ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 669.537.7:621.357.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-382-395

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в металлических средах на основе концепции силовых линий

А. Н. Чуканов, В. А. Терешин, Е. В. Цой

Александр Николаевич Чуканов — доктор технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
Валерий Алексеевич Терёшин — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: tereshin.va-tspu@yandex.ru
Евгений Владимирович Цой — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Аннотация

В данной статье на базе классических работ Г. Кирша, *K. Inglis*, Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили в рамках теории упругости и линейной механики разрушения продолжена разработка математического аппарата, который позволяет получать решения ряда трёхмерных задач механики разрушения в упрочнённой металлической среде.

Опираясь на работы *G. R. Irwin*, Г. И. Баренблатта, Вестергарда (*Westergaard*), Л. Д. Ландау, Е. М. Лившица авторы выполнили математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в объёме нагруженного стального образца в окрестностях пор различной морфологии, возникающих в результате эксплуатационных нагрузок и агрессивных воздействий окружающих сред.

Привлечение авторами представлений о силовых линиях поля напряжений в металлической среде позволило им разработать алгоритм определения компонент тензора напряжений около концентраторов в виде пор различной формы. Был рассмотрен стационарный случай при фиксированном соотношении величин внешнего напряжения и предела текучести металлической среды (стали). Разработана методика и создан математический аппарат для расчёта уравнений силовых линий для трёхмерного случая - «поры в форме сферической линзы». Предлагаемый подход подтвердил наличие в окрестностях поры зон, свободных от напряжений, и выявил связь их размеров с морфологией пор и внешним напряжением.

Ключевые слова: сталь, растяжение, пора, поле напряжений, силовые линии, тензор напряжений.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
А. Н. Чуканов, В. А. Терешин, Е. В. Цой. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в металлических средах на основе концепции силовых линий // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 382–395.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 669.537.7:621.357.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-382-395

Mathematical modeling of the stress-strain state in metallic media based on the concept of force lines

A. N. Chukanov, V. A. Tereshin, E. V. Tsoi

Alexander Nikolaevich Chukanov — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
Valery Alekseevich Tereshin — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: tereshin.va-tspu@yandex.ru
Evgeny Vladimirovich Tsoi — post-graduate student, Tula state pedagogical University named after L. N. Tolstoy (Tula).
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Abstract

In this article, based on the classical works of G. Kirsch, K. Inglis, G. V. Kolosov, and N. I. Muskhelishvili, we continue to develop a mathematical apparatus that allows us to obtain solutions to a number of three-dimensional problems of fracture mechanics in a hardened metal medium.

Based on the work of G. R. Irwin, G. I. Barenblatt, Westergaard, L. D. Landau, and E. M. Livshits, the authors performed mathematical modeling of the stress-strain state in the volume of a loaded steel sample in the vicinity of pores of various morphologies resulting from operational loads and aggressive environmental influences. An algorithm for determining the components of the stress tensor near concentrators in the form of pores of various shapes is proposed for understanding the force lines of the stress field in a metallic medium. A stationary case with a fixed ratio of external stress and yield strength was considered.

Keywords: steel, tension, pore, stress field, force lines, stress tensor.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
A. N. Chukanov, V. A. Tereshin, E. V. Tsoi, 2020, “Mathematical modeling of the stress-strain state in metallic media based on the concept of force lines”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 382–395.

1. Введение

В классических работах Г. Кирша, *K. Inglis*, Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили, *N.F. Mott* [1-6] был создан математический аппарат теории упругости, который позволил получить решения основных плоских задач механики разрушения, сыгравших большую роль в развитии теории квазихрупкого разрушения.

Благодаря дальнейшим исследованиям *G. R. Irwin*, Г. И. Баренблатта, *D. S. Dugdale*, Вестергарда (*Westergaard*), Л. Д. Ландау, Е. М. Лившица [7-11] напряженно-деформированного состояния (НДС) упругопластических сред с концентраторами напряжений в виде отверстий, пор и трещин развивались представления о распределении компонент поля напряжений около несплошностей различной морфологии в напряженной металлической среде. Несмотря на огромную значимость выполненных работ большая их часть была направлена на решение плоских задач. Разработка же математического аппарата для моделирования НДС металлических сред с порами и трещинами в плане их трёхмерного решения до сих пор продолжается.

В работах, посвящённых оценке влияния НДС в окрестностях объёмных несплошностей различной природы (пор, неметаллических включений, трещин), являющихся в металлической матрице концентраторами внутренних напряжений ценную информацию может дать использование представления о силовых линиях поля напряжений [12-14].

Опираясь на результаты вышеперечисленных исследователей и концепцию силовых линий поля напряжений авторы данной статьи выполнили математическое моделирование НДС в объёме нагруженного стального образца в окрестностях пор различной морфологии, возникающих в результате эксплуатационных нагрузок и агрессивных воздействий окружающих сред. Был рассмотрен стационарный случай при фиксированном соотношении величин внешнего напряжения и предела текучести стального образца.

Цель работы – разработка алгоритма численного расчёта компонент тензора напряжений в металлической среде в окрестностях пор правильной формы (цилиндр, сфера, сферическая линза) на основе методики математического моделирования и построения системы силовых линий поля напряжений.

Основная идея. Обоснование возможности использования концепции силовых линий для математического моделирования компонент поля напряжений в металлической среде и их численного расчёта в окрестностях концентраторов (пор различной морфологии).

2. Методика выполнения работы

Поставленную задачу решали путём: 1) разработки методики построения системы силовых линий, 2) вычисления описывающих их уравнений и 3) использования этих уравнений для решения трёхмерной задачи – описания полей напряжений в окрестностях пор в форме сферы и сферической двояковыпуклой линзы. Дополнительно авторы уточнили параметры зон пластичности в окрестностях пор и выявили связь зон, свободных от напряжений в окрестностях поры, с её геометрией и внешним напряжением.

Для построения системы силовых линий рассмотрели протяжённый металлический образец (длинный и достаточно толстый параллелепипед), к которому приложено внешнее растягивающее напряжение [15,16]. В образце имелась малая цилиндрическая пора, вытянутая в направлении, перпендикулярном оси параллелепипеда (рис. 1а).

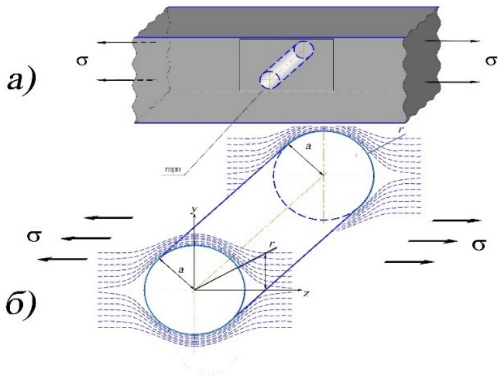

Рис. 1: цилиндрическая пора в растянутом металлическом образце (а); планарные координаты и силовые линии в сечении поры (б) [15].

Ось ox направлена вдоль оси образца (продольная координата), ось oy перпендикулярна его оси (поперечная координата). Ось ox физически выделена, так как она является ещё и осью направления действия внешних напряжений σ (рис. 1б). В плоскостях сечений, перпендикулярных оси образца (т.е., параллельных его оси), характеристики НДС зависят от

координат x и y.

Рассматривали выделенный малый элемент объёма образца (микрообъём) dV_1 в виде куба, расположенного справа от внешней границы поры. Грани куба были перпендикулярны осям ox и oy (рис. 2).

Правую грань куба, перпендикулярную оси ox, называли главной гранью. На эту грань действовали силы упругости: нормальная $k\sigma_{xx}$ и касательная сила $k\sigma_{xy}$ (σ_{xx} и σ_{xy} – компоненты тензора напряжений, k – коэффициент пропорциональности (площадь грани)).

Допускали, что вид функций $\sigma_{xx}(x,y)$, $\sigma_{xy}(x,y)$ известен. Положительной силой $k\sigma_{xy}$ являлась сила, направленная в сторону увеличения oy. Результирующая сил $k\sigma_{xx}$ и $k\sigma_{xy}$ $\boldsymbol{dF}_1$ была направлена вниз под углом θ_1 к оси ox (рис. 2). На рис. 2 названные силы показаны стрелками, причём при изображении силы $k\sigma_{xy}$ учитывали, что эта сила отрицательна (опытный факт).

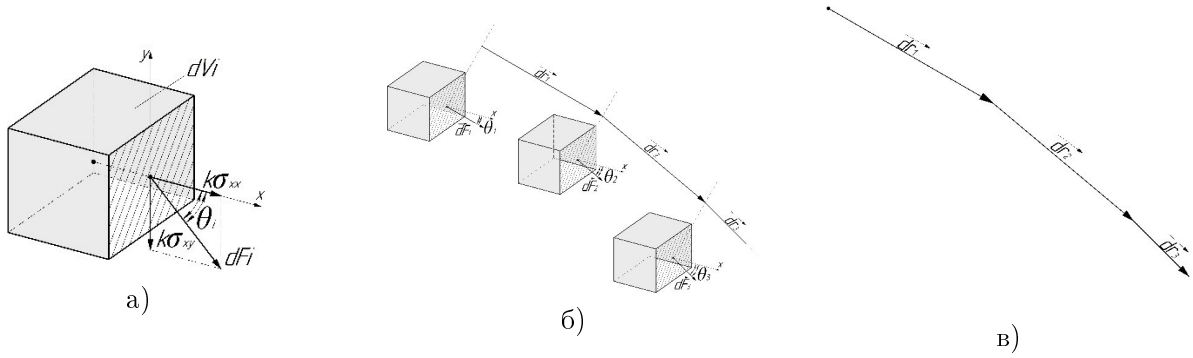

Рис. 2: Силы $\sigma_{xx}(x,y)$ и $\sigma_{xy}(x,y)$, действующие на кубический микрообъём dV_i и их равнодействующая $\boldsymbol{dF}_i$ (а); кубические микрообъёмы в окрестности поры (б); суммарная силовая линия, составленная из векторов перемещений $\boldsymbol{dr}_i$для серии микрообъёмов dV_i (в).

Для перехода к следующему соседнему элементу dV_2, совершали малое перемещение $\boldsymbol{dr}_1$ в направлении угла θ_1. В отношении элемента dV_2 проводили аналогичные рассуждения и построения, определяя вектор $\boldsymbol{dF}_2$и угол θ_2, а затем совершали малое перемещение $\boldsymbol{dr}_2$ в направлении угла θ_2. После серии подобных шагов (переходов к новым микрообъёмам) получали цепочку векторов $\boldsymbol{dF}_1$, $\boldsymbol{dF}_2$, ..., $\boldsymbol{dF}_N$ и параллельных им перемещений $\boldsymbol{dr}_1$, $\boldsymbol{dr}_2$, ..., $\boldsymbol{dr}_N$. В случае предельно малых $\boldsymbol{dr}_i$ и больших $\boldsymbol{N}$ (количество результирующих векторов в цепочке) получали суммарную ломаную линию, составленную из цепочки векторов $\boldsymbol{dr}_1$, $\boldsymbol{dr}_2$, ..., $\boldsymbol{dr}_N$. Эту линию называли **силовой линией** (рис. 2) [15,16].

В соответствии с изложенным подходом в пространстве, окружающем пору, строили систему силовых линий, не пересекающихся между собой. На бесконечном удалении от поры они переходили в прямые, параллельные оси ox (рис. 1б). Полученная картина силовых линий представляла наглядный образ поля напряжений использованный далее в оценке НДС.

В дальнейшем обсуждении грани элементов dVi, обращённые в сторону роста оси «oy», не рассматривали, так как ось oy не являлась физически выделенной осью. Считали, что в этом направлении внешние силы на образец не действуют.

Построение цепочек векторов $\boldsymbol{dr}_1$, $\boldsymbol{dr}_2$, ..., $\boldsymbol{dr}_N$ начинали с некоторой точки (точка наблюдения) около поры. На бесконечном удалении от неё силовая линия переходила в прямую, параллельную оси Ox. Силовую линию, совпадающую при $z = \infty$ с осью Ox называли нулевой силовой линией. На бесконечном удалении от поверхности поры внешние силы, действующие на неё, считали равными нулю.

В случае более сложного силового воздействия на образец (например, двухосного растяжения) считали необходимым дополнительно учитывать силы, действующие и на другие грани кубического микрообъёма dV_i (например, одну из граней, перпендикулярных главной). В этом

случае требуется использовать (построить) две системы силовых линий. В одной из них силовые линии на бесконечном удалении от поры превращаются в прямые, параллельные оси Ox, в другой - в прямые, параллельные оси Oy.

Привлечение понятия (образа) силовых линий поля внутренних напряжений позволило визуализировать и сделать физически более понятной процедуру определения его параметров поля (рассчитать компоненты тензора напряжений).

3. Экспериментальные результаты

В проведенном авторами исследовании построение системы силовых линий использовали для анализа характеристик поля внутренних напряжений в окрестностях пор близких по форме к порам правильной формы (цилиндр, сфера, сферическая линза, эллипсоид вращения). Исследуемую пору (вместе с её окрестностью) считали значительно более малым объектом по сравнению с размерами образца.

На первом этапе исследований объектом была пора в виде цилиндра в образце, находящемся под действием одноосного растягивающего напряжения. Для системы силовых линий в окрестностях такой поры наблюдается её аналогия с системой линий тока, используемых в описании процесса обтекания идеальной жидкостью длинного круглого цилиндра, ориентированного перпендикулярно вектору скорости жидкости, движущейся на пору из бесконечности [11,17,18]. На поверхности поры нормальная составляющая силы была равна нулю. Величины σ_{xx} и σ_{xy}считали аналогами векторов скорости жидкости v_xи v_y в ситуации с её течением [10].

Проводя аналогию между системами силовых линий и линий тока, ввели функции φ (функция потенциала) и ψ (функция тока. В случае цилиндрической поры, находящейся в среде с внешним напряжением σ_∞, действующим по оси ox, функция ψ имела вид (1)

$$\psi = y\left[1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right]. \tag{1}$$

Выражения для величин $\sigma_{xx} = \partial\psi/\partial y$ и $\sigma_{xy} = -\partial\psi/\partial x$ в этом случае принимали вид (2):

$$\sigma_{xx} = 1 + \frac{a^2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{2a^2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \tag{2}$$

При $x \to \infty$ считали справедливым $\sigma_{xx} = 1$. То есть, в выражении (2) под σ_{xx} и σ_{xy} понимали отношение истинных величин напряжений к номинальному действующему в образце напряжению σ равному внешнему растягивающему напряжению.

Третью компоненту тензора напряжений σ_{yy} определили с помощью уравнения статики $\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0$.

Выражение для компоненты σ_{yy} имело вид (3):

$$\sigma_{yy} = const\,(x) + a^2\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}. \tag{3}$$

Константу интегрирования, которая может быть функцией координаты x, подбирали так, чтобы получать ноль в случаях: 1) $y = a$, $x = 0$; 2) $y = 0$, $x = a$; 3) $x = \infty$.

Учитывая сказанное, уравнение силовой линии представили в виде выражения (1), приравненного к константе b.

$$\psi = b; \quad b = y\left[1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right]. \tag{4}$$

Константа b (далее — параметр b, которым характеризуется каждая отдельная силовая линия), имеет в соответствии с (4) смысл расстояния между силовой линией и осью ox при очень больших x (например, $x >> a$).

Помимо этого, можно учитывали следующее. Если в окрестности поры рассмотреть прямоугольную площадку размером $1 \times b_{fx}$, то в точке $z = \infty$ перпендикулярно оси Ox её пронизывает N силовых линий. В точке $z = 0$ эти же силовые линии будут пронизывать другую прямоугольную площадку размером $1 \times (y_{fx} - a)$. Тогда можно записать равенство (5)

$$n_\infty b_{fx} = \int_a^{y_{fx}} n\,(y)\,dy, \tag{5}$$

где $n(y)$ — функция плотности силовых линий, максимально изменяемая на площадках в точках, близких $z = 0$. В точке $z = \infty$ $n(y) = const = n_\infty$.

Рассмотренный пример относится к так называемому плоскому случаю. Подобный случай рассмотрен в гидродинамике как случай потенциального плоского течения жидкости [15,16]. В нём для функций φ и ψ выполнялись соотношения $\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$; $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$.

Приведенные авторами уравнения аналогичны условиям Коши – Римана в теории функции комплексного переменного, чем объясняется широкое применение комплексных функций в задачах гидродинамики и теории упругости (в гидродинамике плоского течения жидкости, в теории упругости, а также в теории прочности и разрушения при анализе плоско деформированного или плосконапряжённого состояния).

В данной работе, объектом приложения концепции силовых линий являлись поля напряжений около пор в форме сферы и двояковыпуклой линзы в металлической среде, подвергнутой внешнему одноосному растягивающему напряжению. Определение параметров поля напряжений около этих объектов в отличие от цилиндрической поры относится уже не к плоским, а к трёхмерным задачам. Переходя к их обсуждению, отмечали, что в трёхмерных случаях также можно применять функции φ и ψ, несмотря, на то, что они в трёхмерной задаче не подчиняются уравнениям Коши – Римана. Далее в рассуждениях использовали две цилиндрические координаты – координату z, вдоль которой направлена сила внешней нагрузки, и радиальную координату ρ. Третья координата α (угловая) являлась циклической. Начало координат находилось в центре исследуемого объекта (поры в форме сферы, двояковыпуклой линзы, эллипсоида вращения).

4. Обсуждение результатов эксперимента

4.1. Поле напряжений около поры в форме сферы (сферическая пора)

Анализируя НДС в окрестности поры в форме сферы (случай 1, рис.3), считали, что уравнение силовых линий имеет общие черты с уравнением (1).

На бесконечности силовые линии должны вырождаться в прямые, параллельные оси Oz. Следовательно, в уравнение силовой линии должен входить параметр b. Однако равенство $\psi = b$ не является очевидным.

Новое соотношение, подобное соотношению (5), записали в виде (6)

$$n_\infty \pi b_{fx}^2 \;=\; \int_a^{\rho_{fx}} n\,(\rho)\,2\pi\rho d\rho. \tag{6}$$

Сопоставляя (5) и (6), заключили, что функция силовой линии ψ должна иметь размерность $[b^2]$.

С учётом сказанного, составили уравнение силовой линии (7)

$$b^2 = \rho^2 \left[1 - \frac{a^4}{(\rho^2 + z^2)^2} \right]. \tag{7}$$

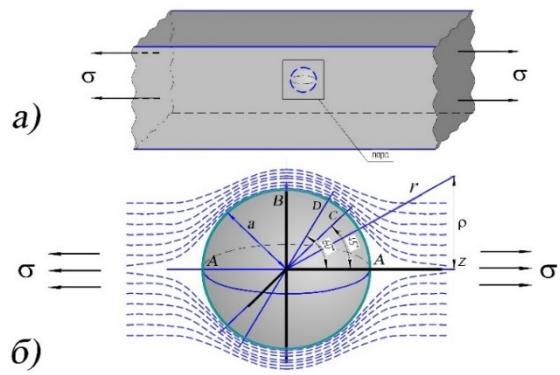

Рис. 3: Сферическая пора в растянутом образце (а); цилиндрические координаты и силовые линии у зон пластичности (б) [15].

Уравнение (7) описывает систему силовых линий в сечении, плоскость которого содержит ось Oz. На этой плоскости сферическая пора выглядит как окружность.

Функция ψ представляет собой правую часть уравнения (7). Рассматривая b^2 как переменную величину (одно из значений функции ψ), компоненты напряжения σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ определили в виде (8).

$$\sigma_{zz} = \partial b^2/\partial \rho^2; \quad \sigma_{z\rho} = \sigma_{zz}\partial\rho/\partial z. \tag{8}$$

Согласно этим определениям, для компонент тензора напряжений получили выражения (9):

$$\sigma_{zz} = 1 + \frac{a^4\left(\rho^2 - z^2\right)}{(\rho^2 + z^2)^3}; \quad \sigma_{z\rho} = -\frac{2a^4\rho z}{(\rho^2 + z^2)^3}. \tag{9}$$

Уравнения (9) показывают, что полюса сферической поры ($z = 0$, $\rho = a$) являются концентратами напряжения (точка А на рис. 3б). Величина σ_{zz} в этих точках в два раза больше номинального напряжения.

Используя уравнение статики (10)

$$\frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \sigma_{\rho\rho}\right) = 0, \tag{10}$$

разработали уравнения (11) для определения величины $\sigma_{\rho\rho}$

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{2}{3}\left[\frac{a}{\rho} - \frac{a^4}{(\rho^2 + z^2)^2}\right] + \frac{a^4 z^2}{15(\rho^2 + z^2)^3}. \tag{11}$$

Формула (11) верна при сравнительно малых z ($z < 0{,}5a$) и достаточно больших ρ ($\rho > 0{,}5a$). При использовании уравнения (10) константу интегрирования связывали с условием $z = 0$, $\rho = a$; $\sigma_{\rho\rho} = 0$.

Точки поля напряжений около поверхности поры с малыми z и заметными ρ представляли наибольший интерес для определения наличия и размеров зон пластичности около концентраторов напряжений в виде пор [18, 19].

4.2. Поле напряжений около поры в форме двояковыпуклой линзы (сферической линзы. Случай 2)

Пору в форме двояковыпуклой линзы рассматривали как область, образованную двумя пересекающимися сферами радиусов a и d (рис. 4). Параметрами поры являлись радиус периметра линзы d (половина габарита — $2d$ диаметр проекции линзы на плоскость, перпендикулярную $0z$) и толщина линзы в её центре $2h$. Ось линзы совпадала с направлением внешнего растягивающего напряжения [20-22].

Важным фактором, определяющим траектории силовых линий около описанной поры, являлась возможность их излома у кромки поверхности линзы. В качестве аксиомы приняли, что непосредственно у кромки поры-линзы силовая линия круто огибается, но не испытывает при этом излома.

а) б)

Рис. 4: Поэтапное представление поры в форме двояковыпуклой линзы (1) объединением сферических пор радиусов a (2) и d (3) (а); нулевая (2) и произвольная (3) силовые линии у поры (б) [20].

Первым этапом определения уравнения силовой линии для случая 2 являлось нахождение координат ρ силовой линии с параметром b при пересечении ею плоскостей z = 0 и $z = h$.

Выявление этих двух величин ρ, обозначаемых далее, как ρ_m и ρ_h,позволило составить уравнение силовой линии, проходящей через три точки (третья точка $\rho = b$ при $z = \infty$). При этом принимали во внимание следующие соображения.

1) Если на пути силовой линии с параметром b вместо поры - сферической линзы поместить пору-сферу радиусом d и тем же центром, то координата ρ_m будет равна ρ_1. Где ρ_1 – решение уравнения (7), в котором $z = 0$ и, вместо a использован радиус d. Величина ρ_1 является первым приближением при определении ρ_m. Уточнённое значение ρ_m будет меньше ρ_1, так как у кромки поры плотность силовых линий увеличена по сравнению с остальной её поверхностью.

2) Далее рассматривали точку $z = 0$, $\rho = \rho_1$. Если на пути силовой линии с параметром b вместо поры - сферической линзы поместить пору-сферу радиусом a с центром в точке $z = -L$ $(L = a-h)$, то требуется определить уравнение и параметр b_1силовой линии, проходящей через точку $z = 0$, $\rho = \rho_1$. Для этого решали уравнение (7) относительно b, в котором в качестве ρ и z использовали ρ_1 и L.

Согласно перечисленным рассуждениям, величина ρ_m являлась решением системы приведенных ниже трёх уравнений, каждое из которых основывалось на выражении (7).

$$b^2 = \rho_1^2\left[1 - \frac{d^4}{\rho_1^4}\right]; \quad b_1^2 = \rho_1^2\left[1 - \frac{a^4}{\left(\rho_1^2 + L^2\right)^2}\right]; \quad b_1^2 = \rho_m^2\left[1 - \frac{d^4}{\rho_m^4}\right].$$

Результатом решения этих уравнений являлась выражение (12):

$$\rho_m^2 = d^2 + \frac{d^2}{2a^2} + Bb^4, \quad B = \frac{3L^2d^2 + a^4}{8a^4d^2}. \tag{12}$$

При определении величины ρ_h считали, что в крайнем идеальном случае для поры в форме сферы (рис. 3б) её нулевая силовая линия $b = 0$ совпадает с осью Oz вплоть до встречи с поверхностью поры, где испытывает излом и дальше («раздваиваясь») обтекает пору по её поверхности. В этом случае при $b = 0$ выполняется $\rho_h = \rho_{h0} = 0$. При переходе от нулевой силовой линии к силовым линиям с малым b величина ${\rho_h}^2$ возрастает от 0 до $3b^2/4$. Для поры в форме линзы, считали, что при переходе от нулевой линии к линии с малым b величина ${\rho_h}^2$ также изменяется на $3b^2/4$.

Для линз средней кривизны (для которых L, d, a сопоставимы между собой), в отличие от рассмотренного примера, нулевая силовая линия должна проходить через кромку линзы, не испытывая излома (исходный постулат). То есть, на отрезке $0 < z < h$ нулевая силовая линия не совпадает с поверхностью линзы. Считали, что наблюдается только касание силовой линией границы поры. В таком случае силовая линия должна пересекать плоскость $z = h$ в точке $\rho_{h0} > 0$. Рост величины ${\rho_h}^2$ считали происходящим почти линейно относительно b^2.

В случае линзообразных пор повышенной и высокой кривизны для силовых линий, последовательно удаляющиеся от oz и поверхности поры, рост ${\rho_h}^2$ (или рост b) считали почти линейным относительно b^2 (13):

$$\rho_h^2 = \rho_{h0}^2 + \frac{b^2}{C^2 + b^2}\left(\rho_m^2 - \rho_{h0}^2\right), \tag{13}$$

где C — постоянная, приблизительно равная d. При очень малых b ($b << h$) правая часть в формуле (13) стремится к выражению $\rho_{h0}^2 + 0,75b^2$.

В отношении величины ρ_{h0}^2 приняли следующие допущения. Нулевая силовая линия $\rho = \rho(z)$ испытывала перегиб при значении $z = z_\sim$, несколько превышающем h (рис. 4а). Превышение тем больше, чем больше отношение a/d. При $d = a$ (случай сферической поры) перегиб нулевой силовой линии происходил в точке $z = a$ (т.е., совпадал с точкой излома).

Среднее значение производной $d\rho/dz$ на интервале $01z_\sim$, как и в случае сферической поры, было равно – 1. При $L = 0$ приняли $\rho_{h0} = 0$, а при $L > a$ и $d > 0$ приняли $\rho_{h0} > d$. Исходя из этих соображений составили выражение (14) для ρ_{h0}.

$$\rho_{h0=Lha/d^2}. \tag{14}$$

В качестве проверки его работоспособности определили значения ρ_{h0}и ρ_{h0}/d для трёх разных величин d ($a = 1$). Результаты расчёта приведены в таблице 1.

d/a	0,800	0,707	0,600
ρ_{h0}/a	0,375	0,414	0,445
ρ_{h0}/d	0,469	0,586	0,741

Таблица 1: Значения ρ_{h0} и ρ_{h0}/d в зависимости от величины d *(d/a)*

Из таблицы видно, что значения ρ_{h0} заметно ниже своих d. Соблюдается тенденция увеличения ρ_{h0}/a и ρ_{h0}/d с уменьшением d/a. То есть существенно уменьшается площадь зоны, расположенной у поверхности поры под системой силовых линий. Зоны свободной от них, то есть – **зоны свободной от напряжений**.

В соответствии с принятым постулатом об отсутствии излома силовой линии, разработали уравнение для произвольной (не нулевой) силовой линии (рис. 4б) записали уравнение (15):

$$\rho^2 = \rho_m^2 - \frac{(\rho_m^2 - b^2)(\rho_m^2 - \rho_h^2)z^2}{(\rho_h^2 - b^2)h^2 + (\rho_m^2 - \rho_h^2)z^2}. \tag{15}$$

Для нулевой силовой линии справедливым считали уравнение (16):

$$\rho^2 = d^2 \frac{\rho_{h0}^2}{\rho_{h0}^2 h^2 + \left(d^2 - \rho_{h0}^2 z^{21}\right)}; \quad \frac{d\rho}{dz} = -\frac{z}{\rho} \frac{d^2\left(d^2 - \rho_{h0}^2\right)\rho_{h0}^2}{\left[\rho_{h0}^2 h^2 + \left(d^2 - \rho_{h0}^2\right) z^2\right]^2}. \tag{16}$$

Все остальные (произвольные) силовые линии ($b > 0$) располагаются выше нулевой линии (рис. 4).

Используя уравнения (8) и (15) получили выражения (17) и (18) для вычисления компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{zz}^{-1} = \frac{\left[(1-\gamma_m)\left(\rho_m^2 - \rho_h^2\right) + (\gamma_h - \gamma_m)\left(\rho_m^2 - b^2\right)\right]\left(\rho_h^2 - b^2\right)h^2 + (1-\gamma_m)\left(\rho_m^2 - \rho_h^2\right)^2 z^2 - w}{\left[\left(\rho_h^2 - b^2\right)h^2 + \left(\rho_m^2 - \rho_h^2\right)z^2\right]^2} z^2, \tag{17}$$

$$\sigma_{z\rho} = \sigma_{zz}\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_b = -\sigma_{zz}\frac{z}{\rho}\frac{(\rho_m^2 - b^2)(\rho_m^2 - \rho_h^2)z^2(\rho_h^2 - b)h^2}{\left[(\rho_h^2 - b^2)h^2 + (\rho_m^2 - \rho_h^2)z^2\right]^2}, \tag{18}$$

где $w = (1-\gamma_h)(\rho_m^2 - \rho_h^2)(\rho_m^2 - b^2)h^2$ — слагаемое более низкого ранга, содержащее близкий к нулю множитель $(1-\gamma_h)$, в свою очередь $\gamma_h = d{\rho_h}^2/db^2$ — величина, близкая к 1.

Для точек на самой нулевой линии получили уравнения (19)и (20):

$$\sigma_{zz}^{-1} = \gamma_0 + \frac{\left[(1-\rho_0)\left(d^2 - \rho_{h0}^2\right) + (\gamma_h - \gamma_0)d^2\right]\rho_{h0}^2 h^2 + (1-\gamma_0)\left(d^2 - \rho_{h0}^2\right)^2 z^2 - (1-\gamma_h)\left(d^2 - \rho_{h0}^2\right)d^2 h^2}{\left[\rho_{h0}^2 h^2 + \left(d^2 - \rho_{h0}^2\right)z^2\right]^2} z^2 \tag{19}$$

$$\sigma_{z\rho} = -\sigma_{zz}\frac{z}{\rho}\frac{d^2(d^2 - \rho_{h0}^2)\rho_{h0}^2 h^2}{\left[\rho_{h0}^2 h^2 + (d^2 - \rho_{h0}^2)z^2\right]^2}. \quad (\gamma_0 = d^2/2a^2) \tag{20}$$

На основании вышеизложенного разработали алгоритм вычисления компонент тензора внутренних напряжений. Основные его шаги представлены ниже.

1. Задают параметр b_i из набора значений b_1, b_2, b_3, ..., b_N. Для каждого b_i задают значение z_j из диапазона z_1, z_2, z_3, ..., z_N. (b - расстояние между силовой линией и осью ox при очень больших x (например, $x >> a$).

2. С помощью уравнения нулевой силовой линии (16) и при использовании (12) –(14) определяют ρ_{ij}.

3. С помощью уравнений произвольной (15) и нулевой (16) силовых линий вычисляют компоненты тензора напряжений $(\sigma_{zz})_{ij}$ и $(\sigma_{z\rho})_{ij}$.

4. Данные о всех $(\sigma_{zz}\ \sigma_{z\rho})_{ij}$ перерабатывают и создают таблицу значений z_i, ρ_j, а также соответствующих им значений $(\sigma_{zz}\ \sigma_{z\rho})_{ij}$.

Замечание. Приведенный алгоритм считали более рациональным по сравнению с процедурой прямого определения величин σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ в заданных точках (анализ совокупности пар чисел z_i, ρ_i), заключающейся в определении параметра b_i силовой линии, проходящей через данную точку z_i, ρ_i), с помощью уравнений (12) – (15) нулевой и произвольной силовой линии и дальнейшей его подстановке в формулы (17) и (18) для определения σ_{zz}и $\sigma_{z\rho}$.

Важным результатом, полученным в работе при решении трёхмерной задачи на базе концепции силовых линий задачи с порой в форме сферической линзы, является подтверждение

авторами факта отсутствия напряжений в некоторой зоне, прилегающей к поверхности поры у оси oz.

5. Выводы

1. Разработана методика построения систем силовых линий в нагруженных металлических средах.

2. Создан рациональный алгоритм для случая трёхмерного расчёта компонент тензора напряжений и координат границ зон пластичности в окрестностях пор различной морфологии.

3. Подтверждено наличие в окрестностях пор изученной морфологии зон свободных от напряжений.

4. Выявлена связь параметров зоны, свободной от напряжений в окрестностях поры, с морфологией поры и внешним напряжением.

6. Заключение

На базе концепции силовых линий и предложенной методики их построения разработан алгоритм математического моделирования и вычисления компонент тензора напряжений в окрестностях пор различной морфологии в напряженной металлической среде. Выполненное математическое моделирование позволило уточнить границы зон пластичности в нагруженных металлических образцах у структурных дефектов в виде пор и выявить в их окрестностях наличие зон, свободных от напряжений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A. – 1920. – V. 221. – P. 163–198.

2. Irwin G.R. Fracture dynamics. Fracturing of metals // ASM, Cleveland. – 1948. – P. 147–166.

3. Orowan E.O. In: Proc. Symposium on internal stresses in metals and alloys // London: Institute of Metals. – 1948. – P. 451.

4. Mott N.F. Fracture of metals: theoretical considerations // Engineering. – 1948. – V. 165. – P. 16–18.

5. Irwin G.R. Relation of stresses near a crack to the crack extension force // In: Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Brussels. – 1957. – V. 8. – P. 245–251.

6. Irwin G.R. Plastic zone near a crack and fracture toughness // 7th Sagamore Ardance Materials Research Conference. Syracuse: Syracuse Univ. Press. – 1960.

7. Irwin G.R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. – 1957. – V. 24, No 3. – P. 361–364.

8. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8, No 2. – P. 100–108.

9. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. – 1961. – № 4. – С. 3–56.

10. Разрушение (под ред. Г. Либовица), т. I—VII. – М.: Мир, 1973–1977.

11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т. VII. Теория упругости. Уч. пособие. – М.: Наука, Гл. ред. физматлитературы, 1982, - 248 с.

12. Knott, J.F., Fundamentals of Fracture Mechanics, London: Butterworths, 1973.

13. Nadai, A., Theory of Flow and Fracture of Solids, New York: McGraw-Hill, 1950.

14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] [Учебник для вузов по специальности "Механика"]. - 4-е изд., перераб. и доп. - Москва: Наука, 1973. - 847 с.

15. Чуканов А.Н., Терешин В.А. Силовые линии и алгоритм моделирований напряженно-деформированного состояния материала // «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150-летию со дня рожд. академика А.А. Байкова: Сб. научн. статей Межд. научно-техн. конф. (18.09.2020 г.)/ редкол.: Е.В. Агеев (отв. ред.) [и др.]; Юго-Зап. гос. ун-т. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2020. - 271 с. - С. 241-244.

16. Чуканов А.Н., Терёшин В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния материала на основе концепции силовых линий // Матер. межд. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессоров Бориса Максимовича Бредихина, Василия Ильича Нечаева и Сергея Борисовича Стечкина».- 23-26.09. 20.-Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2020.- С.- (в печати).

17. Чуканов А.Н., Сергеев Н.Н., Терешин В.А., Ростовцев Р.Н., Яковенко А.А., Леонтьев И.М. Термодинамическое обоснование «метанового» механизма деструкции упрочненных конструкционных сталей при электролитическом наводороживании под напряжением // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 10. С. 32–39.

18. Sergeev N.N., Chukanov A.N., Baranov V.P., Yakovenko A.A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement // Metal Science and Heat Treatment. – 2015. - vol.57.- № 1-2.- P. 63-68.

19. Sergeyev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeyev A.N., Leontyev I.M., Khonelidze D.M., and Gvozdev A.E. Formation of Plastic Zones near Spherical Cavity in Hardened Low-Carbon Steels under Conditions of Hydrogen Stress Corrosion // Inorganic Materials: Applied Research, 2018, Vol. 9, No. 4, pp. 663–669.

20. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Хонелидзе Д.М., Широкий И.Ф. Моделирование зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. - № 122. - С. 314-319.

21. Чуканов А.Н. Морфология объёмных зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии / А.Н. Чуканов, В.А. Терешин, А.Е. Гвоздев, С.Н. Кутепов, А.Н. Сергеев, Е.В. Агеев, А.А. Яковенко // Известия Юго-Западного государственного университета. - 2019; вып. 23(5). - С. 35-52.

22. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Шатульский А.А., Навоев А.П., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Кутепов С.Н., Цой Е.В. Эволюция зон пластичности в окрестности пор в сталях в условиях стресс-коррозии // Заготовительные производства в машиностроении.- 2020. - Т. 18. - №3.- С. 130-136.

REFERENCES

1. Griffith A.A. “The phenomenon of rupture and flow in solids”, Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A.- 1920. - V. 221. - P. 163-198.

2. Irwin G. R. Fracture dynamics. Fracturing of metals / / ASM, Cleveland. - 1948. - P. 147-166.

3. Orowan E. O. In: Proc. Symposium on internal stresses in metals and alloys / / London: Institute of Metals. - 1948. - P. 451.

4. Mott N. F. Fracture of metals: theoretical considerations / / Engineering. - 1948. - V. 165. - P. 16-18.

5. Irwin G.R. Relation of stresses near a crack to the crack extension force // In: Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Brussels. - 1957. - V. 8. - P. 245-251.

6. Irwin G. R. Plastic zone near a crack and fracture toughness / / 7th Sagamore Ardance Materials Research Conference. Syracuse: Syracuse Univ. Press. – 1960.

7. Irwin G.R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. - 1957. - V. 24, No 3. - P. 361-364.

8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits / / J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8, No 2. – P. 100–108.

9. Barenblatt G. I. Mathematical theory of equilibrium cracks formed during brittle fracture / / PMTF. - 1961. - no. 4. - C. 3-56.

10. Destruction (edited By G. Libowitz), vol. I-VII. - M.: Mir, 1973-1977

11. Landau L. D., Lifshits E. M. Theoretical physics. In 10 vols., Vol. VII. Theory of elasticity. Uch. manual. - M.: Nauka, GL. ed. Fizmatliteratury, 1982, - 248 p.

12. Knott, J.F., Fundamentals of Fracture Mechanics, London: Butterworths, 1973.

13. Nadai, A., Theory of Flow and Fracture of Solids, New York: McGraw-Hill, 1950.

14. Loitsyansky L. G. Mechanics of liquid and gas [Text] [Textbook for universities on the specialty "Mechanics"]. - 4th ed., reprint. Moscow: Nauka, 1973, 847 p.

15. Chukanov A. N., Tereshin V. A. Power lines and an algorithm for modeling the stress-strain state of a material / / "Modern problems and directions of development of metal science and heat treatment of metals and alloys vol. 150th anniversary of birth. academician A. A. Baikov: Sat. scientific. articles Intern. scientific and technical Conf. (18.09.2020) / ed.: E. V. Ageev (ed.) [et al.]; Yugo-Zap. state. UN-t. Kursk: Yugo-Zapad state University. UN-t, 2020. - 271 p. - P. 241-244.

16. Chukanov A. N., Tereshin V. A. Modeling of the stress-strain state of a material based on the concept of force lines // Materials of the international conference "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history dedicated to the centenary of the birth of professors Boris Maksimovich Bredikhin, Vasily Ilyich Nechaev and Sergey Borisovich Stechkin".- 23-26. 09. 20. - Tula, Tolstoy state pedagogical University, 2020. - p. (in print).

17. Chukanov A. N., Sergeev N. N., Tereshin V. A., Rostovtsev R.N., Yakovenko A. A., Leontiev I. M. Thermodynamic justification of the "methane"mechanism of destruction of reinforced structural steels during electrolytic hydrogenation under stress / / Deformation and destruction of materials. 2015. no. 10. Pp. 32-39.

18. Sergeev N. N., Chukanov A. N., Baranov V. P., Yakovenko A. A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement / / Metal Science and Heat Treatment. - 2015. - vol. 57. - no. 1-2. - P. 63-68.

19. Sergeyev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeyev A.N., Leontyev I.M., Khonelidze D.M., and Gvozdev A.E. Formation of Plastic Zones near Spherical Cavity in Hardened Low-Carbon Steels under Conditions of Hydrogen Stress Corrosion // Inorganic Materials: Applied Research, 2018, Vol. 9, No. 4, pp. 663–669.

20. Chukanov A. N., Tereshin V. A., Gvozdev A. E., Sergeev A. N., Yakovenko A. A., Khonelidze D. M., Shirokiy I. F. Modeling of plasticity zones in gas-filled pores in cast and powder steels under stress-corrosion conditions // Bulletin of Tambov University. Series: Natural and technical Sciences, 2018, Vol. 23, No. 122, Pp. 314-319.

21. Chukanov A. N. Morphology of volume zones of plasticity in gas-filled pores in cast and powder steels under stress-corrosion conditions / A. N. Chukanov, V. A. Tereshin, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, E. V. Ageev, A. A. Yakovenko // Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. - 2019; issue 23 (5). - Pp. 35-52.

22. Chukanov A. N., Tereshin V. A., Gvozdev A. E., Shatulsky A. A., Navoev A. P., Sergeev A. N., Yakovenko A. A., Kutepov S. N., Tsoi E. V. Evolution of plasticity zones in the vicinity of pores in steels under stress-corrosion conditions // Procurement production in mechanical engineering. - 2020. - Vol. 18. - No. 3. - Pp. 130-136.

Получено 10.06.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.