ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-302-307

Константы Никольского — Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля[1]

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский

Дмитрий Викторович Горбачев — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

Изучаются точные константы Никольского–Бернштейна для сферических полиномов в пространстве $L^p(\mathbb{S}^d)$ с весом Данкля. Устанавливается взаимосвязь с одномерными константами для алгебраических полиномов в пространстве $L^p[-1,1]$ с весом Гегенбауэра.

Ключевые слова: евклидова сфера, вес Данкля, вес Гегенбауэра, сферические полиномы, константа Никольского, неравенство Бернштейна.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Константы Никольского — Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 302–307.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-302-307

Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight[2]

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii

Dmitry Viktorovich Gorbachev — Doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of general and theoretical physics, Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).
[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

Abstract

We study the sharp Nikol'skii–Bernstein constants for spherical polynomials in the space $L^p(\mathbb{S}^d)$ with the Dunkl weight. An interrelationship with one-dimensional constants for algebraic polynomials in the space $L^p[-1,1]$ with the Gegenbauer weight is established.

Keywords: Euclidean sphere, Dunkl weight, Gegenbauer weight, spherical polynomials, Nikolskii constant, Bernstein inequality.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii. 2020, "Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 302–307.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_{d+1}y_{d+1}$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$, $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ — евклидова длина вектора x; $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \colon |x| = 1\}$ — единичная евклидова сфера; Π_n^d — пространство сферических полиномов порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$ — сужений на сферу комплекснозначных алгебраических полиномов $f(x) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_{d+1}\leqslant n} c_{\nu_1\ldots\nu_{d+1}} x_1^{\nu_1}\ldots x_{d+1}^{\nu_{d+1}}$ степени n, где $\nu_j \in \mathbb{Z}_+$; Δ_0 — оператор Лапласа–Бельтрами для сферы $\mathbb{S}^d$; $r \geqslant 0$, $(-\Delta_0)^{r/2}$ — дробная степень Δ_0, определяемая как мультипликатор; $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше n; $t \in [-1, 1]$, $\alpha \geqslant -1/2$, $w_\alpha(t) = (1-t^2)^\alpha$ — вес Гегенбауэра, $R_n^{(\alpha)}(t) = \frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)}{P_n^{(\alpha,\alpha)}(1)}$ — нормированные полиномы Гегенбауэра (Якоби), ортогональные с весом w_α; $g(t) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t)$ для $g \in \mathcal{P}_n$; $D_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{\operatorname{tg} t}\frac{d}{dt}$ — дифференциальный оператор Гегенбауэра, для которого $(-D_\alpha)^{r/2}R_n^{(\alpha)} = \lambda_{\alpha n}^{r/2}R_n^{(\alpha)}$, где $\lambda_{\alpha n} = n(n+2\alpha+1)$ — собственные значения $(-D_\alpha)$, а также $(-\Delta_0)$ при $\alpha = d/2-1$; $0 < p \leqslant \infty$, X — некоторый компакт, v — положительная почти всюду на X весовая функция, $L_v^p(X)$ — пространство Лебега измеримых с весом v комплекснозначных функций на X, для которого $\|f\|_{p,v} = \bigl(c_v\int_X |f(x)|^p v(x)\,dx\bigr)^{1/p}$ при $p < \infty$, $c_v^{-1} = \int_X v(x)\,dx$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)|$ при $p = \infty$, $L^p(X) = L_1^p(X)$.

В безвесовом случае рассматривается следующая наилучшая константа в неравенстве Никольского–Бернштейна для сферических полиномов в пространстве $L^p(\mathbb{S}^d)$:

$$C_p(d,n,r) = \sup_{f\in\Pi_n^d\setminus\{0\}} \frac{\|(-\Delta_0)^{r/2}f\|_\infty}{\|f\|_p}, \quad r \geqslant 0.$$

При $r = 0$ получаем константу Никольского, случай $d = 1$, $r \in \mathbb{N}$ отвечает классической константе Бернштейна $C_\infty(1,n,r) = n^r$. Известно [4], что при $d \geqslant 1$, $p \geqslant 1$

$$C_p(d,n,r) \asymp n^{r+d/p}, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Однако точное значение $C_p(d,n,r)$ найдено только в случаях $p = 2, \infty$ [5]. В [7] доказано, что

$$C_p(d,n,0) = c_p(d)n^{d/p}(1+o(1)), \quad n \to \infty, \tag{2}$$

где $c_p(d)$ — константа Никольского в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$ для целых функций экспоненциального сферического типа 1.

Функции на сфере вида $g(\langle x, x_0\rangle)$, где $x_0 \in \mathbb{S}^d$, называются зональными. Можно отождествить $\mathcal{P}_n$ и подмножество зональных полиномов из Π_n^d. В [1] доказано, что при $p \geqslant 1$ существует зональный экстремальный полином g_* степени n с единичным старшим коэффициентом, такой что

$$C_p(d,n,0) = \frac{|g_*(1)|}{\|g_*\|_{p,w_{d/2-1}}}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что многомерная константа Никольского совпадает с константой Никольского для алгебраических полиномов в пространстве $L^p_{w_{d/2-1}}([-1,1])$ с весом Гегенбауэра. Благодаря этому факту было доказано, что: экстремальный полином g_* характеризуется ортогональностью $g_*\perp\mathcal{P}_{n-1}$ в $L^2_{(1-t)w_{d/2-1}(t)}([-1,1])$ $(n\geqslant 1)$; g_* является решением задачи Чебышева о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля в пространстве $L^p_{(1-t)w_{d/2-1}(t)}([-1,1])$; g_* единственный как в одномерной, так и многомерной задачах (с точностью до умножения на константу и вращения аргумента).

Докажем родственный результат об оценке константы Никольского–Бернштейна в пространстве $L^p(\mathbb{S}^d)$ с весом Данкля и дифференциально-разностным оператором Бельтрами–Данкля. Все необходимые сведения из теории гармонического анализа Данкля для случаев $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{S}^{d-1}$ можно найти в книге [8].

Пусть R — система корней в $\mathbb{R}^{d+1}$, R_+ — положительная подсистема R, $\kappa\colon R\to\mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы отражений $G(R)$. Вес Данкля на $\mathbb{R}^{d+1}$ определяется равенством $v_\kappa(x)=\prod_{a\in R_+}|\langle a,x\rangle|^{2\kappa(a)}$. Например, если $\{e_j\}_{j=1}^{d+1}$ — единичные орты $\mathbb{R}^{d+1}$, $R=\{\pm e_1,\ldots,\pm e_{d+1}\}$, $R_+=\{e_1,\ldots,e_{d+1}\}$, $G(R)=\mathbb{Z}_2^{d+1}$ — группа октаэдра, $\kappa(\pm e_j)=\kappa_j\geqslant 0$, то $v_\kappa(x)=\prod_{j=1}^{d+1}|x_j|^{2k_j}$.

Сужение v_κ на сферу называется сферическим весом Данкля. Имеем $\Pi_n^d=\bigoplus_{j=0}^n\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — подпространства κ-гармоник, ортогональных в $L^2_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)$; $\dim\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)=h_j(d)=\frac{2j+d-1}{d-1}\binom{j+d-2}{j}$; proj_j — проектор на подпространство $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$; $Z_j^\kappa(x,y)=\sum_{i=1}^{h_j(d)}Y_{ji}(x)\overline{Y_{ji}(y)}$ — воспроизводящее ядро подпространства $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $\{Y_{ji}\}_{i=1}^{h_j(d)}\subset\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — некоторый ортонормированный базис; $\Delta_{\kappa,0}$ — оператор Бельтрами–Данкля; $(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}\,\mathrm{proj}_j=(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\,\mathrm{proj}_j$, где $\alpha_\kappa=d_\kappa/2-1$ и $d_\kappa=d+2\sum_{a\in R_+}\kappa(a)$ — размерность Данкля.

Пусть V_κ — оператор сплетения Данкля. Роль зональных функций в весовом случае играют функции вида $G(x,y)=V_\kappa[g\langle\,\cdot\,,y\rangle)](x)$, $x,y\in\mathbb{S}^d$. В частности, $Z_j^\kappa(x,y)=h_j(d_\kappa)\widetilde{Z}_j^\kappa(x,y)$, где $\widetilde{Z}_j^\kappa(x,y)=V_\kappa[R_j^{(\alpha_\kappa)}(\langle\,\cdot\,,y\rangle)](x)$. Отметим, что $0\leqslant\widetilde{Z}_j^\kappa(x,x)\leqslant 1$ для любого $x\in\mathbb{S}^d$.

Если функция кратности $\kappa\equiv 0$, то вес $v_0\equiv 1$ и анализ Данкля сводится к безвесовому случаю. В частности, оператор V_0 будет дельта-функцией и $V_0[g\langle\,\cdot\,,y\rangle)](x)=g(\langle x,y\rangle)$.

Рассмотрим следующие весовые константы Никольского–Бернштейна в пространствах $L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)$ и $L^p_{w_\alpha}([-1,1])$ соответственно:

$$C_{p,\kappa}(d,n,r)=\sup_{f\in\Pi_n^d\setminus\{0\}}\frac{\|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}f\|_\infty}{\|f\|_{p,v_\kappa}},\quad C_{p,\alpha}(n,r)=\sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}}\frac{\|(-D_\alpha)^{r/2}P\|_\infty}{\|P\|_{p,w_\alpha}}.$$

Для любого полинома $g(t)=\sum_{j=0}^n\widehat{g}_jR_n^{(\alpha)}(t)\in\mathcal{P}_n$ имеем $(-D_\alpha)^{r/2}g(1)=\sum_{j=0}^n\lambda_{\alpha j}^{r/2}\widehat{g}_j$. Поэтому из результатов работы [2] следует, что

$$C_{p,\alpha}(n,r)=\sup_{\substack{g\in\mathcal{P}_n\\ \|g\|_{p,w_\alpha}=1}}\Bigl|\sum_{j=0}^n\lambda_{\alpha j}^{r/2}\widehat{g}_j\Bigr|. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $d\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $r\geqslant 0$, $x_0\in\mathbb{S}^d$. Тогда*

$$\sup\Bigl|\sum_{j=0}^n(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\widetilde{Z}_j^\kappa(x_0,x_0)\Bigr|\leqslant C_{p,\kappa}(d,n,r)\leqslant\sup\Bigl|\sum_{j=0}^n(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\Bigr|,$$

где супремумы берутся по всем полиномам $g\in\mathcal{P}_n$, для которых $\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}}=1$.

В безвесовом случае имеем $\widetilde{Z}_j^0(x_0,x_0)=R_j^{(d/2-1)}(1)=1$ для любых x_0 и j, поэтому

$$C_p(d,n,r)=C_{p,d/2-1}(n,r),\quad r\geqslant 0.$$

С учетом (4) получили обобщение (3) на случай констант Никольского–Бернштейна при $r > 0$.
Доказательство. Будем использовать результаты [8, гл. 3]. Возьмем произвольный полином $g = \sum_{j=0}^{n} \widehat{g}_j R_n^{(\alpha)}$, такой что $\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}} = 1$. Положим $G(x) = V_\kappa[g\langle\,\cdot\,, x_0\rangle)](x) = \sum_{j=0}^{n} \widehat{g}_j \times \times \widetilde{Z}_j^\kappa(x, x_0)$. Тогда $(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} G(x_0) = \sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2} \widehat{g}_j \widetilde{Z}_j^\kappa(x_0, x_0)$ и $\|G\|_{p,v_\kappa} \leqslant \|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}}$ [8, гл. 3]. Отсюда имеем $C_{p,\kappa}(d,n,r) \geqslant \frac{|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} G(x_0)|}{\|G\|_{p,v_\kappa}} \geqslant \left|\sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2} \widehat{g}_j \widetilde{Z}_j^\kappa(x_0,x_0)\right|$, что влечет оценку снизу.

Для оценки сверху рассмотрим свертку $f *_\kappa g$ с зональным ядром g и оператор сдвига T_θ^κ, действующий на f как мультипликатор $\operatorname{proj}_j(T_\theta^\kappa f) = R_j^{(\alpha_\kappa)}(\cos\theta) \operatorname{proj}_j f$, где $\theta \in [0,\pi]$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $f \in \Pi_n^d$ — произвольный сферический полином и $\|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} f\|_\infty = |(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} f(x')|$, где $x' \in \mathbb{S}^d$. Введем зональный полином $g(\cos\theta) = T_\theta^\kappa f(x') = \sum_{j=0}^{n} R_j^{(\alpha_\kappa)}(\cos\theta) \operatorname{proj}_j f(x')$. Для произвольной интегрируемой зональной функции h имеем [8, гл. 3]

$$(f *_\kappa h)(x') = c_{w_{\alpha_\kappa}} \int_0^\pi T_\theta^\kappa f(x') h(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\alpha_\kappa+1}\, d\theta.$$

Пусть $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель. Тогда

$$\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}} = \sup_{\|h\|_{p',w_{\alpha_\kappa}} \leqslant 1} \left| c_{w_{\alpha_\kappa}} \int_0^\pi g(\cos\theta) h(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\alpha_\kappa+1}\, d\theta \right| = \sup_{\|h\|_{p',w_{\alpha_\kappa}} \leqslant 1} |(f *_\kappa h)(x')|.$$

По неравенству Юнга имеем $\|f *_\kappa h\|_\infty \leqslant \|f\|_{p,v_\kappa} \|h\|_{p',w_{\alpha_\kappa}}$ [8, гл. 3]. Поэтому $\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}} \leqslant \|f\|_{p,v_\kappa}$. Также имеем $(-D_{\alpha_\kappa})^{r/2} g(1) = \sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2} \operatorname{proj}_j f(x') = (-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} f(x')$. В итоге получаем

$$\frac{\|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2} f\|_\infty}{\|f\|_{p,v_\kappa}} \leqslant \frac{|(-D_{\alpha_\kappa})^{r/2} g(1)|}{\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}}} \leqslant \sup_{\substack{g \in \mathcal{P}_n \\ \|g\|_{p,w_\alpha} = 1}} |(-D_{\alpha_\kappa})^{r/2} g(1)|.$$

Теорема доказана. □

Сделаем несколько комментариев к теореме 1. В весовом случае мы не можем сказать, существует ли точка x_0, где все значения $\widetilde{Z}_j^\kappa(x_0, x_0)$ равны 1. В этой связи посмотрим, что происходит в случае $p = 2$, где точная константа стандартно вычисляется следующим образом. Пусть $K_n^\kappa = \sum_{j=0}^{n} Z_j^\kappa$ — воспроизводящее ядро подпространства Π_n^d, $D = (-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}$. Тогда $Df(x) = c_{v_\kappa} \int_{\mathbb{S}^d} D_x K_n^\kappa(x,y) f(y) v_\kappa(y)\, dy$. Отсюда по неравенству Коши–Буняковского получаем $|Df(x)| \leqslant \|D_x K_n^\kappa(x,\,\cdot\,)\|_{2,v_\kappa} \|f\|_{2,v_\kappa}$. Следовательно, применяя свойства воспроизводящего ядра, получаем

$$C_{2,\kappa}(d,n,r) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{S}^d} \|D_x K_n^\kappa(x,\,\cdot\,)\|_{2,v_\kappa} = \|D_x K_n^\kappa(x',\,\cdot\,)\|_{2,v_\kappa} = \left(\sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r Z_j^\kappa(x',x')\right)^{1/2},$$

где x' зависит только от K_n^κ. Эта оценка точная, поскольку можно взять полином $f(x) = D_x K_n^\kappa(x,x') = \sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2} Z_j^\kappa(x,x')$, для которого имеем $D_x f(x') = \sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r \times \times Z_j^\kappa(x',x') = \|D_x K_n^\kappa(x',\,\cdot\,)\|_{2,v_\kappa}^2 = \|D_x K_n^\kappa(x',\,\cdot\,)\|_{2,v_\kappa} \|f\|_{2,v_\kappa}$. Таким образом,

$$C_{2,\kappa}(d,n,r) = \left(\sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r Z_j^\kappa(x',x')\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^{n} (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r h_j(d_\kappa) \widetilde{Z}_j^\kappa(x',x')\right)^{1/2}.$$

Для уточнения теоремы 1 желательно оценить функции $\widetilde{Z}_n^\kappa(x,x) = \frac{1}{h_n(d_\kappa)} \sum_{i=1}^{h_n(d)} |Y_{ni}(x)|^2$. С одной стороны имеем $\widetilde{Z}_n^\kappa(x,x) \leqslant 1$ для любого x. Можно дать следующую простую, но недостаточную оценку снизу. Ортонормированность Y_{ni} влечет $c_{v_\kappa} \int_{\mathbb{S}^d} \widetilde{Z}_n^\kappa(x,x) v_\kappa(x)\, dx = \frac{h_n(d)}{h_n(d_\kappa)}$.

Поэтому $\max_{x\in\mathbb{S}^d}\widetilde{Z}_n^\kappa(x,x)\geqslant\frac{h_n(d)}{h_n(d_\kappa)}$. В безвесовом случае $d=d_0$ дробь равна 1. Однако в весовом случае $d_\kappa>d$ при больших n имеем $\frac{h_n(d)}{h_n(d_\kappa)}\asymp n^{d-d_\kappa}$, что мешает установлению правильного порядка поведения исследуемой величины $C_{p,\kappa}(d,n,r)$.

Тем не менее даже в текущем виде теорема 1 может быть использована для оценок весовой константы. В частности, если функция кратности κ такова, что $d_\kappa\in\mathbb{N}$, то

$$C_{p,\kappa}(d,n,r)\leqslant C_{p,d_\kappa/2-1}(n,r)=C_p(d_\kappa,n,r).$$

В этом случае можно воспользоваться результатами для безвесовой константы $C_p(d_\kappa,n,r)$, в частности, асимптотиками (1), (2), точным значением для $p=\infty$, r четное [5], оценками для $p=1$, $r=0$ [6]. В общем случае для оценок константы $C_{p,\alpha}(n,0)$ и, как следствие, $C_{p,\kappa}(d,n,0)$ можно применить результаты работы [3]. В частности, имеем $C_{p,\kappa}(d,n,0)\lesssim n^{d_\kappa/p}$, $n\to\infty$. Выскажем предположение, что этот порядок правильный.

В качестве открытых проблем укажем уточнение границ $C_{p,\kappa}(d,n,r)$ для $\kappa\not\equiv 0$ и исследование случая $p<1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.

2. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Константы Маркова–Бернштейна–Никольского для полиномов в пространстве L^p с весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4.

3. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

4. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3(231). С. 179–180.

5. Иванов В.А. Точные результаты в задаче о неравенстве Бернштейна–Никольского на компактных симметрических римановых пространствах ранга 1 // Тр. МИАН СССР: сб. тр.: Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Ч. 14. Т. 194. М.: Наука, 1992. С. 111–119.

6. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019.

7. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185.

8. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. New York: Springer, 2013.

REFERENCES

1. Arestov, V.V. & Deikalova, M.V. 2014. "Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere", *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), vol. 284, suppl. 1, pp. 9–23.

2. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2020. "Markov–Bernstein–Nikol'skii constants for polynomials in L^p-space with the Gegenbauer weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4. (In Russ.)

3. Gorbachev, D.V. & Mart'yanov, I.A. 2020. "Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

4. Ivanov, V.A. 1983. "On the Bernstein–Nikol'skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1", *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.

5. Ivanov, V.A. 1993. "Precise results in the problem of the Bernstein–Nikol'skij inequality on compact symmetric Riemannian spaces of rank 1", Investigations in the theory of differentiable functions of many variables and its applications, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194, pp. 115–124. (In Russ.)

6. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2019. "Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials", arXiv:1907.03832.

7. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. "Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere", *J. d'Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.

8. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. New York: Springer, 2013.

Получено 12.08.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.