ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-354-368

Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражение звука[1]

Л. А. Толоконников, А. Э. Белкин

Лев Алексеевич Толоконников — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Антон Эдуардович Белкин — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: anton.edurd@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается обратная задача об определении законов неоднородности упругого покрытия абсолютно жесткого цилиндра, находящегося в плоском волноводе, одна граница которого - абсолютно жесткая, а другая - акустически мягкая. Полагается, что волновод заполнен идеальной жидкостью. Вдоль стенок волновода по нормали к поверхности цилиндрического тела распространяется гармоническая звуковая волна давления, возбуждаемая заданным распределением источников на сечении волновода, расположенного на конечном расстоянии от оси цилиндра. Определены параметры неоднородности покрытия, обеспечивающие наименьшее звукоотражение.

Решение обратной задачи получено на основе решения прямой задачи дифракции.

Зависимости плотности и модулей упругости материала покрытия от радиальной координаты аппроксимированы многочленами третьей степени.

Построены функционалы,определенные на классе кубических функций и выражающие усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном сечении волновода при фиксированной частоте или в некотором диапазоне частот.

С помощью генетического алгоритма осуществлена минимизация функционалов. Получено аналитическое описание оптимальных законов неоднородности покрытия цилиндра для обеспечения минимального звукоотражения.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, цилиндр, неоднородное упругое покрытие, законы неоднородности, плоский волновод.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Л. А. Толоконников, А. Э. Белкин. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражение звука // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 354–368.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-354-368

Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection[2]

L. A. Tolokonnikov, A. E. Belkin

Lev Alexeevich Tolokonnikov — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Anton Eduardovich Belkin — undergraduate, Tula State University (Tula).
e-mail: anton.edurd@yandex.ru

Abstract

The article considers the inverse problem on determination of the inhomogeneity laws of an elastic coating of an absolutely rigid cylinder located in a plane waveguide, one boundary of which is absolutely hard and the other is acoustically soft.

It is believed that the waveguide filled by ideal fluid. The harmonic sound pressure wave excited by a given distribution sources on the section of the waveguide located on the final distance from the axis of the cylinder is propagated along the walls of the waveguide on normal to the surface of the cylindrical body. The inhomogeneity parameters for providing minimum sound reflection are determined.

The solution of the inverse problem is obtained based on the solution of the direct problem diffraction.

Dependences of the density and elastic moduli of the coating material from the radial coordinate are approximated by polynomials of the third degrees.

Functionals defined on the class of cubic functions and expressing the average intensity of sound scattering in a given section of the waveguide at a fixed frequency or at some frequency range are built.

The minimization of the functionals is done with using the genetic algorithm. Analytical description of the optimal inhomogeneity laws of an cylinder coating are received to ensure minimal sound reflection.

Keywords: diffraction, sound waves, elastic cylinder, non-uniform elastic coating, inhomogeneity laws, plane waveguide.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, A. E. Belkin, 2020, “Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 354–368.

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

1. Введение

Влияние покрытий цилиндрических тел на их звукоотражающие свойства исследовалось в ряде работ. В [1] рассмотрены прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием. Выбраны параметры среды резонаторов перфорированного покрытия, обеспечивающие заданный уровень гашения поля дифракции на цилиндре. В [2, 3] обсуждается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. Для снижения рассеяния падающей на цилиндр звуковой волны применено тонкое покрытие с протяженной реакцией. Дифракция плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [4]. Выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов покрытия и оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Задачи о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решены в [5, 6]. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием рассмотрено в [7], а с дискретно-слоистым покрытием — в [8]. Влияние термоупругости материалов цилиндра и его радиально-неоднородного покрытия на рассеяние звука изучено в работах [10, 11]. При этом в [10] рассмотрены как прямая задача дифракции, так и обратная задача об определении законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [11, 12]. В [13] получено приближенное аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом цилиндре, имеющем цилиндрическую полость и радиально-неоднородное покрытие. На основе решения прямой задачи рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих минимальное звукоотражение. В [14] решена задача дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, находящемся вблизи плоской идеальной поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой). Задачи дифракции звуковых волн на сплошном упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием в плоских волноводах с акустически мягкими и абсолютно жесткими границами решены в [15, 16]. В [17] исследовано рассеяние звука абсолютно жестким цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе, одна граница которого является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой. В [18] решены обратные задачи дифракции звука об определении квадратичных законов неоднородности покрытия упругого цилиндра в плоских волноводах с акустически мягкими и абсолютно жесткими границами, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука в заданном сечении волновода. В настоящей работе решается обратная задача дифракции об определении оптимальных кубических законов неоднородности покрытия абсолютно жесткого цилиндра, находящегося в плоском волноводе, одна граница которого — абсолютно жесткая, а другая — акустически мягкая.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский волновод шириной d с идеальными границами, заполненный идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c (рис. 1).

Полагаем, что нижняя граница волновода является абсолютно жесткой, а верхняя граница — акустически мягкой. В волновод помещен бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса r_0. Цилиндр имеет покрытие в виде коаксиального радиально-неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_1. Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r, а модули упругости

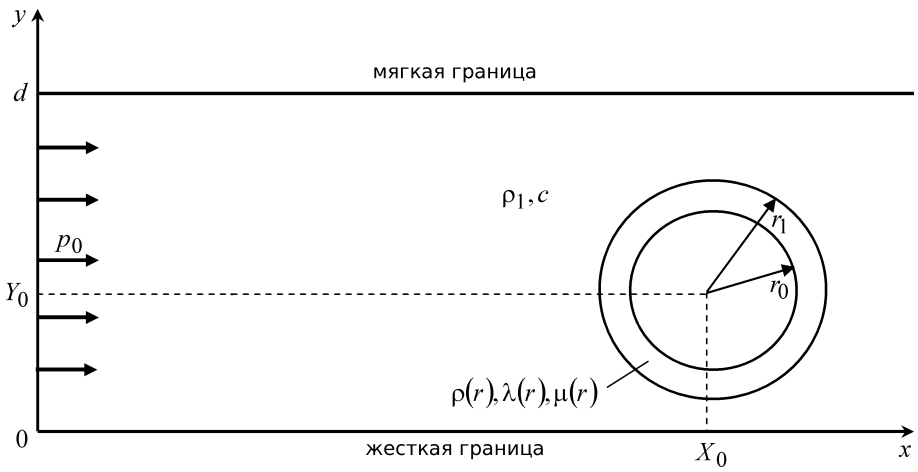

Рис. 1: Волноводная система

λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r цилиндрической системы координат r, φ, z, связанной с цилиндрическим телом. Ось вращения цилиндра совпадает с осью z и параллельна стенкам волновода.

Пусть вдоль стенок волновода по нормали к поверхности цилиндрического тела распространяется гармоническая звуковая волна давления p_0 с круговой частотой ω, возбуждаемая заданным распределением источников на сечении волновода, расположенного на расстоянии X_0 от оси цилиндра. Будем рассматривать общий случай произвольного расположения источников относительно оси волновода.

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы ось x проходила по нижней стенке волновода, ось y лежала в сечении волновода с заданным распределением источников звука, а ось z была параллельна оси цилиндра. В системе координат нижняя граница волновода определяется уравнением $y = 0$, верхняя граница — уравнением $y = d$, а положение оси цилиндра определяется координатами

$$x = X_0, \;\; y = Y_0, \;\; -\infty < z < \infty.$$

Введенные прямоугольные и цилиндрические координаты связаны между собой соотношениями

$$x = X_0 + r\cos\varphi, \;\; y = Y_0 + r\sin\varphi, \;\; z = z.$$

Определим законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающих требуемое звукоотражение.

3. Прямая задача дифракции звука на цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе

Решение прямой задачи дифракции в случае, когда одна граница волновода является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой, приведено в [17].

В области $x > 0$ давление в падающей волне представляется совокупностью собственных волн волновода, распространяющихся вдоль оси x

$$p_0\,(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\xi_n x} \cos\;\lambda_n y\; e^{-i\omega t},$$

где

$$\xi_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}; \quad k = \omega/c; \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2d}(2n+1);$$

A_n – заданные амплитуды. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

В цилиндрической системе координат падающая волна записывается следующим образом:

$$p_0(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_m(kr)\, e^{im\varphi},$$

где $J_m(kr)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка m;

$$a_m = i^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\xi_n X_0} \cos\,(\lambda_n Y_0 - m\psi), \quad \psi = \arcsin\frac{\lambda_n}{k}.$$

Давление полного акустического поля в волноводе

$$p = p_0 + p_s.$$

Давление рассеянного цилиндром поля p_s представляется в виде потенциала простого слоя

$$p_s(x,y) = \int\limits_{L_0} \nu_1(x_0,y_0)\, G(x,y|x_0,y_0)\, dl_0,$$

где $\nu_1(x_0,y_0)$ — функция, описывающая распределение источников поля p_s на внешней поверхности неоднородного покрытия; $G(x,y|x_0,y_0)$ — функция Грина; L_0 — окружность радиуса r_1 с центром в точке (X_0,Y_0); $dl_0 = r_1 d\varphi_0$ — элемент контура L_0.

Функции Грина имеет вид

$$G(x,y|x_0,y_0) = \frac{i}{d}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta_{0n})\,\xi_n} \cos\,\lambda_n y\, \cos\,\lambda_n y_0\, e^{i\xi_n|x-x_0|}.$$

Когда $\lambda_n > k$, $\xi_n = \sqrt{k^2-\lambda_n^2}$ становится чисто мнимым. В этом случае для выполнения условий излучения на бесконечности необходимо, чтобы $\mathrm{Im}\,\xi_\mathrm{n} > 0$, то есть $\xi_n = i\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}$.

В полярных координатах выражение для p_s записывается в виде

$$p_s(r,\varphi) = \int\limits_0^{2\pi} \nu(\varphi_0)\, G(r,\varphi|r_1,\varphi_0)\, d\varphi_0,$$

где $\nu(x_0,y_0) = r_1\nu_1(x_0,y_0)$.

Функцию плотности распределения источников представляется в виде разложения в ряд Фурье

$$\nu(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{im\varphi}.$$

Процедура определения коэффициентов b_m описана в [17].

В декартовой системе координат выражения для рассеянного поля имеют следующий вид: при $x \geqslant X_0 + r_1$

$$p_s(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^r e^{i\xi_n x} \cos\,\lambda_n y\ ,$$

при $x \leqslant X_0 - r_1$

$$p_s\,(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^l e^{i\xi_n x} \cos\ \lambda_n y\ ,$$

где

$$B_n^r = \frac{2\pi i}{d(1+\delta_{0n})\xi_n} e^{-i\xi_n X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m b_m J_m\,(kr_1) \cos\ (\lambda_n Y_0 - m\psi)\,;$$

$$B_n^l = \frac{2\pi i}{d(1+\delta_{0n})\xi_n} e^{i\xi_n X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m b_m J_m\,(kr_1) \cos\ (\lambda_n Y_0 + m\psi)\,.$$

4. Обратная задача дифракции

Для получения требуемых звукоотражающих характеристик цилиндрического тела, расположенного в волноводе, необходимо найти соответствующие законы неоднородности покрытия цилиндра, то есть определить зависимости $\rho(r)$, $\lambda(r)$ и $\mu(r)$.

Будем считать, что функции $\rho(r)$, $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ аппроксимированы многочленами третьей степени относительно переменной r, то есть будем рассматривать следующие законы неоднородности материала покрытия:

$$\rho(r) = \tilde{\rho}\ \rho^*(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda}\ \lambda^*(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu}\ \mu^*(r), \tag{1}$$

где

$$\rho^*(r) = \sum_{q=0}^{3} \rho^{(q)} r^q, \quad \lambda^*(r) = \sum_{q=0}^{3} \lambda^{(q)} r^q, \quad \mu^*(r) = \sum_{q=0}^{3} \mu^{(q)} r^q; \tag{2}$$

$\tilde{\rho}$, $\tilde{\lambda}$. $\tilde{\mu}$ — характерные величины механических свойств материала покрытия.

Рассеивающую способность тела будем характеризовать с помощью функционалов, построенных специальным образом.

Построим функционал Φ_1, определенный на классе кубических функций (1) и выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в некотором интервале ($a \leqslant y \leqslant b$) заданного сечения волновода ($x = x_*$) при фиксированной частоте $\omega = \omega_*$

$$\Phi_1\,[\rho,\lambda,\mu] = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b |p_s\,(x_*, y,\ \omega_*)|^2\, dy.$$

В случае, когда частота звуковой волны не является фиксированной, а изменяется в некотором диапазоне $[\omega_1, \omega_2]$, построим функционал Φ_2, выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот и в фиксированной точке наблюдения ($x = x_*,\ y = y_*$).

$$\Phi_2[\rho,\lambda,\mu] = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} |p_s\,(x_*, y_*,\ \omega)|^2\, d\omega.$$

Для случая, когда требуется иметь минимальное звукоотражение в заданном интервале сечения и в некотором диапазоне частот, построим функционал Φ_3.

$$\Phi_3[\rho,\lambda,\mu] = \frac{1}{(b-a)(\omega_2-\omega_1)} \int\limits_a^b \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} |p_s\,(x_*, y_*,\ \omega)|^2\, d\omega\ dy.$$

Найдем такие значения коэффициентов $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ ($q = 0,\,1,\,2,3$) функций (2), при которых функционалы $\Phi_j[\rho,\lambda,\mu]$ ($j = 1,\,2,\,3$) достигают минимального значения.

5. Генетический алгоритм

Для нахождения оптимальных законов неоднородности материала покрытия сначала определим область допустимых решений для функций (2) вводя ограничения

$$\alpha_0 \leqslant \rho^*(r) \leqslant \alpha_1, \quad \beta_0 \leqslant \lambda^*(r) \leqslant \beta_1, \quad \gamma_0 \leqslant \mu^*(r) \leqslant \gamma_1, \quad r \in [r_0, r_1] \tag{3}$$

где α_j, β_j, γ_j $(j = 0, 1)$ — некоторые положительные константы.

Каждое из неравенств (3) имеет вид

$$b_0 \leqslant f(r) \leqslant b_1, \tag{4}$$

где

$$f(r) = a^{(0)} + a^{(1)}r + a^{(2)}r^2 + a^{(3)}r^3, \tag{5}$$

и определяет прямоугольную область

$$Q = \{(r, f): \quad r \in [r_0, r_1], \quad f \in [b_0, b_1]\},$$

содержащую бесконечное множество кубических парабол.

Разобьем отрезок $r \in [r_0, r_1]$ на три равные части. В области Q каждая кубическая парабола $f(r)$ однозначно определяется четырьмя точками с координатами (r_0, f_0), (r', f_1), (r'', f_2), (r_1, f_3), где $r' = (2r_0 + r_1)/3$, $r'' = (r_0 + 2r_1)/3$; $f_0 = f(r_0)$, $f_1 = f(r')$, $f_2 = f(r'')$, $f_3 = f(r_1)$.

Подставив координаты этих четырех точек в (5), получим систему четырех уравнений, из которых определим значения $a^{(q)}$ через величины r_0, r_1, f_q $(q = 0, 1, 2, 3)$.

Для некоторых наборов коэффициентов ($a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$) значения функции $f(r)$ могут выходить из интервала $[b_0,\ b_1]$, что приводит к нарушению ограничений (4). Чтобы исключить такие наборы из рассмотрения, оцениваются значения функции $f(r)$ в стационарных точках, лежащих на отрезке $[r_0, r_1]$, где возможно достижение экстремальных значений.

Если $a^{(3)} \neq 0$, то рассматриваются две стационарные точки $r_c = \dfrac{-a^{(2)} \pm \sqrt{a^{(2)2} - 3a^{(1)}a^{(3)}}}{3a^{(3)}}$. Если $a^{(3)} = 0$, то рассматривается одна точка $r_c = -a^{(1)}/(2a^{(2)})$.

В случае, когда точка r_c попадает в отрезок $[r_0, r_1]$ и при этом $f(r_c) < b_0$ или $f(r_c) > b_1$, то соответствующий набор коэффициентов ($a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$) исключается из рассмотрения.

Нахождение оптимального набора параметров $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ $(q = 0, 1, 2, 3)$, удовлетворяющего условиям (3) и минимизирующего функцию двенадцати переменных

$$\Phi_m(\rho^{(0)}, \ldots, \rho^{(3)}, \lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(3)}, \mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(3)}) \to \min \quad (m = 1,\ 2, \ldots 3),$$

осуществим с помощью генетического алгоритма [19].

При фиксированном q каждое отдельное значение f_q $(q = 0, 1, 2, 3)$ кодируется в виде последовательности p битов, где p — натуральное число, являющееся одним из параметров генетического алгоритма. Этот параметр называется разрядностью гена. Он выбирается произвольно. При заданном p отдельное значение f_q представляется в виде

$$f_q = b_0 + m_q h, \tag{6}$$

где m_q — целое неотрицательное число, представляемое в виде двоичного p разрядного числа; $h = \dfrac{b_1 - b_0}{2^p - 1}$. Представление (6) обеспечивает удовлетворение условия $f_q \in [b_0, b_1]$ для любого m_q. Таким образом, задание или изменение значения f_q в любом месте алгоритма сводится к заданию или изменению последовательности p битов, называемой в дальнейшем геном, определяющим f_q. Увеличение разрядности гена приводит к увеличению количества значений f_q

на отрезке $[b_0,\ b_1]$. Разрядность, равная p, задаёт на отрезке $[b_0,\ b_1]$ равномерную сетку значений с шагом h, которые может принимать функция $f(r)$ в каждой из точек r_0, r', r'', r_1. Так как эти значения могут отличаться от значений, принимаемых функцией $f(r)$, соответствующей точному решению задачи оптимизации, то задание достаточно большого p необходимо для увеличения потенциальной точности алгоритма.

Каждая из функций $\rho^*(r)$, $\lambda^*(r)$, $\mu^*(r)$ однозначно определяется хромосомой, состоящей из четырех генов, определяющих значения данной функции в точках r_0, r', r'', r_1. Полная конфигурация из трех хромосом, соответствующих функциям $\rho^*(r)$, $\lambda^*(r)$, $\mu^*(r)$, называется особью.

При минимизации функционала с помощью генетического алгоритма рассматривается динамическая совокупность нескольких особей, называемая популяцией. Каждая итерация алгоритма сопровождается изменением популяции. Множество особей, рассматриваемых вместе в течение одной итерации, называется поколением.

Ниже опишем шаги генетического алгоритма.

Шаг 1. Инициализация. На данном шаге генерируется начальное поколение P, состоящее из N_0 особей. Каждая из них задаётся как совокупность трех случайных хромосом. Генерация каждой особи сопровождается проверкой стационарных точек и в неудовлетворительном случае повторяется заново до тех пор, пока не будет получена допустимая конфигурация.

Шаг 2. Оценка приспособленности. Вводится функция приспособленности особи

$$F\left[\rho,\lambda,\mu\right] = C - \Phi\left[\rho,\lambda,\mu\right],$$

где C – положительная константа, определяемая экспериментально так, чтобы $F\left[\rho,\lambda,\mu\right]$ была положительна при всех допустимых конфигурациях ρ^*, λ^*, μ^*. Таким образом, задача минимизации функционала $\Phi\left[\rho,\lambda,\mu\right]$ сводится к задаче максимизации функции приспособленности. На втором шаге алгоритма рассчитывается значение функции приспособленности для каждой особи из начального поколения P. Наибольшее среди полученных значений обозначим $\hat{F}$.

Шаг 3. Проверка критерия остановки алгоритма. Генерация новых поколений останавливается, если на протяжении K поколений относительное улучшение максимального значения $\hat{F}$ функции приспособленности не превышает заранее заданное число δ — пороговое относительное улучшение значения функции приспособленности. Тогда в качестве оптимального решения берётся конфигурация ($\tilde{\rho}^*$, $\tilde{\lambda}^*$, $\tilde{\mu}^*$), содержащаяся в текущем поколении, такая, что $F\left[\tilde{\rho}^*,\tilde{\lambda}^*,\tilde{\mu}^*\right] = \hat{F}$. Таким образом, K — число поколений для контроля условия остановки

Шаг 4. Селекция хромосом. На данном шаге из текущего поколения выбираются особи, которые будут участвовать в формировании следующего поколения.

Совокупность N_1 особей из P, имеющих наибольшее значение функции приспособленности, формируют набор P_1 и гарантированно переходят в новое поколение. Таким образом, N_1 — число особей, переходящих в новое поколение напрямую. При этом $N_1 < N_0$.

Из особей поколения P, не вошедших в P_1, методом рулетки [19] отбираются $N_2 \leqslant N_0 - N_1$ особей, формирующих набор P_2. N_2 — число особей, попадающих в набор для участия в скрещивании. P_2 является динамическим множеством, так как изменяется на следующем этапе. К особям из $P_1 \cup P_2$ будет применён оператор скрещивания.

Из особей, не вошедших в множество $P_1 \cup P_2$, формируется набор P_4, к которому будет применён оператор мутации.

Шаг 5. Применение оператора скрещивания. Скрещивание выполняется для N_3 пар особей, где $2N_3 \leqslant N_2$. Особи выбираются случайным образом из динамического множества $P_1 \cup P_2$. N_3 — число скрещиваний в одной итерации алгоритма

Особи, полученные в результате скрещивания, формируют новое множество P_3. Особи из P_2, участвовавшие в скрещивании, исключаются из данного множества. Количество потомков,

создаваемых при каждом скрещивании, равно количеству участвующих в нём особей из P_2. Данное правило действует для того, чтобы число особей в популяции не изменялось.

Процесс скрещивания заключается в том, что хромосомы потомков формируются из хромосом родителей таким образом, чтобы часть генов каждой хромосомы была получена от одного родителя, часть — от другого. Для этого в каждой хромосоме случайным образом задаётся точка скрещивания так, чтобы обменивающиеся участки хромосом состояли из целого числа генов. Гены до точки скрещивания потомок получает от первого родителя (если формируется второй потомок, то от второго родителя), после точки скрещивания — от второго родителя (для второго потомка от первого родителя).

Шаг 6. Применение оператора мутации. Для особей из P_4, выбираемых случайным образом, выполняются мутации. Число особей в P_4 равно N_4. В гене, подвергаемом мутации, инвертируется двоичный код. Число особей, их хромосом и генов, подвергаемых мутации (а также выбор данных особей, хромосом и генов в них) определяется случайным образом.

Шаг 7. Формирование нового поколения. Новое поколение формируется как множество $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$, после чего происходит переход к шагу 2.

6. Результаты расчетов

По изложенному выше алгоритму были проведены расчеты параметров законов неоднородности покрытия цилиндра, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука. Рассматривался цилиндр радиуса $r_0 = 1$ м с покрытием толщиной 0,1 м, находящийся в плоском волноводе шириной $d = 20$ м, заполненном водой ($\rho_1 = 1000$ кг/м^3, $c = 1485$ м/с). Полагалось, что покрытие выполнено на основе полимерного материала, неоднородного по плотности, с характерной плотностью $\tilde{\rho} = 1070$ кг/м^3 и характерными модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м^2 (поливинилбутираль). Положение оси цилиндра определялось координатами $X_0 = 10$ м, $Y_0 = d/10$ м. Амплитуды A_n полагались равными единице.

Полагалось, что $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0,1$, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1,5$. Такие значения границ неравенств (3) обеспечивают достаточно широкий диапазон изменения функций $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$.

При расчетах использовались следующие значения параметров генетического алгоритма: $p = 10$, $C = 0,01$, $\delta = 10^{-5}$, $K = 10$, $N_0 = 10$, $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 2$.

Минимизация функционала $\Phi_1[\rho, \lambda, \mu]$ осуществлена при $15 \leqslant y \leqslant 18$, $x_* = 30$ м и частоте падающей волны, соответствующей волновому числу $kr_0 = 5$.

Оптимальное решение задачи минимизации функционала имеет вид:

$$\rho^*(r) = 4001,0 - 11253,9r + 10539,7r^2 - 3285,9r^3,$$

$$\lambda^*(r) = 787,6 - 2560,8r + 2737,4r^2 - 963,5r^3,$$

$$\mu^*(r) = 9151,3 - 26073,7r + 24755,8r^2 - 7831,9r^3.$$

Этим оптимальным законам неоднородности соответствует значение функционала $\Phi_1 = 7,04 \cdot 10^{-6}$.

При минимизации функционала $\Phi_2[\rho, \lambda, \mu]$ полагалось, что $x_* = 30$ м, $y_* = 15$ м, а диапазон частот соответствует изменению волнового размера цилиндра kr_0 от 3 до 8.

Получены следующие оптимальные законы неоднородности материала покрытия:

$$\rho^*(r) = 700,6 - 2211,9\,r + 2306,3\,r^2 - 794,4\,r^3,$$

$$\lambda^*(r) = 3342,0 - 9659,7\,r + 9299,3\,r^2 - 2980,7\,r^3,$$

$$\mu^*(r) = 2991,9 - 8648,4\,r + 8323,2\,r^2 - 2666,6\,r^3.$$

При этом $\Phi_2 = 1,56 \cdot 10^{-5}$.

Минимизация функционала $\Phi_3[\rho, \lambda, \mu]$ осуществлена при $x_* = 30$, $y_* = 15$ для интервала сечения волновода $15 \leqslant y \leqslant 18$ и диапазона частот, в котором $5 \leqslant kr_0 \leqslant 8$.

Минимальному значению $\Phi_3 = 1,5 \cdot 10^{-8}$ соответствует покрытие со следующими свойствами:

$$\rho^*(r) = -587,5 = 1641,4\, r - 1527,9\, r^2 + 474,2\, r^3,$$

$$\lambda^*(r) = 12106,5 - 34779,6\, r + 36023,5\, r^2 - 10617,2\, r^3,$$

$$\mu^*(r) = 13230,5 - 37822,6\, r + 36023,5\, r^2 - 11430,1\, r^3.$$

На рис. 2 – 4 приведены графики оптимальных законов неоднородности материала покрытия. Сплошными, штриховыми и пунктирными линиями обозначены зависимости для параметров неоднородности, полученные при минимизации функционалов Φ_1, Φ_2 и Φ_3 соответственно.

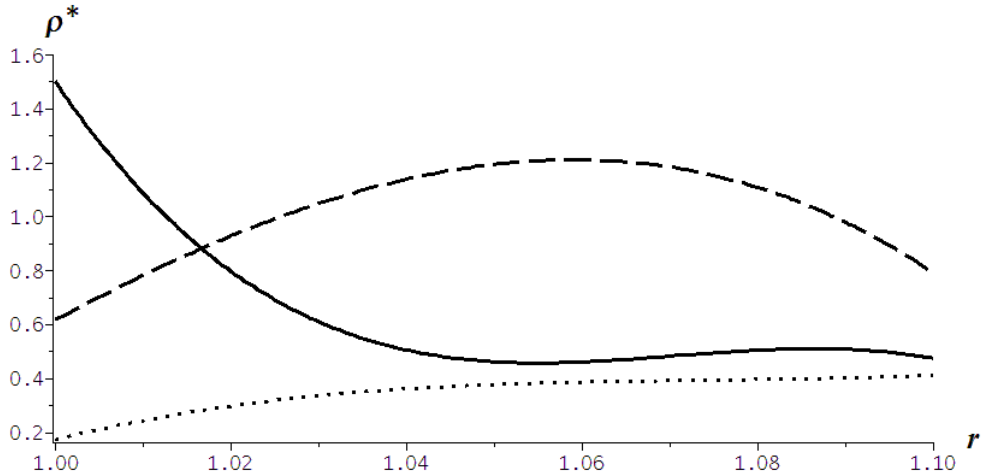

Рис. 2: Зависимости $\rho^*(r)$

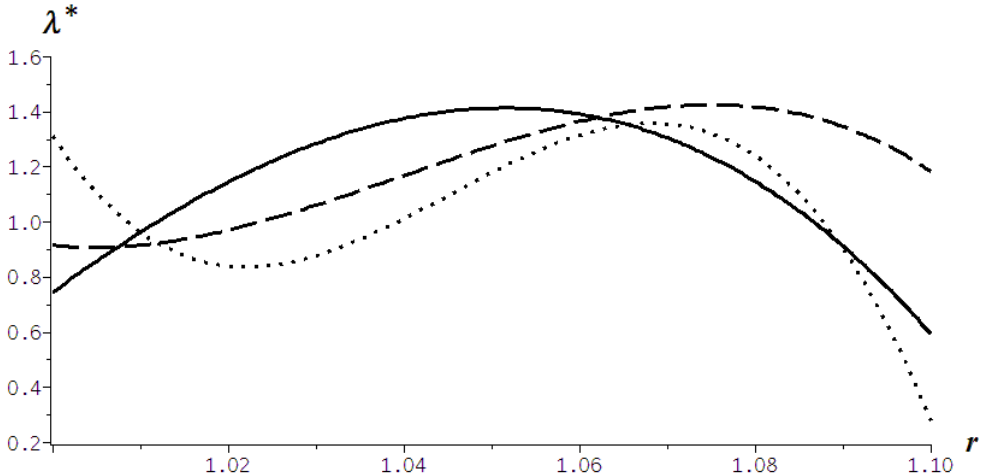

Рис. 3: Зависимости $\lambda^*(r)$

Оценим значение и влияние параметров генетического алгоритма на результаты минимизации функционалов.

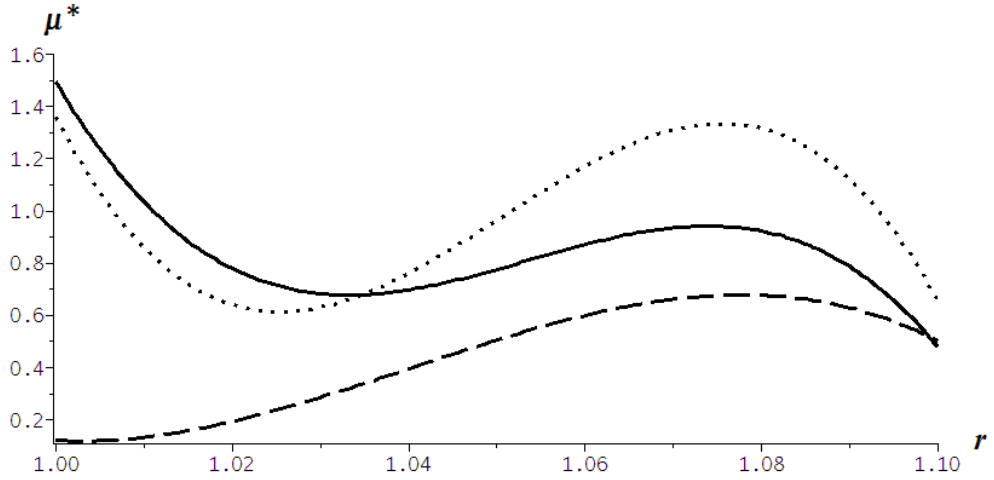

Рис. 4: Зависимости $\mu^*(r)$

Разрядность гена p влияет на погрешность итогового решения. При увеличении разрядности гена на единицу шаг сетки уменьшается примерно в 2 раза, вследствие чего в любой из четырех опорных точек разность между значением точного оптимального закона неоднородности и значением ближайшего к нему в сетке приближенного оптимального решения уменьшается почти в 2 раза. Кроме того, увеличение p может приводить и к обнаружению новых локальных минимумов функционала, если они существуют в области гораздо меньшей шага сетки.

Константа C, используемая для построения функции приспособленности, подлежит экспериментальному определению. Ее минимально возможное значение равно наибольшему значению исследуемого функционала $\Phi\,[\rho, \lambda, \mu]$, которое может быть обнаружено в процессе применения генетического алгоритма. При большом отличии C от данного значения алгоритм может остановиться раньше, чем погрешность найденного минимального значения функционала станет достаточно малой.

Покажем почему это происходит. Пусть F' — наивысшее среди особей значение функции приспособленности, полученное на предыдущей итерации, а F — значение функции приспособленности, полученное на данной итерации. Критерием остановки алгоритма является выполнение условия $\dfrac{F' - F}{F} \leqslant \delta$ на протяжении K итераций. Так как $\dfrac{F' - F}{F} = \dfrac{(C - \Phi') - (C - \Phi)}{C - \Phi} = \dfrac{\Phi - \dot{\Phi}'}{C - \Phi}$, то при увеличении константы C всегда неотрицательное значение $\dfrac{\Phi - \dot{\Phi}'}{C - \Phi}$ уменьшается и становится меньше порогового значения δ на более ранних итерациях. Поэтому увеличение C, если оно не согласовано с уменьшением δ, приводит к тому, что алгоритм может остановиться раньше достижения приемлемого минимума функционала $\Phi\,[\rho, \lambda, \mu]$.

Для получения более точного решения задачи минимизации функционала пороговое относительное улучшение значения функции приспособленности δ следует выбирать как можно меньшим, однако при этом увеличивается время работы алгоритма.

Число поколений для контроля условия остановки K определяет минимальное число итераций, на протяжении которых алгоритм должен отвечать критерию остановки. Данный параметр выбирается достаточно большим для того, чтобы в случае попадания в локальный минимум функционала случайные мутации могли вывести его из данной области и позволить продолжить поиск меньшего значения функционала. Определить оптимальное значение K

не представляется возможным из-за неизвестного характера локальных минимумов и чисто случайного характера мутаций.

Число особей в популяции N_0 определяет число конфигураций, рассматриваемых одновременно в пределе одной итерации. От него зависит количество «материала» для скрещиваний и мутаций. Значение N_0 следует выбирать таким, чтобы иметь достаточное количество конфигураций, которые могут принять участие в скрещиваниях и мутациях.

При задании параметров N_1, N_2, N_3, N_4 должны выполняться соотношения $N_1+N_2+N_4=N_0$ и $2N_3 \leqslant N_2$. Если значение $N_2+N_3+N_4$ слишком мало, то алгоритм может «застопориться», то есть относительное улучшение максимального значения функции приспособленности не будет происходить и критерий остановки будет выполнен слишком рано. Но в процессе работы алгоритма за этим можно следить, показывая результат каждой итерации. Во всех остальных случаях конкретные значения N_0,N_1, N_2, N_3, N_4 не играют роли, так как они влияют только на то, сколько итераций потребуется для достижения результата.

7. Заключение

Осуществив минимизацию соответствующих функционалов, получили аналитическое описание оптимальных механических параметров непрерывно-неоднородного покрытия цилиндра для обеспечения минимального звукоотражения. Такое покрытие можно реализовать с помощью дискретной системы тонких однородных упругих слоев, имеющих различные значения механических параметров (плотности и упругих постоянных).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В. П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.

2. Бобровницкий Ю. И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.

3. Бобровницкий Ю. И., Морозов К. Д., Томилина Т. М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147-151.

4. Косарев О. И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.

5. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.

6. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.

7. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.

8. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.

9. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 154-173.

10. Ларин Н. В. О влиянии непрерывно-неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства термоупругого цилиндра // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 9. Часть 1. С. 395-403.

11. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.

12. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189-199.

13. Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечивающих минимальное звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 67-81.

14. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.

15. Толоконников Л. А Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 43-53.

16. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 76-83.

17. Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270-281.

18. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра, находящегося в плоском волноводе // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 315-323.

19. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия - Телеком, 2006. 452 с.

REFERENCES

1. Ivanov, V. P. 2006, “Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating”, *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683-690.

2. Bobrovnitskii, Yu. I. 2008, “A nonscattering coating for a cylinder”, *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758-768.

3. Bobrovnitskii, Yu. I., Morozov, K. D. & Tomilina, T. M. 2010, “A periodic surface structure with extreme acoustic properties”, *Acoustical Physics*, vol. 56, no 2, pp. 127-131.

4. Kosarev, O. I. 2012, "Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating", *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34-37, [in Russian].

5. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.

6. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].

7. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].

8. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.

9. Larin, N. V. 2017, "Diffraction of a plane acoustic wave on the thermoelastic cylinder with the continuously inhomogeneous covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 154-173, [in Russian].

10. Larin, N. V. 2017, "Influence of the continuously inhomogeneous coating on the thermoelastic cylinder sound-reflecting properties", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9-1, pp. 395-403, [in Russian].

11. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54-62, [in Russian].

12. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 4, pp. 733-742.

13. Tolokonnikov, L. A. 2017, "Determination of the inhomogeneity laws for an covering of an elastic cylinder with cylindrical cavity,providing minimum sound reflexion", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no 4, pp. 67-81, [in Russian].

14. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no 9, pp. 276-289, [in Russian].

15. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating in a plane waveguide with acoustic soft boundaries",*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 43-53, [in Russian].

16. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating in a plane waveguide with absolutely rigid boundaries",*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 76-83, [in Russian].

17. Tolokonnikov, L. A. 2019, "Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide",*Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no 1, pp. 270-281, [in Russian].

18. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2018, “Mathematical modelling of an inhomogeneous coating of an elastic coating in a plane waveguide ”,*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 315-323, [in Russian].

19. Rutkovskaya, D., Pilinskii, M. & Rutkovskii, L. 2006, *“Neural Networks, Genetic Algorithms and Fuzzy Systems”*, Goryachaia Liniya - Telekom, Moscow, 452 p., [in Russian].

Получено 25.02.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.