)}, f(n) = \frac{t \ln n}{2\pi}, f'(n) = \frac{t}{2\pi n}, f''(n) = -\frac{t}{2\pi n^2}.$$

Отсюда получим

$$|G_1| \le A^{-\sigma} \max_{A < u \le B} |C(u)|.$$

Произведем замену переменной суммирования

$$n = qk + m, 1 \le m < q, \frac{A - m}{q} < k \le \frac{2A - m}{q}.$$

Тогда сумма C(u) примет вид

$$C(u) = \sum_{m=1}^{q-1} \chi(m) \sum_{A < qk+m \le u} e^{2\pi i f(qk+m)}.$$

Следовательно, по лемме 1 находим

$$|C(u)| \ll \frac{A^2}{\sqrt{q|t|}} + \frac{\sqrt{q^2|t|}}{A}.$$

При $A \leq u \leq 2A$ оценим |C(u)|. Имеем

$$|G_1| \ll \frac{A^{2-\sigma}}{\sqrt{q|t|}} + \frac{\sqrt{q^2|t|}}{A^{1+\sigma}}$$

Таким образом, при $A=qT2^{-r}, r\leq r_0=\min\left([\log_2 q]+1,[0,5\log_2(qT)]+1\right)$, справедливы соотношения

$$|G(s)| = \left| \sum_{\sqrt{qT} < n \le qT} \chi(n) n^{-s} \right| \le \sum_{1 \le r \le r_0} |G_1(qT2^{-r})| \ll$$
$$\ll (qT)^{-\sigma} q\sqrt{t} + (qT)^{1-\sigma} t^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$I_2 = \int_{1}^{T} |G(s)| dt \ll q^{1-\sigma} T^{3/2-\sigma}.$$

Теперь оценим I_3 . Имеем

$$I_3 = \int_{1}^{T} |H(s)| dt,$$

где

$$H(s) = \sum_{\substack{1 \le m \le \sqrt{qT} \ 1 \le n \le \sqrt{qT} \\ mn > \sqrt{qT}}} a_m a_n \chi(m) \chi(n) (mn)^{-s}.$$

Следовательно,

$$|H(s)| \le \sum_{m \le \sqrt{qT}} m^{-\sigma} \left| \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n \le \sqrt{qT}} a_n \chi(n) n^{-s} \right|.$$

Далее воспользуемся неравенством Коши. Получим

$$|H(s)|^{2} \leq \left(\sum_{m \leq \sqrt{qT}} m^{-\sigma}\right) \sum_{m \leq \sqrt{qT}} m^{-\sigma} \left| \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n \leq \sqrt{qT}} a_{n}\chi(n)n^{-s} \right|^{2} \leq \frac{(qT)^{(1-\sigma)/2} (H_{1} + H_{2})}{(H_{1} + H_{2})},$$

$$H_{1} = \sum_{1 \leq m \leq \sqrt{qT}} \sum_{1 \leq n \leq \sqrt{qT}} m^{-\sigma}n^{-2\sigma}a_{n}^{2} \ll (qT)^{(1-\sigma)/2},$$

$$H_{2} = \sum_{1 \leq m \leq \sqrt{qT}} m^{-\sigma} \sum_{1 \leq n_{1}, n_{2} \leq \sqrt{qT}} a_{n_{1}}a_{n_{2}}\chi(n_{1})\bar{\chi}(n_{2})(n_{1}n_{2})^{-\sigma} \left(\frac{n_{1}}{n_{2}}\right)^{it}.$$

Находим

$$I_3 = \int_1^T |H(s)| dt \le T^{1/2} \left(\int_1^T |H(s)|^2 dt \right)^{1/2} \le q^{1-\sigma/2} T^{(1-\sigma)/2} \left(\int_1^T (H_1 + H_2) dt \right)^{1/2}.$$

Используя оценку H_1 , имеем

$$\int_{1}^{T} H_1 \, dt \ll q^{(1-\sigma)/2} T^{1-\sigma/2}.$$

Для "недиагональных слагаемых", отвечающих сумме H_2 , получим

$$\left| \int_{1}^{T} H_{2} dt \right| \leq \sum_{\substack{1 \leq m \leq \sqrt{qT} \\ qT > mn_{1} > mn_{2} > \sqrt{qT}}} m^{-\sigma} \sum_{\substack{1 \leq n_{1}, n_{2} \leq \sqrt{qT} \\ qT > mn_{1} > mn_{2} > \sqrt{qT}}} (n_{1}n_{2})^{-\sigma} \left(\ln\left(n_{1}/n_{2}\right)\right)^{-1} \leq \sum_{\substack{m \leq \sqrt{qT} \\ qT > mn_{1} > mn_{2} > \sqrt{qT}}} (H_{2,m,1} + H_{2,m,2}),$$

где

$$H_{2,m,1} = \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_1 \le \sqrt{qT}} \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_2 \le 0, 5n_1} (n_1 n_2)^{-\sigma} \left(\ln\left(n_1/n_2\right)\right)^{-1},$$

$$H_{2,m,2} = \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_1 \le \sqrt{qT}} \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} \le 0, 5n_1 < n_2 \le n_1} (n_1 n_2)^{-\sigma} \left(\ln\left(n_1/n_2\right)\right)^{-1}.$$

Отсюда при $1/2 < \sigma < 1$ следует, что

$$H_{2,m,1} \le \frac{1}{\ln 2} \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_1 \le \sqrt{qT}} \left(\frac{n_1^{1-2\sigma}}{1-\sigma} + n^{-\sigma} \right) \ll (qT)^{1-\sigma},$$

$$H_{2,m,2} \le \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_1 \le \sqrt{qT}} \left(\frac{n_1^{1-2\sigma}}{1-\sigma} + n^{-\sigma} \right) \sum_{r < n_1} \frac{1}{r} \le (qT)^{1-\sigma} \ln (qT).$$

Стало быть,

$$|I_3| \le q^{1-\sigma} T^{3/2-\sigma} \ln^{1/2} (qT).$$

Теорема доказана.

3. Заключение

Представляет интерес уточнение остаточного члена в асимптотической формуле Р. Т. Турганалиева и обобщениях ее на *L*-ряды Дирихле. Важно исследовать средние значения на коротких промежутках. Полезным дополнением к этим результатам явились бы соответствующие омега-теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Физматлит. 1976, 120 с.
- 2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное М.: Физматлит. 1980, 144 с.
- 3. van der Corput J. G. Zahlentheoretische Abschätzungen// Math. Ann., 1921, 84, 53-79.
- 4. van der Corput J. G. Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem// Math. Ann., 1922, 87, 39–65.
- 5. Ingham A. E. Mean-value theorems and the Riemann zeta-function// Quart. J. Math., 1933, 4, 278–290.
- 6. Davenport H. Note on mean-value theorems for the Riemann zeta-function// J. Lond. Math. Soc., 1935, 10, 136–138.
- 7. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: И.Л. 1953.
- 8. Турганалиев Р. Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета-функции Римана// Труды Матем. ин-та АН СССР, 1981, 158, 203–226.
- 9. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)//$ Изв. АН СССР, сер.матем., 1958, **22**, № 2, 161–164.
- 10. Коробов Н. М. О нулях функции $\zeta(s)$ // Докл. АН СССР, 1958, 118, 231–232.
- 11. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения// Усп.матем.наук, 1958, **13**, вып.4, 185–192.
- 12. Richert H.-E.Zur Abschätzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma = 1//$ Math.Ann., 1967, **169**, No. 2, 97–101.
- 13. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их приложения// Тр.МИАН СССР, 1971, **112**, 241–255.
- 14. Arkhipov G., Buriev K. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neibourhood of the line Re(s) = 1// Integral Transforms and Special Functions, 1993, v.1, N_2 1, 1–7.
- 15. Дэвенпорт Γ . Мультипликатиная теория чисел. М.: Физматлит. 1971, 200 с.
- 16. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана М.: Физматлит. 1994, 376 с.
- 17. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел М.: Наука, 1983, 240 с.
- 18. Popov O. V. On Hadamard's method concerning zeros of the Riemann zeta-function// Integral Transforms and Special Functions, 1993, v.1, № 2, pp.143–144.

19. Попов О. В. Вывод современной границы нулей дзета-функции Римана по методу Адамара// Вестник МГУ, сер. 1,мат.,мех., 1994, № 1, 51–54.

REFERENCES

- 1. Vinogradov I. M. 1976, "Special variants of the method of trigonometric sums" - M.: Fizmatlit. 120 p.
- 2. Vinogradov I. M. 1980, "The method of trigonometric sums in number theory. 2nd ed., corrected and supplemented" - M.: Fizmatlit. 144 p.
- 3. van der Corput J. G. 1921, "Zahlentheoretische Abschätzungen"// Math. Ann., 84, pp. 53–79.
- 4. van der Corput J. G. 1922, "Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem"// Math. Ann., 87, pp. 39–65.
- 5. Ingham A. E. 1933, "Mean-value theorems and the Riemann zeta-function"// Quart. J. Math., 4, pp. 278–290.
- 6. Davenport H. 1935, "Note on mean-value theorems for the Riemann zeta-function"// J. Lond. Math. Soc., 10, pp. 136–138.
- 7. Titchmarsh E. K. 1953, "Theory of the Riemann zeta function" - Moscow: ILL.
- 8. Turganaliev R. T. 1981, "An asymptotic formula for the average values of the fractional power of the Riemann zeta function"// Works of Math. in-ta AN SSSR, 158, pp. 203–226.
- 9. Vinogradov I. M. 1958, "A new estimate of the ζ function (1+k)" // Izv. AN SSSR, ser.math., **22**, N_2 2, pp. 161–164.
- 10. Korobov N. M. 1958," On the zeros of the function $\zeta(s)$ " // Dokl. USSR Academy of Sciences, 118, pp. 231–232.
- 11. Korobov, N., M. 1958, "Estimates of trigonometric sums and their applications.nauk", 13, no. 4, pp. 185–192.
- 12. Richert H.-E. 1967, "Zur Abschätzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma = 1$ " // Math.Ann., **169**, no. 2, pp. 97–101.
- 13. Karatsuba A. A. 1971, "Estimates of trigonometric sums by the method of I.M. Vinogradov and their applications" // Tr. MIAN USSR, 112, pp. 241–255.
- 14. Arkhipov G., Buriev K. 1993, "Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neibourhood of the line Re(s) = 1" // Integral Transforms and Special Functions, vol.1, no. 1, pp, 1–7.
- 15. Davenport G. 1971, "Multiplicative number theory" - M.: Fizmatlit. 200 p.
- 16. Voronin S. M., Karatsuba A. A. 1994, "The Riemann zeta function" --- M.: Fizmatlit. 376 p.
- 17. Karatsuba A. A. 1983, "Fundamentals of analytical number theory" --- Moscow: Nauka, 240 p.
- 18. Popov O. V. 1993, "On Hadamard's method concerning zeros of the Riemann zeta-function" // Integral Transforms and Special Functions, vol.1, no. 2, pp. 143–144.

19. Popov O. V. 1994, "Derivation of the modern boundary of the zeros of the Riemann zeta function by the Hadamard method"// Vestnik MSU, ser. 1, mat., mech., no. 1, 51–54.

Получено 03.12.2020 г. Принято в печать 21.02.2021 г.