ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-308-313

О слабой теореме универсальности[1]

А. В. Кирилина

Кирилина Анастасия Вячеславовна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: juska789@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам приближения квадратичной алгебраической решётки целочисленной решёткой. В ней вычисляются расстояния между квадратичной алгебраической решёткой и целочисленной решёткой, когда они заданы числителем и знаменателем подходящей дроби к корню квадратному из дискриминанта d — свободного от квадратов натурального числа.

Результаты данной работы позволяют изучать вопросы о наилучших приближениях квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
А. В. Кирилина. О слабой теореме универсальности // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 308–313.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-308-313

On the weak universality theorem[2]

A. V. Kirilina

Kirilina Anastasia Vyacheslavovna — Postgraduate Student, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: juska789@mail.ru

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.
[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

Abstract

TThis paper is devoted to the approximation of a quadratic algebraic lattice by an integer lattice. It calculates the distances between a quadratic algebraic lattice and an integer lattice when they are given by the numerator and denominator of a suitable fraction to the square root of the discriminant d — of a square-free natural number.

The results of this work allow us to study questions about the best approximations of quadratic algebraic lattices by integer lattices.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
A. V. Kirilina, 2020, "On the weak universality theorem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 308–313.

1. Введение

45 лет тому назад в 1975 году вышла работа С. М. Воронина, в которой была доказана знаменитая теорема об универсальности дзета-функции Римана [1].

Теорема 1. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(s)$ — функция, аналитическая внутри круга $|s| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leqslant r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|s|\leqslant r}\left|f(s) - \zeta\left(s + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. См. [1] или [2], стр. 240–250. □

Для дальнейшего нам потребуются моноиды M с однозначным разложением на простые числа такие, что для их дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ справедливо разложение в произведение Эйлера

$$\zeta(M|\alpha) = \prod_{p\in P(M)}\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma \geqslant \sigma_0,$$

где $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant \frac{1}{2}$. Доказательство существования таких моноидов содержится в работе [7]. Будем через $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$ обозначать класс моноидов M с однозначным разложением на простые числа таких, что дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ представляется в виде произведения Эйлера, абсолютно и равномерно сходящегося в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$.

В работе [10] доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. *При $Q > 4$ для любого $q > Q$ и для любого вещественного T справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}}}} - 1\right| < \frac{4}{\sqrt{Q}}, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}\right| < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Пусть p_0 — простое число и моноид $M_-(p_0)$ обозначает моноид натуральных чисел, не делящихся на p_0. Дзета-функция $\zeta(M_-(p_0)|\alpha)$ в правой полуплоскости $\sigma > 1$ имеет представление в виде произведения Эйлера:

$$\zeta(M_-(p_0)|\alpha) = \prod_{p\neq p_0}\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Теорема 2. *Пусть $Q > 4$, $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r,f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для любого простого $p_0 > Q$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha) - \zeta\left(M_-(p_0)\left|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right.\right)\right| < \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}\right) + \frac{4A}{\sqrt{Q}}.$$

Теорему 2 можно существенно усилить. Пусть Q — натуральное число и моноид $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q. Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q, то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$.

Лемма 2. *Для любого вещественного $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 1$ найдётся натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного T справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} - 1\right| < 3\varepsilon_1, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1}{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha + \frac{3}{4} + iT\right.\right)}\right| < 1 + \varepsilon_1.$$

Теорема 3. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r,f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого $1 > \varepsilon_1 > 0$ существует натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что существует вещественное $T = T(\varepsilon, \varepsilon_1)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha) - \zeta\left(M_{-Q}\left|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right.\right)\right| < \varepsilon\,(1 + \varepsilon_1) + 3A\varepsilon_1.$$

Цель данной работы — дать новую интерпретацию метода работы [10], которая объясняет возникновение эффекта слабой универсальности.

2. Конструкция функций со слабой изоляцией

Дадим следующее определение делителя слабой изоляции.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $d(\alpha)$ является делителем слабой изоляции с константами $\varepsilon_1, B > 0$, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$d(\alpha)$ аналитична в полосе $\alpha = \sigma + it$, $\frac{3}{4} - r \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{4} + r$;*
2. *$d(\alpha)$ не имеет нулей в этой полосе;*
3. *для любого T в данной полосе выполняются неравенства*

$$\left|\frac{d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} - 1\right| < \varepsilon_1, \quad \left|\frac{1}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)}\right| < B$$

.

Теорема 4. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r,f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha) - \frac{\zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)}\right| < \varepsilon \cdot B + A\varepsilon_1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_1(\alpha) = f(\alpha) d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right),$$

которая удовлетворяет всем условиям теоремы Воронина. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| f(\alpha) d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right) - \zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| \frac{f(\alpha) d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} - \frac{\zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)}\right| < \frac{\varepsilon}{\left|d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)\right|}.$$

Пользуясь определением делителя слабой изоляции, получим

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| f(\alpha) - \frac{\zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)}\right| < \varepsilon \cdot B + \max_{|\alpha| \leqslant r} |f(\alpha)| \cdot \left| \frac{d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} - 1\right| \leqslant \varepsilon \cdot B + A\varepsilon_1,$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

3. Новое доказательство теоремы о слабой изоляции

Из леммы 1 следует, что для заданного $Q > 4$ функция $d(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p_0^\alpha}\right)^{-1}$ при $p_0 > Q$ является делителем слабой изоляции с константами $\varepsilon_1 = \frac{4}{\sqrt{Q}}$, $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}$ и дзета-функция $\zeta(M_-(p_0)|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{d(\alpha)}$ в силу теоремы 4 удовлетворяет теореме 2.

Из леммы 2 следует, что для $Q = Q(\varepsilon_1)$ дзета-функция $\zeta(M_{+Q}|\alpha)$ является делителем слабой изоляции с константами $3\varepsilon_1$, $B = 3$ и дзета-функция $\zeta(M_{-Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{+Q}|\alpha)}$ в силу теоремы 4 удовлетворяет теореме 3.

Заметим, что любой делитель слабой изоляции $d(\alpha)$ свойством универсальности или слабой универсальности не обладает, так как он в силу определения ограничен сверху некоторой константой C: $|d(\alpha)| \leqslant C$, а, значит, не может приближать с любой точностью функции, которые по модулю имеют значения больше C.

Из метода доказательства теоремы 4 легко видеть, что универсальность сохраняется только для тривиальных делителей слабой изоляции, которые сами являются константами. Кроме этого, так как никакой делитель слабой изоляции $d(\alpha)$ кроме константы не может удовлетворять третьему условию из определения для любого $\varepsilon_1 > 0$, то становится понятна формулировка теорем из работы [10].

4. Заключение

С помощью теоремы универсальности С. М. Воронина удалось доказать слабую форму теоремы универсальности для широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых делитель слабой универсальности сам является дзета-функцией соответствующего моноида, удовлетворяющей определенным условиям.

Как было отмечено в работе [10]: "Было бы интересно выяснить какие элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно переносятся на этот класс дзета-функций моноидов натуральных чисел?

Интересно заметить, что как показано в работе [8] среди дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых справедлива слабая теорема универсальности, есть те, для которых область голоморфности совпадает со всей α-полуплоскостью $\sigma > 0$, кроме точки $\alpha = 1$, где у них полюс первого порядка. Таким образом, они продолжаются в лево от полуплоскости абсолютной сходимости, но не на всю плоскость. Если верна гипотеза Линника–Ибрагимова [13], то для них должна быть справедлива и сильная теорема универсальности."

На первый взгляд создается впечатление, что если в доказательстве С. М. Воронина удалить любое конечное множество простых, то оно останется в силе, но это требует отдельной тщательной проверки.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — Т. 39, № 3. — С. 475–486.

2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

3. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

4. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.

5. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

6. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

7. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

8. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

9. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

10. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

11. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

12. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

13. Лауринчикас А. П., Матсумото К., Стеудинг Й. “Универсальность L-функций, связанных с новыми формами”. Изв. РАН. Сер. матем. — Т. 67, № 1 (2003). — С. 83–98; Izv. Math., 67:1 (2003). — P. 77–90.

14. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

15. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Voronin, S. M. 1975, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function“, *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.

2. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

3. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

4. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol’skii N. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovol’skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil’kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

5. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.

6. N. N. Dobrovol’skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.

7. N. N. Dobrovol’skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 142–150.

8. N. N. Dobrovol’skii, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

9. N. N. Dobrovol’skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

10. N. N. Dobrovol’skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii 2018, "On the monoid of quadratic residues" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

11. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

12. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2003, “The universality of L-functions associated with newforms“, *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 67 (1), pp. 83–98 (in Russian) ≡ *Izv. Math.*, vol. 67 (1), pp. 77–90.

13. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

14. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

Получено 2.08.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.