

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-369-381

**Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны
упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся
вблизи плоской поверхности¹**

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

Лев Алексеевич Толоконников — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Ефимов Дмитрий Юрьевич — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей произвольным образом на упругий круговой цилиндр с радиально-неоднородным покрытием в присутствии плоской поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой). Методом мнимых источников с применением теорем сложения для цилиндрических волновых функций получено аналитическое решение задачи. Волновые поля в содержащей среде и однородном упругом цилиндре находятся в виде разложений по волновым цилиндрическим функциям, а для нахождения полей смещений в неоднородных покрытиях построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Проведены численные расчеты частотных и угловых характеристик рассеянного поля для упругих однородных цилиндров с покрытием и без него, находящихся вблизи подстилающей плоскости. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел.

Ключевые слова: рассеяние, звуковые волны, упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие, плоская поверхность.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 369–381.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-369-381

Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface²

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

Lev Alexeevich Tolokonnikov — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Efimov Dmitrii Yurevich — undergraduate, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Abstract

In article the problem of the scattering of an obliquely incident plane monochromatic sound wave by an elastic cylinder with a radially non-uniform elastic coating in presence of a flat surface (absolutely rigid and acoustically soft) is considered. The analytical solution of the problem by the method of imaginary sources using addition theorems for cylindrical wave functions is received. Wave fields in a containing medium and homogeneous elastic cylinder are found in the form of expansions in wave cylindrical functions. The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement fields in inhomogeneous coatings.

Numerical calculations of frequency and angular characteristics of the scattered field for elastic homogeneous cylinders with and without coating located near the underlying plane are performed. Influence of continuously inhomogeneous elastic coatings on sound-reflecting properties of elastic cylindrical bodies are revealed.

Keywords: scattering, sound waves, elastic cylinder, non-uniform elastic coating, flat surface.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2020, "Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 369–381.

1. Введение

Возможность изменения звукоотражающих свойств цилиндрических тел с помощью покрытий из функционально-градиентных материалов обсуждалась в ряде работ. В [1, 2] исследовано рассеяние плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием. При этом в [1] рассматривался случай нормального падения плоской волны, а в [2] полагалось, что ось цилиндрического источника параллельна оси цилиндра. Задачи о рассеянии наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием решены в [3, 4]. В [3] неоднородное покрытие полагалось непрерывно-неоднородным, а в [4] — дискретно-слоистым. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием изучена в [5]. При этом

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

решены как прямая задача дифракции, так и обратная задача об определении квадратичных законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [6, 7]. Зависимости плотности и модулей упругости материала покрытия от радиальной координаты аппроксимированы многочленами первой степени в [6] и второй степени в [7].

В работах, приведенных выше, полагалось, что цилиндрические тела находятся в безграничном пространстве. В [8] решена задача дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, находящемся вблизи плоской идеальной поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой), когда плоская волна падает перпендикулярно оси цилиндра. В настоящей работе рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей произвольным образом на упругий круговой цилиндр, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем, в присутствии подстилающей плоскости (абсолютно жесткой и акустически мягкой).

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1 . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного покрытия описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты, а плотность ρ — непрерывной функцией этой координаты. Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Цилиндр с покрытием находится вблизи плоской поверхности Γ , которая является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось цилиндра параллельна плоскости Γ и отстоит от нее на расстоянии d .

Пусть из внешнего полупространства на тело под произвольным углом падает плоская гармоническая звуковая волна с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

При рассеянии звука цилиндром, находящимся вблизи звукоотражающей границы, возникают многократные переотражения между телом и плоскостью, так что близко расположенная подстилающая поверхность оказывает существенное влияние на рассеяние звука цилиндром. Определим акустическое поле, рассеянное цилиндром с покрытием в присутствии плоскости.

3. Аналитическое решение задачи

В рассматриваемой постановке задача является трехмерной. Так как подстилающая плоскость полагается идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой), то решение поставленной задачи можно найти методом мнимых источников. Решение задачи проведем, используя подход, примененный в [8, 9].

Согласно методу мнимых источников исключим плоскость Γ , вводя в рассмотрение второй цилиндр, являющийся зеркальным отражением исходного рассеивателя, и вторую плоскую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_2$ [8]. Причем вектор $\mathbf{k}_2$ является зеркальным отражением волнового вектора $\mathbf{k}_1$ падающей плоской звуковой волны относительно плоскости Γ . В результате исходная задача сводится к задаче рассеяния двух плоских волн на двух идентичных цилиндрах, находящихся в безграничном пространстве, заполненном идеальной жидкостью [9].

Введём три одинаково ориентированные прямоугольные декартовы системы координат: основную (x, y, z) , связанную с плоскостью Γ , и две локальных (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}) и (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) , связанные с действительным и фиктивным цилиндрами соответственно (рис. 1). Плоскость xz совмещена с плоскостью Γ , координатные оси z_{+1} и z_{-1} совпадают с осями вращения первого и второго цилиндров соответственно, координатные оси y_{+1} и y_{-1} совпадают с осью y .

Свяжем прямоугольные системы координат (x, y, z) , (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}) , (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) с цилиндрическими системами координат (r, φ, z) , $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1})$, $(r_{-1}, \varphi_{-1}, z_{-1})$. Отметим, что $z = z_l$ ($l = \pm 1$).

В локальных цилиндрических координатах уравнения внешней и внутренней поверхностей покрытия l -го цилиндра имеют вид $r_l = r_1$ и $r_l = r_0$ ($l = \pm 1$).

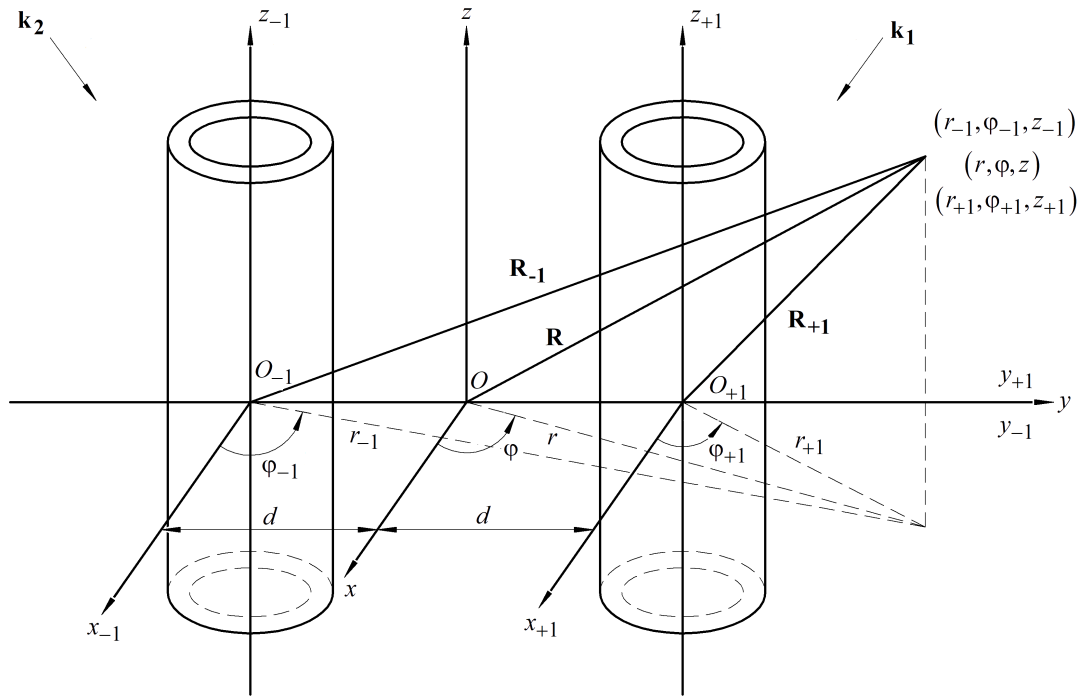


Рис. 1: К задаче рассеяния звука на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями

Потенциал скорости падающей волны, распространяющейся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_1$, в основной системе координат имеет вид

$$\Psi_{01} = A \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{R})],$$

где A — амплитуда волны; $\mathbf{k}_1 = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0; k \sin \theta_0 \sin \varphi_0; k \cos \theta_0)$; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ — радиус-вектор; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны.

Чтобы граничные условия на плоскости Γ (при $y = 0$) удовлетворялись автоматически, потенциал скорости второй падающей плоской волны должен быть равен [8]

$$\Psi_{02} = A \exp[i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{R})],$$

если плоскость Γ жесткая, и

$$\Psi_{02} = -A \exp[i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{R})],$$

если плоскость Γ мягкая. При этом $\mathbf{k}_2 = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0; -k \sin \theta_0 \sin \varphi_0; k \cos \theta_0)$.

С учетом того, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_l + \mathbf{R}_{Ol}$ ($l = \pm 1$), где $\mathbf{R}_l$ — радиус-вектор точки наблюдения в l -ой локальной системе координат; $\mathbf{R}_{Ol} = (0, dl, 0)$ — радиус-вектор, соединяющий точку O с точкой O_l , потенциалы скорости падающих плоских волн в локальных цилиндрических координатах представляются в виде разложений [11]

$$\Psi_{01}(r_l, \varphi_l, z_l) = A e^{idl\beta \sin \varphi_0} e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}, \quad (1)$$

$$\Psi_{02}(r_l, \varphi_l, z_l) = \pm A e^{-idl\beta \sin \varphi_0} e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}, \quad (2)$$

где J_n — цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$; $\beta = k \sin \theta_0$.

Распространение гармонических звуковых волн в идеальной жидкости описывается уравнением Гельмгольца [10]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad} \Psi, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi.$$

В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля будет равен [8]

$$\Psi = \Psi_{01} + \Psi_{02} + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \quad (3)$$

где Ψ_{s1} и Ψ_{s2} — потенциалы скорости рассеянных двумя цилиндрами первой и второй плоских волн соответственно.

Потенциал скорости волны, рассеянной цилиндром в присутствии подстилающей плоской поверхности определяется выражением

$$\Psi_s = \Psi_{02} + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}. \quad (4)$$

Потенциалы Ψ_{sj} представим в виде суммы двух слагаемых

$$\Psi_{sj} = \sum_{l=\pm 1} \Psi_{sj}^{(l)} \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

каждое из которых представляет собой потенциал скорости волны, рассеянной l -ым цилиндром.

Функции $\Psi_{sj}^{(l)}$ являются решениями уравнений Гельмгольца в локальных цилиндрических координатах и должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности. Эти функции будем искать в виде

$$\Psi_{sj}^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{jn}^{(l)} H_n(\beta r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \quad (6)$$

где H_n — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $A_{jn}^{(l)}$ — коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение упругих волн в однородных упругих цилиндрах (действительном и мнимом).

Представим вектор смещения $\mathbf{u}_{0j}^{(l)}$ частиц упругого изотропного однородного l -го цилиндра при воздействии j -ой плоской волны ($j = 1, 2$) в виде

$$\mathbf{u}_{0j}^{(l)} = \text{grad} F_j^{(l)} + \text{rot} \Phi_j^{(l)}, \quad \text{div} \Phi_j^{(l)} = 0,$$

где $L_j^{(l)}$ и $\Phi_j^{(l)}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [12]

$$\Delta F_j^{(l)} + k_\eta^2 F_j^{(l)} = 0, \quad \Delta \Phi_j^{(l)} + k_\tau^2 \Phi_j^{(l)} = 0 \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2),$$

где $k_\eta = \omega/c_\eta$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_\eta = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Представим вектор $\Phi_j^{(l)}$ в виде

$$\Phi_j^{(l)} = \text{rot}(L_j^{(l)} \bar{e}_{z_l}) + k_\tau M_j^{(l)} \bar{e}_{z_l},$$

где $L_j^{(l)}$ и $M_j^{(l)}$ — скалярные функции пространственных координат r_l, φ_l, z_l ; $\bar{e}_{z_l}$ — единичный вектор оси z_l .

Тогда векторное уравнение относительно функции Φ_j сведется к двум скалярным уравнениям Гельмгольца относительно функций $L_j^{(l)}$ и $M_j^{(l)}$

$$\Delta L_j^{(l)} + k_\tau^2 L_j^{(l)} = 0,$$

$$\Delta M_j^{(l)} + k_\tau^2 M_j^{(l)} = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции $F_j^{(l)}$, $L_j^{(l)}$ и $M_j^{(l)}$ будем искать в виде

$$F_j^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{jn}^{(l)} J_n(k_1 r_l) e^{in(\varphi - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \quad (7)$$

$$L_j^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{jn}^{(l)} J_n(k_2 r_l) e^{in(\varphi - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \quad (8)$$

$$M_j^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{jn}^{(l)} J_n(k_2 r_l) e^{in(\varphi - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \quad (9)$$

где $k_1 = \sqrt{k_\eta^2 - \alpha^2}$; $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \alpha^2}$.

Волновые поля в неоднородных упругих покрытиях цилиндров описываются общими уравнениями движения упругой среды [13], которые в локальных цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(l)}}{\partial z_l} + \frac{\sigma_{rr}^{(l)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{r_l} &= -\omega^2 \rho(r_l) u_r^{(l)}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^{(l)}}{\partial z_l} + \frac{2}{r_l} \sigma_{r\varphi}^{(l)} &= -\omega^2 \rho(r_l) u_\varphi^{(l)}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(l)}}{\partial z_l} + \frac{1}{r_l} \sigma_{rz}^{(l)} &= -\omega^2 \rho(r_l) u_z^{(l)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $u_r^{(l)}$, $u_\varphi^{(l)}$, $u_z^{(l)}$ и $\sigma_{pq}^{(l)}$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ и тензора напряжений в покрытии l -го цилиндра, у которых здесь и далее индекс j ($j = 1, 2$), показывающий под воздействием какой плоской волны происходит деформация в покрытии, опущен для упрощения записи.

Используя соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами вектора смещения, запишем уравнения (10) через компоненты вектора смещения [3] в локальных цилиндрических координатах.

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ в неоднородном упругом покрытии l – го цилиндра будем искать в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} u_r^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) &= e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}^{(l)}(r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}, \quad u_\varphi^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}^{(l)}(r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}, \\ u_z^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) &= e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{3n}^{(l)}(r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя разложения (11) в уравнения (10), записанные через функции $u_r^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l)$, $u_\varphi^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l)$, $u_z^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l)$, получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{in}^{(l)}(r_l)$ ($i = 1, 2, 3$) для каждого n :

$$\hat{\mathbf{A}}_n^{(l)} \mathbf{U}_n^{(l)''} + \hat{\mathbf{B}}_n^{(l)} \mathbf{U}_n^{(l)'} + \hat{\mathbf{C}}_n^{(l)} \mathbf{U}_n^{(l)} = 0 \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \quad (12)$$

где $\mathbf{U}_n^{(l)} = (U_{1n}^{(l)}(r_l), U_{2n}^{(l)}(r_l), U_{3n}^{(l)}(r_l))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_n^{(l)} = (a_{npq})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{B}}_n^{(l)} = (b_{npq})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{C}}_n^{(l)} = (c_{npq})_{3 \times 3}$ — матрицы третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} a_{n11}^{(l)} &= (\lambda + 2\mu) r_l^2, \quad a_{n22}^{(l)} = a_{n33}^{(l)} = \mu r_l^2, \quad a_{npq}^{(l)} = 0 \quad (p \neq q), \\ b_{n11}^{(l)} &= (\lambda' + 2\mu') r_l^2 + (\lambda + 2\mu) r_l, \quad b_{n12}^{(l)} = in(\lambda + \mu) r_l, \quad b_{n13}^{(l)} = i\alpha(\lambda + \mu) r_l^2, \\ b_{n21}^{(l)} &= in(\lambda + \mu) r_l, \quad b_{n22}^{(l)} = \mu' r_l^2 + \mu r_l, \quad b_{n23}^{(l)} = 0, \quad b_{n31}^{(l)} = i\alpha(\lambda + \mu) r_l^2, \quad b_{n32}^{(l)} = 0, \\ b_{n33}^{(l)} &= \mu' r_l^2 + \mu r_l, \quad c_{n11}^{(l)} = \lambda' r_l - \lambda - (n^2 + 2 + \alpha^2 r_l^2) \mu + \omega \rho r_l^2, \\ c_{n12}^{(l)} &= in(\lambda' r_l - \lambda - 3\mu), \quad c_{n13}^{(l)} = i\alpha \lambda' r_l^2, \\ c_{n22}^{(l)} &= -\mu' r_l - n^2 \lambda - (2n^2 + \alpha^2 r_l^2 + 1) \mu + \omega^2 \rho r_l^2, \quad c_{n23}^{(l)} = -n\alpha(\lambda + \mu) r_l, \\ c_{n31}^{(l)} &= i\alpha [\mu' r_l^2 + (\lambda + \mu) r_l], \quad c_{n32}^{(l)} = -n\alpha(\lambda + \mu) r_l, \\ c_{n33}^{(l)} &= -(n^2 + 2\alpha^2 r_l^2) \mu - \alpha^2 \lambda r_l^2 + \omega^2 \rho r_l^2, \\ \lambda &= \lambda(r_l), \quad \mu = \mu(r_l). \end{aligned}$$

Искомые функции $\Psi_{sj}^{(l)}$, $F_j^{(l)}$, $L_j^{(l)}$, $M_j^{(l)}$, $u_r^{(l)}$, $u_\varphi^{(l)}$, $u_z^{(l)}$ ($l = \pm 1, \quad j = 1, 2$) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия l – го цилиндра заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\text{при } r_l = r_1 \quad -i\omega u_r^{(l)} = v_r, \quad \sigma_{rr}^{(l)} = -p, \quad \sigma_{r\varphi}^{(l)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(l)} = 0. \quad (13)$$

На внутренней поверхности покрытия l – го цилиндра при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } r_l = r_0 \quad u_r^{(l)} = u_{0r}^{(l)}, \quad u_\varphi^{(l)} = u_{0\varphi}^{(l)}, \quad u_z^{(l)} = u_{0z}^{(l)}, \quad \sigma_{rr}^{(l)} = \sigma_{0rr}^{(l)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(l)} = \sigma_{0r\varphi}^{(l)}, \quad \sigma_{rz}^{(l)} = \sigma_{0rz}^{(l)}, \quad (14)$$

где $\sigma_{0pq}^{(l)}$ — компоненты тензора напряжений в однородном l – ом цилиндре (индекс j опущен).

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_{0j}^{(l)}$ и тензора напряжений $\sigma_{0pq}^{(l)}$ в однородном упругом l -ом цилиндре запишем через функции $F_j^{(l)}$, $L_j^{(l)}$ и $M_j^{(l)}$, а компоненты тензора напряжений в неоднородном покрытии l -го цилиндра $\sigma_{pq}^{(l)}$ — через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ [3].

С помощью теоремы сложения для волновых цилиндрических функций [9] из первых двух граничных условий (13) получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (при $i = 1$ и $i = 2$) относительно неизвестных коэффициентов $A_{jn}^{(l)}$ ($l = \pm 1$)

$$A_{jn}^{(l)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{nm}^{(-l,l)} A_{jm}^{(-l)} = S_{in}^{(l)} \quad (i = 1, 2; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad l = \pm 1), \quad (15)$$

где

$$\alpha_{1nm}^{(-l,l)} = \frac{J'_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)} H_{m-n}(2\beta d) e^{i(m-n)(\varphi_{-l,l}-\varphi_0)}, \quad \alpha_{2nm}^{(-l,l)} = \frac{J_n(\beta r_1)}{H_n(\beta r_1)} H_{m-n}(2\beta d) e^{i(m-n)(\varphi_{-l,l}-\varphi_0)},$$

$$S_{1n}^{(l)} = -Ai^n \frac{J'_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)} e^{i\beta d l \sin \varphi_0} - \frac{i\omega U_{1n}^{(l)}(r_1)}{\beta H'_n(\beta r_1)}, \quad S_{2n}^{(l)} = -Ai^n \frac{J_n(\beta r_1)}{H_n(\beta r_1)} e^{i\beta d l \sin \varphi_0} +$$

$$+ \frac{i}{\rho_1 \omega H_n(\beta r_1)} \left[(\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U_{1n}^{(l)'}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} (U_{1n}^{(l)}(r_1) + in U_{2n}^{(l)}(r_1)) + i\alpha \lambda(r_l) U_{3n}^{(l)}(r_l) \right],$$

$$\varphi_{-l,l} = \pi(2-l)/2,$$

штрихи означают дифференцирование по аргументу функций.

Для решения бесконечных систем линейных уравнений (15) воспользуемся методом усечения [14]. Как и в [9] методом обратной матрицы найдем решения двух усеченных систем (15) при $i = 1$ и $i = 2$, выбрав порядок усечения N . Получим два выражения для коэффициентов $A_{jn}^{(l)}$, записанных через значения функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$, $U_{2n}^{(l)}(r_l)$, $U_{3n}^{(l)}(r_l)$ на внешней поверхности покрытия (при $r_l = r_1$). Приравнивая между собой эти выражения, получаем краевое условие при $r_l = r_1$ для нахождения решения системы дифференциальных уравнений (12).

Условия отсутствия касательных напряжений в (13) дают еще два краевых условия при $r_l = r_1$

$$\mathbf{V}_n^{(l)}(r_1) \mathbf{U}_n^{(l)'} + \mathbf{W}_n^{(l)}(r_1) \mathbf{U}_n^{(l)} = 0, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{V}_n^{(l)}(r_1) = \left(v_{npq}^{(l)} \right)_{2 \times 3}, \quad \mathbf{W}_n^{(l)}(r_1) = \left(w_{npq}^{(l)} \right)_{2 \times 3};$$

$$v_{n11}^{(l)} = v_{n13}^{(l)} = v_{n21}^{(l)} = v_{n22}^{(l)} = 0, \quad v_{n12}^{(l)} = v_{n23}^{(l)} = \mu(r_1)$$

$$w_{n11}^{(l)} = in\mu(r_1)/r_1, \quad w_{n12}^{(l)} = -\mu(r_1)/r_1, \quad w_{n21}^{(l)} = i\alpha\mu(r_1),$$

$$w_{n13}^{(l)} = w_{n22}^{(l)} = w_{n23}^{(l)} = 0.$$

Из первых трех граничных условий (14) выразим неизвестные коэффициенты $B_{jn}^{(l)}$, $C_{jn}^{(l)}$, $D_{jn}^{(l)}$ через значения функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$, $U_{2n}^{(l)}(r_l)$, $U_{3n}^{(l)}(r_l)$ на внутренней поверхности покрытия (при $r_l = r_0$).

Получаем

$$\mathbf{K}_n^{(l)} = \left[\mathbf{T}_n^{(l)}(r_0) \right]^{-1} \mathbf{U}_n^{(l)} \quad (l = \pm 1), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{K}_n^{(l)} = \left(B_{jn}^{(l)}, C_{jn}^{(l)}, D_{jn}^{(l)} \right)^T, \quad \mathbf{T}_n^{(l)}(r_0) = \left(t_{npq}^{(l)} \right)_{3 \times 3};$$

$$\begin{aligned} t_{n11}^{(l)} &= k_1 J_n'(k_1 r_0), \quad t_{n12}^{(l)} = i\alpha k_2 J_n'(k_2 r_0), \quad t_{n13}^{(l)} = i n k_\tau J_n(k_2 r_0)/r_0, \\ t_{n21}^{(l)} &= i n J_n(k_1 r_0)/r_0, \quad t_{n22}^{(l)} = -\alpha n J_n(k_2 r_0)/r_0, \quad t_{n23}^{(l)} = -k_\tau k_2 J_n'(k_2 r_0), \\ t_{n31}^{(l)} &= i\alpha J_n(k_1 r_0), \quad t_{n32}^{(l)} = (k_\tau^2 - \alpha^2) J_n(k_2 r_0), \quad t_{n33}^{(l)} = 0. \end{aligned}$$

Из последних трех граничных условий (14) находим

$$\mathbf{E}_n^{(l)}(r_0) \mathbf{U}_n^{(l)'}(r_0) + \mathbf{H}_n^{(l)}(r_0) \mathbf{U}_n^{(l)}(r_0) = \mathbf{G}_n^{(l)}(r_0) \mathbf{K}_n^{(l)} \quad (l = \pm 1), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n^{(l)}(r_0) &= \left(e_{npq}^{(l)} \right)_{3 \times 3}, \quad \mathbf{H}_n^{(l)}(r_0) = \left(h_{npq}^{(l)} \right)_{3 \times 3}, \quad \mathbf{G}_n^{(l)}(r_l) = \left(g_{npq}^{(l)} \right)_{3 \times 3}; \\ e_{n11}^{(l)} &= \lambda(r_0) + 2\mu(r_0), \quad e_{n22}^{(l)} = e_{n33}^{(l)} = \mu(r_0), \quad e_{nij}^{(l)} = 0 \quad (p \neq q), \\ h_{n11}^{(l)} &= \lambda(r_0)/r_0, \quad h_{n12}^{(l)} = i n \lambda(r_0)/r_0, \quad h_{n13}^{(l)} = i \alpha \lambda(r_0), \\ h_{n21}^{(l)} &= i n \mu(r_0)/r_0, \quad h_{n22}^{(l)} = -\mu(r_0)/r_0, \quad h_{n23}^{(l)} = h_{n32}^{(l)} = h_{n33}^{(l)} = 0, \quad h_{n31}^{(l)} = i \alpha \mu(r_0), \\ g_{n11}^{(l)} &= -\lambda_0 k_\tau^2 J_n(k_1 r_0) + 2\mu_0 k_1^2 J_n''(k_1 r_0), \quad g_{n12}^{(l)} = 2i\alpha\mu_0 k_2^2 J_n''(k_2 r_0), \\ g_{n13}^{(l)} &= 2i n \mu_0 k_\tau \frac{1}{r_0} \left[k_2 J_n'(k_2 r_0) - \frac{1}{r_0} J_n(k_2 r_0) \right], \quad g_{n21}^{(l)} = 2i n \mu_0 \frac{1}{r_0} \left[k_1 J_n'(k_1 r_0) - \frac{1}{r_0} J_n(k_1 r_0) \right], \\ g_{n22}^{(l)} &= -2\alpha n \mu_0 \frac{1}{r_0} \left[k_2 J_n'(k_2 r_0) - \frac{1}{r_0} J_n(k_2 r_0) \right], \\ g_{n23}^{(l)} &= -\mu_0 k_\tau \left[k_2^2 J_n''(k_2 r_0) - k_2 \frac{1}{r_0} J_n'(k_2 r_0) + n^2 \frac{1}{r_0^2} J_n(k_2 r_0) \right], \\ g_{n31}^{(l)} &= 2i\alpha\mu_0 k_1 J_n'(k_1 r_0), \quad g_{n32}^{(l)} = \mu_0 k_2 (k_\tau^2 - 2\alpha^2) J_n'(k_2 r_0), \quad g_{n33}^{(l)} = -\alpha n \mu_0 k_\tau J_n(k_2 r_0)/r_0. \end{aligned}$$

Подставляя (17) в (18), получаем три краевых условия для системы (12) при $r_l = r_0$

$$\mathbf{E}_n^{(l)}(r_0) \mathbf{U}_n^{(l)'}(r_0) + \mathbf{Y}_n^{(l)}(r_0) \mathbf{U}_n^{(l)}(r_0) = 0 \quad (l = \pm 1), \quad (19)$$

где

$$\mathbf{Y}_n^{(l)}(r_0) = \mathbf{H}_n^{(l)}(r_0) - \mathbf{G}_n^{(l)}(r_0) \left[\mathbf{T}_n^{(l)}(r_0) \right]^{-1}.$$

Таким образом, для нахождения функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$, $U_{2n}^{(l)}(r_l)$ и $U_{3n}^{(l)}(r_l)$ ($l = \pm 1$) для всех n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$) необходимо найти решение системы $6(2N + 1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (12), удовлетворяющих полученным выше краевым условиям. Построенная краевая задача может быть решена каким-либо численным или аналитическим методом.

Затем находим неизвестные коэффициенты $A_{jn}^{(l)}$, $B_{jn}^{(l)}$, $C_{jn}^{(l)}$ и $D_{jn}^{(l)}$ разложений (6) – (9) ($l = \pm 1$; $j = 1, 2$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$).

В результате на основании (4) – (6) получаем аналитическое описание акустического поля, рассеянного цилиндром с покрытием в присутствии плоскости

$$\Psi_s = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=\pm 1} e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\pm A e^{-i d l \beta \sin \varphi_0} i^n J_n(\beta r_l) + A_{jn}^{(l)} H_n(\beta r_l) \right] e^{i n (\varphi_l - \varphi_0)}. \quad (20)$$

Отметим, что, используя полученное решение Ψ_{s1} дифракционной задачи для случая, когда падающая плоская волна имеет потенциал скорости Ψ_{01} , легко записать решение задачи дифракции плоской волны с потенциалом скорости Ψ_{02} . Для этого достаточно заменить компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_1$ на компоненты вектора $\mathbf{k}_2$, если подстилающая плоскость является акустически жесткой, и дополнительно заменить амплитуду A на $-A$, если плоскость — акустически мягкая.

4. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты частотных и угловых характеристик рассеянного поля в дальней зоне.

Краевая задача для системы (12) решалась методом сплайн-коллокации [15]. Каждая функция $U_{1n}^{(l)}(r_l), U_{2n}^{(l)}(r_l), U_{3n}^{(l)}(r_l)$ представлялась в виде разложения по базисным B – сплайнам.

На большом удалении от цилиндра ($kr_l \geq 1$) справедливы соотношения

$$r_l \approx r - ld \sin \varphi, \quad \varphi_l \approx \varphi \quad (r \gg d; \quad l = \pm 1). \quad (21)$$

Расчеты проводились по формуле (20) в основной системе координат (r, φ, z) с учетом (21) при $r = 100$ м.

Рассматривался алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_0 = 0,8$ м с покрытием толщиной 0,2 м, находящийся в полупространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 1000$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Покрытие цилиндра выполнено на основе полимерного материала, неоднородного по плотности, с характерной плотностью $\tilde{\rho} = 1070$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль). Расстояние от оси цилиндра до плоскости $d = 2$ м. Полагалось, что плоская звуковая волна единичной амплитуды падает на тело под углами $\theta_0 = \pi/4$ и $\varphi_0 = -\pi/6$. Механические характеристики материала неоднородного покрытия менялись по толщине слоя по законам

$$\rho = \tilde{\rho} f(r_{+1}), \quad \lambda = \tilde{\lambda}, \quad \mu = \tilde{\mu},$$

где

$$f(r_{+1}) = 0,75 \left[\left(\frac{r_{+1} - r_0}{r_1 - r_0} \right)^2 + 1 \right], \quad r_0 \leq r_{+1} \leq r_1.$$

На рис. 2 представлены частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $\left| \frac{\Psi_s}{A} \right|$ от волнового размера тела kr_1 в интервале $0 < kr_1 \leq 10$ ($\varphi = 5/6\pi$) в случае абсолютно жесткой подстилающей поверхности. Сплошная линия соответствует случаю упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием, пунктирная — упругому цилиндру без покрытия.

Сравнение частотных зависимостей показывает существенное влияние неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства цилиндра. Это проявляется в смещении максимумов и минимумов коэффициента обратного отражения и изменении их уровней. Отличие частотных характеристик для тела с покрытием и без него возрастает с увеличением частоты падающей звуковой волны.

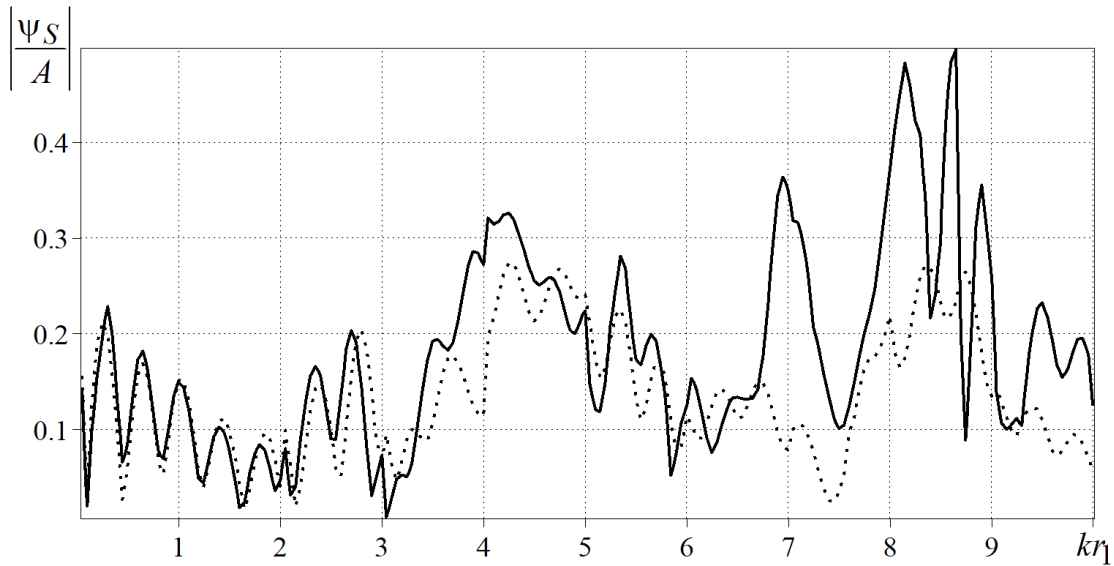


Рис. 2: Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра

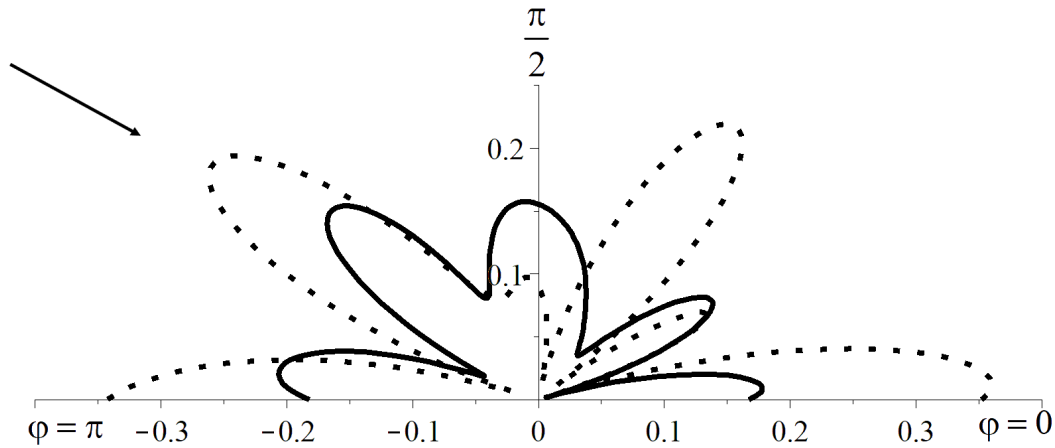


Рис. 3: Диаграммы направленности рассеянного поля

На рис. 3 представлены диаграммы направленности поля, рассеянного упругим цилиндром с однородным покрытием ($\rho = \tilde{\rho}$, $\lambda = \tilde{\lambda}$, $\mu = \tilde{\mu}$) при $kr_1 = 3$. Зависимости $\left| \frac{\Psi_s}{A} \right|$ от φ рассчитаны в плоскости xy . Сплошной линией изображена диаграмма для случая наклонного падения плоской волны ($\theta_0 = \pi/4$), а пунктирная линия соответствует случаю нормального падения ($\theta_0 = \pi/2$). Стрелкой показано направление падения плоской звуковой волны ($\varphi_0 = -\pi/6$).

Из рисунка видно, что диаграмма направленности при наклонном падении плоской волны на цилиндр существенно отличается от диаграммы, соответствующей нормальному падению.

5. Заключение

Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел. С помощью непрерывно-неоднородных покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Такое покрытие можно реализовать с помощью дискретной системы тонких

однородных упругих слоев, имеющих различные значения механических параметров (плотности и упругих постоянных).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
2. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
3. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
4. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
5. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 154-173.
6. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.
7. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 4. С. 189-199.
8. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.
9. Толоконников Л. А. Дифракции плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19. № 1. С. 238-254.
10. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
11. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1994. 560 с.
13. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматлит, 1962. 708 с.
15. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

REFERENCES

1. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
2. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].
3. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].
4. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no 2, pp. 164-169.
5. Larin, N. V. 2017, "Diffraction of a plane acoustic wave on the thermoelastic cylinder with the continuously inhomogeneous covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 154-173, [in Russian].
6. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54-62, [in Russian].
7. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 4, pp. 733-742.
8. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 9, pp. 276-289, [in Russian].
9. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves on two elastic cylinders with non-uniform coatings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no 1, pp. 238-254, [in Russian].
10. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p, [in Russian].
11. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
12. Sedov, L. I. 1994, "Mechanics of a continuous medium", vol. 2, Nauka, Moscow, 560 p., [in Russian].
13. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprężystości", Mir, Moscow, 872 p.
14. Kantorovich, L. V. & Krilov V. I. 1962, "Approximate methods of the superior analysis", Nauka, Moscow, 708 p., [in Russian].
15. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "Spline function methods", Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].

Получено 10.06.2020

Принято в печать 22.10.2020 г.