ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-396-421

О научных трудах Дмитрия Александровича Попова

В. М. Бухштабер, М. А. Королёв

Виктор Матвеевич Бухштабер — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (г. Москва).
e-mail: buchstab@mi-ras.ru

Максим Александрович Королёв — доктор физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (г. Москва).
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Аннотация

Настоящий очерк посвящён рассказу о жизни и научном творчестве замечательного российского математика Дмитрия Александровича Попова, отметившего свой 80-летний юбилей в августе 2019 г. Д.А. Попов внёс значительный вклад в математические основы рентгеновской, ультразвуковой и акустической томографии, теорию оценок осциллирующих интегралов, в задачи, связанные с распределением целых точек в круге на плоскости и в телах вращения. Особое место в очерке отводится недавним результатам юбиляра по проблемам связи спектра оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы с распределением простых чисел.

Ключевые слова: рентгеновская томография, ультразвуковая томография, акустическая томография, осциллирующие интегралы, целые точки, проблема круга, спектр оператора Лапласа, простые числа.

Библиография: 31 название.

Для цитирования:
В. М. Бухштабер, М. А. Королёв. О научных трудах Дмитрия Александровича Попова // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 396–421.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-396-421

On the scientific works of Dmitry Alexandrovich Popov

V. M. Buchstaber, M. A. Korolev

Victor Matveevich Buchstaber — Corresponding member of RAS, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: buchstab@mi-ras.ru
Maxim Aleksandrovich Korolev — doctor of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Abstract

The present essay tells about the life and the scientific creativity of the brilliant Russian mathematician Dmitry Aleksandrovich Popov, who has celebrated his 80th anniversary in August, 2019. D.A. Popov made a considerable contribution to the mathematical foundations of the X-ray, ultrasonic and acoustic tomography, to the theory of the oscillating integrals estimations and to the problems concerning the distribution of lattice points in the plain circle and in the bodies of rotation. A special attention is paid to the recent results of the anniversarian that demonstrate a connection between the spectrum of Laplace operator on the fundamental domain of modular group with the distribution of primes.

Keywords: X-ray tomography, ultrasonic tomography, acoustic tomography, oscillating integrals, lattice points, circle problem, Laplace operator spectrum, prime numbers.

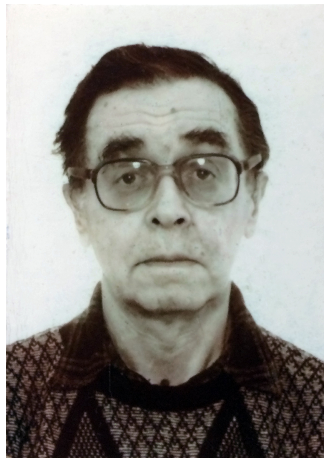
Bibliography: 31 titles.

For citation:
V. M. Buchstaber, M. A. Korolev, 2020, “On the scientific works of Dmitry Alexandrovich Popov”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 396–421.

1. Введение

26 августа 2019 года исполнилось 80 лет замечательному учёному Дмитрию Александровичу Попову. Научная деятельность Дмитрия Александровича столь многогранна, что мы посчитали необходимым обратиться к нему с предложением самому рассказать о своих научных достижениях и дать им оценку относительно выдающихся результатов, полученных его предшественниками в разделах науки, в которые он внёс значительный вклад. Наш текст адресован широкой аудитории; он содержит библиографическую информацию и рассказ о творческом пути юбиляра. Изложение использует текст, подготовленный Д.А. Поповым и рассказ о необычных деталях его биографии. Нас связывает с Д.А. Поповым многолетняя дружба и научное сотрудничество. Мы были свидетелями блестящих его выступлений на семинарах и знаем мнение о его результатах крупных специалистов по всем научным проблемам, о которых идёт речь далее. Всё это, естественно, нашло отражение в нашем тексте.

Дмитрий Александрович родился 26 августа 1939 года в Москве, в семье Александра Ивановича Попова и Зои Дмитриевны Шляховой, уроженцев Тульской губернии. Дед по отцовской линии, Иван Павлович Попов, имел в начале XX столетия небольшую колбасную лавку в городе Ефремове. В годы НЭП'а он был арестован и приговорен к ссылке в Сибирь. До окончания срока ему, как неизлечимо больному раком, было разрешено вернуться домой, после чего, примерно через год, он ушёл из жизни. Это случилось в начале 1930-х гг. У Ивана Павловича и его жены Екатерины Сергеевны было пятеро сыновей и дочь. До своей смерти в 1954 г. Екатерина Сергеевна жила в семье Александра Ивановича.



Дмитрий Александрович Попов

Отец, Александр Иванович Попов (1907-1994), в конце 1920-х гг. перебрался в Москву, где стал работать на стройке. Одним из зданий, в строительстве которых он принимал участие, стал Государственный театр киноактера на ул. Воровского[1]. Позже, окончив курсы сварщиков, он устроился на работу на Перовский вагоноремонтный завод. Накопленный за время учебы и работы колоссальный опыт по сварке позволил ему, не имевшему на тот момент высшего образования (он получил его позже, в середине пятидесятых), стать начальником цеха. Перед самой войной Александра Ивановича перевели на работу в Министерство путей сообщения, и таким образом он не попал на фронт. В годы войны ему, как специалисту по сварке, пришлось столкнуться с одной задачей, имевшей оборонное значение. Составы, доставлявшие в действующую армию горючее, нередко попадали под вражеский обстрел. Как быстро залатать пробоины, которые получали при этом цистерны с горючим? Сливать остатки топлива и варить заплаты на стенки пустой цистерны невозможно: пары топлива тут же воспламенялись, что приводило к взрыву. Александр Иванович предложил метод ремонта цистерн без их очистки в полевых условиях и сам участвовал в первых испытаниях, что было сопряжено с определённым риском. По окончании войны Александр Иванович продолжал работать в Министерстве путей сообщения, у затем перешёл на работу в Центральное конструкторское бюро по ремонту вагонов при заводе Войтовича[2], где проработал в должности главного инженера до выхода на на пенсию. Свой опыт он изложил в ряде книг по сварочному процессу[3].

Мама, Зоя Дмитриевна Шляхова (1908-1979), происходила по отцовской линии из дворянского рода Шляховых. Её предки по матери принадлежали к старинному купеческому роду Ивановых. Один из её дядьёв ещё до революции получил инженерное образование в Европе и в годы советской власти занимался строительством элеваторов. Мамин отец, Дмитрий

[1]Современный адрес – ул. Поварская, 33. Изначально здание предназначалось под "Центральный дом каторги и ссылки для Всероссийского общества бывших политкаторжан и ссыльнопоселенцев". Однако в связи с ликвидацией последнего в июне 1935 г. в нём разместился кинотеатр "Первый". В 1945 г. здание было передано Государственному театру киноактёра. В настоящее время оно причислено к объектам культурного московского наследия.

[2]Московский завод по модернизации и строительству вагонов имени В.Е. Войтовича. Располагался по адресу: Москва, ш. Энтузиастов, 4.

[3]В их числе, например: *А.И. Попов, В.К. Куркин*, Стахановские методы сварки паровозных деталей. М.: Трансжелдориздат, 1942.

Шляхов, своё первое образование получил в Германии, где выучился на астронома. Как и многие образованные люди в те годы, он считал своим долгом послужить народу. С этой целью он впоследствии получил высшее юридическое образование и занял судейскую должность в Тульской губернии. Он утонул, пытаясь во время очередного судебного расследования переправиться верхом на лошади по плотине на другой берег реки, разлившейся во время весеннего паводка. Его супруга вскоре умерла от тифа, и Зоя Дмитриевна осталась круглой сиротой. Её взяла к себе на воспитания мамина тётя Мария Дмитриевна Воронова (тетя Маня). У Д.А. Попова сохранилась светлая память о тёте Мане и её муже Андрее Васильевиче.

Зоя Дмитриевна после рождения сына целиком посвятила себя его воспитанию. Благодаря доброте и стремлению всем помочь её дом был центром притяжения для всех многочисленных родственников и друзей.

Дом в Москве, в котором поселились Александр Иванович и Зоя Дмитриевна, находился на Брестской улице. В первый год войны во двор дома попала бомба, и одна из двух частей дома, более ветхая, обрушилась. Вторая, где находилась квартира Поповых, уцелела, однако дом было решено снести. В 1941 г. Поповы уехали в эвакуацию – сначала в д. Пёстровка Пензенской области, потом – в г. Куйбышев. Однако уже в 1942 г. сотрудникам Министерства, где работал отец, было разрешено вернуть своих родных в Москву. Тогда семья Дмитрия Александровича поселилась в ведомственном доме на Беговой улице.

До 9 класса Дмитрий Александрович учился в 146-й школе, которая располагалась на той же Беговой улице. Когда она закрылась, его перевели в расположенную гораздо дальше от дома 689-ю школу на Скаковой улице, которую и окончил в 1956 году. В школьные годы Дмитрий Александрович увлёкся химией, чему способствовал школьный учитель. Другим его увлечением стала физика, интерес к которой пробудился в 7 классе после того, как его друг и одноклассник Лев Регельсон (в будущем - известный религиозный диссидент) дал прочесть книгу А. Эйнштейна "Эволюция физики"[4]. Эта книга увлекла Дмитрия Александровича, хотя в ней было много непонятного.

В старших классах Дмитрий Александрович почувствовал вкус к математике и самостоятельно изучил дифференциальное и интегральное исчисление так, что мог находить максимумы и минимумы функций. Тем не менее по окончании школы Дмитрий Александрович решил поступать на химический факультет Московского университета.

Запомнился вступительный экзамен по математике. Экзаменатор дал несколько сложных задач, которые Дмитрий Александрович решил без труда. После этого он дал ещё одну задачу – построить треугольник по трём биссектрисам. Такое построение, как известно, невозможно[5]. Дмитрий Александрович этого не знал и попытался вывести формулы для длин сторон треугольника аналитически, после чего на их основе произвести построение. Эти усилия не увенчались успехом: доказать неразрешимость тогда не удалось, хотя он вплотную подошёл к этому утверждению. Увидев в абитуриенте ярко выраженные математические способности, экзаменатор принялся безуспешно уговаривать Дмитрия Александровича подать документы на мех-мат.

Во время обучения на химическом факультете интерес Д.А. Попова переместился в сторону теоретической физики, которую он освоил в рамках знаменитого курса Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. После этого он приступил к систематическому изучению математики. Процесс самообразования продолжился и по окончании университета и постепенно включил в себя изучение функционального анализа, топологии, высшей алгебры, теории чисел и современной дифференциальной геометрии.

[4] *А. Эйнштейн, Л. Инфельд*, Эволюция физики: развитие идей от первоначальных понятий до теории относительности и квантов. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

[5] См., например: *Ю.И. Манин*, О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки. Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. М.: Физматлит, 1963, с. 205–227.

Дипломная работа Дмитрия Александровича была посвящена теории спектров одномерных кристаллов. После окончания университета Д.А. Попов в течение двух лет работал в Институте химической физики АН СССР, где занимался вопросами теории электронного парамагнитного резонанса в отделе Л.А. Блюменфельда.

В 1964 году, в связи с переводом отдела в Черноголовку, Д.А. Попов перешёл на работу во Всесоюзный научно-исследовательский институт источников тока (ВНИИТ), где и проработал до 1994 года, последовательно проходя должности младшего и старшего научного сотрудника, начальника лаборатории. ВНИИТ был режимным предприятием, но в нём существовал теоретический отдел, сотрудники которого пользовались относительной свободой. Работа в теоротделе оставляла много времени для самообразования и занятий наукой. Во время работы во ВНИИТ'е Д.А. Поповым были выполнены работы по теории полей Янга-Миллса[6], математическим вопросам томографии и оценкам осциллирующих интегралов.

В 1994 году по приглашению И.М. Гельфанда Д.А. Попов перешёл на работу в Институт физико-химической биологии имени А.Н. Белозерского МГУ, где и работает в настоящее время в должности старшего научного сотрудника.

Дмитрий Александрович оппонирует на защите докторской диссертации. 26 Декабря 2013 г.

Первые математические работы Д.А. Попова были посвящены некоторым задачам физикохимической гидродинамики [1]-[3]. По результатам этих работ была подготовлена кандидатская диссертация. Она была посвящена уравнениям в частных производных и, в частности, теории диффузионного пограничного слоя. Однако защита этой работы не состоялась в связи с ликвидацией на механико-математическом факультете МГУ кафедры физико-химической гидродинамики.

В начале восьмидесятых годов на мех-мате начал работать ряд семинаров по математическим проблемам современной физики. Д.А. Попов становится участником семинара под руководством тополога А.М. Виноградова, сокурсника академика С.П. Новикова. В ходе изучения теории Янга-Миллса Д.А. Поповым была дана формулировка этой теории на языке теории связностей в главных и векторных расслоениях и доказано, что гравитационное поле является полем Янга-Миллса [4], [5]. Эти результаты сразу привлекли внимание И.М. Гельфанда и Ю.И. Манина. И.М. Гельфанд пригласил Д.А. Попова выступить на его семинаре, а Ю.И. Манин посвятил изложению указанных результатов одну из своих лекций на

[6] Янг Чжэньни́н (р. 1922), китайский и американский физик; Роберт Лоуренс Миллс (1927-1999), американский физик.

механико-математическом факультете.[7] Они легли в основу защищённой в 1977 г. в МИАН им. В.А. Стеклова диссертации по специальности "Теоретическая и математическая физика". Инициатором защиты был С.П. Новиков.

В это же время в СССР начались работы по созданию рентгеновского томографа, и головным предприятием был выбран ВНИИТ. Внутри ВНИИТ'а основным исполнителем стал отдел, возглавляемый специалистом по математическим вопросам квантовой теории поля В.Н. Сушко, известным учеником Ф.А. Березина. Теоретическая лаборатория, начальником которой был Д.А. Попов, входила в этот отдел. В задачи лаборатории входило создание математической модели томографа, включая разработки алгоритмов восстановления и обработки томографических изображений. В процессе разработки алгоритмов восстановления возникли задачи, связанные с вычислением сингулярных сверток и равномерными оценками осциллирующих интегралов (О.И.)

Результаты Д.А. Попова по томографии были высоко оценены И.М. Гельфандом и С.Г. Гиндикиным и нашли отражение в опубликованных в США сборниках под их редакцией (см. [7], [9], [10]).

В 1994 г. И.М. Гельфанд решил организовать исследовательскую группу по проблемам томографии в университете г. Ратгерса (США) и предложил Д.А. Попову войти в эту группу. Дмитрий Александрович отказался, и тогда И.М. Гельфанд предложил ему перейти на работу в Московский государственный университет. Это предложение было с благодарностью принято. Переход в МГУ позволил Д.А. Попову продолжить занятия математикой. К этому времени его интерес переместился в сторону спектральной геометрии и теории чисел. В настоящее время он работает в Научно-исследовательском институте физико-химической биологии имени А.Н. Белозерского (который является одним из научных и образовательных подразделений МГУ) в должности старшего научного сотрудника и читает курс лекций "Численные методы в задачах обработки экспериментальных данных" студентам IV курса факультета биоинженерии и биоинформатики.

Полученные результаты о равномерных оценках осциллирующих интегралов легли в основу докторской диссертации Д.А. Попова. Инициатором защиты был А.А. Карацуба. Защита диссертации по специальности "Алгебра, математическая логика и теория чисел" состоялась в МИАН им. В.А. Стеклова 17 декабря 1998 г.

Наконец, нельзя не упомянуть, что в течение длительного ряда лет Дмитрий Александрович входил в руководство экспертным советом РФФИ по математике. Его научный авторитет и принципиальная позиция при принятии ответственных решений получили признание широкого круга математиков.

2. Математические вопросы рентгеновской томографии

С математической точки зрения, в рентгеновской томографии задача состоит в построении алгоритмов численного обращения преобразования Радона[8].

[7]Они вошли, в частности, в "Математическую энциклопедию", а также в ряд пособий по современной геометрии. См.: Математическая энциклопедия (под ред. И.М. Виноградова), Т.5 "Слу-Я". М.: "Советская энциклопедия", 1984. Стб. 1058-1060; *Б.А. Дубровин*, *С.П. Новиков*, *А.Т. Фоменко*, Современная геометрия. Методы и приложения, М.: Наука, 1986, ч. I, §42, задача на с. 41; *С.П. Новиков*, *И.А. Тайманов*, Современные геометрические структуры и поля, М.: МЦНМО, 2005, пример 2 на с. 558 (в двух последних изданиях авторство результата не указано; в учебнике трех авторов он помещён с пометкой "извлечение из современных работ").

[8]Преобразование Радона — интегральное преобразование функции многих переменных, родственное преобразованию Фурье. Введено в 1917 г. в работе австрийского математика Иоганна Карла Августа Радона (1887-1956).

Пусть $\mu(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}=(x,y)$, – функция с компактным носителем ($\mu(\mathbf{r})\equiv 0$ при $|\mathbf{r}|\geqslant L/2$) вида

$$\mu(\mathbf{r}) \,=\, \sum_{i=1}^{I} g_i(\mathbf{r})\chi_{D_i}(\mathbf{r}),$$

где χ_{D_i} – характеристическая функция области D_i и g_i – гладкие функции. Преобразование Радона $J(\varphi,q) = (\mathcal{R}\mu)(\varphi,q)$ – это интеграл функции $\mu(\mathbf{r})$ по прямой (φ,q) вида $\langle\mathbf{r},\boldsymbol{\eta}\rangle = x\cos\varphi+y\sin\varphi=q$. Формула обращения имеет вид

$$\mu(\mathbf{r}) \,=\, \bigl(\mathcal{R}^{-1}J\bigr)(\mathbf{r}) \,=\, (\mathcal{P}\Psi)(\mathbf{r}),$$

причем в этой формуле

$$(\mathcal{P}\Psi)(\mathbf{r}) \,=\, \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Psi\bigl(\varphi,\langle\mathbf{r},\boldsymbol{\eta}\rangle\bigr)\,d\varphi,$$
$$\Psi(\varphi,a) \,=\, \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{+\infty}\bigl(2J(\varphi,a)-J(\varphi,a+t)-J(\varphi,a-t)\bigr)\frac{dt}{t^2}.$$

Таким образом, $\mathcal{R}^{-1}$ – это суперпозиция сингулярной свертки и обратной проекции $\mathcal{P}$.

В своем простейшем варианте (без учета статистических и систематических ошибок, которые учтены в математической модели [9]) задача состоит в восстановлении $\mu(\mathbf{r})$ при условии, что известны величины $J(\varphi_k,q_j)$,

$$\varphi_k \,=\, k\Delta\varphi,\quad k=0,1,\dots,2N_\varphi-1,\quad \Delta\varphi=\frac{\pi}{N_\varphi},$$
$$q_j=j\Delta q,\quad j=0,\pm1,\pm2,\dots,\quad L\Delta\varphi=\Delta q.$$

При этом практический интерес представляют только алгоритмы высокого разрешения, позволяющие локализовать границы ∂D_i с точностью $\sim\Delta q$. Само существование таких алгоритмов является нетривиальным фактом.

Алгоритм A свертки и обратной проекции (также в своём простейшем варианте) имеет вид

$$\mu^A(\mathbf{r}) \,=\, \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N_\varphi-1}\Psi^A(\varphi_k,\langle\mathbf{r},\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{k}}\rangle)\Delta\varphi,\quad \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{k}}=(\cos\varphi_k,\sin\varphi_k),$$
$$\Psi^A(\varphi_k,a) \,=\, \sum_{j=-\infty}^{+\infty}H^A(a-q_j)J(\varphi_k,q_j)\Delta q.$$

В последней формуле $H^A(s)$ – некоторая регуляризация обобщенной функции $(2(\pi s)^2)^{-1}$ и

$$\widehat{H}^A(\lambda) \,=\, \frac{|\lambda|}{2\pi}\,R^A(\lambda),\quad R^A(\lambda) \,=\, \Omega S^A(\xi),\quad \xi=\lambda\Omega^{-1},\quad \Omega=\pi/\Delta q,$$

где $\widehat{H}^A(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $H^A(s)$, причём величина $S^A(\xi)$ достаточно быстро убывает при $\xi\to+\infty$, и $S^A(\xi)\sim 1$ при $|\xi|<1$. Такой вид функции $R^A(\lambda)$ связан с требованием высокого разрешения.

Результат восстановления $\mu^A(\mathbf{r})$, таким образом, зависит от одного малого параметра Δq. Естественно возникает вопрос о сходимости $\mu^A(\mathbf{r})$ к $\mu(\mathbf{r})$ при $\Delta q\to 0$. Для обеспечения сходимости надо решить вопрос о построении сходящихся квадратурных формул для вычисления интеграла $\Psi^A(\varphi,q)$, в котором подынтегральная функция сингулярным образом зависит от шага дискретизации Δq.

Теория построения алгоритмов высокого разрешения для вычисления сингулярных свёрток заложена в совместных работах Д.А. Попова и его ученика Д.В. Сушко (см. [6], [10]). В них доказаны условия на регуляризатор $R^A(\lambda)$, обеспечивающие сходимость. В рассматриваемом случае эти условия имеют вид $S^A(2p) = 0$, $p = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (величина $S^A(\xi)$ определена выше). Сходимость алгоритма A доказана в работах [7], [8], [13].

Ошибка восстановления $\Delta\mu^A(\mathbf{r}) = \mu^A(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде

$$\Delta\mu^A(\mathbf{r}) \,=\, \Delta\mu^A_R(\mathbf{r}) \,+\, \Delta\mu^A_T(\mathbf{r}),$$

где $\Delta\mu^A_R(\mathbf{r})$ – ошибка регуляризации, $\Delta\mu^A_T(\mathbf{r})$ – ошибка дискретизации. Для доказательства достаточно рассмотреть случай $\mu(\mathbf{r}) = \chi_D$. Доказательство сходимости алгоритма A основано на представлении величины $\Delta^A_T(\mathbf{r})$ в виде двойного ряда трехмерных О.И. и в случае $\mu(\mathbf{r}) = \chi_D$

$$\Delta\mu^A_T(\mathbf{r}) \,=\, \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{m,n\neq 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} d\xi \int_{\partial D} ds\, e^{-i\Omega\Phi_{n,m}(\varphi,\xi,s)} u_n(\varphi,\xi).$$

Скорость поточечной сходимости характеризуется показателем сходимости $\sigma^A(\mathbf{r})$ таким, что

$$\left|\mu^A(\mathbf{r}) \,-\, \mu(\mathbf{r})\right| \,=\, O(\Omega^{-\sigma^A(\mathbf{r})}), \quad \Omega \to +\infty.$$

Ограничимся случаем, когда ∂D – гладкая кривая. Обозначим через $T(\partial D)$ объединение касательных к ∂D, $T_0(\partial D) = \cup_i T(s^0_i)$ – объединение касательных, проведенных через точки уплощения $\mathbf{r}(s^0_i)$ и p_i – порядок точки уплощения, т.е. $\kappa(s^0_i) = \ldots = \kappa^{(p_i-1)}(s^0_i) = 0$, $\kappa^{(p_i)}(s^0_i) \neq 0$, где $\kappa(s)$ – кривизна ∂D в точке $\mathbf{r}(s)$.

В работе [13] доказано, что при $\mathbf{r} \notin \partial D$

$$\sigma^A(\mathbf{r}) \,=\, \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \mathbf{r} \in T(\partial D), \mathbf{r} \notin T_0(\partial D), \\ \dfrac{1}{p+1}, & \mathbf{r} \in \cup_i T(s^0_i), p = \max p_i, \\ \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{q+2}, & \mathbf{r} \notin T(\partial D), \end{cases}$$

где q – максимальный порядок нуля функции $f(s) = \dfrac{d}{ds}\langle \mathbf{r}, d\mathbf{r}/ds\rangle$.

Приведённый результат основан на доказанных в работе [11] равномерных оценках О.И. Указанные асимптотические оценки являются следствием соответствующих неравенств, имеющих место для конечных Δq. Доказательство основано на том, что фазы $\Phi_{n,m}(\varphi,\xi,s)$ как функции (φ,ξ) имеют только невырожденные критические точки и, следовательно, все особенности фаз $\Phi_{n,m}(\varphi,\xi,s)$ имеют тип A_k по классификации, принятой в теории особенностей.

Алгоритм A не является трансляционно инвариантным и геометрия артефактов на томограмме (т.е. ошибок $\Delta\mu^A(\mathbf{r})$) связана с геометрией обобщенных педальных кривых, задаваемых для контура ∂D уравнениями

$$\mathbf{r}^{\pm}_{\gamma}(s) \,=\, \mathbf{r}(s) - \frac{d\mathbf{r}}{ds}\langle \mathbf{r}(s), \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s)\rangle \,\pm\, \gamma\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s), \quad \gamma = \frac{Lm}{n}.$$

Эти кривые входят в каустики фаз $\Phi_{n,m}$.

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. В работах [7]-[9], [13] дано математически строгое обоснование рентгеновской томографии, а построенная в них математическая модель позволяет проектировать рентгеновские томографы.

На Конференции по теории чисел и приложениям в честь 80-летия А.А. Карацубы. 25 мая 2017 г.

3. Равномерные составные оценки осциллирующих интегралов

Осциллирующие интегралы – это интегралы вида

$$J_n \;=\; J_n[u|\Omega] \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})e^{i\Omega\Phi(\mathbf{x})}d\mathbf{x}.$$

По традиции, гладкие функции $u(\mathbf{x})$ и $\Phi(\mathbf{x})$ называются, соответственно, амплитудой и фазой; вещественный параметр Ω неограниченно возрастает: $\Omega \to +\infty$.

Для приложений необходимо знать, окрестности каких точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ вносят наибольший вклад в величину J_n. В одномерном случае такими "особыми" точками будут нули производной $\Phi'(x)$. Вклад от такой точки определяется, грубо говоря, порядком роста наименьшей по порядку производной $\Phi(x)$, отличной в этой точке от нуля. Соответствующие утверждения давно и успешно применяются в различных областях математики и, в частности, аналитической теории чисел (Й.Г. ван дер Корпут, И.М. Виноградов и др.).

При $n \geqslant 2$ картина оказывается более сложной. Как и в одномерном случае, здесь приходится исследовать критические точки, в которых обращается в ноль градиент функции $\Phi(\mathbf{x})$, т.е. вектор

$$\operatorname{grad}\Phi \;=\; \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right\}.$$

Однако определяющую роль играет и гессиан $H(\Phi)$ функции $\Phi(\mathbf{x})$, т.е. определитель матрицы

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,\,j=1}^{n}.$$

Если в особой точке гессиан отличен от нуля (невырожденная критическая точка), то в силу леммы Морса в окрестности такой точки с помощью гладкой замены переменных функция $\Phi(\mathbf{x})$ приводится к квадратичной форме канонического вида и вопрос об асимптотическом вкладе особой точки в интеграл J_n решается сравнительно просто. Гораздо более сложным оказывается случай, когда в особой точке гессиан обращается в нуль. Однако и здесь вопрос об асимптотическом вкладе в J_n в принципе решён, в рамках теории особенностей.

Совсем иначе обстоит дело с равномерными оценками О.И., которые наиболее важны для приложений. Именно этой, очень трудной проблеме, и посвящён ряд работ Д.А. Попова.

В статье [11] рассматривается следующая постановка задачи о равномерной оценке О.И. Пусть задан О.И.

$$J_n[u|\mathbf{t},\Omega] = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})e^{i\Omega\Phi(\mathbf{x})}d\mathbf{x}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

в котором как фаза $\Phi(\mathbf{x})$, так и амплитуда $u(\mathbf{x})$ зависят от m-мерного параметра $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)$, $\mathbf{t} \in T \subset \mathbb{R}^m$. Требуется построить разбиение $T = \bigcup_i T_i(\Omega)$ такое, что при $t \in T_i(\Omega)$, $\Omega > \Omega_i(\mathbf{t})$ и любом $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$\big|J_n[u|\mathbf{t},\Omega]\big| \leqslant C_i(u,\mathbf{t})\,\Omega^{-\alpha_i+\varepsilon}, \quad \alpha_i > 0,$$

в которых явно указаны константы $C_i(u,\mathbf{t})$. При этом такие оценки должны быть асимптотически точными для любого $t \in T \setminus \mathcal{K}^h$, где $\mathcal{K}^h$ – узкая (ширины $h \sim \Omega^{-\beta}$, $\beta > 0$) окрестность каустики $\mathcal{K} \subset T$ и равномерно (по $\mathbf{t}$) асимптотически точными при $\mathbf{t} \in \mathcal{K}^h$. Принципиальным является то, что указанное разбиение $T = \bigcup_i T_i(\Omega)$ зависит от Ω. Такая постановка задачи является новой и отличается от принятой в теории особенностей. Полученные оценки позволяют, в частности, рассматривать оценки бесконечных рядов О.И., что было необходимо для решения задач п. 1.

Существование нужного разбиения $T = \bigcup_i T_i(\Omega)$ неочевидно и требует доказательства. В простейшем случае интеграла Эйри, для которого $\Phi(x,t) = \frac{1}{3}\,x^3 - tx$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ получаемые оценки имеют вид

$$\big|J_n[u|t,\Omega]\big| \leqslant \begin{cases} C_1(u)\,t^{-1/4}\Omega^{-1/2}, & C\Omega^{-2/3} < t \leqslant 1, \\ C_2(u)\,\Omega^{-1/3}, & 0 \leqslant t \leqslant C\Omega^{-2/3}. \end{cases}$$

В случае интеграла Пирси ($\Phi(x,t) = \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{2}\,ax^2 + bx$) получаемое разбиение включает в себя 6 областей и не во всех из них оценки определяются вкладом критических точек.

В работе [11] задача получения равномерных составных оценок решена для фаз, все особенности которых имеют тип A_k. Случаи особенностей $D_4^\pm, D_5^\pm$ рассмотрены в работе [20]. Уже для особенностей $D_4^\pm$ речь идёт о построении двумерного аналога известных равномерных оценок одномерных О.И., принадлежащих И.М. Виноградову и Й.Г. ван дер Корпуту. В то время обсуждался результат И. Колен де Вердьера, в котором были заявлены равномерные оценки О.И. с простыми или параболическими особенностями. Этот результат состоит в том, что для простых или параболических особенностей оценки, соответствующие невырожденным критическим точкам, верны вплоть до каустики. С такой формулировкой он вошёл в известную книгу В.И. Арнольда, А.Н. Варченко и С.М. Гусейн-Заде[9]. Д.А. Попов показал, что результат Колен де Вердьера неверен уже для интегралов Пирси. Он обсудил этот результат с В.И. Арнольдом, который признал, что это стало для него сюрпризом. Итогом обсуждения стало появление комментария Д.А. Попова в сборнике задач Арнольда[10]. Полученные в [11] оценки до сих пор превосходят по точности все известные оценки для интеграла Пирси и преобразования Фурье характеристических функций двумерных областей.

Приложение полученных оценок в задаче томографии было рассмотрено выше. О других приложениях будет сказано в п.п. 3, 4.

[9] *В.И. Арнольд, А.М. Варченко, С.М. Гусейн-Заде*, Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.

[10] См.: Arnold's Problems, V.I. Arnold (ed.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York & PHASIS, Moscow, 2005; комментарий к задаче № 3 под 1981 г.

4. Сферическая сходимость интегралов и рядов Фурье индикаторов областей

В работе [12] рассмотрена задача о поточечной сходимости общих сферически-симметричных методов суммирования интегралов и рядов Фурье характеристических функций двумерных областей. Ограничимся результатами о методе суммирования по шарам.

Сформулируем рассматриваемую задачу для интеграла Фурье в N-мерном случае. Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $f(\mathbf{x})$ – её характеристическая функция и

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \,=\, \int_D e^{i\langle \boldsymbol{\omega},\mathbf{x}\rangle} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Результатом суммирования по шарам является функция

$$f_\Omega(\mathbf{x}) \,=\, \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\boldsymbol{\omega}|<\Omega} e^{-i\langle \boldsymbol{\omega},\mathbf{x}\rangle} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}.$$

Задача состоит в исследовании зависимости от $\mathbf{x}$ ошибки восстановления

$$\Delta_\Omega(\mathbf{x}) = |f_\Omega(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|.$$

Ниже привлечены только асимптотические результаты (при $\Omega \to +\infty$), хотя в работе [11] при $N = 2$ содержатся оценки $\Delta_\Omega(\mathbf{x})$ при конечных Ω. В двумерном случае приведённые ниже результаты основаны на равномерных оценках величины $|f_\Omega(\mathbf{x})|$, полученных в работе [11].

При $\Omega \to +\infty$ задача состоит в исследовании зависимости от $\mathbf{x}$ показателя сходимости $\sigma(\mathbf{x})$, такого, что при $\mathbf{x} \notin \partial D$

$$|\Delta_\Omega(\mathbf{x})| \,=\, O\big(\Omega^{-\sigma(\mathbf{x})}\big), \quad \Omega \to +\infty.$$

Приведём некоторые результаты, полученные в [12] для двумерного случая.

Пусть граница ∂D состоит из конечного числа гладких дуг, имеющих точки уплощения $\mathbf{r}(s_i^0)$ порядка p_i. Особые точки эволюты Γ – это образы вершин $\mathbf{r}(s_\alpha)$, точек, где кривизна $\kappa(s)$ имеет экстремум порядка j_α ($\kappa^{(1)}(s_\alpha) = \ldots = \kappa^{(j_\alpha - 1)}(s_\alpha) = 0$, $\kappa^{(j_\alpha)}(s_\alpha) \neq 0$). Пусть, далее, $\Gamma_0 \in \Gamma$ – множество особых точек эволюты. В работе [12] доказано:

1) если из точки $\mathbf{r}$ можно опустить нормаль на ∂D, то $\sigma(\mathbf{r}) = 1$, если $a \notin \Gamma$, $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{5}{6}$, если $a \in \Gamma, a \notin \Gamma_0$, и $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} + 1/(j(\mathbf{r}) + 2)$, если $a \in \Gamma_0$ (здесь $j(\mathbf{r}) = \max_\alpha j_\alpha(\mathbf{r})$);

2) если контур ∂D – кусочно-гладкий и из точки $\mathbf{r} \notin \partial D$ нельзя опустить нормаль на ∂D, то $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{3}{2}$;

3) $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}$ только если D – круг и $\mathbf{r}$ – его центр.

В работе [12] рассмотрен и случай, когда ∂D содержит отрезки прямых.

В случае ряда Фурье предполагается, что $\partial D \in [\pi, \pi]$ и $f^T(\mathbf{x})$ – результат периодического продолжения характеристической функции D. В результате суммирования по шарам получаем функцию

$$f_\Omega^T(\mathbf{r}) \,=\, \sum_{|\mathbf{n}|<\Omega} a_{\mathbf{n}} e^{i\langle \mathbf{n},\mathbf{r}\rangle}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad a_{\mathbf{n}} \,=\, \frac{1}{4\pi^2}\,\hat{f}(-\mathbf{n}), \quad \mathbf{r} \in [\pi, \pi]^2$$

и показатель сходимости $\sigma^T(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \notin \partial D$, определяется из условия

$$|\Delta_\Omega^T f(\mathbf{r})| \,=\, \big|f_\Omega^T(\mathbf{r}) \,-\, f^T(\mathbf{r})\big| \,=\, O\big(\Omega^{-\sigma^T(\mathbf{r})}\big), \quad \Omega \to +\infty.$$

Задача получения аналогичных оценок для двумерного ряда Фурье сталкивается с двумя трудностями. Во-первых, величины $\Delta_\Omega^T f(\mathbf{r})$ теперь представляются в виде двойного ряда О.И. Во-вторых, аналог эволюты может всюду плотно покрывать квадрат $[\pi, \pi]^2$.

При указанных выше условиях на ∂D в [12] доказано, что $\sigma^T(\mathbf{r}) \geqslant \frac{1}{2}$. При дополнительных предположениях этот результат можно улучшить. В частности, если ∂D – выпуклый контур, то $\sigma^T(\mathbf{r}) \geqslant \frac{3}{4}$, а для контура общего положения $\sigma^T(\mathbf{r}) \geqslant \frac{29}{54}$.

Вопрос о поведении величины $\sigma(\mathbf{x})$ для интеграла Фурье при $N \geqslant 3$ рассматривался в работе [14]. Роль эволюты в этом случае играет фокальная поверхность $\mathcal{K}$. В работе [14] на основе теории особенностей получены следующие результаты:

1) если $\mathbf{x} \notin \mathcal{K}$, то $\sigma(\mathbf{x}) = 1$;

2) размерность области расходимости (т.е. области, где $\sigma(\mathbf{x}) \leqslant 0$) не превосходит $N-3$;

3) если ∂D – гиперповерхность общего положения и $N \leqslant 10$, то существует стратификация поверхности

$$K = \bigcup_{p=1}^{N} \mathcal{K}_p, \quad \dim \mathcal{K}_p = N - p,$$

и для каждого p при $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_p$ величина $\sigma(\mathbf{x})$ определяется из таблицы

p	1	2	3	4	6	7	8	9	10
$\sigma(\mathbf{r}) \geqslant$	5/6	3/4	2/3	5/8	1/2	1/2	11/24	7/16	1/3

и эти оценки точны, т.е. существует поверхность общего положения, для которой реализуется знак равенства в оценках.

При $N \geqslant 21$ существует гиперповерхность общего положения, для которой размерность области расходимости $\geqslant N - 21$.

В частности, для характеристической функции трехосного эллипсоида ($\dim \mathcal{K} = 2$) имеем: $\sigma(\mathbf{r}) = 1$, если $\mathbf{r} \notin \mathcal{K}$, $\sigma(\mathbf{x}) = \frac{5}{6}$ в общей точке $\mathcal{K}$, $\sigma(\mathbf{x}) = \frac{3}{4}$ на некоторых кривых в $\mathcal{K}$ и $\sigma(\mathbf{x}) = \frac{2}{3}$ в некоторых точках $\mathcal{K}$.

Заметим, что ранее, до работы [14], эллипсоиды не рассматривались. В случае шара, когда фокальная поверхность вырождается в точку, совпадающую с его центром, было известно, что метод суммирования по шарам при восстановлении характеристической функции шара сходится всюду, кроме центра. Как следует из результатов Д.А. Попова, показатель сходимости во всех таких точках равен единице.

5. Целые точки в трёхмерных телах вращения

В работе [15] рассматривалась задача о целых точках в трёхмерных телах вращения.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ – тело, граница ∂D которого получена вращением плоской замкнутой кривой Γ вокруг оси $\mathscr{A}$, и $\mathscr{A}$ лежит в плоскости, содержащей Γ. Задача состоит в оценке при $t \to +\infty$ величины $\mathcal{R}(t, D)$, определённой равенством

$$\mathcal{N}(t, D) = t^3 \operatorname{vol} D + \mathcal{R}(t, D),$$

где $\mathcal{N}(t, D)$ – число целых точек в области tD. Сформулируем полученный результат. Его доказательство основано на равномерных оценках О.И., входящих в выражения для преобразования Фурье характеристической функции D. Напомним, что меридианом границы ∂D называется её пересечение с плоскостью, содержащей ось вращения. Точки меридиана, не являющиеся точками перегиба, в которых касательная к меридиану ортогональна оси $\mathscr{A}$, называются экстремумами. Предполагается, что

1) все экстремумы – простые, т.е. в них кривизна Γ не равна нулю;

2) максимальный порядок нулей кривизны Γ не превосходит p;

3) касательные к Γ в точках уплощения не ортогональны $\mathscr{A}$.

При этих предположениях в работе [15] доказано, что

$$\mathcal{R}(t,D) \,=\, O\bigl(t^{\beta}\bigr), \quad t+\infty, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \beta = \frac{3}{2}, & \text{если} \;\; p=0,1,2,3,4; \\ \beta = \frac{7}{4} - \frac{3}{2(p+2)}, & \text{если} \;\; p \geqslant 4. \end{cases}$$

Ранее было известно, что $\beta = \frac{3}{2}$ для невыпуклых областей с границей общего положения. Основной результат работы [15] состоит в доказательстве того, что значение $\beta = \frac{3}{2}$ является точным на классе тел вращения. Величина $\beta = \frac{3}{2}$, в частности, реализуется на полнотории D, граница которого $\partial D = \mathbb{T}^2$ образована вращением эллипса с осями длины a,b, $a<b$, вокруг оси, ортогональной большой оси эллипса. В этом случае в [15] получено равенство

$$\mathcal{R}(t,D) \,=\, -\,t^{3/2}\, 2\sqrt{2}\, b\sqrt{a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(2\pi k a t\right)}{k^{3/2}} \,+\, O\bigl(t^{\,3/2-1/287}\bigr).$$

При $x \geqslant x_0(a,b)$ это дает асимптотически точную оценку числа $N(a,b,x) = \mathcal{N}(\sqrt{x},D)$ решений в целых числах неравенства

$$\bigl(l^2+m^2+n^2(a^2+b^2)\bigr)^2 \,\leqslant\, 4xb^2(xa^2-n^2).$$

6. Ультразвуковая и акустическая томография

С математической точки зрения задача ультразвуковой томографии состоит в восстановлении конформно-плоской метрики $ds^2 = u(x_1,x_2)(dx_1^2+dx_2^2)$ в единичном круге D по длинам геодезических с концами на ∂D. При этом предполагается, что метрика мало отличается от плоской.

Эта нелинейная задача до сих пор не решена. В работе [16] был решён линейный аналог этой задачи. Приведём ее формулировку. Пусть на отрезке $x_0(t)$ прямой (φ,q), лежащем внутри $\overline{D}$, задано векторное поле $z(\varphi,q,t)$ такое, что

$$z(\varphi+\pi,-q,-t) \,=\, z(\varphi,q,t), \quad z\bigl(\varphi,q,\pm\sqrt{1-q^2}\bigr) \,=\, 0.$$

Это поле определяет кривую $\gamma_z(\varphi,q)$, задаваемую уравнением

$$x(t) \,=\, x^0(t) + z(\varphi,q,t).$$

Требуется восстановить $u(x)$, $x\in D$, если известны интегралы

$$I(\varphi,q) \,=\, (\mathfrak{R}_z u)(\varphi,q) \,=\, \int_{\gamma_z(\varphi,q)} u\,ds.$$

В работе [16] получено решение этой задачи. Доказано, что существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при $\|z\|_m < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (здесь $m\geqslant 3$,

$$\|z\|_m \,=\, \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \max_{\varphi,q,t}\bigl(|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} z_1| + |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} z_2|\bigr), \quad \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \,=\, \partial_u^{\alpha_1}\partial_q^{\alpha_2}\partial_t^{\alpha_3}),$$

оператор $A_z = R^{-1}\mathfrak{R}_z$ допускает расширение до “почти унитарного” интегрального оператора Фурье нулевого порядка $A_z \,:\, L^2(\mathbb{R}^2) \,\to\, L^2(\mathbb{R}^2)$, и

$$A_z^T A_t \,=\, \mathbf{1} \,+\, Q(z), \quad \|Q(z)\| \,\leqslant\, C_m\|z\|_m$$

и решение имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = \mathfrak{R}_z^{-1} I(\mathbf{x}), \quad \mathfrak{R}_z^{-1} = (\mathbf{1} + Q(z))^{-1} A_z^T \mathfrak{R}^{-1}.$$

Кроме того, в работе [16] получены условия Кавальери – необходимые условия, которым должна удовлетворять функция на пространстве кривых, чтобы принадлежать образу оператора $\mathfrak{R}_z$. Достаточность этих условий доказана в [18]. Условия Кавальери означают, что образ $\mathfrak{R}_z$ имеет бесконечную коразмерность в пространстве функций на кривых, мало отличающихся от прямых. Это является основным препятствием для доказательства сходимости метода последовательных приближений для решения задачи ультразвуковой томографии методами КАМ теории.

Две совместные с Д.В. Сушко работы [17], [19] посвящены задачам опто-акустической томографии. В этих работах речь идёт о следующей задаче. Пусть заданы величины

$$I(\mathbf{x}, t) = \int_{S(\mathbf{x},t)} f\, ds,$$

где $S(\mathbf{x}, t)$ – сфера радиуса t с центром $\mathbf{x}$, f – функция с компактным носителем $\operatorname{supp} f$ и $\mathbf{x} \in \mathscr{G}$, где $\mathscr{G}$ – некоторая гиперповерхность размерности $\dim \mathscr{G} = N - 1$ в $\mathbb{R}^N$. Требуется найти $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$.

В работе [17] в случае $N = 2$ и 3 построен оператор A и предложено считать $\widetilde{f}(\mathbf{x}) = (AI)(\mathbf{x})$ некоторым приближением к $f(\mathbf{x})$. Кроме того, в этой работе указаны условия, которым должна удовлетворять поверхность $\mathscr{G}$ при заданной геометрии носителя $\operatorname{supp} f$. Одно из условий состоит в том, что через любую точку $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} f$ должны проходить сферы $S(\mathbf{x}, t)$ по всем направлениям.

При $N = 3$ в работе [17] доказано, что оператор A задает параметрикс рассматриваемой задачи, т.е. $\widetilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + Bf(\mathbf{x})$, и B – псевдо-дифференциальный оператор нулевого порядка. При $N = 2$ соответствующий результат не доказан.

Проведённый численный эксперимент [19] показал, что при $N = 2$ и 3 метод даёт восстановление, которое удовлетворяет требуемым метрологическим критериям качества..

7. Периодическая задача Штурма-Лиувилля

В работе [21] рассмотрена задача о дискретном спектре, зависящем от параметра a, $0 < a < +\infty$, семейства периодических задач Штурма-Лиувилля

$$u''(x) + \lambda^2 (f(x) - a) u(x) = 0, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u(\pi).$$

Как возникла эта задача, будет ясно из п. 6. Предполагается, что $f(x)$ – гладкая периодическая функция и $0 < a_2 \leqslant f(x) \leqslant a_1$ и функция $f(x)$ имеет один простой максимум ($f(x_{\max}) = a_1$) и один простой минимум ($f(x_{\min}) = a_2$). Таким образом, при $a = a_2$ рождаются две точки поворота и задача из дефинитной превращается в индефинитные. Известно, что при $a < a_2$ дискретный спектр состоит из двух ветвей $\lambda_\pm(a, p)$, нумеруемых выбором знака и положительного числа p. Обе ветви $\lambda_\pm(a, p)$ при $a < a_2$ имеют одинаковые асимптотики при $p \to +\infty$ (асимптотическое вырождение). При $a = a_2$ это асимптотическое вырождение снимается и при $a_2 < a < a_1$ ветви $\lambda_\pm(a, p)$ имеют различную асимптотику при $p \to +\infty$. При $a = a_1$ точки поворота “умирают” и дискретный спектр исчезает (уходит на бесконечность). В работе [21] доказано, что процесс перестройки спектра во всем интервале $0 < a \leqslant a_1$ можно описать единой асимптотической формулой, согласно которой

$$\lambda_\pm(a, p) = \lambda_p^0(a) + F^{-1}(a) H_\pm(\alpha(a) \lambda_p^0(a)) + R_\pm(a, p).$$

В этой формуле

$$\lambda_p^0(a) \,=\, \frac{2\pi p}{F(a)}, \quad F(a) \,=\, \int_{\substack{f(x)>a \\ -\pi<x<\pi}} \sqrt{f(x)-a}\,dx,$$

$$R_{\pm}(a,p) \,=\, \begin{cases} F^{-1}(a)\,O\big((\lambda_p^0)^{-2/3}\ln\lambda_p^0\big), & a_2 \leqslant a < a_1, \\ O\big((\lambda_p^0)^{-1/2}(\ln\lambda_p^0)^{1/2}\big), & 0 \leqslant a \leqslant a_2. \end{cases}$$

Явный вид функции $\alpha(a)$ приведён в [21], причём $\alpha(a) \to c(f)$ при $a \to a_1$, $\alpha(a) \to 0$ при $a \to a_2$ и функции $H_{\pm}(x)$ задаются равенствами

$$H_{\pm}(x) \,=\, \pm\,\mathrm{arctg}\, e^{\pi x} \,-\, x + x\ln|x| - \arg\Gamma\biggl(\frac{1}{2}+ix\biggr).$$

Ранее подобных формул известно не было.

8. Спектр оператора Лапласа на замкнутых поверхностях

В 1993 г. в журнале "Успехи математических наук" была опубликована работа Д.В. Косыгина, А.А. Минасова, Я.Г. Синая[11] (КМС), посвящённая исследованию свойств спектра оператора Лапласа на торе $\mathbb{T}^2$ с метрикой Лиувилля $ds^2 = (\rho(x)+h(y))(dx^2+dy^2)$. Эта работа во многом определила тематику дальнейших исследований Д.А. Попова. В частности, работа [21] (см. п. 6) возникла из наблюдения, что результаты работы КМС требуют уточнения.

Пусть $\mathbf{M} \equiv (M,g)$ – гладкая замкнутая (компактная без края) поверхность с римановой метрикой g. Оператор Лапласа $\Delta \equiv \Delta(g)$ отрицательно определён и имеет бесконечный дискретный спектр $\{\lambda_n\}$:

$$\Delta\varphi_n \,+\, \lambda_n\varphi_n \,=\, 0, \quad \lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots\,.$$

Согласно формуле Г. Вейля,

$$\mathcal{N}(x) \,=\, \frac{\mathbf{M}}{4\pi}\,x \,+\, \Delta\mathcal{N}(x),$$

где $\mathcal{N}(x)$ – функция распределения собственных значений,

$$\mathcal{N}(x) \,=\, \#\{\lambda_n \leqslant x\}, \quad |\mathbf{M}| \;-\; \text{площадь}\;\mathbf{M}.$$

Согласно же общему результату Л. Хермандера,

$$\Delta\mathcal{N}(x) \,=\, O(x^{1/2}), \quad x \to +\infty.$$

Возникает вопрос о связи геометрии (M,g) с существованием степенного понижения, т.е. оценки

$$\Delta\mathcal{N}(x) \,=\, O(x^{\theta+\varepsilon}),$$

где $\theta < \frac{1}{2}$, а $\varepsilon > 0$ – любое. В работе Дж.Дж. Дюистермаат и В.В. Гийемин[12] (1975) было установлено, что необходимым условием существования степенного понижения является равенство $\mu[g] = 0$, где $\mu[g]$ – мера множества замкнутых геодезических, т.е. мера точек в расслоении единичных сфер $S^*(\mathbf{M}) \subset T^*(\mathbf{M})$, отвечающих замкнутым геодезическим ($\dim S^*(\mathbf{M}) = 3$).

[11] *Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай*, Статистические свойства спектров операторов Лапласа — Бельтрами на поверхностях Лиувилля, *УМН*, **48**:4(292) (1993), 3–130.

[12] *J.J. Duistermaat, V.W. Guillemin*, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, *Invent. Math.*, **29**:1 (1975), 39–79.

Если асимптотика спектра известна, то задача о поведении величины $\Delta N(x)$ при $x \to +\infty$ сводится (см. КМС) к задаче о числе целых точек в некоторых областях, которые естественно назвать спектральными. В случае метрики Лиувилля вида $ds^2 = f(x)(dx^2+dy^2)$ вопрос об асимптотике спектра сводится к задаче, рассмотренной в [21] (см. п. 6). Основываясь на результатах этой работы и решая соответствующую задачу о числе целых точек, в работе [22] на торе $\mathbb{T}^2$ построены метрики Лиувилля, для которых $\mu[g]=0$ и для любых $p \geqslant 4$, $\varepsilon > 0$

$$\Delta\mathcal{N}(x) \,=\, b_p(x)x^{1-\frac{1}{2(p+2)}} \,+\, O\big(x^{1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{p+2}+\varepsilon\right)}\big), \quad x \to= \infty.$$

Явный вид функции $b_p(x)$ указан в [22]. Это непрерывная, ограниченная функция (при $x \geqslant x_0$) и она не стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Таким образом, в работе [22] доказано, что условие $\mu[g]=0$ не является достаточным для существования степенного понижения и оценка Хермандера $\Delta\mathcal{N}(x) = O(x^{1/2})$ не может быть существенно улучшена даже при условии $\mu[g]=0$. Заметим, что построенные в [22] метрики не являются метриками общего положения и функция $f(x)$ должна удовлетворять некоторым диофантовым условиям. С другой стороны, эти метрики в топологии C^1 плотны в пространстве метрик $ds^2 = f(x)(dx^2+dy^2)$.

В настоящее время существование степенного понижения доказано только для метрик с интегрируемым геодезическим потоком.

Наибольший интерес представляет задача об асимптотике $\Delta N(x)$ в случае, когда геодезический поток неинтегрируем. В этом случае доказано только, что

$$\Delta N(x) \,=\, O\bigg(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\bigg), \quad \Delta N(x) \,=\, \Omega\bigg(\frac{\sqrt{\ln x}}{\ln\ln x}\bigg).$$

С другой стороны, имеется гипотеза (см. КМС), что для метрик отрицательной кривизны и общего положения

$$\Delta N(x) \,=\, O\big(\sqrt{\ln x}\big).$$

Естественно рассмотреть случай постоянной отрицательной кривизны. В этом случае $(M,g) = \mathcal{F}[\Gamma]$, где $\mathcal{F}[\Gamma] = \Gamma \setminus H$ – компактная риманова поверхность с метрикой Пуанкаре (Γ - компактная дискретная подгруппа группы $SL(2,\mathbb{R})$, H – верхняя полуплоскость). В этом случае возможен подход к исследованию величины $\Delta N(x)$, основанный на формуле Сельберга. Такой подход рассмотрен в трёх работах [23]-[25].

Формула Сельберга для любой пробной функции из класса Сельберга ($h \in \{h\}_S$) даёт выражение для $\sum\limits_n h(r_n)$, $\lambda_n = \frac14 + r_n^2$, вида

$$\sum_n h(r_n) \,=\, \Phi[h|\{N(P)\}],$$

где $\Phi[h|\{N(P)\}]$ – функционал на пространстве $\{h\}_S$, зависящий от спектра $\{N(P)\}$ норм сопряженных гиперболических классов группы Γ ($\{\ln N(P)\}$ – спектр длин замкнутых геодезических).

В работе [23] для случая строго гиперболических групп Γ (Γ не содержит эллиптических элементов) получена явная формула для величины $\Delta N(x)$. В [23] доказано, что

$$\Delta\big(t^2+\tfrac14\big) \,=\, \frac{1}{\pi}\,S(t) \,+\, f(t) \quad (t \geqslant t_0),$$

и в этой формуле

$$S(t) \,=\, \sum_{r_n \geqslant 0}\bigg\{\mathrm{sgn}(r_n-t)\mathrm{Si}(|t-r_n|b_0) \,-\, \mathrm{Si}((t+r_n)b_0) \,+\, \frac{2\sin(tb_0)}{b_0(r_n^2+\frac12)}\,(\cos(r_nb_0) \,-\, \sin(r_nb_0))\bigg\},$$

$f(t)$ – ограниченная непрерывная функция с асимптотикой

$$f(t) \,=\, c_0 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots, \quad t \to +\infty,$$

$\mathrm{Si}(\cdot)$ – интегральный синус и b_0 – минимальная длина замкнутой геодезической.

Некоторые следствия из этой формулы рассмотрены в работе [25], где, в частности, указаны условия, достаточные для существования степенного понижения.

В работе [24] при некоторых дополнительных условиях на пробную функцию ($h \in \{h\}_S^1 \subset \{h\}_S$) доказано, что спектр $\{r_n\}$ для всякой $h \in \{h\}_S^1$ удовлетворяет тождеству вида

$$\sum_n h(r_n) \,=\, \Phi[h|\{r_n\}],$$

где

$$\Phi[h|\{r_n\}] \,=\, \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r h(r)\,\mathrm{th}\,(\pi r)dr - \\ - \sum_{r_n>0}\frac{1}{r_n^2+\frac14}\int_{b_0}^{+\infty}(\cos(r_n y) + 2r_n\sin(r_n y))\biggl(-\frac12\hat{h}(y) + \hat{h}^{(1)}(y)\biggr)dy \,+\, \Delta\Phi_\Gamma[h|\alpha_i(\Gamma)],$$

$\hat{h}$ – преобразование Фурье функции h, причем явно указанный в [24] функционал $\Delta\Phi_\Gamma[h|\alpha_i(\Gamma)]$ зависит только от конечного числа параметров $\alpha_i(\Gamma)$.

В случае $h(r) = e^{-tr^2}$ отсюда следует, что

$$\sum_n e^{-tr_n^2} \,=\, \frac{|\mathcal{F}|}{2\pi}\int_0^{+\infty} re^{-tr^2}\,\mathrm{th}\,(\pi r)dr \,+\, O\bigl(t^{-2}e^{-b_0^2/(4t)}\bigr) \,= \\ = \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k \,+\, O\bigl(t^{-2}e^{-b_0^2/(4t)}\bigr), \quad t \to 0.$$

Интерес к свойствам величины $\Delta N(x)$ связан с теорией квантового хаоса. В этой теории сформулирована гипотеза универсальности, согласно которой поведение спектра $\{\lambda_n\}$ на интервале $(\lambda, \lambda + O(\lambda^{1/2})), \lambda \to +\infty$ (для метрик общего положения) не зависит от λ и зависит только от того, интегрируем или нет геодезический поток. В случае $(M, g) = (\mathbb{T}^2, g_0)$, где g_0 – плоская метрика на $\mathbb{T}^2$, $\lambda_n = \ell^2 + m^2$ $(\ell, m \in \mathbb{Z})$ и $\Delta N(x) = P(x)$, где $P(x)$ – остаточный член в задаче о числе целых точек в круге. Это придаёт дополнительный интерес к проблеме круга и задаче о $\Delta N(x)$ для $(M, g) = \mathcal{F}[\Gamma]$, если рассматривать соответствующие метрики как типичных представителей метрик с интегрируемым и неинтегрируемым геодезическим потоком.

Современному состоянию вопроса о спектре оператора Лапласа на замкнутых поверхностях посвящён подготовленный к печати обзор [30].

9. Число целых точек в круге

Пусть $R(x)$ – число целых точек в круге радиуса $\sqrt{x}$:

$$R(x) \,=\, \sum_{n\leqslant x} r(n), \quad r(n) \,=\, \#\{(\ell, m) \,:\, \ell^2 + m^2\},$$

и величина $P(x)$ определяется равенством

$$R(x) \,=\, \pi x \,+\, P(x).$$

Проблема круга состоит в доказательстве оценки

$$P(x) = O\big(x^{1/4+\varepsilon}\big)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $x \to +\infty$. В современных работах проблема круга понимается в широком смысле как вопрос о свойствах функции $P(x)$.

В отличие от других известных задач о суммировании арифметических функций, эта задача допускает спектральную интерпретацию и $P(x) = \Delta N(x)$, где $\Delta N(x)$ – второй член в формуле Вейля для плоского тора $(\mathbb{T}^2, g_0)$, а $r(n)$ – кратность собственного значения $\lambda = \ell^2 + m^2 = n$.

В работе [26] получен ряд новых результатов о величине $P(x)$. Доказательство этих результатов основано на усечённой формуле Вороного (Вороного-Харди), согласно которой

$$P(x) = -\frac{x^{1/4}}{\pi} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{r(j)}{j^{3/4}} \cos\big(2\pi\sqrt{jx} + \tfrac{\pi}{4}\big) + \Delta_N P(x),$$

$$|\Delta_N P(x)| \leqslant C(\varepsilon)\left(N^{\varepsilon} + \frac{x^{1/2+\varepsilon}}{\sqrt{N}}\right),$$

$\varepsilon > 0$ – любое. В работе [26] используется следующее уточнение последней формулы:

$$|\Delta_N P(x)| \leqslant C\left(\overline{r}(N)\ln N + \frac{x^{1/2}}{\sqrt{N}}\,\overline{r}(x)\ln x\right), \quad \overline{r}(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right),$$

так что $r(n) \leqslant \overline{r}(n)$.

Так как экстремумы функции $P(x)$ достигаются в точках $x = n$, $r(n) \neq 0$, то достаточно оценивать величины $|P(n)|$, $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [26] показано, как получить оценку $|P(n)|$, если известны оценки локальных моментов. Сформулируем соответствующие результаты. Пусть

$$\frac{1}{2H}\int_{n-H}^{n+H} |P(x)|^p dx \leqslant F_p(n, H), \quad p \geqslant 1, \quad H \ll n,$$

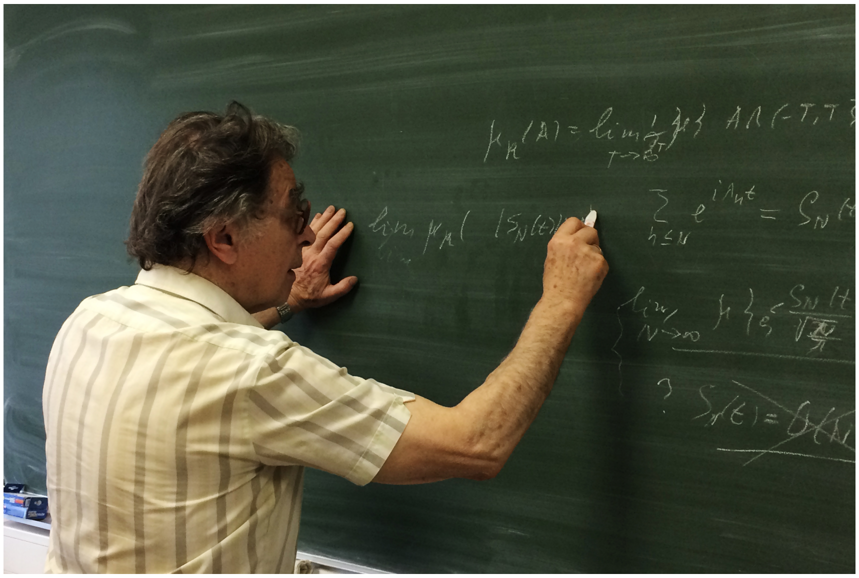
и пусть при этом

$$F_p \leqslant C_p(H\overline{r}(n))^p, \quad |P(n)| \leqslant CH\overline{r}(n).$$

Тогда

$$|P(n)| \leqslant C(H\overline{r}(n)F_p)^{1/(p+1)}.$$

Вопрос о том, при каких $\alpha(p)$ при $p \geqslant 3$, и $H \leqslant Cn^{\alpha(p)+\varepsilon}$ имеет место оценка $F_p \leqslant C_p n^{p/4}$, остается открытым. Из приведённой выше оценки $|P(n)|$ в частности, следует, что если $\alpha(4) = \frac{1}{2}$, то $|P(n)| \leqslant Cn^{3/10+\varepsilon}$. В настоящее время известно только, что $P(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$, $\theta = \frac{517}{1648} = 0.31371\ldots$.



В Математическом институте им. В.А. Стеклова.
20 августа 2019 г.

Приведем ещё два результата из [26]. Пусть n – точка локального максимума величины $|P(x)|$ и $|P(n)| \geqslant Cn^{1/4}$. Этот максимум называется широким, если

$$|P(n) - P(x)| < B|P(n)|, \quad 0 < B < 1, \quad \text{для всех } \ x, \quad |x - n| < n^{1/2-\varepsilon}.$$

В [26] доказано, что если максимум при $x = n$ – широкий, то $|P(n)| \leqslant Cn^{1/4+\varepsilon}$. Это означает, что величина $P(x)$ в интервале $|x-n| < n^{1/2-\varepsilon}$ ведёт себя как случайное блуждание с началом в точке $x = n$.

Давно было известно, что на любом интервале $[T, T + c\sqrt{T}]$, $T \gg 1$, существуют точки x_1, x_2 такие, что $P(x_1) > c_1 x_1^{1/4}$, $P(x_2) < -c_1 x_2^{1/4}$. Из результатов работы Д.Р. Хиз-Брауна и К.М. Тсанга[13] следует, что внутри интервала $[T, 2T]$ $(T \gg 1)$ существуют непересекающиеся интервалы

$$U_\alpha^{\pm} \ = \ \bigl[x_\alpha^{\pm}, x_\alpha^{\pm} + C(\delta)T^{1/2}(\ln T)^{-5}\bigr]$$

такие, что

$$P(x) \ > \ \delta x^{1/4}, \quad x \in U_\alpha^{+}, \quad P(x) \ < \ -\delta x^{1/4}, \quad x \in U_\alpha^{-}$$

для любого $0 < \delta \leqslant \delta_0$. При этом

$$\mu(V^{\pm}) \ \geqslant C(\delta)T, \quad V^{\pm} \ = \bigcup_{\alpha} U_\alpha^{\pm},$$

$\mu(\cdot)$ – мера Лебега,

$$\frac{1}{2}\,|P(x)| \leqslant |P(x+v)| \ \leqslant \ \frac{3}{2}|P(x)|, \quad x, x+v \in V^{\pm}.$$

В работе [26] доказано, что $|P(x)| \leqslant Cx^{1/4+\varepsilon}$, $x \in V^{+} \cup V^{-}$, и проблема круга будет решена, если предположить, что максимумы $|P(x)|$ принадлежат $V^{+} \cup V^{-}$.

Из приведённых результатов возникает картина поведения $P(x)$ на интервале $[T, 2T]$, основанная на двух предположениях: 1) интервалы U_α^{+} и U_α^{-} чередуются на $[T, 2T]$; 2) максимумы $|P(x)|$ достигаются на $V^{+} \cup V^{-}$. Оба эти предположения в настоящее время не доказаны. Современные результаты о свойствах функции $P(x)$ содержатся в работе [29].

[13] *D.R. Heath-Brown, K.-M. Tsang*, Sign changes of $E(T)$, $\Delta(x)$, and $P(x)$, *J. Number Theory*, **49**:1 (1994), 73–83.

В духе гипотез универсальности можно предположить, что в случае интегрируемого геодезического потока второй член $\Delta N(x)$ в формуле Вейля на интервале $(x, x+O(x^{1/2}))$ ведёт себя как $P(x)$ и известные результаты о $P(x)$ можно рассматривать как источник гипотез о поведении $\Delta N(x)$.

10. Спектр оператора Лапласа на некомпактных римановых поверхностях с метрикой Пуанкаре и функция Мангольдта

Большой интерес представляют вопросы о дискретном спектре $\{\lambda_n\}$ оператора Лапласа Δ на некомпактной римановой поверхности $\mathcal{F}[\Gamma] = \Gamma \setminus H$ конечной площади $|\mathcal{F}|$: $|\mathcal{F}| < +\infty$.[14] В этом случае говорят, что дискретная группа $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ кофинитна. В случае кофинитной группы Γ оператор Δ имеет непрерывный спектр, покрывающий интервал $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ и о структуре дискретного спектра $\{\lambda_n\}$ мало что известно. Согласно гипотезе Рёльке, спектр $\{\lambda_n\}$ бесконечен. Альтернативная гипотеза принадлежит Сарнаку и Филипсу; согласно этой гипотезе, для групп Γ общего положения, для которых комплексная структура $\Gamma \setminus H$ отвечает точке общего положения в пространстве Тейхмюллера, спектр $\{\lambda_n\}$ конечен.

Формула Сельберга для кофинитных групп имеет вид

$$\sum_n h(r_n) \;=\; \Phi[h|\{N(P)\}, \varphi] \quad \text{для всякой } \; h \in \{h\}_S^1,$$

где $\varphi(s) = \det\Phi(s)$, $\Phi(s)$ – матрица рассеяния. В работе [27] доказано, что для любой функции $h \in \{h\}_S^1$ имеет место равенство

$$\sum_n h(r_n) \;=\; \widetilde{\Phi}[h|\{r_n\}, \{s_\alpha\}\varphi],$$

где $\{s_\alpha\}$ – спектр резонансов – полюсов функции $\varphi(s)$ вида $s_\alpha = \beta_\alpha + i\gamma_\alpha$, $\beta_\alpha < \frac{1}{2}$. Последнее равенство можно записать в виде

$$\sum_n h(r_n) + \sum_{\gamma_\alpha > 0} h(\gamma_\alpha) \;=\; \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r h(r)\,\mathrm{th}\,(\pi r)dr - \\ - \frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)dr \;+\; \Delta\Phi[\hat{h}|\{r_n\}, \{s_\alpha\}],$$

где m – число неэквивалентных параболических вершин у фундаментальной области Γ, и указан явный вид функционала $\Delta\Phi[\hat{h}|\{r_n\}, \{s_\alpha\}]$.

Если интересоваться асимптотикой спектра $\{r_n\}$, то пробная функция h должна удовлетворять условию типа $h(r) \approx 1$, $|r| < T$, $T \gg 1$. В этом случае её преобразование Фурье $\hat{h}(y)$ имеет носитель, сосредоточенный около точки $y = 0$ и основной вклад в правую часть последней формулы дают два первых члена. В частности, при $h(r) = e^{-tr^2}$ получим:

$$\sum_n e^{-tr_n^2} + \sum_{\gamma_\alpha > 0} e^{-t\gamma_\alpha^2} \;=\; \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi t} - \frac{m}{4\sqrt{\pi t}}\ln\frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad t \to 0.$$

Обнаруженная “симметрия” относительно замены $\{r_n\} \leftrightarrow \{\gamma_\alpha\}$ между спектрами $\{r_n\}$ и $\{\gamma_\alpha\}$ является основным препятствием при попытке доказать гипотезу Рёльке исходя из формулы Сельберга.

[14] Следуя устоявшимся в этой области обозначениям, через $\Gamma \setminus H$ мы обозначаем здесь пространство орбит, т.е. фактор H по Γ.

В случае модулярной группы $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ дискретный спектр бесконечен. Так как в этом случае имеется только одна параболическая точка, то матрица рассеяния скалярна и давно известно, что

$$\Phi(s) \,=\, \varphi(s) \,=\, \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)},$$

где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана. Таким образом, в этом случае $s_\alpha = \frac{1}{2}\varrho_\alpha$, где ϱ_α – нетривиальные нули ζ-функции. Видимо это позволило П. Сарнаку предположить, что дискретный спектр $\{\lambda_n\}$ в случае $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ должен играть фундаментальную роль в теории чисел. Заметим, что ещё в 1978 г. А.Б. Венков доказал[15], что функция Мангольдта

$$\Lambda(m) \,=\, \begin{cases} \ln p, & m = p^k \ \ (p - \text{ простое}), \\ 0, & m \neq p^k, \end{cases}$$

восстанавливается по спектру $\{r_n\}$ и спектру норм $\{N(P)\}$ гиперболических классов.

В работе [28] доказано, что функция Мангольдта и, следовательно, и функция Чебышёва

$$\psi(x) \,=\, \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),$$

восстанавливается по спектру $\{r_n\}$. На основе результатов работы [27] в случае $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ в [28] доказано, что для любого целого $\ell \geqslant 1$, и любых $x \geqslant 2$, $t > 0$ таких, что

$$t \,<\, \bigl\{x^4(\ln x)^{2\ell+6}\bigr\}^{-1}$$

имеет место равенство

$$\psi(x) \,=\, 2\sqrt{\pi}t\sum_{2\leqslant m\leqslant x} m\sum_{n=0}^{+\infty}\exp\left(-tr_n^2\right)\cos\left(2r_n\ln m\right) \,+\, R_\ell(x), \quad |R_\ell(x)| \leqslant \frac{C_\ell}{(\ln x)^{2\ell-1/2}}.$$

Определим величину $\Delta\psi(x)$ равенством

$$\psi(x) \,=\, x + \Delta\psi(x).$$

Известно, что при любом фиксированном θ, $\frac{1}{2} < \theta < 1$ и любом $\varepsilon > 0$ равенства

$$\Delta\psi(x) \,=\, O\bigl(x^{\theta+\varepsilon}\bigr), \quad \pi(x) \,=\, \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \,+\, O\bigl(x^{\theta+\varepsilon}\bigr)$$

эквивалентны.

В работе [31] доказано, что для некоторого класса $\{h\}_\varrho$ пробных функций имеет место равенство

$$\Delta\psi(x) \,=\, \sum_{m_0\leqslant m\leqslant x} m\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(2r_n\ln m\right)f(x,r_n) \,+\, O(1)$$

и указан метод построения функции f по $h \in \{h\}_\varrho$. В частности, при

$$\varrho(y) \,=\, (y^2+\delta)e^{-y^2}$$

получено равенство

$$\Delta\psi(x) \,=\, \frac{3\sqrt{\pi}}{x^2\tilde{\varrho}(0)}\sum_{m_0\leqslant m\leqslant x} m\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sigma^2r_n^2}\bigl(1+\delta-\tfrac{1}{2}\sigma^2r_n^2\bigr)\cos\left(2r_n\ln m\right) \,+\, O(1).$$

[15] *А.Б. Венков*, Об одной формуле для пси-функции Чебышёва, *Матем. заметки*, **23**:4 (1978), 497–503.

В этой формуле

$$\tilde{\varrho}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2-(1/3)\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon(x)}}, \quad \delta = \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon(x)}\tilde{\varrho}(0), \quad \varepsilon(x) = \frac{\alpha}{q\ln x}, \quad \sigma = \frac{2}{x^2}\sqrt{\varepsilon(x)},$$

и α, q – любые числа с условиями $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $q \geqslant 10$.

Таким образом доказано, что гипотеза Римана допускает спектральную формулировку.

Л.Д. Фаддееву принадлежит гипотеза, согласно которой множество $\{\frac{1}{2}+ir_n\}$ содержит все достаточно большие нули ζ-функции Римана; эта гипотеза упоминается в статье А.Б. Венкова[16]. В заключение отметим, что в настоящее время неизвестно, определяет ли спектр $\{r_n\}$ нули ζ-функции Римана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Д.А. О приближении диффузионного пограничного слоя для течения в канале // *ДАН СССР*, **195**:6 (1970), С. 1373–1376.

2. Попов Д.А. Учет продольной диффузии при течении в канале // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, **6** (1973), С. 63–73.

3. Попов Д.А. Задача с разрывными граничными условиями и приближение диффузионного погранслоя // *Прикладн. матем. мех.*, **39**:1 (1975), С. 109–117.

4. Попов Д.А. К теории полей Янга-Миллса // *ТМФ*, **24**:3 (1975), С. 347-365.

5. Попов Д.А. Дайхин Л.И. Пространства Эйнштейна и поля Янга–Миллса // *ДАН СССР*, **225**:4 (1975), С. 790–793.

6. Попов Д.А. Сушко Д.В. О сходимости алгоритмов численного решения уравнения свертки // *ДАН СССР*, **315**:2 (1990), С. 309–313.

7. Popov D.A. On convergence of a class of algorithms for the numerical Radon transform // *Mathematical Problems of Tomography*, Transl. Math. Monographs, **81**, eds. Gelfand J.M., Gindikin S.G., Amer. Math. Soc., 1990 pp. 7–65.

8. Popov D.A. The convergence of tomographical algorithms and estimation of oscillatory integrals // *Ill-posed Problems in Mathematical Physics and Analysis. Moscow-Utrecht*, 1993

9. Popov D.A., Sokolova E.V., Sushko D.V. Mathematical Models in Two-Dimensional Radon Tomography // *Applied Problems of Radon Transform*, S. Gindikin (ed.), Providence: AMS, 1994, pp. 129–204.

10. Popov D.A., Sushko D.V. Computation of singular convolutions // *Applied Problems of Radon Transform*, S. Gindikin (ed.), Providence: AMS, 1994, pp. 43–127.

11. Попов Д.А. Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов // *УМН*, **52**:1(313) (1997), С. 77–148.

12. Попов Д.А. Сферическая сходимость ряда и интеграла Фурье индикатора двумерной области // *Тр. МИАН*, **218** (1997), С. 354–373.

[16]См.: *А.Б. Венков*, Нули ζ- и L-функций мнимых квадратичных полей и собственные значения $PSL(2,\mathbb{Z})$-автоморфного лапласиана, *Докл. АН СССР*, **250**:3 (1980), 528–531.

13. Попов Д.А. Восстановление характеристических функций в двумерной радоновской томографии // *УМН*, **53**:1(319) (1998), С. 115–198.

14. Попов Д.А. О сферической сходимости интеграла Фурье индикатора N-мерной области // *Матем. сб.*, **189**:7 (1998), С. 145–157.

15. Попов Д.А. О числе целых точек в трехмерных телах вращения // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:2 (2000), С. 121–140.

16. Попов Д.А. Обобщенное преобразование Радона на плоскости, его обращение и условия Кавальери // *Функц. анализ и его прил.*, **35**:4 (2001), С. 38–53.

17. Попов Д.А., Сушко Д.В. Параметрикс для задачи опто-акустической томографии // *Докл. РАН*, **382**:2 (2002), С. 162–164.

18. Попов Д.А. Теорема Пэли–Винера для обобщенного преобразования Радона на плоскости // *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), С. 65–72.

19. Попов Д.А., Сушко Д.В. Восстановление изображений в оптоакустической томографии // *Пробл. передачи информ.*, **40**:3 (2004), С. 81–107.

20. Попов Д.А. Замечания о равномерных составных оценках осциллирующих интегралов с простыми особенностями // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), С. 173–196.

21. Попов Д.А. Поведение асимптотики положительного спектра семейства периодических задач Штурма–Лиувилля при непрерывном переходе от дефинитной к индефинитной задаче // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:3 (2009), С. 151–182.

22. Попов Д.А. О втором члене в формуле Вейля для спектра оператора Лапласа на двумерном торе и числе целых точек в спектральных областях // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), С. 139–176.

23. Попов Д.А. Явная формула для функции распределения собственных значений оператора Лапласа на компактной римановой поверхности рода $g > 1$ // *Функц. анализ и его прил.*, **46**:2 (2012), С. 66–82.

24. Попов Д.А. О формуле Сельберга для строго гиперболических групп // *Функц. анализ и его прил.*, **47**:4 (2013), С. 53–66.

25. Попов Д.А. О формуле Вейля для оператора Лапласа на гиперболических римановых поверхностях // *Функц. анализ и его прил.*, **48**:2 (2014), С. 93–96.

26. Попов Д.А. Оценки и поведение величин $P(x)$, $\Delta(x)$ на коротких интервалах // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **80**:6 (2016), С. 230–246.

27. Попов Д.А. О связях дискретного спектра и спектра резонансов для оператора Лапласа на некомпактной гиперболической римановой поверхности // *Функц. анализ и его прил.*, **53**:3 (2019), С. 61–78.

28. Попов Д.А. Дискретный спектр оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы и пси-функция Чебышёва // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **83**:5 (2019), С. 167–180.

29. Попов Д.А. Проблема круга и спектр оператора Лапласа на замкнутых двумерных многообразиях // *УМН*, **74**:5(449) (2019), С. 145–162.

30. Попов Д.А. О спектре оператора Лапласа на замкнутых поверхностях // *УМН* (в печати).

31. Попов Д.А. Распределение простых чисел и дискретный спектр оператора Лапласа // *Изв. РАН. Сер. матем.* **84**:5 (2020), С. 151–168.

REFERENCES

1. Popov D.A. 1970, "Approximation of the diffusion boundary layer in flow within a channel", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 195, no. 6, pp. 1373–1376 (Russian).

2. Popov D.A. 1973, "Consideration of longitudinal diffusion in flow within a channel", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, vol. 6, pp. 63–73 (Russian); *Fluid Dynamics*, vol. 8, no. 6, pp. 902–910 (English).

3. Popov D.A. 1975, "A problem with discontinuous boundary conditions and the approximation of the diffusion boundary layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 39, no. 1, pp. 109–117 (Russian).

4. Popov D.A. 1975, "Theory of Yang-Mills fields", *TMF*, vol. 24, no. 3, pp. 347–356 (Russian); *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 24, no. 3, pp. 879–885 (English).

5. Popov D.A., Daikhin L.I. 1975, "Einstein spaces and Yang–Mills fields", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 225, no. 4, pp. 790–793 (Russian).

6. Popov D.A., Sushko D.V. 1990, "Convergence of algorithms for the numerical solution of a convolution equation", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 315, no. 2, pp. 309–313 (Russian); 1991, *Dokl. Math.*, vol. 42, no. 3, pp. 784–788 (English).

7. Popov D.A. 1990, "On convergence of a class of algorithms for the numerical Radon transform", *Mathematical Problems of Tomography*, Transl. Math. Monographs, vol. 81, eds. Gelfand J.M., Gindikin S.G., Amer. Math. Soc., pp. 7–65.

8. Popov D.A. 1993, "The convergence of tomographical algorithms and estimation of oscillatory integrals", *Ill-posed Problems in Mathematical Physics and Analysis. Moscow-Utrecht.*

9. Popov D.A., Sokolova E.V., Sushko D.V. 1994, "Mathematical Models in Two-Dimensional Radon Tomography", *Applied Problems of Radon Transform*, S. Gindikin (ed.), Providence: AMS, pp. 129–204.

10. Popov D.A., Sushko D.V. 1994, "Computation of singular convolutions", *Applied Problems of Radon Transform*, S. Gindikin (ed.), Providence: AMS, pp. 43–127.

11. Popov D.A. 1997, "Estimates with constants for some classes of oscillatory integrals", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 52, no. 1(313), pp. 77–148 (Russian); *Russian Math. Surveys*, vol. 52, no. 1, pp. 73–145 (English).

12. Popov D.A. 1997, "Spherical convergence of the Fourier series and integral of the indicator of a two-dimensional domain", *Tr. Mat. Inst. Steklova*, Analytic number theory and applications, Collection of papers. To Prof. Anatolii Alexeevich Karatsuba on occasion of his 60th birthday, vol. 218, Nauka, Moscow, pp. 354–373 (Russian); *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 218, pp. 352–371.

13. Popov D.A. 1998, "Reconstruction of characteristic functions in two-dimensional Radon tomography", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 53, no. 1(319), pp. 115–198 (Russian); *Russian Math. Surveys*, vol. 53, no. 1, pp. 109–193 (English).

14. Popov D.A. 1998, “Spherical convergence of the Fourier integral of the indicator function of an N-dimensional domain”, *Math. sb.*, vol. 189, no. 7, pp. 145–157 (Russian); *Sb. Math.*, vol. 189, no. 7, pp. 1101–1113 (English).

15. Popov D.A. 2000, “On the number of lattice points in three-dimensional solids of revolution”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 64, no. 2, pp. 121–140 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 64, no. 2, pp. 343–361 (English).

16. Popov D.A. 2001, “The Generalized Radon Transform on the Plane, the Inverse Transform, and the Cavalieri Conditions”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 35, no. 4, pp. 38–53 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 35, no. 4, pp. 270–283 (English).

17. Popov D.A., Sushko D.V. 2002, “A parametrix for a problem of optical-acoustic tomography”, *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 382, no. 2, pp. 162–164 (Russian); 2002, *Dokl. Math.*, vol. 65, no. 1, pp. 19–21 (English).

18. Popov D.A. 2001, “The Paley–Wiener Theorem for the Generalized Radon Transform on the Plane”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 37, no. 3, pp. 65–72 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 37, no. 3, pp. 215–220 (English).

19. Popov D.A., Sushko D.V. 2004, “Image Restoration in Optical Acoustic Tomography”, *Probl. Peredachi Inf.*, vol. 40, no. 3, pp. 81–107 (Russian); *Problems Inform. Transmission*, vol. 40, no. 3, pp. 254–278 (English).

20. Popov D.A. 2008, “Remarks on uniform combined estimates of oscillatory integrals with simple singularities”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 72, no. 4, pp. 173–196 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 72, no. 4, pp. 793–816 (English).

21. Popov D.A. 2009, “Asymptotic behaviour of the positive spectrum of a family of periodic Sturm–Liouville problems under continuous passage from a definite problem to an indefinite one”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 73, no. 3, pp. 151–182 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 73, no. 3, pp. 579–610 (English).

22. Popov D.A. 2011, “On the second term in the Weyl formula for the spectrum of the Laplace operator on the two-dimensional torus and the number of integer points in spectral domains”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 75, no. 5, pp. 139–176 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 75, no. 5, pp. 1007–1045 (English).

23. Popov D.A. 2012, “Explicit Formula for the Spectral Counting Function of the Laplace Operator on a Compact Riemannian Surface of Genus $g > 1$”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 46, no. 2, pp. 66–82 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 46, no. 2, pp. 133–146 (English).

24. Popov D.A. 2013, “On the Selberg Trace Formula for Strictly Hyperbolic Groups”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 47, no. 4, pp. 53–66 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 47, no. 4, pp. 290–301 (English).

25. Popov D.A. 2014, “On the Weyl Formula for the Laplace Operator on Hyperbolic Riemann Surfaces”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 48, no. 2, pp. 93–96 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 48, no. 2, pp. 150–153 (English).

26. Popov D.A. 2016, “Bounds and behaviour of the quantities $P(x)$, $\Delta(x)$ on short intervals”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 80, no. 6, pp. 230–246 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 80, no. 6, pp. 1213–1230 (English).

27. Popov D.A. 2019, “On relationships between the discrete and resonance spectra for the Laplace operator on a non-compact hyperbolic Riemann surface”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 53, no. 3, pp. 61–78 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, to appear (English).

28. Popov D.A. 2019, “The discrete spectrum of the Laplace operator on the fundamental domain of the modular group and the Chebyshev psi-function”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 83, no. 5, pp. 167–180 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 83, no. 5, pp. 1066–1079 (English).

29. Popov D.A. 2019, “Circle problem and the spectrum of the Laplace operator on closed 2-manifolds”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 74, no. 5(449), pp. 145–162 (Russian); *Russian Math. Surveys*, vol. 74, no. 5, pp. 909–925 (English).

30. Popov D.A. 2021, “On the spectrum of the Laplace operator on closed surfaces”, *Uspekhi Mat. Nauk*, to appear (Russian).

31. Popov D.A. 2020, “Distribution of prime numbers and the discrete spectrum of the Laplace operator”, Izv. Math., 84:5, pp. 960–977.

Получено 18.07.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.