ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-270-301

Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования

В. Н. Чубариков

Владимир Николаевич Чубариков — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Аннотация

В основе работы лежит формула бинома Ньютона и её обобщения на последовательности многочленов биномиального типа. Даны применения к обобщённой проблеме Варинга (Хуа Ло-кен) и проблеме Гильберта – Камке (Г.И.Архипов). Доказана формула Тейлора – Маклорена для многочленов и гладких функций и даны её приложения в численном анализе (решение уравнений методом касательных Ньютона, лемма Гензеля в полных неархимедовских полях, приближенное вычисление значений гладких функций в точке). Даётся аналог формулы бинома Ньютона для многочленов Бернулли и доказывается формула Эйлера — Маклорена суммирования значений функции по целым точкам, выведена формула Пуассона суммирования значений функции. Рассмотрены примеры последовательностей многочленов биномиального типа (степени, нижние и верхние факториальные степени, многочлены Абеля и Лагерра). Найдены биномиальные свойства многочленов Аппеля и Эйлера. Для многочленов и гладких функций от нескольких переменных доказана формула Тейлора, получены многомерные аналоги формул Эйлера – Маклорена и Пуассона суммирования значений функции по решётке. Рассмотрен многомерный аналог этих формул для решётки в многомерном комплексном пространстве. Доказаны ряд свойств последовательности многочленов биномиального типа от нескольких переменных.

Ключевые слова: бином Ньютона, последовательность многочленов биномиального типа, нижние и верхние факториальные многочлены, многочлены Абеля, Лагерра, Аппеля, Бернулли, Эйлера, формулы Тейлора–Маклорена, формулы суммирования Эйлера–Маклорена.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 270–301.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-270-301

A generalized Binomial theorem and a summation formulae

V. N. Chubarikov

Vladimir Nikolaevich Chubarikov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Abstract

The paper is based on the Binomial theorem and its generalizations to the polynomials of binomial type. Thus, we give some applications to the generalized Waring problemm (Loo-Keng Hua) and Hilbert-Kamke problem (G.I.Arkhipov). We also prove Taylor-Maclaurin formula for the polynomials and smooth functions and give its applications to the numerical analysis (Newton's root-finding algorithm, Hensel lemma in full non-archimedian fields, approximate evaluaion of the function at given point). Next, we prove an analogue of Binomial theorem for Bernoulli polynomials, Euler-Maclaurin summation formula over integers and Poisson summation formula for the lattice and consider some examples of binomial-type polynomials (monomials, rising and falling factorials, Abel and Laguerre polynomials). We prove some binomial properties op Appel and Euler polynomials and establish the multidimensional Taylor formula and the analogues of Euler-Maclaurin and Poisson summation formulas over the lattices. Finally, we consider the multidimensional analogues of these formulas for the multidimensional complex space and prove some properties of binomial-type polynomials of several variables.

Keywords: the Newton binomial formula, a sequence of the binomial type polynomials, lower and upper factoriales, the Abel, Laguerre, Appell, Bernoulli, Euler polynomials, the Taylor–Maclauren formula, the Euler–Maclauren formula.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2020, "A generalized Binomial theorem and a summation formulae", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 270–301.

1. Введение

Источником для написания настоящей работы явились прекрасные исследования по комбинаторике, алгебре и математическому анализу ([1]-[18]). В основе её лежат свойства биномиальных коэффициентов и сама формула бинома Ньютона. В первую очередь нас будут интересовать алгебраические и аналитические стороны последовательностей многочленов $p_n(x)$ с коэффициентами из некоторого поля (или евклидова кольца с единицей), удовлетворяющих следующей последовательности тождеств

$$p_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(x)p_{n-k}(x), p_0(x)=1, p_m(0)=0(n\geq 0, m\geq 1),$$

где $p_n(x)$ — многочлен точной степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Последовательность таких многочленов называется последовательностью биномиального типа ([9]). Примерами их являются следующие последовательности многочленов:

$$p_n(x)=x^n, n\geq 0$$

(степени),

$$p_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

(нижние факториалы),

$$p_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

(верхние факториалы),

$$p_n(x) = x(x-an)^{n-1}, n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

(многочлены Абеля),

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} (-x)^k, n \geq 1, p_0(x) = 1$$

(многочлены Лагерра).

Представляется интересным изучение обобщённого бинома смешанного типа. Пусть задана последовательность многочленов $q_n(x)$ биномиального типа, и пусть выполняется следующая последовательность тождеств

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_{n-k}(x) p_k(y), n \geq 0,$$

тогда последовательность $p_n(x)$ назовём последовательностью смешанного типа. К такому типу относятся следующие последовательности:

$$p_n(x) = B_n(x), q_n(x) = x^n$$

($B_n(x)$ — многочлены Бернулли),

$$p_n(x) = E_n(x), q_n(x) = x^n$$

($E_n(x)$ — многочлены Эйлера),

$$p_n(x) = A_n(x), q_n(x) = x^n$$

($A_n(x)$ — многочлены Аппеля). Все эти многочлены будут определены позже.

Хотя, как правило, нами используются элементарные методы (принцип математической индукции, рекуррентные соотношения), но при доказательстве ряда теорем мы не отказываемся от методов из основ математического анализа и простейших утверждений из теории дифференциальных уравнений.

Заключительная часть работы посвящена многочленам от нескольких переменных, являющихся обобщёнными многочленами биномиального и полиномиального типа.

2. Бином Ньютона и формула Тейлора–Маклорена

Для полноты изложения здесь мы приводим с полными доказательствами классические утверждения, от которых будем отталкиваться при изучении свойств последовательностей многочленов биномиального и смешанного типов.

2.1. Бином Ньютона

Сразу отметим, что формула бинома Ньютона лежит в основе алгебры и комбинаторики многочленов и математического анализа.

Теорема 1. (Формула бинома Ньютона). *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}.$$

Числа $\binom{n}{m}, 0 \leq m \leq n$, называются биномиальными коэффициентами и равны числу сочетаний из n различных элементов по $m \geq 1$ различным элементам. При $m = 0$ по определению полагаем $\binom{n}{0} = 1$. Сочетанием из n по m различным элементам называется выбор m различных элементов из n различных элементов. Все сочетания из n по m можно разбить на два типа: содержащие n-й элемент или не содержащие его. Число сочетаний первого типа равно $\binom{n-1}{m-1}$, поскольку приходится делать из оставшихся $n-1$ элементов выбор $m-1$ различных элементов. Число сочетаний второго типа равно $\binom{n-1}{m}$. Таким образом получаем основное рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}.$$

Доказательство. При $n = 0$ формула очевидно верна. Предположим, что она справедлива для $n = m$. Докажем её для $n = m+1$. Пользуясь предположением индукции и основным рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов, имеем цепочку равенств

$$(x+y)^{m+1} = (x+y)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{k+1} y^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^k y^{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k+1} =$$

$$\binom{m}{m} x^{m+1} + \binom{m}{0} y^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) x^k y^{m-k+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k y^{m-k+1},$$

что и требовалось доказать.

Дадим другое доказательство теоремы, не использующее основное рекуррентное соотношение. Воспользуемся производной степенной функции $(x^n)' = nx^{n-1}$. Индукция по n. При $n = 0$ теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n = m$. Докажем утверждение теоремы при $n = m+1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{d(x+y)^{m+1}}{dx} = (m+1)(x+y)^m = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}.$$

Далее проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$(x+y)^{m+1} = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} y^{m-k} + C(y) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k y^{m-k+1} + C(y).$$

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = y^{m+1} = \binom{m+1}{0} y^{m+1}.$$

Следовательно, справедливо искомое равенство.

2.2. Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке

Далее дадим арифметические приложения формулы бинома Ньютона к исследованию базисных свойств последовательности значений многочлена степени n (обобщённая проблема Варинга (Хуа Л.-к.[2],1940)) и последовательности значений векторов $(x, x^2, \ldots, x^n)$ (проблема Гильберта – Камке (Г.И.Архипов[13],1981)). Это касается только нижних оценок для числа переменных соответствующих сравнений и систем сравнений полиномиального вида. В оригинальной работе Г.И.Архипова, введённые им многочлены, представлял ись через верхние факториальные многочлены, а многочлены Хуа Ло-кена — через нижние факториальные многочлены.

Теорема 2 (Хуа Л.-к. – Г.И.Архипов). *Пусть $n \geq 1, x$ — целые, и пусть*

$$H_n(x) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} \binom{x}{s} 2^{s-1}$$

многочлен степени n. Тогда имеем

$$H_n(x) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2^n}, & \text{если} \quad 2|x, \\ (-1)^{n-1} \pmod{2^n}, & \text{если} \quad 2 \not| x. \end{cases}$$

Доказательство. По формуле Тейлора находим

$$(-1)^x = (1-2)^x = \sum_{s=0}^{x} \binom{x}{s} (-2)^s = 1 + \sum_{s=1}^{n} \binom{x}{s} (-2)^s + \sum_{s=n+1}^{x} \binom{x}{s} (-2)^s \equiv$$

$$\equiv 1 + 2(-1)^n H_n(x) \pmod{2^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$H_n(x) \equiv (-1)^n \frac{(-1)^x - 1}{2} \pmod{2^n}.$$

Теорема доказана.

Пусть $P(x)$ — целозначный многочлен степени n с положительным старшим коэффициентом. Хуа Ло-кен нашёл оценки количества переменных $G(n; P(x))$ для разрешимости при всех достаточно больших N обобщённого уравнения Варинга

$$P(x_1) + \cdots + P(x_s) = N$$

в неотрицательных целых неизвестных $x_1, \ldots, x_s$.

Поскольку $H_n(x)$ принимает только два несравнимых по модулю 2^n значения: 0 и $(-1)^{n-1}$, для разрешимости сравнения

$$H_n(x_1) + \cdots + H_n(x_s) \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$$

необходимо выполнение условия $s \geq 2^n - 1$.

Более того, так как при чётном n многочлен $H_n(x)$ принимает только три несравнимых по модулю 2^{n+1} значения: $0, -1$ и $2^n - 1$, то для разрешимости сравнения

$$H_n(x_1) + \cdots + H_n(x_s) \equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}$$

необходимо выполнение условия $s \geq 2^n$.

Следовательно,

$$G(n; H_n(x)) \geq \begin{cases} 2^n - 1, & \text{если } (n, 2) = 1, \\ 2^n, & \text{если } 2|n. \end{cases}$$

Представим многочлен $H_n(x)$ в виде

$$H_n(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s x^s.$$

Г.И.Архипов нашёл необходимые и достаточные условия разрешимости системы уравнений Гильберта – Камке

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = N_1, \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n = N_n, \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$, и дал верхние и нижние оценки для числа переменных k.

Для того чтобы система сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k \equiv N_1 \pmod{2^n}, \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv N_n \pmod{2^n}, \end{cases}$$

была разрешима, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$k \geq b_0,$$

где b_0 — наименьший неотрицательный вычет числа $b = b(N_1, \ldots, N_n)$ по модулю 2^n,

$$b = \sum_{s=1}^{n} a_s N_s.$$

В самом деле, из разрешимости предыдущей системы сравнений следует, что разрешимо сравнение

$$H_n(x_1) + \cdots + H_n(x_k) \equiv b \pmod{2^n}.$$

Если положить $N_1 \equiv \cdots \equiv N_k \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$, то $b \equiv b_0 \pmod{2^n}$. Отсюда получим, что при $k \geq b_0 \geq 2^n - 1$ система сравнений Гильберта – Камке разрешима.

Формула бинома Ньютона лежит в основе многочлена Тейлора. Справедливо следующее утверждение.

2.3. Формула Тейлора для многочленов над полем и для гладких функций на вещественной оси

Теорема 3. (Формула Тейлора). *Пусть* $n \geq 0$, $\quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0$, — *многочлен степени* n *над некоторым полем* $\mathbf{F}$. *Тогда для любых чисел* x *и* y *из* $\mathbf{F}$ *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

где $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ — k*-я производная многочлена* $f(x)$, *причём*

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1, \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Доказательство. Индукция по n. При $n = 0$ утверждение теоремы очевидно. Предположим утверждение теоремы верно при $n = m$. Докажем справедливость его при $n = m + 1$. Имеем

$$f(x) = g(x) + a_{m+1}x^{m+1}, g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k.$$

По предположению индукции получим

$$g(x+y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

а по формуле бинома Ньютона

$$a_{m+1}(x+y)^{m+1} = a_{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k = a_{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(x^{m+1})^{(k)}}{k!} y^k.$$

Стало быть,

$$f(x+y) = g(x+y) + a_{m+1}(x+y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\left(g(x) + a_{m+1}x^{m+1}\right)^{(k)}}{k!} y^k + \frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!} y^{m+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь поле $\mathbf{F}$ является полем вещественных чисел. Тогда справедлива следующая формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 4. *Пусть существует $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда для любых чисел x и y из $[a, b]$ справедливо тождество*

$$f(x+y) = P_n(x; y) + R_n(x; y),$$

где

$$P_n(x; y) = P_n(x; y; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

где $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ — k-я производная функции $f(x)$,

$$R_n = R_n(x; y) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} y^{n+1},$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x + y$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $y > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_n = \varphi_n(x; y) = f(x+y) - P_n(x; y) - Hy^{n+1}.$$

Найдём параметр H из условия $\varphi_n(x; y) = 0$.

Очевидно, имеем

$$\varphi_n(x; 0) = \left.\frac{d\varphi_n(x; y)}{dy}\right|_{y=0} = \cdots = \left.\frac{d^n\varphi_n(x; y)}{dy^n}\right|_{y=0} = 0.$$

Из условия $\varphi_n(x;0) = \varphi_n(x;y) = 0$ по теореме Ролля получим, что найдётся точка c_1 такая, что $0 < c_1 < y$ и $\left.\frac{d\varphi_n(x;y)}{dy}\right|_{y=c_1} = 0$. Аналогично, по теореме Ролля найдётся точка c_2 с условием $0 < c_2 < c_1$ и такая, что $\left.\frac{d^2\varphi_n(x;y)}{dy^2}\right|_{y=c_2} = 0$, и т.д. Наконец, найдётся точка $c_{n+1}, 0 < c_{n+1} < c_n$, такая, что

$$\left.\frac{d^{n+1}\varphi_n(x;y)}{dy^{n+1}}\right|_{y=c_{n+1}} = f^{(n+1)}(x + c_{n+1}) - (n+1)!H = 0.$$

Полагая $c = x + c_{n+1}$, получим $H = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$. Теорема доказана.

2.4. Численное решение уравнений для гладких функций на вещественной оси и неархимедовском полном поле, приближенное вычисление значений гладких функций

Дадим приложение формулы Тейлора к численному решению уравнения $f(x) = 0$ для гладкой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (метод касательных Ньютона, метод последовательных приближений).

Теорема 5. *Пусть $f(a)f(b) < 0$, и пусть на отрезке $[a, b]$ существует вторая непрерывная производная функции $f(x)$, причём для любого x имеем $|f''(x)| \le M, |f'(x)| \ge m > 0$. Тогда предел последовательности*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

при

$$\frac{M}{2m}\left|\frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}\right| = q < 1$$

даёт единственное решение $x = \alpha$ уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$, причём

$$|\alpha - \alpha_n| \le \frac{2m}{M}\frac{q^{2^{n+1}}}{1 - q^{2^{n+1}}}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора для любых $x, y \in [a, b]$ до второго члена с остаточным членом в форме Лагранжа находим

$$f(x + y) = f(x) + f'(x)y + \frac{1}{2}f''(c)y^2,$$

где $c \in [a, b]$ — некоторая точка.

Определим две последовательности α_n и $\beta_n, n \ge 0$, из равенств

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n, f(\alpha_n) + \beta_n f'(\alpha_n) = 0 (n \ge 0).$$

Отсюда, используя формулу Тейлора, получим

$$f(\alpha_{n+1}) = f(\alpha_n + \beta_n) = \frac{1}{2}f''(c_n)\beta_n^2,$$

где $c_n \in [a, b]$.

Переходя к оценкам, имеем

$$|\beta_{n+1}| \le \frac{M}{2m}\beta_n^2 (n \ge 0).$$

Следовательно,

$$|\beta_{n+1}| \le \frac{2m}{M}q^{2^{n+1}}.$$

Поскольку ряд

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

по критерию Коши сходится, находим оценку точности приближения

$$|\alpha - \alpha_n| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\beta_k| \le \frac{2m}{M} \frac{q^{2^{n+1}}}{1 - q^{2^{n+1}}}.$$

Теорема доказана.

Подобное утверждение (лемма Гензеля) имеет место для неархимедова нормирования. К сожалению, наглядной геометрической трактовки метода последовательных приближений для такого нормирования нет.

Напомним, что неархимедовым нормированием $|\cdot|$ поля $\mathbf{K}$ называется вещественная неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$;

2) для любых α и β из $\mathbf{K}$ имеем $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$;

3) для любых $|\alpha| \le 1$ из $\mathbf{K}$ имеем $|1 + \alpha| \le 1$, что эквивалентно условию: для любых β и γ из $\mathbf{K}$ справедливо неравенство

$$|\alpha + \beta| \le \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

В частности, отсюда следует, что, если $|\gamma| < |\beta|$, то $|\beta + \gamma| = |\beta|$.

Поле $\mathbf{K}$ с нормированием $|\cdot|$ называется полным, если любая фундаментальная последовательность $\alpha_n, n \ge 1$, сходится к некоторому элементу из $\mathbf{K}$. Последовательность $\alpha_n, n \ge 1$, фундаментальна, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех номеров $n > n_0$ и $m > n_0$ имеем $|\alpha_m - \alpha_n|\varepsilon$.

Множество тех α, для которых $|\alpha| \le 1$ называется кольцом целых элементов поля $\mathbf{K}$ и обозначается символом Re. Множество $\alpha \in \mathbf{K}$ таких, что $|\alpha| < 1$ образует максимальный идеал $\wp$ в кольце Re.

Теорема 6. *Пусть $\mathbf{K}$ — полное поле, $f(x) \in \mathrm{Re}[x]$, и пусть $\alpha_0 \in \mathrm{Re}$ таково, что $0 < |f(\alpha_0)| < |f'(\alpha_0)|^2$. Тогда предел последовательности*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

даёт единственное решение $x = \alpha$ уравнения $f(x) = 0$, причём

$$|\alpha - \alpha_n| \le f_0^{2^{n+1}}, \quad f_0 = \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора находим

$$f(x + y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

где $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ — k-я производная многочлена $f(x)$, причём

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1 \in \mathrm{Re}[x], \quad f^{(0)}(x) = f(x) \in \mathrm{Re}[x], \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \in \mathrm{Re}[x].$$

Для краткости записи определим величину $\beta_n, n \ge 0$, следующим образом

$$f(\alpha_n) + \beta_n f'(\alpha_n) = 0.$$

Из условия теоремы имеем

$$|\beta_0| = \left|\frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}\right| < |f'(\alpha_0)| \leq 1.$$

Следовательно, $\beta_0 \in \mathrm{Re}$.

Сначала докажем, что 1) $\alpha_n \in \mathrm{Re}$; 2) $|f'(\alpha_{n+1})| = |f'(\alpha_n)|, n \geq 0$; 3) $|f(\alpha_n)| < |f'(\alpha_n)|^2$.

Индукция по n. Утверждения 1) и 3) при $n = 0$ входят в условие теоремы. Применяя формулу Тейлора к многочлену $f'(x)$, находим

$$|f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_0)}{k!}\beta_0\right| = |\beta_0| \cdot |G_1(\alpha_0)| \leq |\beta_0| = \left|\frac{f(\alpha_0)}{f'\alpha_0}\right| < |f'(\alpha_0)|.$$

где

$$G_1(\alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_m)}{k!}\beta_m^{k-1}, m \geq 0.$$

Отсюда, используя условие 3 в определении нормирования, получим

$$|f'(\alpha_1)| \leq \max\{|f'(\alpha_0)|, |f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)|\} = |f'(\alpha_0)|,$$

$$|f'(\alpha_0)| \leq \max\{|f'(\alpha_1)|, |f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)|\} = |f'(\alpha_1)|,$$

т.е. $|f'(\alpha_1)| = |f'(\alpha_0)|$. Тем самым при $n = 0$ условие 2) доказано.

Предположим, что утверждения 1),2),3) справедливы при $n = m$. Докажем их при $n = m + 1$.

Сначала покажем, что утверждение 1) справедливо. Имеем $\alpha_{m+1} = \alpha_m - \beta_m$. По предположению индукции (условие 1)) $\alpha_m \in \mathrm{Re}$, а из условия 2) находим

$$|\beta_m| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'(\alpha_m)}\right| < |f'(\alpha_m)| \leq 1,$$

что даёт условие $\beta_m \in \mathrm{Re}$. Следовательно, $\alpha_{m+1} \in \mathrm{Re}$.

Используя формулу Тейлора для многочлена $f'(x)$, получим

$$|f'(\alpha_{m+1}) - f'(\alpha_m)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_m)}{k!}\beta_m\right| = |\beta_m| \cdot |G_1(\alpha_m)| \leq |\beta_m| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'\alpha_m}\right| < |f'(\alpha_m)|.$$

Аналогично предыдущему, имеем

$$|f'(\alpha_{m+1})| = |f'(\alpha_m)|, m \geq 0;$$

что приводит к справедливости утверждения 2).

Докажем утверждение 3). По формуле Тейлора находим

$$f(\alpha_{m+1}) = f(\alpha_m) + \beta_m f'(\alpha_m) + \beta_m^2 G_0(\alpha_m),$$

где

$$G_0(\alpha_m) = \sum_{s=2}^{n} \frac{f^{(s)}(x)}{s!}\beta_m^{s-2} \in \mathrm{Re},$$

т.е. $|G_0(\alpha_m)| \leqslant 1$.

Поскольку $f(\alpha_m) + \beta_m f'(\alpha_m) = 0$, получим

$$|f(\alpha_{m+1})| = |\beta_m^2 G_0(\alpha_m)| \leq |\beta_m^2| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'(\alpha_m)}\right|^2 <$$

(по предположению индукции $|f(\alpha_{m+1})| = |f(\alpha_m)|$ и $|f(\alpha_m)| < |f'(\alpha_m)|^2$)

$$< |f'(\alpha_m)|^2 = |f'(\alpha_{m+1})|^2,$$

т.е. $|f(\alpha_{m+1})| < |f'(\alpha_{m+1})|^2$. Утверждение 3) доказано.

Далее при $n \geq 1$ из условий $|f(\alpha_n)| < |\beta_{n-1}|^2, |f'(\alpha_n)| = |f'(\alpha_0)|$ имеем

$$|\beta_n| \leq \frac{|\beta_{n-1}|^2}{|f'(\alpha_0)|}.$$

Применяя последовательно это рекуррентное неравенство при $n, n-1, \ldots, 1$, находим

$$|\beta_n| \leq \frac{|\beta_{n-1}|^2}{|f'(\alpha_0)|} \leq \frac{|\beta_{n-2}|^{2^2}}{|f'(\alpha_0)|^2} \leq \cdots \leq \frac{|\beta_0|^{2^n}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{n-1}}}.$$

Наконец, при $n \geq 1$ из рекуррентного равенства $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}$ получим

$$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s.$$

Так как $|f(\alpha_0)| < |f'(\alpha_0)|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер q такой, что для всех $Q \geq 2^q$ выполняется неравенство

$$f_0^Q = \left(\frac{|f(\alpha_0)|}{|f'(\alpha_0)|^2}\right)^Q < \varepsilon.$$

Отсюда, используя критерий Коши для полного поля $\mathbf{K}$, к оценке

$$|\alpha_r - \alpha_q| \leq |\sum_{s=q+1}^{r} \beta_s| \leq \max_{q<s\leq r} |\beta_s| \leq \max_{q<s\leq r} \frac{|\beta_0|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{s-1}}} =$$

$$= \max_{q<s\leq r} \frac{|f(\alpha_0)|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{2s}}} |f'(\alpha_0)|^{2^{s+1}} \leq \max_{q<s\leq r} \frac{|f(\alpha_0)|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{2s}}} = f_0^{2^q} < \varepsilon.$$

Тем самым доказано, что при $n \to \infty$ последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к некоторому элементу α из $\mathbf{K}$.

Оценим скорость сходимости этой последовательности. Имеем

$$|\alpha - \alpha_n| = \left|\sum_{s=n+1}^{\infty} \beta_s\right| = \sup_{q\geq 1} \max_{n<s\leq q} |\beta_s| \leq f_0^{2^{n+1}}.$$

Теорема полностью доказана.

Далее рассмотрим итерационную формулу для вычисления значений гладкой функции в точке на вещественной оси. Пусть $x_0 \in \mathbf{R}$ и $f_0 = f(x_0)$, и пусть f_n — приближение к f_0 с точностью $\Delta_n = |f_n - f_0|$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $G(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки f_0, причём в этой окрестности $\max|G''(t)| = c$, и пусть $f_{n+1} = G(f_n)$*

$$G(f_0) = f_0,\, G(t)|_{t=f_0} = 0.$$

Тогда $\Delta_{n+1} \leq 0,5c\Delta_n^2$.

Действительно, по формуле Тейлора – Маклорена имеем

$$f_{n+1} = G(f_n) = G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) + 0,5G''(\xi)(f_n - f_0)^2,$$

где ξ — некоторая точка в окрестности f_0.

Поскольку $G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) = f_0$, находим

$$\Delta_{n+1} \leq 0,5c\Delta_n^2.$$

Например, 1) для $x_0 > 0, f(x_0) = \sqrt{x_0}$ получим $f_{n+1} = G(f_n) = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{x_0}{f_n}\right)$;

2) для $0,5 \leq x_0 \leq 1, f(x_0) = \frac{1}{x_0}, G(f_n) = 2f_n - x_0 x_n^2$,

3) для $\frac{1}{8} \leq x_0 \leq 1, f(x_0) = \sqrt[3]{x_0}, G(f_n) = \frac{1}{3}\left(2f_n + \frac{x_0}{f_n^2}\right)$ или $G(f_n) = \frac{f_n(f_n^2+2f_0)}{2f_n^3+f_0}$.

2.5. Многочлены Бернулли

Для дальнейшего необходимы следующие новые понятия. Определим числа Бернулли $B_n, n \geq 0$, из соотношений

$$B_0 = 1, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_n, n \geq 0.$$

Далее определим многочлены Бернулли $B_n(x), n \geq 0$, следующим образом

$$B_0(x) = 1, B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k, n \geq 0.$$

В частности, отсюда находим

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42};$$

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Теорема 8. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$B_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m B_{n-m}(y).$$

Доказательство. По определению и формуле бинома Ньютона имеем

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} \binom{n}{k} (x+y)^k = \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} x^s y^{k-s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} x^s \sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{s} B_{n-k} y^{k-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s \sum_{k=0}^{n-s} \binom{n-s}{k} B_{n-k-s} y^k = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s B_{n-s}(y),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 9. (Формула Ньютона для многочленов Бернулли). *Пусть*

$$f(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + \cdots + a_n B_n(x), g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0,$$

многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} B_k(y).$$

2.6. Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам

В теории чисел формула Эйлера – Маклорена часто применяется для дважды непрерывно дифференцируемых функций (формула Н.Я.Сонина).

Теорема 10. (Формула Эйлера-Маклорена суммирования значений функции по целым точкам). *Пусть $m, n \geq 1$ — натуральные числа,a, b — вещественные числа, и пусть $f^{(m)}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ (или является функцией ограниченной вариации). Тогда имеем*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{B_k(\{x\})}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m,$$

где

$$R_m = (-1)^{m+1} \int\limits_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx.$$

Доказательство. Индукция по m. При $m = 1$ вывод формулы (см., например, [14], гл. VIII, §2, с.205-206) использует формулу Ньютона–Лейбница. Действительно, следует доказать, что

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{B_1(\{x\})}{1!} f^{(0)}(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \frac{B_1(\{x\})}{1!} f'(x)\,dx.$$

Положим

$$F(y) = \sum_{a<n\leq y} f(n) + B_1(\{y\})f(y), B_1(y) = y - \frac{1}{2}; G(y) = \int\limits_a^y \frac{B_1(\{x\})}{1!} f'(x)\,dx + B_1(\{a\})f(a).$$

Функции $F(y)$ и $G(y)$ являются непрерывными на $[a, b]$, поскольку "скачок" суммы в $F(y)$ при переходе через целую точку гасится скачком функции $B_1(\{y\})f(y)$ в этой точке. В нецелых точках производные функций $F(y)$ и $G(y)$ равны. Наконец, $F(a) = G(a) = B_1(\{a\})f(a)$. Следовательно, функции $F(x)$ и $G(x)$, как первообразные от одной и той же функции, совпадают на всём отрезке $[a, b]$. Тем самым в случае $m = 1$ утверждение теоремы доказано. Предположим, что утверждение теоремы верно при $m = s$. Докажем его при $m = s + 1$. Преобразуем R_s. Интегрируя по частям, находим

$$(-1)^{s+1} R_s = \int\limits_a^b \frac{B_s(\{x\})}{s!} f^{(s)}(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{f^{(s)}(x)}{s!} d\left(\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du\right) =$$

$$= \frac{f^{(s)}(x)}{s!} \int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du\Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{f^{(s+1)}(x)}{s!} \left(\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du\right) dx.$$

Поскольку

$$B_s(\{u\}) = \frac{B'_{s+1}(\{u\})}{s+1},$$

получим

$$\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du = \int\limits_0^x \frac{B_{s+1}(\{u\})}{s+1}\,du = \frac{B_{s+1}(\{x\})}{s+1} - \frac{B_{s+1}(0)}{s+1}.$$

Следовательно,

$$(-1)^{s+1}R_s = \frac{B_{s+1}(\{x\})}{(s+1)!}f^{(s)}(x)\Big|_a^b - R_{s+1}, \quad R_{s+1} = \int\limits_a^b \frac{B_{s+1}(\{x\})}{(s+1)!}f^{(s+1)}(x)\,dx,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Заметим, что для любых целых a и b и при $m \geq 1$ формулу Эйлера–Маклорена можно представить в виде

$$\frac{1}{2}f(a) + \sum_{n=a+1}^{b-1} f(n) + \frac{1}{2}f(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_{2m},$$

где

$$R_{2m} = -\int\limits_a^b \frac{B_{2m}(\{x\})}{(2m)!}f^{(2m)}(x)\,dx,$$

так как $B_k(\{a\}) = B_k(\{b\}) = B_k(0) = B_k$.

При любых целых a и b из предыдущей теоремы следует формула Эйлера суммирования значений гладкой функции

$$\frac{1}{2}f(a) + \sum_{n=a+1}^{b-1} f(n) + \frac{1}{2}f(b) = \int\limits_a^b (f(x) + B_1(\{x\})f'(x))\,dx.$$

Отметим ещё один интересный случай, когда числа a и b — любые полуцелые. Тогда формула Эйлера-Маклорена приобретает вид

$$\sum_{a<n<b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}(1/2)}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_{2m},$$

с той же функцией R_{2m}, что и в предыдущей формуле, причём

$$B_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right)B_{2k}, k \geq 1.$$

При полуцелых a и b также справедлива следующая формула Эйлера

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int\limits_a^b (f(x) + B_1(\{x\})f'(x))\,dx.$$

Последняя формула используется для вывода формулы Пуассона суммирования значений гладкой функции по целым точкам.

2.7. Формула Пуассона суммирования значений гладкой функции по целым точкам

В начале отметим, что подобная формула имеет место и для функций с ограниченным изменением.

Теорема 11. Формула Пуассона. *Пусть числа a и b — полуцелые, функция $f(x)$ имеет непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, причём для любого x из $[a,b]$ имеем $|f'(x)| \le C$. Тогда при любом натуральном M справедлива формула*

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \sum_{m=-M}^{M} \int_a^b f(x)e^{2\pi imx}\,dx + R_M,$$

где

$$R_M \le \frac{8C(b-a)(\ln M+1)}{M}.$$

Доказательство см., например, в [14], с.442, теорема 3.

3. Последовательность биномиального типа

Далее дадим обобщение формулы бинома Ньютона.

Последовательность многочленов $p_n(x), \deg(p_n(x)) = n, \quad n \ge 0$, со старшим коэффициентом, равным 1, и удовлетворяющих последовательности тождеств

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y)(n \ge 0)p_0(x) = 1, p_s(0) = 0(s \ge 1),$$

называют последовательностью биномиального типа. По существу, эти тождества представляют обобщение формулы бинома Ньютона.

Теорема 12. (Формула бинома для многочленов биномиального типа). *Пусть задана последовательность многочленов биномиального типа $p_n(x), n \ge 0, p_0(x) \equiv 1$, над некоторым полем $\mathbf{F}$. При любом $n \ge 1$ имеем $p_n(0) = 1$. Тогда для любого многочлена $f(x)$ степени n,*

$$f(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + \cdots + a_np_n(x), a_n \ne 0,$$

и для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ справедливо тождество

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^k f(x)}{k!} p_k(y),$$

где $Q^k f(x) = Q\left(Q^{k-1}f(x)\right)$ — k-я итерация линейного оператора Q многочлена $f(x)$ с условиями

$$Q(p_n(x)) = np_{n-1}(x), \quad Qp_0(x) = 0, \quad Q^0p_n(x) = p_n(x), \quad p_n(0) = 0(n \ge 1).$$

Доказательство. Индукция по n. При $n = 0$ утверждение теоремы очевидно. Предположим утверждение теоремы верно при $n = m$. Докажем справедливость его при $n = m+1$. Имеем

$$f(x) = g(x) + a_{m+1}p_{m+1}(x), g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_kp_k(x).$$

По предположению индукции получим

$$g(x+y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}g(x)}{k!} p_k(y),$$

а по формуле бинома Ньютона для последовательности многочленов биномиального типа находим

$$a_{m+1}p_{m+1}(x+y) = a_{m+1}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}p_{m+1-k}(x)p_k(y) = \sum_{k=0}^{m+1}\frac{Q^k(a_{m+1}p_{m+1}(x)}{k!}p_k(y).$$

Так как $Q^{m+1}g(x) = 0$, поскольку $Qp_0(x) = 0$, то отсюда имеем

$$f(x+y) = g(x+y) + a_{m+1}p_{m+1}(x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{Q^k\left(g(x) + a_{m+1}p_{m+1}(x)\right)}{k!}p_k(y) + \frac{Q^{m+1}f(x)}{(m+1)!}p_{m+1}(y) = \sum_{k=0}^{m+1}\frac{Q^k f(x)}{k!}p_k(y).$$

Теорема доказана.

4. Нижние и верхние факториальные многочлены

Нижние (убывающие) факториальные степени

$$x_{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1), \quad x_{(0)} = 1, n \geq 0,$$

подсчитывают число взаимно-однозначных функций из множества, состоящего из n различных элементов во множество из x различных элементов. Другими словами, из x различных элементов подсчитывается число перестановок n элементов, а именно перестановки образуются так: первый из x различных элементов можно выбрать x способами, выбор второго элемента потребует $x-1$ способов, и так до выбора n элемента, что можно произвести $x-n+1$ способами. Отсюда получаем формулу для $x_{(n)}$. Заметим, что в каждом сочетании из x по n с заданными n элементами будет содержатся $n!$ перестановок. Таким образом, находим

$$n!\binom{x}{n} = x_{(n)}, \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{x!}{n!(x-n)!}.$$

Докажем формулу бинома для нижних факториалов.

Теорема 13. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$(x+y)_{(n)} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x_{(m)}y_{(n-m)}.$$

Доказательство. Очевидно, имеем $x_{(n)} = (x-n+1)x_{(n-1)}$. Индукция по n. При $n = 0$ утверждение теоремы справедливо. Предположим, что оно имеет место при $n = m$. Докажем его при $n = m+1$. Используя предположение индукции, находим

$$(x+y)_{(m+1)} = (x+y-m)(x+y)_{(m)} = (x+y-m)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{(k)}y_{(m-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(x-k)x_{(k)}y_{(m-k)} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{(k)}(y-m+k)y_{(m-k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}x_{(k)}y_{(m-k+1)} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{(k)}y_{(m-k+1)} =$$

$$= \binom{m}{m} x_{(m+1)} y_{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) x_{(k)} y_{(m-k+1)} + \binom{m}{0} x_{(0)} y_{(m+1)} =$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x_{(k)} y_{(m-k+1)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 14. (Формула бинома для нижних факториалов). *Пусть* $n \geq 0, f(x) = a_0 x_{(0)} + a_1 x_{(1)} + \cdots + a_n x_{(n)}, a_n \neq 0,$ *— многочлен степени* n *над некоторым полем* $\mathbf{F}$. *Тогда для любых чисел* x *и* y *из* $\mathbf{F}$ *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(x)}{k!} y_{(k)},$$

где $\Delta^k f(x) = \Delta\left(\Delta^{k-1} f(x)\right)$ *— k-я убывающая конечная разность многочлена* $f(x)$, *причём*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \Delta^0 f(x) = f(x).$$

Пусть теперь поле $\mathbf{F}$ является полем вещественных чисел. Тогда справедлива следующая формула Тейлора для нижних факториалов с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 15. *Пусть существует* $f^{(n+1)}(x)$ *на отрезке* $[a, b]$. *Тогда для любых чисел* x *из* $[a, b]$ *и любых* $0 < y < 1$ *справедливо тождество*

$$f(x+y) = P(x; y; n) + R(x; y; n),$$

где

$$P(x; y; n) = P(x; y; n; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^{(k)} f(x)}{k!} y_{(k)},$$

где $\Delta^{(k)} f(x) = \Delta\left(\Delta^{(k-1)} f(x)\right)$ *— k-я конечная убывающая разность функции* $f(x), \Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \Delta^{(0)} f(x) = f(x),$

$$R = R(x; y; n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} y_{n+1},$$

причём c *— некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами* x *и* $x + y$.

Доказательство. Сначала докажем, что в точках $y = 0, 1, \ldots, n$ разность $f(x+y) - P(x; y; n)$ обращается в нуль. Индукция по n. Очевидно, утверждение справедливо при $n = 0$. Предположим оно имеет место при параметре $n = m$. Докажем его при $n = m + 1$, т.е. справедлива формула

$$f(x+m+1) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\Delta^{(k)} f(x)}{k!} (m+1)_k = S.$$

Преобразуем правую часть S этой формулы. Используя предположение индукции, имеем

$$S = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \Delta^{(k)} f(x) = \binom{m+1}{0} \Delta^{(0)} f(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) \Delta^{(k)} f(x) + \binom{m+1}{m+1} \Delta^{(m+1)} f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{(k)} f(x) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{(k+1)} f(x) = f(x+m) + \Delta f(x+m) = f(x+m+1).$$

Рассмотрим далее вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \varphi(x;t;n) = f(x+t) - P(x;t;n) - Ht_{(n+1)}.$$

Имеем

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \dots = \varphi(n) = 0.$$

Найдём параметр H из условия $\varphi(y) = 0$. Далее, по теореме Ролля из условия, что функция $\varphi(t)$ обращается в нуль в $n+2$ различных точках: $0 < y < 1 < \dots < n$, получим, что найдутся $n+1$ различных $c_1, \dots, c_{n+1}$ точек таких, что

$$\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = \varphi'(c_{n+1}) = 0.$$

Повторяя это рассуждение $n+1$ раз, находим, что существует точка c^* такая, что

$$\varphi^{(n+1)}(c^*) = 0,$$

т.е.

$$f(x+c^*) - (n+1)!H = 0.$$

Положим $c = x + c^*$. Имеем $H = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$. Теорема доказана.

Подобным образом, верхние (возрастающие) факториальные степени

$$x^{(n)} = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad n \geq 1, x^{(0)} = 1,$$

подсчитывают число различных способов размещения n различных шаров в x различных ячеек, когда выбран линейный порядок шаров внутри каждой ячейки и нет ограничений на число шаров в любой из них. Искомое количество $x^{(n)}$ получается размещением сначала n одинаковых шаров в x различных ячеек, т.е. число решений в неотрицательных целых $n_1, \dots, n_x$ уравнения $n_1 + \dots + n_x = n$, а затем для каждого размещения, предполагая, что шары различные, найдем, что их можно переставить $n!$ способами. Таким образом, учитывая, что число решений уравнения равно $\binom{x+n-1}{n}$, получим

$$x^{(n)} = n! \binom{x+n-1}{n}.$$

Докажем, что последовательность верхних (возрастающих) факториалов является последовательностью биномиального типа.

Теорема 16. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{(m)} y^{(n-m)}.$$

Доказательство. Определим оператор $\nabla x^{(n)} = x^{(n)} - (x-1)^{(n)}$. Имеем $\nabla x^{(n)} = nx^{(n-1)}$, $n \geq 1$.

Докажем утверждение теоремы индукцией по n. При $n = 0$ оно справедливо. Предположим, что утверждение имеет место при $n = m$. Докажем его при $n = m+1$. Используя предположение индукции и предыдущее равенство, находим

$$\nabla(x+y-s)^{(m+1)} = (m+1)(x+y-s)^{(m)} = (m+1) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-s)^{(k)} y^{(m-k)}, \quad 0 \leq s \leq x.$$

Суммируя эти равенства по s от 0 до x, получим

$$(x+y)^{(m+1)} - y^{(m+1)} = \sum_{s=0}^{x}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m+1)(x-s)^{(k)}y^{(m-k)}.$$

Поскольку

$$\sum_{s=0}^{x}(x-s)^{(k)} = \frac{x^{(k+1)}}{k+1},$$

имеем

$$(x+y)^{(m+1)} - y^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m+1)\left(\sum_{s=0}^{x}(x-s)^{(k)}\right)y^{(m-k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}x^{(k)}y^{(m-k+1)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 17. (Формула бинома для верхних факториалов). *Пусть $n \geq 0$, $f(x) = a_0x^{(0)} + a_1x^{(1)} + \cdots + a_nx^{(n)}, a_n \neq 0$, — многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\nabla^k f(x)}{k!}y^{(k)},$$

где $\nabla^k f(x) = \nabla\left(\nabla^{k-1}f(x)\right)$ — k-я разность противоположного сдвига многочлена $f(x)$, причём

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1), \quad \nabla x^{(0)} = 0, \quad \nabla^0 f(x) = f(x).$$

Теорема 18. *Пусть существует $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда для любых чисел x из $[a,b]$ и любых $y \in [0,1]$ справедливо тождество*

$$f(x+y) = P(x;y;n) + R(x;y;n),$$

где

$$P(x;y;n) = P(x;y;n;f) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\nabla^k f(x)}{k!}y^{(k)},$$

где $\nabla^k f(x) = \nabla\left(\nabla^{k-1}f(x)\right)$ — k-я конечная возрастающая разность функции $f(x), \nabla f(x) = f(x) - f(x-1), \nabla^{(0)}f(x) = f(x)$,

$$R = R(x;y;n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}y^{(n+1)},$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x+y$.

5. Последовательность многочленов Абеля

В том же духе можно рассмотреть многочлены Абеля

$$A_n(x) = A_n(x;a) = x(x-an)^{n-1}, \quad 0 \leq n < x/a.$$

Далее находим вероятность того, что при случайном бросании дуги окружности длины a на дугу той же окружности длины x при $n < x/a$ испытаниях, любые две дуги длины a не пересекаются. Эта вероятность равна

$$\frac{A_n(x;a)}{x^n} = \frac{x(x-an)^{n-1}}{x^n}.$$

Теорема 19. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$A_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A_m(x) A_{n-m}(y).$$

Доказательство. Без ограничения общности теорему достаточно доказать при $a = 1$. Воспользуемся производной степенной функции

$$(A_n(x))' = (x-n)^{n-1} + (n-1)x(x-n)^{n-2} = nA_{n-1}(x-1).$$

Индукция по n. При $n = 0$ теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n = m$. Докажем утверждение теоремы при $n = m+1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{dA_{m+1}(x+y)}{dx} = (m+1)A_m(x+y-1) = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A_k(x-1)A_{m-k}(y).$$

Проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$A_{m+1}(x+y) = (x+y)(x+y-m)^m = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A_{m-k}(y) \left(\int A_k(x-1)\,dx\right) + C(y).$$

Далее при $k \geq 1$ вычислим интеграл

$$\int A_k(x-1)\,dx = \int \frac{x-1}{k} d(x-k-1)^k = \frac{(x-1)(x-k-1)^k}{k} - \frac{1}{k}\int (x-k-1)^k\,dx =$$

$$= \frac{x(x-k-1)^k}{k+1} = \frac{A_{k+1}(x)}{k+1}.$$

Следовательно

$$A_{m+1}(x+y) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} A_k(x)A_{m+1-k}(y) + C(y).$$

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = A_{m+1}(y) = \binom{m+1}{0} A_0(x)A_{m+1}(y).$$

Следовательно, справедливо искомое равенство для разложения многочлена Абеля как многочлена биномиального типа.

Теорема 20. (Формула бинома для многочленов Абеля). *Пусть $n \geq 0$, $f(x) = a_0A_0(x) + a_1A_1(x) + \cdots + a_nA_n(x), a_n \neq 0$, — многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(DE)^k f(x)}{k!} A_k(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x+k)}{k!} A_k(y),$$

где $(DE)^k f(x) = DE\left((DE)^{k-1}f(x)\right)$ — k-я итерация композиции операторов сдвига и дифференцирования многочлена $f(x)$, причём

$$DE(A_n(x)) = (A_n(x+1))' = nA_{n-1}(x), \quad (DE)^0 A_n(x) = A_n(x).$$

Теорема 21. *Пусть существует $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда для любых чисел x из $[a,b]$ и любых $y \in [0,1]$ справедливо тождество*

$$f(x+y) = P(x;y;n) + R(x;y;n),$$

где

$$P(x;y;n) = P(x;y;n;f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(DE)^k f(x)}{k!} A_k(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x+k)}{k!} A_k(y),$$

где $(DE)^k f(x) = DE\left((DE)^{k-1} f(x)\right)$ — k-я степень линейного оператора DE, применённого к функции $f(x), DE(f(x)) = f'(x+1), DE^{(0)} f(x) = f(x)$,

$$R = R(x;y;n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} A_{n+1}(y),$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x+y$.

6. Последовательность многочленов Лагерра

Приведём ещё один важный пример последовательности биномиального типа — это последовательность многочленов Лагерра

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} (-x)^k$$

Теорема 22. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$L_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} L_m(x) L_{n-m}(y).$$

Доказательство. Имеем классическое рекуррентное равенство для многочлена Лагерра

$$(L_n(x))' = n(L_{n-1}(x))' - n(L_{n-1}(x)).$$

Индукция по n. При $n = 0$ Теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n = m$. Докажем утверждение теоремы при $n = m+1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{dL_{m+1}(x+y)}{dx} = (m+1)\frac{L_m(x+y)}{dx} - (m+1)L_m(x+y) =$$

$$= (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} L_k'(x) L_{m-k}(y) - (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} L_k(x) L_{m-k}(y).$$

Проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$L_{m+1}(x+y) = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} L_k(x) L_{m-k}(y) - (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\int L_k(x)\,dx\right) L_{m-k}(y) + C(y).$$

При $k \geq 1$ вычислим разность

$$L_k(x) - \int L_k(x)\,dx = \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \frac{k!}{s!} \binom{k-1}{s-1} x^s - \sum_{s=2}^{k+1} (-1)^{s-1} \frac{k!}{(s-1)!} \binom{k-1}{s-2} \frac{x^s}{s} =$$

$$= \sum_{s=2}^{k}(-1)^s\frac{k!}{s!}\left(\binom{k-1}{s-1}+\binom{k-1}{s-1}\right)x^s - k!x - (-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^s\frac{k!}{s!}\binom{k}{s-1}x^s = \frac{L_{k+1}(x)}{k+1}.$$

Следовательно

$$L_{m+1}(x+y) = (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L_{m-k}(y)\frac{L_{k+1}(x)}{k+1} + C(y).$$

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = L_{m+1}(y) = \binom{m+1}{0}L_0(x)L_{m+1}(y).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$L_{m+1}(x+y) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{m+1}{k+1}L_{m-k}(y)L_{k+1}(x) + \binom{m+1}{0}L_0(x)L_{m+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}L_{m-k+1}(y)L_k(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 23. (Формула бинома для многочленов Лагерра). *Пусть $n \geq 0$, $f(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + \dots + a_nL_n(x), a_n \neq 0$, — многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{L^kf(x)}{k!}L_k(y),$$

где $(L^kf(x) = L\left(L^{k-1}f(x)\right)$ — k-я итерация оператора Лагерра многочлена $f(x)$, причём

$$L(L_n(x)) = (nL_{n-1}(x) - L_n(x))' = nL_{n-1}(x), \quad L^0L_n(x) = L_n(x).$$

7. Последовательности многочленов Аппеля и Эйлера

Пусть задана некоторая последовательность $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ элементов из поля $\mathbf{F}$. Определим многочлены Аппеля $A_n(x)$ формулой

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kx^{n-k}, n \geq 0.$$

Имеем $A_n'(x) = nA_{n-1}(x), n \geq 1$.

Теорема 24. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$A_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^mA_{n-m}(y) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(A_n(y))^{(m)}}{m!}x^m.$$

Доказательство. По определению и формуле бинома Ньютона имеем

$$A_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}(x+y)^k=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\binom{n}{k}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}x^sy^{k-s}=$$

$$=\sum_{s=0}^{n}x^s\sum_{k=s}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{s}a_{n-k}y^{k-s}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s\binom{n-s}{k}a_{n-k-s}y^k=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^sA_{n-s}(y)=$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!}A_{n-s}(y)x^s=\sum_{s=0}^{n}\frac{(A_n(y))^{(s)}}{s!}x^s.$$

что и требовалось доказать.

Теорема 25. (Формула бинома для многочленов Аппеля). *Пусть*

$$f(x)=b_0A_0(x)+b_1A_1(x)+\dots+b_nA_n(x), g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n, b_n\neq 0,$$

многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем

$$f(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}A_k(y).$$

К классу многочленов Аппеля принадлежат многочлены Л.Эйлера

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{E_k}{2^k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k,$$

где $E_k, k\geq 0$ — числа Эйлера, причём $E_0=1, E_{2k+1}=0$ при $k\geq 0$, и

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}E_{2k}=0, m\geq 1,$$

поскольку эти многочлены удовлетворяют уравнению

$$E_n'(x)=nE_{n-1}(x), n\geq 0.$$

Отметим, также, что

$$\frac{1}{\cos x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kE_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

и производящая функция для многочленов Эйлера имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_k(x)}{k!}t^k=\frac{2e^{xt}}{e^t+1}$$

Теорема 26. *Пусть $n\geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$E_n(x+y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^mE_{n-m}(y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(E_n(y))^{(m)}}{m!}x^m.$$

Теорема 27. (Формула бинома для многочленов Эйлера). *Пусть*

$$f(x)=b_0E_0(x)+b_1E_1(x)+\dots+b_nE_n(x), g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n, b_n\neq 0,$$

многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем

$$f(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}E_k(y).$$

8. Многочлены от нескольких переменных

Первым обобщением бинома является полином Ньютона.

Теорема 28. (Формула полинома Ньютона). *Пусть $n \geq 0, r \geq 1$ — натуральные числа. Тогда для любых чисел $x_1, \ldots, x_r$ имеем*

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\cdots+m_r=n}}^{n} \cdots \sum_{m_r}^{n} \frac{n!}{m_1! \ldots m_r!} x_1^{m_1} \ldots {x_r}^{m_r}.$$

Доказательство. При $r = 1$ формула очевидно верна. Предположим, что она справедлива для $r-1$ переменных. Докажем её для r переменных. Положим $x = x_1 + \cdots + x_{r-1}$. По формуле бинома Ньютона (теорема 1) находим

$$(x + x_r)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m {x_r}^{n-m}.$$

Далее по предположению индукции имеем

$$x^m = (x_1 + \cdots + x_{r-1})^m = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\cdots+m_{r-1}=m}}^{m} \cdots \sum_{m_{r-1}=0}^{m} \frac{m!}{m_1! \ldots m_{r-1}!} x_1^{m_1} \ldots {x_{r-1}}^{m_{r-1}}.$$

Отсюда получим

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x_r^{n-m} \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\cdots+m_{r-1}=m}}^{m} \cdots \sum_{m_{r-1}}^{m} \frac{m!}{m_1! \ldots m_{r-1}!} x_1^{m_1} \ldots {x_{r-1}}^{m_{r-1}},$$

что и даёт искомое равенство.

Теорема 29. (Формула Тейлора для многочленов от нескольких переменных). *Пусть $n \geq 0, r \geq 1$ — целые числа, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$,*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\cdots+t_r \leq n}}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} a(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r},$$

многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеем

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_{\mathbf{y}}^{(k)} f(\mathbf{x}),$$

где $D_{\mathbf{y}}^{(k)} f(\mathbf{x}) = D\left(D_{\mathbf{y}}^{(k-1)} f(\mathbf{x})\right)$ — k-й дифференциал многочлена $f(\mathbf{x})$, причём

$$D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_s} y_s, \quad D_{\mathbf{y}}^{(0)} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Заметим, что

$$D_{\mathbf{y}}^{(k)} f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\cdots+k_r=k}}^{n} \cdots \sum_{k_r=0}^{n} \frac{k!}{k_1! \ldots k_r!} \frac{\partial f^{(k)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}} y_1^{k_1} \ldots y_r^{k_r}.$$

Доказательство. При $r = 1$ формула очевидно верна (теорема 2). Предположим, что она справедлива для $r-1$ переменных. Докажем её для r переменных. Положим $\mathbf{x}^{(r-1)} = (x_1, \ldots, x_{r-1}), \mathbf{y}^{(r-1)} = (y_1, \ldots, y_{r-1})$. По формуле Тейлора (теорема 2) находим

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g(x_r + y_r) = \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}(x_r)}{m!} y_r^m.$$

Далее по предположению индукции имеем

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = h(\mathbf{x}^{(r-1)} + \mathbf{y}^{(r-1)}) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{k!} D^{(k)}_{\mathbf{y}^{(r-1)}} h(\mathbf{x}^{(r-1)}).$$

Отсюда получим

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{n-m} \frac{1}{s!} D^{s}_{\mathbf{y}^{(r-1)}} \left(\frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_r^m} y_r^m \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^{(k)}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}).$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 30. *Пусть существует $D^{(n+1)} f(\mathbf{x})$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$. Тогда для любых точки $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ из этой окрестности найдётся такая точка $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \theta \mathbf{h}$, $0 < \theta < 1$, что справедлива формула*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = P_n(\mathbf{a};\mathbf{h}) + R_n(\mathbf{a};\mathbf{h}),$$

где

$$P_n(\mathbf{a};\mathbf{h}) = P_n(\mathbf{a};\mathbf{h};f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(k)}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a})}{k!},$$

где $D^{(k)}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{y}} \left(D^{(k-1)}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) \right)$ — k-й дифференциал функции $f(\mathbf{x})$, отвечающий приращению аргумента $\mathbf{y}$,

$$R_n = R_n(\mathbf{a};\mathbf{h}) = \frac{D^{(n+1)}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{c})}{(n+1)!}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_n(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}), 0 \le t \le 1.$$

Тогда по формуле Тейлора (теорема 3) существует постоянная θ такая, что имеем равенство

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Так как

$$\varphi(0) = f(\mathbf{a}), \varphi'(0) = D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a}), \ldots, \varphi^{(n)}(0) = D^{(n)}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a}), \varphi^{(n+1)}(\theta) = D^{(n+1)}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{c}), \mathbf{c} = \mathbf{a} + \theta \mathbf{h},$$

то подставляя эти выражения в предыдущую формулу получим утверждение теоремы.

9. Формулы суммирования для функций от нескольких переменных

Докажем многомерный аналог формулы Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым точкам.

Теорема 31. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ *— векторы с полуцелыми координатами,* $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ *— вектор с вещественными координатами, и пусть* $\frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}}$ *непрерывны в параллелепипеде* $a_k \le x_k \le b_k, 1 \le k \le r$, *по всем наборам* $1 \le j_1 \le \cdots \le j_s \le r, 1 \le s \le r$. *Тогда имеем*

$$\sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r} 1 \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Доказательство. Индукция по r. При $r = 1$ имеем

$$\sum_{a<n<b} f(n) = \int_a^b (f(x) - \rho(x) f'(x))\, dx, \rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = -B_1(\{x\}),$$

что является формулой Эйлера – Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым точкам. Это и доказывает теорему при $r = 1$.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $r = q$, т.е. имеет место формула

$$\sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_q<n_q<b_q} f(n_1, \ldots, n_q) = \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} 1 \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q.$$

Докажем теорему при $r = q + 1$. Воспользуемся сначала предположением индукции, а затем формулой Эйлера суммирования значений гладкой функции по целым точкам. Получим

$$\sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_q<n_q<b_q} \sum_{a_{q+1}<n_{q+1}<b_{q+1}} f(n_1, \ldots, n_q, n_{q+1}) = \sum_{a_{q+1}<n_{q+1}<b_{q+1}} \left(\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} 1 \times \right.$$

$$\left. \times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q \right) =$$

$$= \int_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \left(\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q \right) dx_{q+1} -$$

$$- \int_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \rho(x_{q+1}) \left(\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^{s+1} f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s} \partial x_{q+1}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q \right) dx_{q+1} =$$

$$= \sum_{s=0}^{q+1}(-1)^s \sum_{1\le j_1<\dots<j_s\le q+1} \int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}}\rho(x_{j_1})\dots\rho(x_{j_s})\,dx_1\dots dx_{q+1}.$$

Теорема доказана.

Следствием многомерной формулы Эйлера-Маклорена является многомерная формула Пуассона суммирования значений гладкой функции.

Теорема 32. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_r), \mathbf{b} = (b_1,\dots,b_r)$ *— векторы с полуцелыми координатами,* $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_r)$ *— вектор с вещественными координатами, и пусть* $\frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}}$ *непрерывны в параллелепипеде* $a_k \le x_k \le b_k, 1 \le k \le r$, *по всем наборам* $1 \le j_1 \le \dots \le j_s \le r, 1 \le s \le r$, *причём найдётся постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\left|\frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}}\right| \le C$$

для всех наборов $1 \le j_1 \le \dots \le j_s \le r, 1 \le s \le r$.

Тогда при любых натуральных $1 \le M_1 \le \dots \le M_r$ *имеем*

$$\sum_{a_1<n_1<b_1}\dots\sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1,\dots,n_r) = \sum_{m_1=-M_1}^{M_1}\dots\sum_{m_r=-M_r}^{M_r} 1\times$$

$$\times\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_r}^{b_r} f(x_1,\dots x_r)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_rx_r)}\,dx_1\dots dx_r + R(M_1,\dots,M_r),$$

где

$$R(M_1,\dots,M_r) \le 8\cdot 3^r C(b_1-a_1)\dots(b_r-a_r)\frac{(\ln M_1+1)\dots(\ln M_r+1)}{M_1}.$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы имеем

$$S_r = \sum_{a_1<n_1<b_1}\dots\sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1,\dots,n_r) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s \sum_{1\le j_1<\dots<j_s\le r} 1\times$$

$$\times\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}}\rho(x_{j_1})\dots\rho(x_{j_s})\,dx_1\dots dx_r.$$

Представим $\rho(x)$ при $n \ge 1$ в виде

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = s_n(x) + \sigma_n(x), s_n(x) = \sum_{k\le n}\frac{\sin 2\pi kx}{\pi k},$$

где $\sigma_n(x) \le \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi x}}$.

Тогда

$$S_r = \sum_{a_1<n_1<b_1}\dots\sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1,\dots,n_r) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s \sum_{1\le j_1<\dots<j_s\le r} 1\times$$

$$\times\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}}(s_{M_{j_1}}(x_{j_1})+\sigma_{M_{j_1}}(x_{j_1}))\dots(s_{M_{j_s}}(x_{j_1})+\sigma_{M_{j_s}}(x_{j_1}))\,dx_1\dots dx_r.$$

Раскрывая скобки, находим $S_r = S(M_1, \ldots, M_r) + \Sigma(M_1, \ldots, M_r)$, где

$$S(M_1, \ldots, M_r) = \sum_{a_1 < n_1 < b_1} \cdots \sum_{a_r < n_r < b_r} f(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r} 1 \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} s_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \ldots s_{M_{j_s}}(x_{j_1})\, dx_1 \ldots dx_r,$$

сумма $\Sigma(M_1, \ldots, M_r)$ подобна ей, но в ней заменяется в каждом слагаемом по $1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r$ хотя бы один сомножитель $s_{M_{j_t}}(x_{j_t})$ на $\sigma_{M_t}(x_{j_t})$.

В сумме $S(M_1, \ldots, M_r)$ каждый интеграл интегрируем по частям. Используя $s_M(a) = s_M(b) = 0$, находим

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} s_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \ldots s_{M_{j_s}}(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_r =$$

$$= (-1)^s \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} f(x_1, \ldots, x_r) s'_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \ldots s'_{M_{j_s}}(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_r =$$

$$= (-1)^s \sum_{m_{j_1} = -M_{j_1}}^{M_{j_1}} \cdots \sum_{m_{j_s} = -M_{j_s}}^{M_{j_1}} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} f(x_1, \ldots, x_r) e^{2\pi i (m_{j_1} x_{j_1} + \cdots + m_{j_s} x_{j_s})}\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Суммируя по s, получим

$$S(M_1, \ldots, M_r) = \sum_{m_1 = -M_1}^{M_1} \cdots \sum_{m_r = -M_r}^{M_r} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} f(x_1, \ldots x_r) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \cdots + m_r x_r)}\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Оценим сверху $|\Sigma(M_1, \ldots, M_r)|$. Воспользуемся при полуцелых a и b следующими оценками

$$s_M = \int_a^b |s_M(x)\, dx| \le (b-a)(\ln M + 1), \sigma_M = \int_a^b |\sigma_M(x)|\, dx \le 8(b-a) \frac{\ln M + 1}{M}.$$

Находим

$$|\Sigma(M_1, \ldots, M_r)| \le \sum_{s=1}^{r} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r} 8C(b_1 - a_1) \ldots (b_r - a_r) \frac{\ln(M_{j_1} + 1) \ldots \ln(M_{j_s} + 1)}{M_1} \le$$

$$\le \frac{8C}{M_1} \prod_{t=1}^{r} (b_t - a_t)(\ln(M_t + 1)) \sum_{s=1}^{r} 2^s \binom{r}{s} \le \frac{8 \cdot 3^r C}{M_1} \prod_{t=1}^{r} (b_t - a_t)(\ln(M_t + 1)).$$

Теорема доказана.

10. Формула Пуассона суммирования для функций от комплексных переменных

На комплексной плоскости $\mathbf{C}$ зададим область

$$D = D(a,b,c,d) = \{z \in \mathbf{C} \mid a < \operatorname{Re} z < b, c < \operatorname{Im} z < d\},$$

где a, b, c, d — полуцелые вещественные числа.

Теорема 33. *Пусть* $z = x + iy$,

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x}, \frac{\partial f(z)}{\partial y}, \frac{\partial^2 f(z)}{\partial x \partial y},$$

непрерывны в области $D = D(a,b,c,d)$, *причём найдётся постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial x}\right| \le C, \left|\frac{\partial f(z)}{\partial y}\right| \le C, \left|\frac{\partial^2 f(z)}{\partial x \partial y}\right| \le C.$$

Тогда, суммируя по целым гауссовым числам z, *при любых натуральных* $1 \le M, N, \Lambda = \min\{M, N\}$, *имеем*

$$\sum_{a<\operatorname{Re} z<b} \sum_{c<\operatorname{Im} z<d} f(z) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \iint_D f(z) e^{2\pi i \operatorname{Re}(\overline{\mu} z)}\, dxdy + R(M,N),$$

где $\mu = m + in$ — *целое гауссово число,*

$$R(M,N) \le 72C(b-a)(d-c)\frac{(\ln M + 1)(\ln N + 1)}{\Lambda}.$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и формулы Пуассона для функций от вещественных переменных.

Для дальнейшего зададим область

$$D = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^r \mid a_\nu < \operatorname{Re} z_\nu < b_\nu, c_n u < \operatorname{Im} z_\nu < d_\nu\},$$

где $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ — полуцелые вещественные числа.

Теорема 34. *Пусть* $z_\nu = x_\nu + iy_\nu, 1 \le \nu \le r$,

$$\frac{\partial^{s+t} f(\mathbf{z})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s} \partial y_{k_1} \dots \partial y_{k_t}}$$

непрерывны в области D *по всем наборам* $1 \le j_1 \le \dots \le j_s \le r, 1 \le k_1 \le \dots \le k_t \le r, 1 \le s, t \le r$, *причём найдётся постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\left|\frac{\partial^{s+t} f(\mathbf{z})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s} \partial y_{k_1} \dots \partial y_{k_t}}\right| \le C$$

для всех наборов $1 \le j_1 \le \dots \le j_s \le r, 1 \le k_1 \le \dots \le k_t \le r, 1 \le s, t \le r$.

Тогда, суммируя по целым гауссовым числам $z_1, \dots, z_r$, *при любых натуральных* $1 \le M_1, N_1, \dots, M_r, N_r, \Lambda = \min\{M_1, N_1, \dots, M_r, N_r\}$, *имеем*

$$\sum_{a_1<\operatorname{Re} z_1<b_1} \sum_{c_1<\operatorname{Im} z_1<d_1} \dots \sum_{a_r<\operatorname{Re} z_r<b_r} \sum_{c_r<\operatorname{Im} z_r<d_r} f(z_1, \dots, z_r) = \sum_{m_1=-M_1}^{M_1} \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \dots \sum_{m_r=-M_r}^{M_r} \sum_{n_r=-N_r}^{N_r} 1 \times$$

$$\times \int\limits_D \cdots \int f(z_1, \dots z_r) e^{2\pi i(\operatorname{Re}\overline{\mu}_1 z_1 + \dots + \overline{\mu}_r z_r)}\, dx_1 dy_1 \dots dx_r dy_r + R(M_1, N_1 \dots, M_r, N_r),$$

где

$$R(M_1, N_1, \dots, M_r, N_r) \le 8 \cdot 3^{2r} \frac{C}{\Lambda} \prod_{s=1}^{r} (b_s - a_s)(d_s - c_s)(\ln M_s + 1)(\ln N_s + 1).$$

Эта теорема является многомерным аналогом предыдущей теоремы.

11. Многочлены биномиального типа от нескольких переменных

Перейдём к обобщению формулы Тейлора для многочленов биномиального типа от нескольких переменных. Приведем формулировку соответствующей теоремы.

Теорема 35. (Формула Ньютона для многочленов биномиального типа от нескольких переменных). *Пусть задана последовательность многочленов биномиального типа* $p_n(x), n \ge 0, p_0(x) \equiv 1$, *над некоторым полем* $\mathbf{F}$. *При любом* $n \ge 1$ *имеем* $p_n(0) = 1$. *Тогда для любого многочлена* $f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, *степени* n,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \le n}}^{n} \cdots \sum_{t_1=0}^{n} a(t_1, \dots, t_r) p_{t_1}(x_1) \dots p_{t_r}(x_r),$$

и для любых чисел x *и* y *из* $\mathbf{F}$ *справедливо тождество*

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_{\mathbf{y}}^k f(\mathbf{x})}{k!},$$

где $Q_{\mathbf{y}}^{(k)} f(\mathbf{x}) = Q_{\mathbf{y}} \left(Q_{\mathbf{y}}^{(k-1)} f(\mathbf{x}) \right)$ *— k-я итерация оператора* $Q_{\mathbf{y}}$ *многочлена* $f(\mathbf{x})$ *с условиями*

$$Q_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{r} \partial_s f(\mathbf{x}) p_1(y_s), \quad Q_{\mathbf{y}}^{(0)} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

$$\partial_s (p_{t_1}(x_1) \dots p_{t_r}(x_r)) = t_s p_{t_s - 1}(x_{t_s}) p_{t_1}(x_1) \dots p_{t_{s-1}}(x_{t_s}) p_{t_{s+1}}(x_{t_s}) \dots p_{t_r}(x_r).$$

12. Заключение

В настоящей статье достаточно подробно изучены интересные свойства классической формулы бинома Ньютона и её многомерных аналогов. Проведён анализ ряда этих свойств для многочленов биномиального типа. Получены многомерные аналоги формул Эйлера – Маклорена и Пуассона суммирования значений гладких функций по решётке. Исследования по дальнейшему изучению этих понятий и свойств предполагается продолжить. Представляется полезным дать их новые приложения ([10]-[18]). В частности, рассмотреть меру Хаара, преобразование Фурье на локально компактных топологических абелевых группах и формулу Пуассона суммирования значений функции по элементам её дискретной подгруппы (диссертация Тейта [19], гл. VII).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pincherle S., Amaldi. Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi (in collborazione U. Amaldi) // Zanichelli, Bologna, 1900.

2. Hurwitz A. Über Abel's Verallgemeinerung der binomischen Formel// Acta Math., 1902, **26,** 199–203.

3. Sheffer I. M. Some properties of polynomials of type zero// Duke Math., 1939, **5,** 590–622.

4. Stefensen J. F. The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power// Acta Math., 1941, **73,** 333–366.

5. Touchard J. Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli// Canad.J.Math., 1956, **8** 305–320.

6. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М: Изд-во ин. лит., 1963.

7. Riordan J. Inverse Relations and Combinatorial Identities// Amer.Math.Monthly, 1964, **71** 485–498.

8. Riordan J. Combinatorial Identities. — New York: Wiley, 1968.

9. Mullin R., Rota G.-C. On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration// Graph Theory and its Applications, 1970, 168–213.

10. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Наука, 1980, 144 с.

11. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.: Наука,1983. 240 с.

12. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y.,Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.

13. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.

14. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.

15. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987, 368 с.

16. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.

17. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР, 1984, **278,** № 2, 302–304.

18. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами// Изв. АН СССР, сер.матем., 1985, **49,** № 5, 1031–1067.

19. Ленг С. Алгебраические числа. — М.: Мир, 1966.

REFERENCES

1. Pincherle S., Amaldi. 1900. “Le operazioni distributive e le loro applicazioni all’analisi (in collborazione U. Amaldi)”, Zanichelli, Bologna.
2. Hurwitz A. 1902. “Uber Abel’s Verallgemeinerung der binomischen Formel” Acta Math., **26,** 199–203.
3. Sheffer I. M. 1939. “Some properties of polynomials of type zero” Duke Math., **5,** 590–622.
4. Stefensen J. F. 1941. “The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power” Acta Math., 1941, **73,** 333–366.
5. Touchard J. 1956. “Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli” Canad.J.Math., **8** 305–320.
6. Riordan J. 1963. “An introduction to combinatorial analysis. — Moscow: Publ.House of a foreign literature.
7. Riordan J. 1964. “Inverse Relations and Combinatorial Identities” Amer.Math.Monthly, **71** 485–498.
8. Riordan J. 1968. “Combinatorial Identities”. — New York: Wiley.
9. Mullin R., Rota G.-C. 1970. “On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration” Graph Theory and its Applications, 168–213.
10. Vinogradov I. M. 1980. “The method of trigonometric sums in the theory of numbers”. 2nd Edition., Moscow.: Nauka. pp. 144.
11. Karatsuba A. A. 1983. “Foundations of analytic number theory”. 2nd Ed. — M.: Nauka, pp. 240 (in Russian).
12. Hua Loo-Keng. 1983. Selected Papers. — N.-Y.,Heidelberg, Berlin, pp.888.
13. Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.
14. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. “Lecture on mathematical analysis”. 4th Ed., corr. — M.: Drofa. pp. 640.
15. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1987. “The theory of multiple trigonometric sums”. — Moscow.: Nauka. 368 c.
16. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. “Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics”, 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.
17. Chubarikov V. N. 1984. “Multiple trigonometric sums with primes” Doklady AN SSSR„ **278,** № 2, 302–304.
18. Chubarikov V. N. 1985. “Estimates of multiple trigonometric sums with primes” Izvestija. AN SSSR, Ser.Matem., **49,** № 5, 1031–1067.
19. Lang S. 1966. “Algebraic numbers”. — M.: Mir.

Получено 04.04.2019 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.